arXiv:2603.01614v1 [math.CA] 2 Mar 2026

$\mathcal{S}$算子的映射性质

HunseokKang[1†], Doowon Koh[2*†], Changhun Yang[2†]1中东美国大学工程与技术学院，科威特埃盖拉，邮编 54200。[2]韩国清州 28644，忠北国立大学数学系。

通讯作者。电子邮箱：koh131@chungbuk.ac.kr；其他作者：hunseok.kang@aum.edu.kw；chyang@chungbuk.ac.kr；

†这些作者对本研究的贡献相同。

摘要

本文研究有限域上球面限制问题中出现的 $\ell^p \to \ell^r$ 估计。我们建立了$\mathcal{S}$算子有界性的充要条件。此外，我们还研究了对测试函数施加某些限制时的问题。特别是，我们讨论了测试函数限制为径向函数时的尖锐结果。

关键词： $\mathcal{S}$ 算子、有限域、有界性

MSC 分类： 42B05 ,43A32, 43A15

1 引言

1.1 有限域限制理论的历史背景

调和分析中的限制猜想最初由 Elias Stein[30] 于20世纪70年代提出，是现代数学分析中最具影响力的问题之一。在经典欧氏情形下，限制问题关注将傅里叶变换限制到球面、抛物面和圆锥面等曲子流形上的算子的有界性。其核心问题是确定指数（p， r）的最优范围，使得限制算子 R_M：$L^p(\mathbb{R}^d) \to L^r(M,\ d\sigma)$ 有界，其中 M 是光滑流形，$d\sigma$ 是诱导测度。由于其

与调和分析中的其他基本问题（包括 Kakeya问题和 Bochner-Riesz问题）之间的密切联系已得到确立，该问题因此吸引了大量研究关注，目前仍在积极研究之中。尽管如此，除由 Fefferman [6]解决的二维情形外，该问题仍未解决。关于欧几里得空间中限制猜想的最新进展，读者可参阅论文 [2, 3, 7, 8, 31–34] 及其中的参考文献。

Mockenhaupt和Tao [27] 于2004年的工作通过引入经典限制问题的有限域类比，彻底改变了这一领域。设 $\mathbb{F}_q^n, n \geq 2,$ 是有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的一个n维向量空间，其中有 q 个元素。对于每个有限域$\mathbb{F}_q,$，我们令 V_q为 $\mathbb{F}_q^n.$中的一个固定簇。对于 $1 \leq p, r \leq \infty,$我们将 $R_{V_q}(p \to r)$ 定义为使限制估计成立的最小数

$$\|\widehat{f}\|_{L^r(V_q)} \leq R_{V_q}(p \to r)\|f\|_{\ell^p(\mathbb{F}_q^n)}$$

$\widehat{\ }$对所有函数 $f : \mathbb{F}_q^n \to \mathbb{C},$ 均成立，其中 f 表示 f 在第 2节中定义的傅里叶变换。本文中， $L^r(V_q)$表示定义在V_q 上的函数空间，采用归一化计数测度；而 $\ell^p(\mathbb{F}_q^n)$表示定义在 $\mathbb{F}_q^n$ 上的函数空间，采用计数测度。

簇 V_q 的限制问题旨在求出所有指数 $1 \leq p, r \leq \infty$，使得对于某个与 $q.$ 无关的常数 $C > 0$， $R_{V_q}(p \to r) \leq C$。换言之，我们要找出所有满足 $1 \leq p, r \leq \infty$的数对 (p, r)，使得 $R_{V_q}(p \to r) \lesssim 1.$。本文中，记号 $A \lesssim B$ 表示存在一个绝对常数 $C > 0$ 使得 $A \leq CB$。更准确地说，若存在一个与相关参数 q无关的常数 $C > 0,$ 使不等式$A \leq CB$ 成立，则记作 $A \lesssim B$ 。记号 $A \gtrsim B$ 的定义类似，表示 $B \lesssim A;$ 而 $A \sim B$表示 $A \lesssim B$ 和 $B \lesssim A$ 同时成立。

Mockenhaupt和Tao [27] 在低维圆锥面和抛物面上取得了相当不错的结果。我们回顾一下， $\mathbb{F}_q^d$ 中的抛物面 P 和锥 C 定义为

$$P := \left\{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{F}_q^d : x_d = \sum_{k=1}^{d-1} x_k^2\right\}$$

and

$$C := \left\{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{F}_q^d : x_{d-1}x_d = \sum_{k=1}^{d-2} x_k^2\right\}.$$

特别是，他们通过证明 $R_{V_q}(2 \to 4) \lesssim 1$ 成立，解决了二维抛物面的限制猜想以及三维锥面的限制猜想。在更高维度中，他们关于这两个曲面的结果持续得到改进，并引起了广泛关注。例如，Lewko [22–26] 以及 Rudnev 和 Shkredov [29]不断改进了三维抛物面的相关结果。另一方面，Iosevich、Lewko 和排名第二的作者改进了高维抛物面的限制估计（例如，参见 [11, 14, 19]）。关于圆锥面，Lee、Pham 和排名第二的作者提出了新的研究结果[20]。特别是，他们证明了当 -1 不是平方数时，四维空间中的圆锥面满足限制猜想。

1.2 有限域上球面限制理论的发展

继 Mockenhaupt 和 Tao 的奠基性工作之后 [27], ，有限域上特定代数簇的限制现象研究蓬勃发展。Iosevich 和 Koh 早期作出了重要贡献，他们于 2008 年开始研究 [12] 非退化二次曲面的限制定理。他们系统的方法为二维情形确立了尖锐结果，并在更高维度达到了 Tomas-Stein 指数，同时运用了关于克罗内克和的精妙估计。球面的情形尤其丰富且具有挑战性。我们回顾一下，半径为 S_j^{d-1} 的球面 $j \in \mathbb{F}_q$ 在 $\mathbb{F}_q^d$ 中定义为

$$S_j^{d-1} := \left\{ (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{F}_q^d : \sum_{k=1}^{d} x_k^2 = j \right\}.$$

与相对成熟的抛物面情形不同，有限域上的球面限制问题涉及更复杂的特征和估计，并且会因半径和维数不同而呈现不同的行为。Iosevich 和 Koh [13]关于球面限制定理的工作奠定了重要基础，而 Koh、Pham 和 Vinh [21]最近进一步阐明了球面的限制猜想，并取得了新的结果。然而，许多基本问题仍未解决，与抛物面和圆锥面相比，已知结果少得多，因此这一问题被认为极具挑战性。

1.3 有限球面限制问题在 Erd˝os-Falconer 距离问题中的应用

尽管球面上的限制问题比抛物面或圆锥面上的问题更具挑战性，也较少受到关注，但事实证明，它们在实际应用方面的价值要大得多。虽然它们可以应用于各种问题，但最引人注目之处在于，球面的限制估计可以为 Iosevich 和 Rudnev[15]提出的 Erd˝os-Falconer 距离问题带来结果。令 $E \subset \mathbb{F}_q^d$. 我们回顾一下，Erd˝os-Falconer 距离问题是有限域离散几何中最有趣且最具挑战性的问题之一，其目标是确定最小指数 α ，使得若 $|E| \geq Cq^{\alpha}$ 对一个与 q 无关的充分大常数 C 成立，则有 $|\Delta(E)| \gtrsim q$, 其中距离集 $\Delta(E)$ 定义为

$$\Delta(E) = \left\{ \|x - y\| := \sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2 : x, y \in E \right\}.$$

Iosevich 和 Rudnev [15] 证明了，若 $|E| > 2q^{(d+1)/2}$，则 $|\Delta(E)| = q.$ 。对于奇数维 $d \geq 3$，指数 $(d+1)/2$ 的最优性已在 [10] 中得到证明。换言之，Erd˝os-Falconer 距离问题对于所有奇数维 $d \geq 3$都已彻底解决。然而，对于偶数维 $d \geq 2$，人们猜想指数 $(d+1)/2$ 可以改进为 $d/2$（见 [15, 18]）。

猜想 1.1。设 $d \geq 2$ 是一个偶整数，且 $E \subset \mathbb{F}_q^d$。若对于充分大的常数 C （与 q无关），有 $|E| \geq Cq^{d/2}$，则$|\Delta（E）| \gtrsim q$。

