arXiv:2603.01617v1 [math.PR] 2 Mar 2026

辐射强迫下北极能量平衡模型中变率放大的乘性噪声机制

Gianmarco Del Sarto、Franco Flandoli 和 Marta Lenzi

摘要。我们提出并分析了一种机制，说明在随机 Sellers 型能量平衡模型中，CO_2驱动的辐射强迫如何增加北极温度变率。从一个快慢系统出发，其中日照由快速均值回复的 Ornstein-Uhlenbeck 过程建模，而温度则在较慢的宏天气时间尺度上演变；经过 Wong-Zakai 约化后，得到一个含有乘性噪声的随机能量平衡方程。围绕稳定平衡态$T^{*,\lambda}$线性化后，我们推导出温度异常的平稳方差的显式表达式，并证明只要强迫参数 λ 对应的 $T^{*,\lambda}$ 处于共反照率的冰敏感区间内，该方差就会随其单调增加。随后，我们考察了一个空间异常模型及其有限差分半离散化，得到一个有限维随机微分方程。在自然的稳定性条件和非负噪声相关性下，我们证明平稳协方差矩阵的各分量均随 λ单调增加，其中也包括非对角元素。具体而言，辐射强迫不仅放大局部方差，还会增大不同空间位置温度异常之间的协方差，这表明异常场的变率在空间上的相似性有所增强。

目录

引言 1
1. 辐射强迫会增大乘性噪声零维能量平衡模型中的方差 3
1.1. 预备知识：能量平衡模型与 Wong-Zakai 原理 3
1.2. 快慢日照–温度模型及其向乘性噪声能量平衡模型的约化 5
1.3. 平稳方差及其对辐射强迫的单调依赖性 7
2. 空间异常模型与有限维近似 9
2.1. 具有狄利克雷数据的空间能量平衡模型与异常形式 9
2.2. 有限差分半离散化 10
2.3. 半离散异常随机微分方程的平稳协方差 12
2.4. 平稳协方差关于辐射强迫参数的单调性 16
3. 观测海表温度数据分析 20
致谢 21
参考文献 23

引言

背景与研究动机。北极的升温速度显著快于全球平均水平，这一现象称为北极放大 [50]。这一过程的主要驱动因素是冰—反照率反馈：随着积雪和海冰融化，地表颜色变暗，吸收的短波辐射增多 [27, 58]。极端事件不仅受均值变化的影响，也受变率变化的影响。尤其是，方差增大会拓宽分布，使持续性暖事件或极端暖事件更有可能发生 [29, 49]。本文在一个数学上易于处理的框架内，提出并分析了一种机制，说明CO_2驱动的辐射强迫如何通过温度依赖的冰—反照率反馈增大北极温度变率。

建模框架与主要结果。我们采用能量平衡模型（EBM）这一类基础气候模型 [42]。在最简单的形式下，能量平衡模型描述代表性近地表温度如何随吸收的短波辐射与发射的长波辐射之间的平衡而演变 [7, 23, 48]。能量平衡模型因其数学上的易处理性[15,16,21,22], 以及能够捕捉地球气候的关键驱动机制而广受重视 [5,8,14,25]。Sellers 型能量平衡模型的一个核心要素是$Lipschitz$ 互反照率函数 $\beta(T)$ ，它描述了随着海冰和积雪消退，变暖导致反照率降低的过程 [36,41,45]。这种互反照率非线性是冰反照率反馈最简单的表示形式，已知它会在低阶气候模型中产生多种状态以及类似临界转变的行为 [3, 24, 38]。本文不关注状态转变，而是探讨辐射强迫如何改变稳定平衡态附近温度异常的平稳方差和协方差。

在气候动力学中，对未解析的“天气”变率进行建模的一种标准方法，是借鉴 Hasselmann 型随机气候模型 [2, 28, 57]，引入随机强迫。在能量平衡模型中，通常假设噪声是加性的。然而，正如 Hasselmann 计划中早已指出的，这是一种简化假设；噪声的正确形式应为乘性噪声 [28]。这促使我们从以下设定出发：采用快慢尺度表述，让日照（或其代理量）以快速的“天气”时间尺度（例如一天）演变，而温度则以较慢的宏天气时间尺度（例如一年）演变。 [37]近期研究了相关的日照–温度快慢尺度设定；本文关注如何约化为关于慢变量的封闭方程，以及由此产生的单调方差／协方差放大。