对于所有偶数维，这个猜想仍未解决。对于 $d = 2$ 一般有限域，已有研究证明 [1, 4, 9] Iosevich 和 Rudnev 的 $(d+1)/2$ $(= 3/2)$ 指数可以改进为 $4/3$。值得注意的是，当 $\mathbb{F}_q$ 是素域时，Murphy、Petridis、Pham、Rudnev 和 Stevens [28] 取得了与作者在二维欧几里得 Falconer 距离问题中 $5/4$ 得到的相同 [8] 结果。然而，对于任何更高的偶数维，目前都还没有取得超越 Iosevich 和 Rudnev 的 $(d+1)/2$指数的改进。 $d \geq 4$. 为改进这一结果，我们可以利用 L^2 限制估计与 Erd˝os-Falconer 距离问题之间的联系。例如，引理 4.1 [5] 蕴含以下事实。

命题 1.2 (引理 4.1, [5]). 假设存在一个常数 C，与 q 无关，使得对所有 $j \in \mathbb{F}_q^*$, 均满足 $R_{S_j^{d-1}}(p \to 2) \leq C$，其中$1 \leq p \leq \infty$. 那么对于任意 $E \subset \mathbb{F}_q^d$、$d \geq 2$，我们有

$$|\Delta(E)| \gtrsim \text{最小值} \begin{cases} q, \\ \dfrac{|E|^{3-2/p}}{q^{d-1}} \end{cases}.$$

特别地，若 $|E| \geq q^{\frac{dp}{3p-2}}$，则 $|\Delta(E)| \gtrsim q$.

将此命题与尖锐限制估计 $R_{S_j^1}\left(\frac{4}{3} \to 2\right) \lesssim 1$ 结合， [4] 中的作者得到了指数 $4/3$, 当 $d = 2$ 时，这改进了界 $(d+1)/2$。对于一般的奇数维 $d \geq 3$，若 $j \neq 0$，文献 [12] 证明了 $p = \frac{2d+2}{d+3}$ 是界 $R_{S_j^{d-1}}(p \to 2) \lesssim 1$ 的尖锐指数。将其与命题 1.2 结合，可得到奇数维 $d \geq 3$ 情形下 Erd˝os–Falconer 距离问题的尖锐指数 $(d+1)/2$。人们猜想，在偶数维 $d \geq 4$ 中，奇数维的尖锐限制定理给出的值 $p = \frac{2d+2}{d+3}$ 可以提升为更大的指数，但这一改进仍未解决。

注意到，要推翻目前已知的 $(d+1)/2$ Erd˝os-Falconer 偶数高维距离结果 $d \geq 4$, 只需由命题1.2证明 $R_{S_j^{d-1}}\left(\frac{2d+2}{d+3} + \varepsilon \to 2\right) \lesssim 1$ 对所有非零的 j 以及某个 $\varepsilon > 0$成立。换言之，以下公式成立。

推论 1.3。 设 $d \geq 4$ 为偶整数。假设限制估计

$$R_{S_j^{d-1}}\left(\frac{2d+2}{d+3} + \varepsilon \to 2\right) \lesssim 1 \tag{1.1}$$

对所有非零 j 以及某个 $\varepsilon > 0$均成立。于是，对于任意集合 $E \subset \mathbb{F}_q^d$，若有 $|E| \geq Cq^{\frac{d+1}{2} - \varepsilon\left(\frac{d+3}{8d+6\varepsilon d+18\varepsilon}\right)}$，则有

$$|\Delta(E)| \gtrsim q.$$

证明存在 $\varepsilon > 0$ 满足球面限制估计（1.1）是一个非常困难的问题，目前尚未针对这一问题提出令人满意的方法；而对于偶数维的抛物面，这种存在性是众所周知的 $d \geq 4$ （例如，参见 [14, 21, 27]）。其主要原因在于，球面上的傅里叶变换与克罗内克和有关，而后者非常难以处理；相比之下，抛物面与高斯和相关，而高斯和具有显式的闭式表达。

1.4 主要问题及其动机

为了提供有限域球面限制猜想成立的一些证据，Kang 和 Koh [16] 研究了对受限测试函数的限制算子进行 $\ell^p \to L^r$ 估计的问题。特别地，在 [17] 中，他们证明了当测试函数为零次齐次函数时，猜想中的 $\ell^p \to L^2$ 估计成立。为证明这一点，他们引入了下文定义的 $\mathcal{S}$-算子，并结合该算子的有界性以及对 j-齐次簇的限制估计 H_j^d 在 $\mathbb{F}_q^{d+1}$，其中我们回顾，对于每个非零 $j \in \mathbb{F}_q^*$，

$$H_j^d = \{(x, x_{d+1}) \in \mathbb{F}_q^d \times \mathbb{F}_q : \|x\| = j x_{d+1}^2\}.$$

定义 1.4 （$\mathcal{S}$-算子）。给定一个函数 $g: \mathbb{F}_q^d \to C$， $\mathcal{S}$-算子定义为满足以下关系的算子

$$\mathcal{S}g(m, m_{d+1}) := \frac{1}{q} \sum_{t \in \mathbb{F}_q^*} \chi(t m_{d+1}) g(tm),$$

其中 $m \in \mathbb{F}_q^d$， $m_{d+1} \in \mathbb{F}_q$，而 χ 表示 $\mathbb{F}_q$.上的一个非平凡加性特征

除了在限制理论中的应用（下文将对此进行讨论）之外， $\mathcal{S}$-算子本身也具有数学上的趣味性。不同于调和分析中的标准算子， $\mathcal{S}$ 将 $\mathbb{F}_q^d$ 上的函数映射为 $\mathbb{F}_q^{d+1}$上的函数。这个维数改变算子表现出尖锐的有界性转变，需要新的分析技术；与一般函数相比，径向函数的行为有着显著差异。

本文研究 $\mathcal{S}$-算子的 $\ell^p \to \ell^s$ 估计。

问题 1.5 （$\mathcal{S}$-算子问题）。对于 $1 \leq p, s \leq \infty$，令 $\mathcal{S}(p \to s)$ 表示使得该估计成立的最小数

$$\|\mathcal{S}g\|_{\ell^s(\mathbb{F}_q^{d+1})} \leq \mathcal{S}(p \to s) \|g\|_{\ell^p(\mathbb{F}_q^d)}$$

对所有函数 $g: \mathbb{F}_q^d \to \mathbb{C}.$， $\mathcal{S}$-算子问题旨在确定所有指数 $1 \leq p, s \leq \infty$ 使得 $\mathcal{S}(p \to s) \leq C$，其中存在一个常数 C 与q无关。

本文研究 $\mathcal{S}$-算子问题的主要动机 [16]是探究 ε是否存在于球面限制估计（1.1）中；该估计是推论 1.3 在偶数维情形下的一项基本假设，并使我们能够突破偶数维 Erd$d+1$）/2 os-Falconer 距离问题中的"障碍 $d \geq 4$。为更具体地说明这一动机，我们回顾下面的引理。

引理 1.6 (引理 3.4, [17]). 设 $1 \leq p, r \leq \infty$ 和 $C_1, C_2 > 0$。假设对于 $\mathbb{F}_q^d$上的所有函数 g，都存在 $1 \leq s \leq \infty$ 使得

$$\left\|\widehat{\mathcal{S}g}\right\|_{L^r(H_j^d)} \leq C_1 \left\|\mathcal{S}g\right\|_{\ell^s(\mathbb{F}_q^{d+1})} \leq C_2 \|g\|_{\ell^p(\mathbb{F}_q^d)}.$$

那么我们有

$$R_{S_j^{d-1}}(p \to r) \lesssim 1.$$

由引理 1.6可知，若对于每个函数 $g: \mathbb{F}_q^d \to \mathbb{C}$，都存在 $1 \leq s \leq \infty$ 使得

$$\|\widehat{\mathcal{S}g}\|_{L^2(H_j^d)} \lesssim \|\mathcal{S}g\|_{\ell^s(\mathbb{F}_q^{d+1})} \tag{1.2}$$

and

$$\|\mathcal{S}g\|_{\ell^s(\mathbb{F}_q^{d+1})} \lesssim \|g\|_{\ell^{\frac{2d+4}{d+4}}(\mathbb{F}_q^d)}, \tag{1.3}$$

那么 $R_{S_j^{d-1}}\left(\frac{2d+4}{d+4} \to 2\right) \lesssim 1$，这就是关于偶数维球面的猜想 L^2 限制结果 $d \geq 4$ (见 [21])。式（1.2）中的不等式是与 H_j^d 相关的限制问题，其中测试函数满足 $F = \mathcal{S}g$，函数g 定义在 $\mathbb{F}_q^d$上；我们希望在后续工作中解决这一问题。式（1.3）中的不等式是本文研究的主要问题，即 $\mathcal{S}$-算子问题。

1.5 主要结果的陈述

一个重要而自然的问题是：是否存在 $1 \leq s \leq \infty$ 使得不等式（1.2）和（1.3）对所有函数 $g: \mathbb{F}_q^d \to \mathbb{C}$都成立? 本文将证明，不存在这样的 s，其独立于函数 g。为了论证不存在这样的 s，作为我们的第一个主要结果，我们对S-算子问题给出了完整的解答。作为我们的另一个主要结果，我们还证明了 $\mathcal{S}$-算子有界性的充要条件，其中测试函数 $g: \mathbb{F}_q^d \to \mathbb{C}$ 被限制为径向函数。

1.5.1 关于$\mathcal{S}$-算子问题的结果

测试函数 g 定义在 $\mathbb{F}_q^d$上，而 $\mathcal{S}g$ 定义在 $\mathbb{F}_q^{d+1}$上。这使得 $\mathcal{S}$- 算子有别于调和分析中常见的算子。我们通过采用针对有限域情形调整的技术，得到了关于 $\mathcal{S}$-算子有界性的最优结果，具体如下。

定理 1.7。 设 $1 \le p, s \le \infty$. 则 $\mathcal{S}(p \to s) \lesssim 1$ 当且仅当点$(1/p, 1/s)$ 位于以下各点的凸包中：$(0,\ 0)$、$(1,\ 0)$、$(1,\ 1/2)$和$(1/2,1/2)$。

注 1.8。 关于定理1.7，我们作如下观察。

- 定理 1.7的尖锐结果与维数无关 d。
- 借助范数嵌套性质和插值定理（参见第2节），证明 $\mathcal{S}(p \to s) \lesssim 1$ 充分条件可归结为建立以下界 $\mathcal{S}(\infty \to \infty) \lesssim 1$ 和 $\mathcal{S}(2 \to 2) \lesssim 1$ （参见图 1）。
- 在 [17], 中已证明，若测试函数 g 属于一次齐次函数类，即 $g(tm) = g(m)$，其中 $t \neq 0, m \in \mathbb{F}_q^d$，则不等式 (1.2) 和 (1.3) 对 $s = (2d+4)/(d+4)$ 成立。然而，定理 1.7 表明，存在一个函数 g，使得 (1.3) 在 $s = (2d+4)/(d+4)$ 时不成立。

运用定理 1.7，我们可以证明如下结论：

推论 1.9。 不存在这样的 $1 \le s \le \infty$，使得对所有函数 $g:\ \mathbb{F}_q^d \to \mathbb{C}$，不等式 (1.2) 和 (1.3)同时成立

注 1.10。 我们强调，推论 1.9 并不意味着将 $\mathcal{S}$-算子的有界性与球面的改进限制问题结果联系起来的方法失效，因为引理 1.6 允许存在依赖于函数 g的 s。

1.5.2 受限$\mathcal{S}$-算子问题的结果

令 $\mathcal{F}(\mathbb{F}_q^d \to \mathbb{C})$ 表示从 $\mathbb{F}_q^d$ 到复数 $\mathbb{C}$ 的所有函数构成的集合。对于每个有限域 $\mathbb{F}_q$，我们考虑一个子集 $\mathcal{A}_q \subset \mathcal{F}(\mathbb{F}_q^d \to \mathbb{C})$。对于 $1 \le p,\ s \le \infty,$ 我们定义 $\mathcal{S}_{\mathcal{A}_q}(p \to s)$ 为使得下列不等式成立的最小常数

$$\|\mathcal{S}g\|_{\ell^s(\mathbb{F}_q^{d+1})} \le \mathcal{S}_{\mathcal{A}_q}(p \to s)\|g\|_{\ell^p(\mathbb{F}_q^d)}$$

对所有函数 $g \in \mathcal{A}_q$ 都成立。显然，$\mathcal{S}_{\mathcal{A}_q}(p \to s) \le \mathcal{S}(p \to s)$。根据此定义，我们考虑以下受限 $\mathcal{S}$-算子问题。

问题 1.11 （受限于 $\mathcal{A}_q$ 的 $\mathcal{S}$-算子问题）。 求所有数 $1 \le p, s \le \infty$，使得 $\mathcal{S}_{\mathcal{A}_q}($ $p \to s) \lesssim 1.$

在 [17], 中，作者证明了当 $\mathcal{A}_q = \mathcal{H}_q$ 时成立； $\mathcal{A}_q = \mathcal{H}_q$ 是 $\mathbb{F}_q^d$ 中所有零次齐次函数组成的集合，即 $\mathcal{H}_q := \{g \in \mathcal{F}(\mathbb{F}_q^d \to \mathbb{C}):\ g(m) = g(\lambda m)$ 对所有 $m \in \mathbb{F}_q^d, \lambda \in \mathbb{F}_q^*\}$, ，我们有

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}_q}(p \to p) \lesssim 1 \quad \text{for all} \quad 1 \le p \le \infty. \tag{1.4}$$

然而，正如定理1.7所示，存在一类测试函数，使得（1.4）不成立。

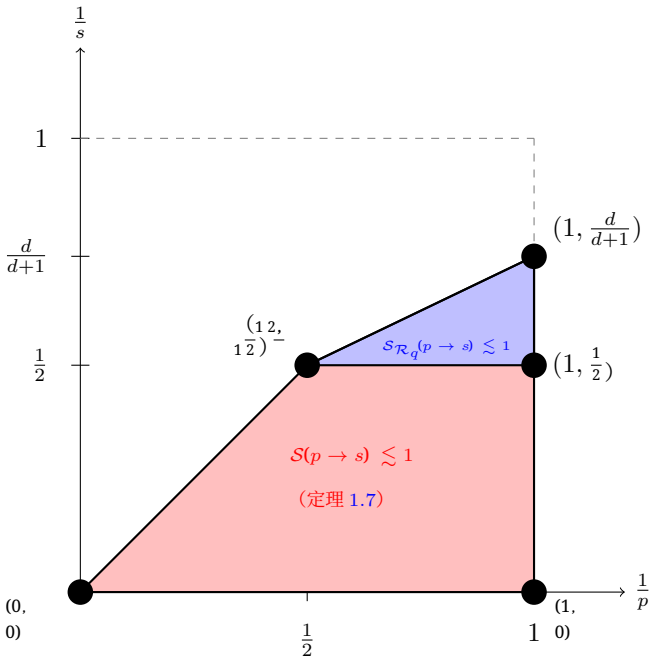


图 1 $\mathcal{S}$算子和作用于径向函数时的 $\mathcal{S}_{\mathcal{R}_q}$算子的尖锐有界区域（红色阴影）与（红色 $+$蓝色阴影）。边界是最优的：在这些区域之外，有界性不成立。径向限制允许将范围从 $(1,\ 1/2)$ 扩展到 $(1,\ d/(d+1))$。

现在我们希望证明 $\mathcal{S}_{\mathcal{A}_q}(p \to s)$ 的精确有界性条件，其中 $\mathcal{A}_q \subset \mathcal{F}(\mathbb{F}_q^d \to \mathbb{C})$。作为这方面的结果，我们给出了 $\mathcal{A}_q$ 为径向检验函数类时的答案。回顾一下，若函数 $g: \mathbb{F}_q^d \to \mathbb{C}$ 满足：当 $\|m\| = \|m'\|.$ 时，$g(m) = g(m')$，则称其为径向函数。

在 $(d,\ q) \neq (2,\ 3 \pmod 4)$ 的情形下，我们得到了限制在径向测试函数上的 $\mathcal{S}$-算子问题的答案如下（见图 1）。

定理 1.12。令 $\mathcal{R}_q$ 表示 $\mathbb{F}_q^d$ 上所有径向函数的类，并令 $1 \leq p, s \leq \infty$. 则以下两个结论成立：