更精确地说，我们考虑一个耦合的快慢系统，其中日照由相关时间为 $\tau \ll 1$ 的快速均值回复奥恩斯坦–乌伦贝克过程建模，而温度服从带共反照率反馈的辐射平衡定律。我们证明，积分后的快速涨落随着 $\tau \to 0$ 收敛到布朗运动。由于在 $\tau > 0$ 固定时积分强迫是光滑的，这自然导致 Wong-Zakai 约化：以其布朗极限替换光滑驱动项，得到带 乘性噪声 的随机能量平衡模型。这提供了一种推导，将快速天气变率与具有状态依赖噪声的约化随机气候模型联系起来。

我们的主要结果量化了该设定下由强迫诱导的方差放大机制 。将约化的乘性噪声能量平衡模型在稳定平衡态 $T^{*,\lambda}$ （依赖于辐射强迫参数 λ）附近线性化后，我们得到温度异常平稳方差的显式公式。随后我们证明，只要 $T^{*,\lambda}$ 位于共反照率的冰敏感 区间（即 β 具有正斜率之处），该平稳方差便随 λ 单调增加。该机制是清楚的。辐射强迫的增强使平衡温度上移；在冰敏感区间内共反照率递增，因此乘性噪声的有效振幅及其对异常动力学的影响相应增大，从而导致更高的平稳方差。

随后，我们从单一温度变量转向考虑水平热输运的空间模型。我们研究围绕参考平衡剖面的温度异常，并在网格上近似由此产生的随机动力学。这得到一个用于描述异常场的有限维随机模型，我们可以据此明确分析长时间协方差。在标准稳定性假设和非负噪声相关性的条件下，我们证明，辐射强迫增强会使平稳协方差矩阵逐分量增大，从而提高平稳空间方差（即其迹）；我们将其用作波动强度以及出现大幅异常可能性的二阶矩代理量。这一协方差放大预测与近期针对球面上时变温度场的谐波域统计方法相辅相成；后者通过研究球谐系数随时间的演变，并采用相关的变点／结构突变方法，考察依赖结构的变化（或非平稳性）；参见 [9, 10, 39, 40]。

适用范围与局限性。我们的结果以存在稳定的确定性温度平衡为前提 $T^{*,\lambda}$ 我们围绕该平衡进行线性化，并计算平稳二阶矩。对于北极地区的应用，这一假设并非必然成立：在极地冬季（此时平均太阳辐照度接近于零），稳定性基本可以保证；但如果将强迫解释为夏季或年均强迫，则稳定性可能存疑，因为此时冰反照率反馈最强。尽管如此，我们仍将稳定性作为一阶工作

假设，因为能量平衡模型的关键参数存在不确定性，且难以针对不同区域进行校准（即在我们的北极研究情境中）；此外，更完整的处理方式需要通过设定随时间周期性变化的日照来纳入季节性因素。这将形成一个非自治问题，其中参考平衡 $T^{*}, \lambda(t)$（随时间变化）描述的是季节循环，而非固定平衡。我们将这一扩展留待未来研究。

观测比较。在论文的最后一部分，我们将理论结果与观测进行比较，考察模型所预测的变率变化能否在真实数据中看到。由于当均值状态接近对融化敏感的温度范围时，冰反照率反馈预计最为强烈，我们聚焦于八月海表温度 在北极及邻近北半球高纬度地区的情况，并追踪卫星时代均值与变率的变化。更一般地，变暖条件下的方差变化可能强烈依赖于区域 [35]；据此，变率变化在空间上应当是非均匀的，北极海域和过渡带的表现不同于持续被冰覆盖的区域或温暖的开阔海洋区域。

论文结构。本文安排如下。第1 节介绍随机Sellers型能量平衡模型，借助快慢尺度表述与Wong-Zakai推导乘性噪声降阶模型，并证明方差放大关于辐射强迫的单调性。第2 节建立空间异常模型，构造有限差分半离散，推导协方差动力学及其平稳极限，并在适当假设下确立平稳协方差与空间方差的单调性。最后，第3 节将模型预测与观测的八月海表温度 进行比较，资料来自美国国家海洋和大气管理局（NOAA）、位于60°N以北。我们用滚动十年统计追踪时间变率，用区域内标准差刻画空间异质性，并将北极海域与变化很小的区域进行对比。