(i) 若$(1/p, 1/s)$ 位于点$(0,\ 0)$、$(1,\ 0)$、$(1,\ d/(d+1))$和$(1/2,1/2)$的凸包上，则 $\mathcal{S}_{\mathcal{R}_q}(p \to s) \lesssim 1$.*(ii)* 此外，若我们假设$(d, q) \neq (2,\ 3\ (\mathrm{mod}\ 4))$，则 *(i)* 的逆命题也成立。

1.6 论文结构

本文其余部分安排如下。在第 2 节中，我们汇集全文将用到的有限域傅里叶变换、特征标正交性、球面大小和插值定理等预备知识。第 3 节给出定理 1.7 的证明，

建立关于 $S(p \to s) \lesssim 1$ 的必要条件和充分条件；充分条件通过在端点估计 $S(\infty \to \infty) \lesssim 1$与 $S(2 \to 2) \lesssim 1$之间进行插值得到，而必要条件则通过对极值函数进行测试得出。第 4 节中，我们证明推论 1.9，通过反证法说明不存在与 s 无关的统一指数 g，能同时满足不等式（1.2）和（1.3）。最后，第 5 节用于证明定理 1.12，研究径向函数的受限 $\mathcal{S}$-算子问题，并通过端点估计和形如 $g = \mathbf{1}_{S_j^{d-1}}$ 的测试函数确定尖锐指数区域。

2 预备知识

本节为方便读者，总结了证明本文主要结果时将用到的众所周知的事实。

设 $\mathbb{F}_q$ 是一个含有 $q = p^\alpha$ 的有限域，其中 p 是素数。本文中，我们用 χ: $\mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^*$ 表示由下式定义的主加性特征

$$\chi(s) = e^{2\pi i \mathrm{Tr}(s)/p},$$

其中 $\mathrm{Tr} : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_p$ 是从 $\mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_p$. 的迹函数。我们强调，本文的结果对 $\mathbb{F}_q$ 上任意非平凡加性特征均成立。

χ 的最有用性质是非平凡加性特征的如下正交性:

$$\sum_{s \in \mathbb{F}_q} \chi(as) = \begin{cases} q & \text{if } a = 0, \\ 0 & \text{if } a \neq 0. \end{cases}$$

f: $\mathbb{F}_q^n \to \mathbb{C}$ 的傅里叶变换记为 f，定义如下

$$\widehat{f}(x) = \sum_{m \in \mathbb{F}_q^n} f(m)\chi(-x \cdot m)$$

对于 $x \in \mathbb{F}_q^n$，其中 $x \cdot m = x_1 m_1 + \cdots + x_n m_n$ 表示 $\mathbb{F}_q^n$上的标准内积。

$\mathbb{F}_q^d$中半径为 j 的球面 S_j^{d-1} 上的元素个数，记为 $|S_j^{d-1}|$，其值为

$$\left|S_j^{d-1}\right| = \begin{cases} 1 & \text{if } j = 0,\ d = 2,\ q \equiv 3 \pmod 4 \\ \sim q^{d-1} & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.1}$$

范数嵌套性质指出，若 $1 \le p_0 \le p_1 \le \infty$，则

$$\|f\|_{\ell^{p_1}(\mathbb{F}_q^n)} \le \|f\|_{\ell^{p_0}(\mathbb{F}_q^n)}. \tag{2.2}$$

注意到，这个范数嵌套性质意味着

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}_q}(p \to s) \le \mathcal{S}_{\mathcal{A}_q}(p_1 \to s) \quad \text{for } \ 1 \le p \le p_1 \le \infty,$$

and

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}_q}(p \to s) \le \mathcal{S}_{\mathcal{A}_q}(p \to s_0) \quad \text{for } \ 1 \le s_0 \le s \le \infty.$$

根据这些观察，我们可以将 $\mathcal{S}$-算子问题归结为：对于每个固定的 $1 \le s \le \infty$，求出 p 的最大可能值；以及对于每个固定的 $1 \le p \le \infty$，求出满足 $\mathcal{S}_{\mathcal{A}_q}(p \to s) \lesssim 1$ 的 s 的最小可能值。换言之，我们的问题就是证明临界端点估计。

在有限域情形中，Riesz-Thorin 插值定理可表述如下：

定理 *2.1*（有限域上的 *Riesz-Thorin* 插值定理）。设 $T: \ell^{p_0}(\mathbb{F}_q^d) \to L^{q_0}(\mathbb{F}_q^{d+1})$ 和 $T: \ell^{p_1}(\mathbb{F}_q^d) \to \ell^{q_1}(\mathbb{F}_q^{d+1})$ 是有界线性算子，其范数分别为 M_0 和 M_1，其中 $1 \le p_0, p_1, q_0, q_1 \le \infty$。那么，对于任意 $0 < \theta < 1$，算子 $T: \ell^{p_\theta}(\mathbb{F}_q^d) \to \ell^{q_\theta}(\mathbb{F}_q^{d+1})$ 有界，且其范数 M_θ 满足

$$M_\theta \le M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}, \tag{2.3}$$

其中

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad and \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}. \tag{2.4}$$

注意，有限域上的 Riesz-Thorin 插值定理本质上与经典版本相同，因为 $\mathbb{F}_q^n$ 是一个带有计数测度（或归一化计数测度）的有限测度空间。

3 关于 $\mathcal{S}(p \to s) \lesssim 1$ 的尖锐结果（定理 1.7 的证明）

在本节中，我们给出定理 1.7 的证明，该定理给出了 $\mathcal{S}(p \to s) \lesssim 1$ 的充要条件。为完成证明，我们在以下各小节中证明下面两个定理。

定理 3.1（充分条件）。设 $1 \le p, \ s \le \infty$. 若点 $(1/p, 1/s)$ 位于点 $(0, 0)$、$(1, 0)$、$(1, 1/2)$ 与 $(1/2, 1/2)$ 的凸包中，则 $\mathcal{S}(p \to s) \lesssim 1$.

定理 3.2（必要条件）。设 $1 \le p, \ s \le \infty$. 若 $\mathcal{S}(p \to s) \lesssim 1$，则点 $(1/p, 1/s)$ 位于点 $(0, 0)$、$(1, 0)$、$(1, 1/2)$ 与 $(1/2, 1/2)$ 的凸包中。

3.1 定理3.1 的证明

我们证明关于 $\mathcal{S}(p \to s) \lesssim 1.$ 的充分条件的结果。利用 (2.2) 中范数的嵌套性质，只需证明以下端点估计。

定理 3.3。对于 $2 \le p \le \infty$，不等式

$$\|\mathcal{S}_g\|_{\ell^p(\mathbb{F}_q^{d+1})} \lesssim \|g\|_{\ell^p(\mathbb{F}_q^d)}$$

对所有函数 g 在 $\mathbb{F}_q^d$上均成立

Proof 回忆一下， $\mathcal{S}$-算子定义为

$$\mathcal{S}g(m, m_{d+1}) = \frac{1}{q} \sum_{t \in \mathbb{F}_q^*} \chi(t m_{d+1}) g(tm)$$

对于 $m \in \mathbb{F}_q^d$ 和 $m_{d+1} \in \mathbb{F}_q$。

首先，显然

$$\|\mathcal{S}g\|_{\ell^\infty(\mathbb{F}_q^{d+1})} \lesssim \|g\|_{\ell^\infty(\mathbb{F}_q^d)}, \tag{3.1}$$

因为对于 $\mathbb{F}_q^d$ 上的所有函数，我们都有

$$\|\mathcal{S}g\|_{\ell^\infty(\mathbb{F}_q^{d+1})} := \max_{M \in \mathbb{F}_q^{d+1}} |\mathcal{S}g(M)| \leq \max_{m \in \mathbb{F}_q^d} |g(m)| = \|g\|_{\ell^\infty(\mathbb{F}_q^d)}.$$

现在我们证明 $p = 2$ 情形下的定理。计算得

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}g\|_{\ell^2(\mathbb{F}_q^{d+1})}^2 &= \sum_{m \in \mathbb{F}_q^d} \sum_{m_{d+1} \in \mathbb{F}_q} |\mathcal{S}g(m, m_{d+1})|^2 \\ &= \sum_{m \in \mathbb{F}_q^d} \sum_{m_{d+1} \in \mathbb{F}_q} \frac{1}{q^2} \left| \sum_{t \in \mathbb{F}_q^*} \chi(t m_{d+1}) g(tm) \right|^2. \end{aligned}$$