1。辐射强迫会放大乘性噪声零维能量平衡模型中的方差 M

1.1. 预备知识：能量平衡模型与 Wong-Zakai 原理。

1.1.1. 能量平衡气候模型。 在气候模型层级中，复杂度最低的类别之一是 能量平衡模型 [42]。Budyko 和 Sellers 于 1969 [7,48],分别独立提出了能量平衡模型，用于描述一个代表性（近地表）温度 T (单位为开尔文)在吸收的短波辐射 $\mathcal{R}_a$ 与发射的长波辐射 $\mathcal{R}_e$之间的平衡作用下的演变。其零维形式可表示为

$$C_{\text{eff}}\frac{dT}{dt} = \mathcal{R}_a - \mathcal{R}_e, \tag{1.1}$$

其中， $C_{\text{eff}} > 0$ 为单位面积的有效热容量；等价地，通过对时间进行缩放，可令$C_{\text{eff}} = 1$ 并得到 $\frac{dT}{dt} = \mathcal{R}_a - \mathcal{R}_e$。该模型还可通过引入空间变量（通常为纬度，即进行纬向平均后）并以扩散表示经向热输运来扩展，从而得到一个非线性抛物型偏微分方程，参见 [23, 41]。

在本文中，我们针对北极采用一个简化的区域能量平衡模型（EBM）。这一选择的动机在于，北极温度变率及其趋势受到局地辐射能量收支的强烈约束，并受到冰冻圈反馈的放大，其中最显著的是海冰/积雪反照率反馈；这使得简化的能量平衡描述在区域尺度上具有信息价值 [17, 56]。与此一致，低阶能量平衡模型和海冰模型已被用于近期关于海冰稳定性、北极变暖和冰损失转变的研究 [19, 25, 46]。

对于发射辐射 $\mathcal{R}_e$ ，我们采用经典的布迪科经验公式 [7, 42] ，并假设

$$\mathcal{R}_e(T) = r_0 + r_1 T,$$

其中 $r_0 \in \mathbb{R}$ 和 $r_1 > 0$。对于吸收的短波辐射，我们设定

$$\mathcal{R}_a(T, Q, \lambda) = Q\beta(T) + \lambda,$$

其中， Q 表示入射太阳通量（可能是区域平均值），而 $\beta \in (0,\ 1)$是共反照率，即吸收的入射短波辐射所占的比例（$\beta = 1-\alpha$，其中 α为反照率）。此处，与 [5,13]中一样， λ

表示温室气体对辐射平衡的影响； λ越大，辐射强迫就越大，因此温室效应也越强，从而导致吸收的辐射增多。遵循能量平衡模型文献中采用的连续分段线性参数化方法，如 [45], 所示，我们考虑

$$\beta(T) = \begin{cases} \beta_{\min}, & \text{if } T \le T_l, \\ \beta_{\min} + \dfrac{\beta_{\max} - \beta_{\min}}{T_u - T_l}(T - T_l), & \text{if } T_l < T < T_u, \\ \beta_{\max}, & \text{if } T \ge T_u. \end{cases} \tag{1.2}$$

其中， $\beta_{\min}$ 和 $\beta_{\max}$ 分别表示冰覆盖（寒冷）状态和无冰（温暖）状态下的共反照率极限值；Sellers 型模型中的典型值为 $\beta_{\min} \approx 0.38$ 和 $\beta_{\max} \approx 0.70$ [41]。此处，$T_l = 263\text{K}$ 和 $T_u = 300\text{K}$，与 [45]中的设定相同。我们强调，这些数值并不旨在表示冰的融化温度，而是用于参数化这样一个温度范围：在该范围内，有效的（区域平均）冰覆盖率以及相应的共反照率，会从冰覆盖状态下的极限过渡到无冰状态下的极限 [41, 45]。这一解释与融化热力学相一致。由于相变涉及熔化潜热，融化冰需要大量能量，因此在融化持续进行的过程中，温度可以保持在接近冰点的水平。在简单的海冰/能量平衡模型表述中，当存在冰时，这种“潜热缓冲”通过在焓（能量）预算的框架下处理融化过程来体现，参见 [18, 19]。最后请注意，我们的能量平衡模型属于 Sellers 型模型，这意味着共反照率是 Lipschitz 连续的。另一类主要的能量平衡模型是 Budyko 型模型，其特征是共反照率不连续。在后一种情况下，已知唯一性可能失效；例如，参见 [16] 对弱解非唯一性的讨论。