对于每个固定的 $(m, m_{d+1}) \in \mathbb{F}_q^d \times \mathbb{F}_q$，我们展开平方数：

$$\left| \sum_{t \in \mathbb{F}_q^*} \chi(t m_{d+1}) g(tm) \right|^2 = \sum_{s,t \in \mathbb{F}_q^*} \chi(m_{d+1}(s-t)) g(sm) \overline{g(tm)}.$$

将其代回后，我们得到

$$\|\mathcal{S}g\|_{\ell^2(\mathbb{F}_q^{d+1})}^2 = \frac{1}{q^2} \sum_{m \in \mathbb{F}_q^d} \sum_{m_{d+1} \in \mathbb{F}_q} \sum_{s,t \in \mathbb{F}_q^*} \chi(m_{d+1}(s-t)) g(sm) \overline{g(tm)}.$$

由特征 χ 的正交关系可得

$$\sum_{m_{d+1} \in \mathbb{F}_q} \chi(m_{d+1}(s-t)) = \begin{cases} q & \text{if } s = t, \\ 0 & \text{if } s \neq t. \end{cases}$$

因此，只有满足 $s = t$ 的项会保留下来：

$$\|\mathcal{S}g\|_{\ell^2(\mathbb{F}_q^{d+1})}^2 = \frac{1}{q} \sum_{m \in \mathbb{F}_q^d} \sum_{s \in \mathbb{F}_q^*} |g(sm)|^2.$$

根据富比尼定理，我们可以改变求和顺序：

$$\|\mathcal{S}g\|_{\ell^2(\mathbb{F}_q^{d+1})}^2 = \frac{1}{q} \sum_{s \in \mathbb{F}_q^*} \sum_{m \in \mathbb{F}_q^d} |g(sm)|^2.$$

对于固定的 $s \in \mathbb{F}_q^*$，我们代入 $\alpha = sm$。因此，

$$\|\mathcal{S}g\|_{\ell^2(\mathbb{F}_q^{d+1})}^2 = \frac{1}{q} \sum_{s \in \mathbb{F}_q^*} \sum_{\alpha \in \mathbb{F}_q^d} |g(\alpha)|^2 = \frac{q-1}{q} \|g\|_{\ell^2(\mathbb{F}_q^d)}^2.$$

两边开平方后，我们得出

$$\|\mathcal{S}g\|_{\ell^2(\mathbb{F}_q^{d+1})} \lesssim \|g\|_{\ell^2(\mathbb{F}_q^d)}. \tag{3.2}$$

对（3.2）和（3.1）中的估计进行插值，我们便完成了定理3.3的证明。 □

定理3.2的证明

假设对于 $1 \le p, s \le \infty$,

$$L := \|\mathcal{S}g\|_{\ell^s(\mathbb{F}_q^{d+1})} \lesssim \|g\|_{\ell^p(\mathbb{F}_q^d)} =: R,$$

这对所有函数 $g : \mathbb{F}_q^d \to \mathbb{C}$. 都成立。换言之，对所有函数 $g : \mathbb{F}_q^d \to \mathbb{C}$，都有

$$L = \left(\sum_{m \in \mathbb{F}_q^d, m_{d+1} \in \mathbb{F}_q} |\mathcal{S}g(m, m_{d+1})|^s \right)^{\frac{1}{s}} \lesssim \left(\sum_{m \in \mathbb{F}_q^d} |g(m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = R. \tag{3.3}$$

情况 1。令 $g = \delta_{x_0}$，来检验不等式（3.3），其中 $x_0 \in \mathbb{F}_q^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ 且$\delta_{x_0}(x) = 1$ 当 $x = x_0$ 时成立，否则为 0。

显然，

$$R = 1.$$

对于 $m \in \mathbb{F}_q^d$ 和 $m_{d+1} \in \mathbb{F}_q$，我们注意到

$$\mathcal{S}g(m, m_{d+1}) = \frac{1}{q} \sum_{t \in \mathbb{F}_q^*} \chi(tm_{d+1}) \delta_{x_0}(tm) = \frac{1}{q} \sum_{t \in \mathbb{F}_q^* : x_0 = tm} \chi(tm_{d+1}).$$

对于 $m \neq \mathbf{0}$，若存在唯一的 $t_0 \in \mathbb{F}_q^*$ 使得 $x_0 = t_0 m$，则

$$\mathcal{S}g(m, m_{d+1}) = q^{-1} \chi(t_0 m_{d+1}).$$

否则，$\mathcal{S}g(m, m_{d+1}) = 0$。令 $\ell_{x_0}^*$ 表示经过原点和 x_0的直线，去掉原点后得到。于是我们有

$$|\mathcal{S}g(m, m_{d+1})| = \begin{cases} q^{-1} & \text{if } m \in \ell_{x_0}^*, m_{d+1} \in \mathbb{F}_q, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，我们得到

$$L = \left(\sum_{m \in \ell_{x_0}^*, m_{d+1} \in \mathbb{F}_q} q^{-s} \right)^{\frac{1}{s}} \sim q^{\frac{2-s}{s}}.$$

由于 $L \lesssim R$，我们得出 $\frac{2-s}{s} \le 0$，由此得到一个必要条件：

$$\frac{1}{s} \le \frac{1}{2}. \tag{3.4}$$

情况 2。我们用 $g = 1_V$ 来检验不等式（3.3），其中 V表示一个维数为 $k \ge 1$、包含于 $\mathbb{F}_q^d$.

不难看出

$$R = |V|^{\frac{1}{p}}.$$

另一方面，由于 V 是一个子空间，

$$\mathcal{S}g(m, m_{d+1}) = \frac{1}{q}\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*}\chi(tm_{d+1})1_V(tm) = \frac{1}{q}\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*:m\in V}\chi(tm_{d+1}).$$

利用 χ的正交性，可得

$$|\mathcal{S}g(m, m_{d+1})| = \begin{cases} \frac{q-1}{q} & \text{if } m \in V, m_{d+1} = 0, \\ q^{-1} & \text{if } m \in V, m_{d+1} \neq 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，我们得到

$$L = \left(\sum_{m\in V, m_{d+1}=0}\left(\frac{q-1}{q}\right)^s + \sum_{m\in V, m_{d+1}\in\mathbb{F}_q^*} q^{-s}\right)^{\frac{1}{s}} \sim \left(|V| + |V|q^{1-s}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

由于 $s \geq 1$，可知

$$L \sim |V|^{\frac{1}{s}}.$$

由于 $L \lesssim R$ 和 $|V| \gtrsim q$，我们得到另一个必要条件：

$$\frac{1}{s} \leq \frac{1}{p}.$$

由于 $0 \leq \frac{1}{p}, -\frac{1}{s} \leq 1$，将上述条件与（3.4）结合，即得定理3.2的结论。

4 推论的证明1.9

我们将使用反证法来完成证明。为此，假设存在一个常数 $1 \leq s = s_0 \leq \infty$，它满足（1.2）和（1.3），且与所有函数 g： $\mathbb{F}_q^d \to \mathbb{C}$无关。也就是说，假设存在一致常数 C_1， $C_2 > 0$，使得以下两个不等式对所有函数 g： $\mathbb{F}_q^d \to \mathbb{C}$成立：

$$\|\widehat{\mathcal{S}g}\|_{L^2(H_j^d)} \leq C_1\|\mathcal{S}g\|_{\ell^{s_0}(\mathbb{F}_q^{d+1})} \tag{4.1}$$

and

$$\|\mathcal{S}g\|_{\ell^{s_0}(\mathbb{F}_q^{d+1})} \leq C_2\|g\|_{\ell^{\frac{2d+4}{d+4}}(\mathbb{F}_q^d)}. \tag{4.2}$$

由定理 1.7 和（4.2），必有 $2 \leq s_0 \leq \infty$。根据（2.2）中的范数嵌套性质，因此可得

$$\|\mathcal{S}g\|_{\ell^{s_0}(\mathbb{F}_q^{d+1})} \leq \|\mathcal{S}g\|_{\ell^2(\mathbb{F}_q^{d+1})}.$$

将此不等式与（4.1）结合起来，必然可得，对于 g 上的所有函数 $\mathbb{F}_q^d$,

$$\|\widehat{\mathcal{S}g}\|_{L^2(H_j^d)} \leq C_1 \|\mathcal{S}g\|_{\ell^2(\mathbb{F}_q^{d+1})}.$$

特别地，当固定的 $a \in S_j^{d-1} \subset \mathbb{F}_q^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ 时， $g_0(m) := \chi(a \cdot m)$，它满足

$$\|\widehat{\mathcal{S}g_0}\|_{L^2(H_j^d)} \leq C_1 \|\mathcal{S}g_0\|_{\ell^2(\mathbb{F}_q^{d+1})}. \tag{4.3}$$

我们将通过证明不等式（4.3）不成立，完成推论 1.9 的证明。由于对于 $m \in \mathbb{F}_q^d$, $m_{d+1} \in \mathbb{F}_q$， $\mathcal{S}g_0(m, m_{d+1}) = q^{-1} \sum_{t \in \mathbb{F}_q^*} \chi(t(m_{d+1} + a \cdot m))$，由 χ 的正交性可得

$$\mathcal{S}g_0(m, m_{d+1}) = \begin{cases} \frac{q-1}{q} & \text{if } m_{d+1} + a \cdot m = 0, \\ -q^{-1} & \text{if } m_{d+1} + a \cdot m \neq 0. \end{cases}$$

由此观察可得

$$\|\mathcal{S}g_0\|_{\ell^2(\mathbb{F}_q^{d+1})} = \left(\sum_{\substack{m \in \mathbb{F}_q^d, m_{d+1} \in \mathbb{F}_q \\ : m_{d+1} + a \cdot m = 0}} \left(\frac{q-1}{q} \right)^2 + \sum_{\substack{m \in \mathbb{F}_q^d, m_{d+1} \in \mathbb{F}_q \\ : m_{d+1} + a \cdot m \neq 0}} q^{-2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

由于 $|\{(m, m_{d+1}) \in \mathbb{F}_q^d \times \mathbb{F}_q \colon m_{d+1} + a \cdot m = 0\}| = q^d$ 且 $|\{(m, m_{d+1}) \in \mathbb{F}_q^d \times \mathbb{F}_q : m_{d+1} + a \cdot m \neq 0\}| = q^{d+1} - q^d \sim q^{d+1}$， ，我们得到

$$\|\mathcal{S}g_0\|_{\ell^2(\mathbb{F}_q^{d+1})} \sim (q^d + q^{d-1})^{\frac{1}{2}} \sim q^{\frac{d}{2}}. \tag{4.4}$$

现在来估计左侧$\|\widehat{\mathcal{S}g_0}\|_{L^2(H_j^d)}$ 不等式（4.3）中。在 [17], 引理 3.4 的证明中，已证明如下结论：

$$\|\widehat{\mathcal{S}g_0}\|_{L^2(H_j^d)} \sim \|\widehat{g_0}\|_{L^2(S_j^{d-1})}.$$

根据 χ的正交性，我们可知

$$\widehat{g_0}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \neq a, \\ q^d & \text{if } x = a. \end{cases}$$

由于 $j \neq 0$ 和 $a \in S_j^{d-1}$，我们有

$$\|\widehat{\mathcal{S}g_0}\|_{L^2(H_j^d)} \sim \left(\frac{1}{|S_j^{d-1}|} \sum_{x \in S_j^{d-1}} |\widehat{g_0}(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sim \left(\frac{1}{q^{d-1}} q^{2d} \right)^{\frac{1}{2}}$$

因此，我们得到

$$\|\widehat{\mathcal{S}g_0}\|_{L^2(H_j^d)} \sim q^{\frac{d+1}{2}}.$$

由这个估计和（4.4），我们得出不等式（4.3）不成立。

5 径向检验函数的 $\mathcal{S}$-算子问题（定理 1.12 的证明）

本节将给出定理 1.12 的完整证明。我们需要证明以下两个陈述成立。

定理5.1 （充分条件）。若 $(1/p,1/s)$ 位于以下点的凸包上：$(0,0)$、$(1,0)$、$(1,d/(d+1))$，以及 $(1/2,1/2)$，则 $\mathcal{S}_{\mathcal{R}_q}(p \to s) \lesssim 1$.

定理 5.2 （必要条件）。若 $(d,q) \neq (2,3$（模 4）$)$ 且 $\mathcal{S}_{\mathcal{R}_q}$ $(p \to s) \lesssim 1$，则 $(1/p, 1/s)$ 位于以下点的凸包上：$(0,0)$、$(1,0)$、$(1, d/(d+1))$，以及 $(1/2,1/2)$。

5.1 定理5.1 的证明

由于 $\mathcal{S}_{\mathcal{R}_q}(p \to s) \leq \mathcal{S}(p \to s)$，定理 1.7 意味着，若 $(1/p,1/s)$ 位于点 $(0,0)$、$(1,0)$、$(1,1/2)$ 和 $(1/2,1/2)$ 的凸包上，则 $\mathcal{S}_{\mathcal{R}_q}(p \to s) \lesssim 1$。因此，为完成定理5.1的证明，根据插值定理，只需证明

$$\mathcal{S}_{\mathcal{R}_q}\left(1 \to \frac{d+1}{d}\right) \lesssim 1.$$

换言之，对于任意径向函数 $g : \mathbb{F}_q^d \to \mathbb{C}$，我们的任务是证明

$$\|\mathcal{S}g\|_{\ell^{\frac{d+1}{d}}(\mathbb{F}_q^{d+1})} \lesssim \|g\|_{\ell^1(\mathbb{F}_q^d)}.$$

由于算子 $\mathcal{S}$ 是线性算子，不失一般性，我们可以假设函数 $g : \mathbb{F}_q^d \to \mathbb{C}$ 是取非负实值的径向函数。此外，通过对函数 g进行归一化，我们还可以假设

$$\|g\|_{\ell^1(\mathbb{F}_q^d)} = 1.$$

令 $g(m) = M_j \geq 0$，当 $\|m\| = j \in \mathbb{F}_q$, 时，上述条件变为

$$1 = \sum_{m\in\mathbb{F}_q^d} |g(m)| = \sum_{j\in\mathbb{F}_q} \sum_{m\in S_j^{d-1}} M_j = \sum_{j\in\mathbb{F}_q} |S_j^{d-1}| M_j.$$

根据（ S_j^{d-1} 2.1）中球面的大小，该条件等价于

$$1 \sim \begin{cases} M_0 + q \sum\limits_{j\in\mathbb{F}_q^*} M_j & \text{if } d = 2,\ q \equiv 3 \pmod 4 \\ q^{d-1} \sum\limits_{j\in\mathbb{F}_q} M_j & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5.1}$$

在此假设下，我们的目标是证明

$$\|\mathcal{S}g\|_{\ell^{\frac{d+1}{d}}(\mathbb{F}_q^{d+1})} \lesssim 1.$$

因此，证明归结为证明在假设（5.1）

$$L := \|\mathcal{S}g\|_{\ell^{\frac{d+1}{d}}(\mathbb{F}_q^{d+1})}^{\frac{d+1}{d}} = \sum_{m\in\mathbb{F}_q^d, m_{d+1}\in\mathbb{F}_q} \left| \frac{1}{q} \sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} \chi(tm_{d+1}) g(tm) \right|^{\frac{d+1}{d}} \lesssim 1. \tag{5.2}$$

注意到 $\mathbb{F}_q^d = \bigcup_{k\in\mathbb{F}_q} S_k^{d-1}$ 且 $\|tm\| = t^2 k$ 对 $t \in \mathbb{F}_q^*$, $m \in S_k^{d-1}$. 由此可得

$$L = q^{-\frac{d+1}{d}} \sum_{m_{d+1}\in\mathbb{F}_q} \sum_{k\in\mathbb{F}_q} |S_k^{d-1}| \left| \sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} \chi(tm_{d+1}) M_{t^2k} \right|^{\frac{d+1}{d}}. \tag{5.3}$$

情况 1。假设（d, q）$\neq (2, 3$（模 4），我们证明 $L \lesssim 1$. 由（2.1）可知，在此情况下，$|S_k^{d-1}| \sim q^{d-1}$ 对所有 $k \in \mathbb{F}_q$均成立。因此可得

$$L \sim q^{-\frac{d+1}{d}} q^{d-1} \sum_{m_{d+1},k\in\mathbb{F}_q} \left| \sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} \chi(tm_{d+1}) M_{t^2k} \right|^{\frac{d+1}{d}}.$$