1.1.2. *Wong-Zakai 原理。* 值得回顾一下 Wong-Zakai 原理，我们将在第 1.2 节中用到这一工具。粗略地说，该原理断言，如果我们考虑布朗运动的光滑近似 W_t^ε of a Brownianmotion W_t 满足

$$W_t^\varepsilon \to W_t$$

在足够强的意义下，那么相应微分方程的解 Z_t^ε （对于固定的 ω，这是路径依赖的确定性微分方程）

$$\frac{dZ_t^\varepsilon}{dt} = b(t, Z_t^\varepsilon) + \sigma(t, Z_t^\varepsilon)\frac{dW_t^\varepsilon}{dt},$$

将（以与 $W_t^\varepsilon \to W_t$ 相同的收敛方式）在 $\varepsilon \to 0$ 趋于相应极限时，收敛到由*Stratonovich* 噪声驱动的随机微分方程的解

$$dZ_t = b(t, Z_t)\, dt + \sigma(t, Z_t) \circ dW_t.$$

例如，参见 [32, 第 5 章。2] 或 [31, 55] ，了解 Wong-Zakai 原理的更多细节。

为清楚起见，我们回顾一下，Stratonovich 随机积分 $\int_0^t \sigma(s, Z_s) \circ dW_s$ 定义为采用中点取值的黎曼和在概率意义下的极限，

$$\sum_k \sigma\left(t_k, \frac{Z_{t_k} + Z_{t_{k+1}}}{2}\right)\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right),$$

只要该极限存在即可。这与 Itô 积分 $\int_0^t \sigma(s, Z_s)\, dW_s$ 不同，后者通过左端点取值 $\sigma(t_k, Z_{t_k})$ 定义。一个关键结果是，Stratonovich 微积分遵循经典链式法则（如同普通微积分），而 Itô 微积分则涉及额外的二次变差修正项。具体而言，对于足够规则的系数，有如下转换公式

$$\int_0^t \sigma(s, Z_s) \circ dW_s = \int_0^t \sigma(s, Z_s)\, dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \partial_z \sigma(s, Z_s)\sigma(s, Z_s)\, ds,$$

因此，以斯特拉托诺维奇形式书写的随机微分方程对应于漂移项中多出一个修正项的伊藤随机微分方程，见 [47, 第 4 节6]。

1.2. 快慢日照–温度模型及其向乘性噪声能量平衡模型的约化。我们考虑一个快慢系统，用以描述在宏天气时间尺度（例如一年）上演化的慢温度过程 T 与在天气时间尺度（例如一天）上演化的快分量 X 之间的相互作用。在我们的设定中， X 表示日照（或其代理量）。我们将 X 建模为围绕气候平均水平 Q 波动的均值回复奥恩斯坦–乌伦贝克过程，而温度则遵循辐射平衡定律。更具体地，在慢时间变量 t 上，我们考虑

$$\begin{cases} dX_t^\tau = -\dfrac{1}{\tau}(X_t^\tau - Q)dt + \dfrac{1}{\sqrt{\tau}}dW_t, & X_0^\tau = x_0, \\ \dfrac{dT_t^{\tau,\lambda}}{dt} = X_t^\tau \beta(T_t^{\tau,\lambda}) + \lambda - (r_0 + r_1 T_t^{\tau,\lambda}), & T_0^{\tau,\lambda} = \theta_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $(W_t)_t$ 表示布朗运动，而 x_0, θ_0 是确定性的初始条件。参数$\tau > 0$ 表示快、慢时间尺度之比（例如，$\tau \approx 1/365$ 表示慢时间尺度为一年、快时间尺度为一天）。即使 τ 很小，在实际应用中它也不是无穷小量；这一点将在下文中起到重要作用。

(1.3) 中缩放的一个关键特点是， X^τ 的不变测度的方差不依赖于 τ：事实上，对于奥恩斯坦–乌伦贝克过程 $dX_t^\tau = -(1/\tau)(X_t^\tau - Q)dt + (1/\sqrt{\tau})dW_t$，其平稳分布为高斯分布，均值为 Q ，方差为 $1/2$. 因此,¯ τ 控制的是 相关时间，而非 X^τ的方差。

此时，我们希望为慢过程 $T^{\tau,\lambda}_t$ 推导出一个闭合方程。

引理 1.1. 对于任意 $t > 0$，有

$$\lim_{\tau \to 0} \mathbb{E}\left| \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_0^t X_s^\tau ds - \frac{Qt}{\sqrt{\tau}} - W_t \right|^2 = 0.$$

证明。 为简单起见，我们省略 X^τ 中对 τ 的依赖。快过程 X_t 可显式写为

$$\begin{aligned} X_t &= x_0 e^{-t/\tau} + \frac{1}{\tau}\int_0^t Q e^{-(t-s)/\tau} ds + \frac{1}{\sqrt{\tau}}\int_0^t e^{-(t-s)/\tau} dW_s \\ &= x_0 e^{-t/\tau} + Q\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + \frac{1}{\sqrt{\tau}}\int_0^t e^{-(t-s)/\tau} dW_s \\ &= (x_0 - Q)\, e^{-t/\tau} + Q + \frac{1}{\sqrt{\tau}}\int_0^t e^{-(t-s)/\tau} dW_s. \end{aligned}$$

因此，对时间积分可得

$$\begin{aligned} \int_0^t X_s ds &= \int_0^t \left[(x_0 - Q)\, e^{-s/\tau} + Q + \frac{1}{\sqrt{\tau}}\int_0^s e^{-(s-r)/\tau} dW_r \right] ds \\ &= \tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)(x_0 - Q) + tQ + \frac{1}{\sqrt{\tau}}\int_0^t \int_0^s e^{-(s-r)/\tau} dW_r ds. \end{aligned}$$

右侧（RHS）的最后一项可通过对随机积分应用富比尼–托内利定理来计算。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\tau}}\int_0^t \int_0^s e^{-(s-r)/\tau} dW_r ds = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\int_0^t \int_r^t e^{-(s-r)/\tau} ds dW_r &= \sqrt{\tau}\int_0^t \left(1 - e^{-(t-r)/\tau}\right) dW_r \\ &= \sqrt{\tau}\left(W_t - \int_0^t e^{-(t-r)/\tau} dW_r \right). \end{aligned}$$

由前面的计算可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|\frac{1}{\sqrt{\tau}}\int_0^t X_s ds-\frac{Qt}{\sqrt{\tau}}-W_t\right|^2 &= \mathbb{E}\left|\sqrt{\tau}\left(1-e^{-t/\tau}\right)(x_0-Q)-\int_0^t e^{-(t-r)/\tau}dW_r\right|^2\\ &\le 2\tau\left(1-e^{-t/\tau}\right)^2(x_0-Q)^2+2\mathbb{E}\left|\int_0^t e^{-(t-r)/\tau}dW_r\right|^2\\ &= 2\tau\left(1-e^{-t/\tau}\right)^2(x_0-Q)^2+2\int_0^t e^{-2(t-r)/\tau}dr\\ &= 2\tau\left(1-e^{-t/\tau}\right)^2(x_0-Q)^2+\tau\left(1-e^{-2t/\tau}\right)\end{aligned}$$