利用 H¨older 不等式，我们得到

$$\begin{aligned} L &\lesssim q^{-\frac{d+1}{d}} q^{d-1} \left(\sum_{m_{d+1},k\in\mathbb{F}_q} 1^{\frac{2d}{d-1}} \right)^{\frac{d-1}{2d}} \left(\sum_{m_{d+1},k\in\mathbb{F}_q} \left| \sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} \chi(tm_{d+1}) M_{t^2k} \right|^2 \right)^{\frac{d+1}{2d}} \\ &= q^{-\frac{d+1}{d}} q^{d-1} q^{\frac{d-1}{d}} \left(\sum_{m_{d+1},k\in\mathbb{F}_q} \sum_{t,t'\in\mathbb{F}_q^*} \chi(m_{d+1}(t-t')) M_{t^2k} M_{t'^2k} \right)^{\frac{d+1}{2d}}. \end{aligned}$$

现在，利用 χ 的正交性对变量 $m_{d+1} \in \mathbb{F}_q$ 求和，可得

$$L \lesssim q^{-\frac{d+1}{d}} q^{d-1} q^{\frac{d-1}{d}} q^{\frac{d+1}{2d}} \left(\sum_{k \in \mathbb{F}_q} \sum_{t \in \mathbb{F}_q^*} M_{t^2 k}^2 \right)^{\frac{d+1}{2d}}.$$

通过简单的变量替换，显然 $\sum_{k \in \mathbb{F}_q} \sum_{t \in \mathbb{F}_q^*} M_{t^2 k}^2 = (q-1) \sum_{k \in \mathbb{F}_q} M_k^2$.因此可得

$$L \lesssim q^{\frac{d^2-1}{d}} \left(\sum_{k \in \mathbb{F}_q} M_k^2 \right)^{\frac{d+1}{2d}}. \tag{5.4}$$

由（5.1），我们可以假设 $\sum_{k \in \mathbb{F}_q} M_k \sim q^{-d+1}$ 从而 $M_k \lesssim q^{-d+1}$ 对所有 $k \in \mathbb{F}_q$. 利用这些条件，我们观察到

$$\sum_{k \in \mathbb{F}_q} M_k^2 \lesssim q^{-d+1} q^{-d+1} = q^{-2d+2}.$$

结合这一观察与（5.4），我们得到所需结果， $L \lesssim 1$.

情况 2。假设 $d = 2$ 且 $q \equiv 3 \pmod 4$ 。我们来证明 $L \lesssim 1$. 在这种情况下，由（2.1）和（5.3）可得

$$\begin{aligned} L &\sim q^{-\frac{3}{2}} \sum_{m_3 \in \mathbb{F}_q} \left| \sum_{t \in \mathbb{F}_q^*} \chi(t m_3) M_0 \right|^{\frac{3}{2}} + q^{-\frac{1}{2}} \sum_{m_3 \in \mathbb{F}_q} \sum_{k \in \mathbb{F}_q^*} \left| \sum_{t \in \mathbb{F}_q^*} \chi(t m_3) M_{t^2 k} \right|^{\frac{3}{2}} \\ &=: I + II. \end{aligned}$$

只需证明 $I \lesssim 1$ 与 $II \lesssim 1$. 由于 $II \lesssim 1$ 可按与情况 1 完全相同的过程轻易证明，我们省略证明细节。

由于 $\chi(0) = 1$，利用 χ 的正交性，我们得到

$$\begin{aligned} I &= q^{-\frac{3}{2}} M_0^{\frac{3}{2}} \sum_{m_3 \in \mathbb{F}_q} \left| \sum_{t \in \mathbb{F}_q^*} \chi(t m_3) \right|^{\frac{3}{2}} \\ &= q^{-\frac{3}{2}} M_0^{\frac{3}{2}} (q-1)^{\frac{3}{2}} + q^{-\frac{3}{2}} M_0^{\frac{3}{2}} (q-1) \sim M_0^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

其中我们分别计算了以下情形： $m_3 = 0$ 和 $m_3 \neq 0$。利用（5.1），并根据情形 2 的假设，我们可知 $1 \sim M_0 + q \sum_{k \in \mathbb{F}_q^*} M_k$. 这意味着 $M_0 \lesssim 1$。因此，我们得到所需结果：$I \lesssim 1$。

5.2 定理5.2的证明

我们从以下引理开始。

引理 5.3. 对于任意非负整数 n，我们有

$$\sum_{t\in\mathbb{F}_q}|\chi(t)+\chi(-t)|^n\sim q.$$

Proof 根据插值定理，只需证明对任意偶数 n,

$$\sum_{t\in\mathbb{F}_q}|\chi(t)+\chi(-t)|^n\sim q.$$

由于 $\chi(t)+\chi(-t)$是实数，我们看到，对任意偶整数 $n.$，$|\chi(t)+\chi(-t)|^n=(\chi(t)+\chi(-t))^n$。因此，根据二项式定理，可得

$$\begin{aligned}\sum_{t\in\mathbb{F}_q}|\chi(t)+\chi(-t)|^n&=\sum_{t\in\mathbb{F}_q}(\chi(t)+\chi(-t))^n\\&=\sum_{t\in\mathbb{F}_q}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\chi^i(t)\chi^{n-i}(-t)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sum_{t\in\mathbb{F}_q}\chi((2i-n)t)=\binom{n}{n/2}q,\end{aligned}$$

此即所求。 □

我们现在开始证明定理5.2。假设对 $1\le p,s\le\infty$,

$$L:=\|\mathcal{S}g\|_{\ell^s(\mathbb{F}_q^{d+1})}\lesssim\|g\|_{\ell^p(\mathbb{F}_q^d)}=:R,$$

其中 g 是 $\mathbb{F}_q^d.$ 上的任意径向函数。这等价于如下:

$$L=\left(\sum_{m\in\mathbb{F}_q^d,m_{d+1}\in\mathbb{F}_q}\left|\frac{1}{q}\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*}\chi(tm_{d+1})g(tm)\right|^s\right)^{\frac{1}{s}}\lesssim\left(\sum_{m\in\mathbb{F}_q^d}|g(m)|^p\right)^{\frac{1}{p}}=R.$$

显然，$1_{S_j^{d-1}}$，即半径为 $j\in\mathbb{F}_q$，的球面的示性函数，是 $\mathbb{F}_q^d.$ 上的径向函数。我们用 $g=1_{S_j^{d-1}}.$ 检验该不等式。于是可得

$$R=|S_j^{d-1}|^{\frac{1}{p}}.$$

另一方面，可得

$$L=\frac{1}{q}\left(\sum_{m\in\mathbb{F}_q^d,m_{d+1}\in\mathbb{F}_q}\left|\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*:t^2\|m\|=j}\chi(m_{d+1}t)\right|^s\right)^{\frac{1}{s}}.\tag{5.5}$$

我们假设（d，q）$\neq$（2，3（模 4））。于是由（2.1）可知 $|S_j^{d-1}|\sim q^{d-1}$对所有 $j\in\mathbb{F}_q.$ 因此，我们有

$$R\sim q^{\frac{d-1}{p}}.\tag{5.6}$$

情况 1。我们考虑 $j=0$ 在（5.5）中的情形。于是我们有

$$L=\frac{1}{q}\left(\sum_{m\in\mathbb{F}_q^d,m_{d+1}\in\mathbb{F}_q:\|m\|=0}\left|\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*}\chi(m_{d+1}t)\right|^s\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$=\frac{1}{q}\left(|S_0^{d-1}|\sum_{m_{d+1}\in\mathbb{F}_q}|q\delta_0(m_{d+1})-1|^s\right)^{\frac{1}{s}}.$$

由于 $|S_0^{d-1}|\sim q^{d-1}$，

$$L=q^{\frac{d-1}{s}-1}\left((q-1)^s+\sum_{m_{d+1}\neq 0}1\right)^{\frac{1}{s}}=q^{\frac{d-1}{s}-1}\left((q-1)^s+q-1\right)^{\frac{1}{s}}.$$