其中，第一个不等式由詹森不等式得出，后一个不等式则由伊藤等距性得出。令 τ 中的极限趋近，我们便得到证明。

□

定义中心化积分快速涨落

$$W_t^\tau := \frac{1}{\sqrt{\tau}}\int_0^t (X_s^\tau - Q)\,ds.$$

由于 X^τ 具有连续路径， W^τ 是 C^1 ，并且

$$dW_t^\tau = \frac{1}{\sqrt{\tau}}(X_t^\tau - Q)\,dt.$$

引理 1.1 给出 $W_t^\tau \to W_t$ 在 L^2 对每个固定的 t。利用这个恒等式，式（1.3）中的温度方程可以改写为随机常微分方程

$$dT_t^{\tau,\lambda} = \left(Q\beta(T_t^{\tau,\lambda}) + \lambda - \mathcal{R}_e(T_t^{\tau,\lambda})\right)dt + \sqrt{\tau}\,\beta(T_t^{\tau,\lambda})\,dW_t^\tau, \tag{1.4}$$

其中最后一个积分按路径意义理解（黎曼–斯蒂尔切斯），因为 W^τ 是 C^1。我们现在援引Wong–Zakai 原理（见第1.1节）。由于（1.4）由光滑过程 W^τ驱动，将W^τ 替换为其布朗极限 W 会使极限随机积分采用斯特拉托诺维奇解释。因此，对于 $\tau \ll 1$，我们将 $T^{\tau,\lambda}$近似为如下方程的解 $\widetilde{T}^{\tau,\lambda}$

$$d\widetilde{T}_t^{\tau,\lambda} = \left(Q\beta(\widetilde{T}_t^{\tau,\lambda}) + \lambda - \mathcal{R}_e(\widetilde{T}_t^{\tau,\lambda})\right)dt + \sqrt{\tau}\,\beta(\widetilde{T}_t^{\tau,\lambda})\circ dW_t. \tag{1.5}$$

以伊藤形式，（1.5）变为

$$d\widetilde{T}_t^{\tau,\lambda} = \left(Q\beta(\widetilde{T}_t^{\tau,\lambda}) + \lambda - \mathcal{R}_e(\widetilde{T}_t^{\tau,\lambda}) + \frac{\tau}{2}\beta(\widetilde{T}_t^{\tau,\lambda})\beta'(\widetilde{T}_t^{\tau,\lambda})\right)dt + \sqrt{\tau}\,\beta(\widetilde{T}_t^{\tau,\lambda})dW_t. \tag{1.6}$$

我们强调，我们并非取字面极限 $\tau \to 0$ ，即从（1.4）到（1.5）。这样做确实会使扩散系数消失。相反，τ是快慢时间尺度之间（虽小但为正）的比值，而从（1.4）到（1.5）的过渡是一个模型降阶步骤：对于 $\tau \ll 1$，由快速奥恩斯坦–乌伦贝克过程产生的驱动被近似为白噪声驱动，并采用由Wong-Zakai所建议的斯特拉托诺维奇解释。

我们研究稳定平衡态 $T^{*,\lambda}$ 附近的波动，因此，温度异常

$$Y_t^{\tau,\lambda} := \widetilde{T}_t^{\tau,\lambda} - T^{*,\lambda}$$

保持较小，因此围绕 $T^{*,\lambda}$对 $\beta(T)$ 进行线性化是自然的。伊藤–斯特拉托诺维奇修正是一个 $O(\tau)$ 漂移项，而且由于 $\tau \approx 1/365$ (其中 β, β' 有界)，它远小于用于描述辐射平衡 $\mathcal{R}_a - \mathcal{R}_e$的其余确定性漂移项。因此，我们可以忽略它。于是，我们将 $T^{*,\lambda}$ 定义为与式（1.6）相关的确定性定常方程的稳定平衡温度 $T^* = T^{*,\lambda}$。我们强调，我们的分析以如下假设为前提：对于确定性能量平衡模型（1.1）， $T^{*,\lambda}$ 是一个稳定平衡点。换言之， $T^{*,\lambda}$ 是

$$Q\beta(T^{*,\lambda}) + \lambda - \mathcal{R}_e(T^{*,\lambda}) = 0, \tag{1.7}$$

并且在确定性动力学下是（局部渐近）稳定的，即 $\frac{dT}{dt} = Q\beta(T) + \lambda - \mathcal{R}_e(T)$ 在 $T^{*,\lambda}$ 处的线性化具有负斜率

$$\frac{d}{dT}(Q\beta(T) + \lambda - \mathcal{R}_e(T))|_{T=T^{*,\lambda}} = Q\beta'(T^{*,\lambda}) - \mathcal{R}_e'(T^{*,\lambda}) < 0,$$

等价地

$$b^\lambda = \mathcal{R}_e'(T^{*,\lambda}) - Q\beta'(T^{*,\lambda}) > 0 \tag{1.8}$$

由于 β 由（1.2）可知是分段线性的，因此对于 T 在 T^{*}的某个邻域内，$^{\lambda}$ 且该邻域不跨越 T_l 或 T_u，我们有如下仿射表示:

$$\beta(T) = \beta(T^{*,\lambda}) + \beta'(T^{*,\lambda})(T - T^{*,\lambda}), \tag{1.9}$$

其中，在区间（T_l, T_u）之外，$\beta'(T^{*,\lambda}) = 0$；而在区间内，$\beta'(T^{*,\lambda}) = (\beta_{\max} - \beta_{\min})/(T_u - T_l)$。因此，回想一下，$\mathcal{R}_e(T) = r_0 + r_1 T$已经是线性的，在（1.6）中应用（1.9），并利用（1.7）消去常数漂移项，可得

$$dY_t^{\tau,\lambda} = \left(Q\beta'(T^{*,\lambda}) - r_1\right) Y_t^{\tau,\lambda} dt + \sqrt{\tau}\left(\beta(T^{*,\lambda}) + \beta'(T^{*,\lambda}) Y_t^{\tau,\lambda}\right) dW_t, \qquad Y_0 = y_0, \tag{1.10}$$

其中，y_0 是某个确定性的初始条件。引入以下简写

$$b^\lambda := -Q\beta'(T^{*,\lambda}) + r_1, \qquad \sigma_0^\lambda := \beta(T^{*,\lambda}), \qquad \sigma_1^\lambda := \beta'(T^{*,\lambda}),$$

那么，线性能量平衡模式（1.10）可简洁地写为

$$dY_t^{\tau,\lambda} = -b^\lambda Y_t^{\tau,\lambda} dt + \sqrt{\tau}(\sigma_0^\lambda + \sigma_1^\lambda Y_t^{\tau,\lambda}) dW_t, \qquad Y_0^{\tau,\lambda} = y_0.$$

注 *1.2*（关于稳定性条件 *(1.8)*）。条件 *(1.8)* 是确定性能量平衡模型在 $T^{*,\lambda}$ 处的稳定性要求。在冰敏感区间之外（即 $T^{*,\lambda} < T_l$ 或 $T^{*,\lambda} > T_u$），该条件自动成立，因为 $\beta'(T^{*,\lambda}) = 0$，因此 $b^\lambda = r_1 > 0$。在冰敏感区间内（即 $T^{*,\lambda} \in (T_l, T_u)$），$b^\lambda = r_1 - Q\beta'(T^{*,\lambda})$ 的符号取决于 Q 的大小。对于北极冬季平均，我们可以合理地认为 $Q \approx 0$；因此预期系统是稳定的。另一方面，对于夏季强迫或年平均强迫，该条件可能不成立。由于我们的平稳方差分析要求稳定线性化，我们将 *(1.8)* 视为一项明确的建模假设，用以界定模型的有效范围。更现实的做法是引入季节强迫 $Q = Q(t)$，从而得到一个非自治模型；这留待未来研究。

1.3. **平稳方差与对辐射强迫的单调依赖**。本节证明，与方程（1.10）的解相关联的平稳方差会随 λ单调增加。这意味着，随着大气中的 CO_2 浓度上升，气候方差（即平稳温度异常）也会随之增大。

我们首先注意到，由于 $t \mapsto \int_0^t (\sigma_0^\lambda + \sigma_1^\lambda Y^{\tau,}{}_s{}^{\lambda})\, dW_s$ 是一个鞅，因此过程 $Y^{\tau,}{}_t{}^{\lambda}$ 的期望满足

$$\mathbb{E}[Y_t^{\tau,\lambda}] = y_0 - b^\lambda \int_0^t \mathbb{E}[Y_s^{\tau,\lambda}]\, ds. \tag{1.11}$$