因此，对于 $s\geq 1$，我们看到 $L\sim q^{\frac{d-1}{s}}$. 由于 $L\lesssim R$，这个估计和（5.6）表明，如果 $(d,\ q)\neq(2,\ 3\ 模\ 4)$，那么 $\mathcal{S}(p\to s)\lesssim 1$ 的必要条件是

$$1\leq p\leq s\leq\infty. \tag{5.7}$$

情形 2。我们在 $j=1$ （5.5）中取值。于是有

$$L=\frac{1}{q}\left(\sum_{m\in\mathbb{F}_q^d,m_{d+1}\in\mathbb{F}_q:\eta(\|m\|)=1}\left|\chi\left(\frac{m_{d+1}}{\sqrt{\|m\|}}\right)+\chi\left(-\frac{m_{d+1}}{\sqrt{\|m\|}}\right)\right|^s\right)^{\frac{1}{s}},$$

其中 $\eta\colon\mathbb{F}_q\to\{-1,0,1\}$ 表示由下式定义的二次特征

$$\eta(t)=\begin{cases}1 & \text{if } t \text{ is a square in } \mathbb{F}_q^*,\\ -1 & \text{if } t \text{ is not a square in } \mathbb{F}_q^*,\\ 0 & \text{if } t=0.\end{cases}$$

注意到 $|\{m\in\mathbb{F}_q^d\colon\eta(\|m\|)=1\}|\sim q^d$. 由于 $\|m\|\neq 0$ 对 $m\in\mathbb{F}_q^d$ 具有 $\eta(\|m\|)=1$，我们可以通过将 m_{d+1} 替换为 $\sqrt{\|m\|}m_{d+1}$. 来进行变量替换。由此可得

$$L=\frac{1}{q}\left(\sum_{m\in\mathbb{F}_q^d:\eta(\|m\|)=1}\sum_{m_{d+1}\in\mathbb{F}_q}|\chi(m_{d+1})+\chi(-m_{d+1})|^s\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$\sim q^{\frac{d}{s}-1}\left(\sum_{m_{d+1}\in\mathbb{F}_q}|\chi(m_{d+1})+\chi(-m_{d+1})|^s\right)^{\frac{1}{s}}\sim q^{\frac{d+1}{s}-1},$$

其中最后一个估计可直接由引理 5.3得出。由于 $L \lesssim R$，上述估计和（5.6）给出了 $\mathcal{S}$（$p \to s$）$\lesssim 1$ 的必要条件，如下所示：

$$\frac{d+1}{s} - \frac{d-1}{p} \leq 1. \tag{5.8}$$

定理5.2 的证明通过对（5.7）和（5.8）的结果进行直接计算而完成。

致谢。 D. Koh 和 C. Yang 分别获得由韩国政府（科学技术信息通信部）资助的韩国国家研究基金会（NRF）项目支持，项目编号分别为（NO.RS-2023-00249597）和（No. 2021R1C1C1005700）。

参考文献

[1] Bennett, M., Hart, D., Iosevich, A., Pakianathan, J., Rudnev, M.：有限域中的群作用与几何组合学。《数学论坛》**29**(1), 91–110 (2017)[2] Bourgain, J.：Besicovitch 型极大算子及其在傅里叶分析中的应用。几何与泛函分析**1**(2), 147–187 (1991)[3] Bourgain, J., Demeter, C.： ℓ^2 解耦猜想的证明。数学年刊 (2) **182**(1), 351–389 (2015)[4] Chapman, J., Erdo˘gan, M.B., Hart, D., Iosevich, A., Koh, D.：钉扎距离集、k-单纯形、有限域中的 Wolff 指数以及和-积估计。《数学杂志》**271**(1), 63–93 (2012)[5] Covert, D., Koh, D., Pi, Y.：有限域中的广义 k-结果模集问题。《傅里叶分析及其应用杂志》**25**(3), 1026–1052 (2019)[6]Fefferman, C.：强奇异卷积算子的不等式。Acta Math. **124**, 9–36 (1970)[7] Guth, L.：一种利用多项式划分的限制估计。《美国数学会杂志》**29**(2), 371–413 (2016)[8] Guth, L., Iosevich, A., Ou, Y., Wang, H.：平面上的 Falconer 距离集问题。Invent. Math. **219**(3), 779–830 (2020)[9] Hanson, B., Lund, B., Roche-Newton, O.：有限域中的互异垂直平分线与钉扎距离。《有限域及其应用》**37**, 240–264 (2016)[10] Hart, D., Iosevich, A., Koh, D., Rudnev, M.：超平面上的平均、有限域上向量空间中的和-积理论以及 Erd˝os-Falconer 距离猜想。《美国数学会汇刊》**363**(6), 3255–3275 (2011)

[11]Iosevich, A., Koh, D.：有限域情形下抛物面的延拓定理。《数学杂志》**266**(2), 471–487 (2010)[12] Iosevich, A., Koh, D.：有限域上向量空间中与非退化二次曲面相关的傅里叶变换的延拓定理。《伊利诺伊数学杂志》**52**(2), 611–628 (2008)[13] Iosevich, A., Koh, D.：有限域情形下球面的延拓定理。《数学论坛》**22**(3), 457–483 (2010)[14]Iosevich, A., Koh, D., Lewko, M.：高偶数维中抛物面的有限域限制估计。《泛函分析杂志》**278**(11), 108450 (2020)[15] Iosevich, A., Rudnev, M.：有限域上向量空间中的 Erd˝os-Falconer 距离问题。《美国数学会汇刊》**359**(12), 6127–6142 (2007)[16]Kang, H., Koh, D.：有限域中球面和抛物面限制估计的弱版本。《数学分析及其应用杂志》**419**(2), 783–795 (2014)[17] Kang, H., Koh, D.：有限域上球面的 S 算子与限制估计之间的联系。《数学分析及其应用杂志》**554**(1), 129936 (2026)[18]Kang, H., Koh, D., Rakhmonov, F.：有限域中任意集合与 k可坐标化集合之间的 Erd˝os-Falconer 距离问题。预印本 (2025)。arXiv:2506.07251[19] Koh,D.：有限域情形下抛物面的猜想与改进延拓定理。《数学杂志》**294**(1-2), 51–69 (2020)[20] Koh, D., Lee, S., Pham, T.：四维圆锥限制猜想及其在关联几何中的应用。《国际数学研究通报》**2022**(21), 17079–17111 (2022)[21] Koh, D., Pham, T., Vinh, L.A.：有限域上的延拓定理及其与 Erd˝os-Falconer 距离问题的联系。《泛函分析杂志》**281**(8), 109137 (2021)[22] Lewko, M.：有限域上三维抛物面的新限制估计。《数学进展》**270**(1), 457–479 (2015)[23] Lewko, M.：基于 Kakeya 极大算子估计的有限域限制估计。《欧洲数学会杂志》**21**(12), 3649–3707 (2019)[24] Lewko, M.：矩形计数及 $\mathbb{F}_p^3$中抛物面的改进限制估计。《美国数学会会刊》**148**(4), 1535–1543 (2020)[25] Lewko, M.：有限域限制问题的双线性方法。《国际数学研究通报》**2025**(7), rnaf077 (2025)

[26] Lewko, A., Lewko, M.：有限域上抛物面的端点限制估计。《美国数学会会刊》**140**(6), 2013–2028 (2012)[27] Mockenhaupt, G., Tao, T.：有限域上的限制与 Kakeya 现象。杜克数学杂志 **121**(1), 35–74 (2004)[28] Murphy, B., Petridis, G., Pham, T., Rudnev, M., Stevens, S.：关于正特征下的钉扎距离问题。伦敦数学会杂志 (2)**105**(1), 469–499 (2022)[29] Rudnev, M., Shkredov, I.D.：低维离散抛物面的限制问题。《数学进展》**339**, 657–671 (2018)[30]Stein, E.M.：调和分析中的一些问题。载于：欧几里得空间中的调和分析（纯数学专题研讨会论文集，威廉姆斯学院，马萨诸塞州威廉斯敦，1978），第 1 部分，第 3–20 页 (1979)[31] Tao, T.：抛物面的尖锐双线性限制估计。几何与泛函分析 **13**(6), 1359–1384 (2003)[32] Tomas, P.：傅里叶变换的一个限制定理。美国数学会通报 **81**, 477–478 (1975)[33] Wang,H., Wu, S.：利用解耦定理和双端 Furstenberg 不等式的限制估计。预印本 (2024)。arXiv:2411.08871[34] Wolff, T.：尖锐双线性圆锥限制估计。数学年刊 (2)**153**(3), 661–698 (2001)