将（1.10）写成积分形式，再取期望，即可看出这一点。方程（1.11）的解为

$$\mathbb{E}[Y_t^{\tau,\lambda}] = e^{-b^\lambda t} y_0, \qquad t \geq 0.$$

因此，当时间 t 趋于无穷大时，$Y^{\tau,}{}_t{}^{\lambda}$ 的期望存在极限，且当且仅当 $b^\lambda > 0.$ 时，该极限与 y_0 无关。在这种情况下，我们有

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{E}[Y_t^{\tau,\lambda}] = 0.$$

这再次说明了为什么在此框架下，假设 $b^\lambda > 0$（1.8）是自然的。此外，为简化计算，我们还假设 $y_0 = 0$，由此得到 $\mathbb{E}[Y_t^{\tau,\lambda}] = 0$ 对任意 $t \geq 0.$ 以下结果给出了与方程（1.10）相关的平稳方差。

命题 1.3. 假设

$$b^\lambda > 0, \qquad 2b^\lambda - \tau(\sigma_1^\lambda)^2 > 0.$$

那么，以下极限存在

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}[|Y_t^{\tau,\lambda}|^2] = \frac{\tau(\sigma_0^\lambda)^2}{2b^\lambda - \tau(\sigma_1^\lambda)^2}.$$

证明。为便于阅读，我们省略上标 τ，λ。为简化起见，假设 $y_0 = 0$，并采用记号$V(t) = \mathbb{E}[|Y_t|^2]$。因此，$Y_t$ 是一个中心化过程。根据伊藤公式可得

$$\begin{aligned} d(Y_t)^2 &= 2Y_t dY_t + d[Y.]_t \\ &= 2Y_t\left(-bY_t dt + \sqrt{\tau}(\sigma_0 + \sigma_1 Y_t)dW_t\right) + \tau(\sigma_0 + \sigma_1 Y_t)^2 dt \\ &= \left[-(2b - \tau\sigma_1^2)Y_t^2 + 2\tau\sigma_0\sigma_1 Y_t + \tau\sigma_0^2\right] dt + dM_t, \end{aligned} \tag{1.12}$$

其中，$[Y.]_t$ 表示过程 Y_t 的二次变差，而 M_t 是一个鞅。对前一个等式取期望，并利用 $\mathbb{E}[Y_t] = 0$，可得

$$\frac{d}{dt}V(t) = -(2b - \tau\sigma_1^2)V(t) + \tau\sigma_0^2.$$

由于 $V(0) = 0$，其解为

$$V(t) = \tau\sigma_0^2 \int_0^t e^{-(2b-\tau\sigma_1^2)(t-s)} ds = \frac{\tau\sigma_0^2}{2b - \tau\sigma_1^2}\left(1 - e^{-(2b-\tau\sigma_1^2)t}\right).$$

因此

$$\lim_{t\to+\infty} V(t) = \frac{\tau\sigma_0^2}{2b - \tau\sigma_1^2},$$

前提是 $2b - \tau\sigma_1^2 > 0$。 □

现在我们可以证明本节的主要结果了，该结果讨论的是：当辐射强迫增加时，平稳方差如何随之增大，其中辐射强迫由 λ 建模。

命题 1.4。假设

$$b^\lambda > 0, \qquad 2b^\lambda - \tau(\sigma_1^\lambda)^2 > 0, \qquad T^{*,\lambda} \in (T_l, T_u).$$

那么，平稳方差单调递增。换言之，令

$$\lambda \mapsto \mathrm{Var}_\infty(\lambda) := \lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}[|Y_t^{\tau,\lambda}|^2] = \frac{\tau(\sigma_0^\lambda)^2}{2b^\lambda - \tau(\sigma_1^\lambda)^2} = \frac{\tau\beta(T^{*,\lambda})^2}{2(r_1 - Q\beta'(T^{*,\lambda})) - \tau\beta'(T^{*,\lambda})^2},$$

我们有 方差$_\infty(\lambda)' > 0$.

证明。为简单起见，假设 $y_0 = 0$。回顾一下，$T^{*,\lambda}$ 定义为

$$Q\beta(T^{*,\lambda}) + \lambda - \mathcal{R}_e(T^{*,\lambda}) = 0,$$

并且线性化系数为

$$b^\lambda = r_1 - Q\beta'(T^{*,\lambda}), \qquad \sigma_0^\lambda = \beta(T^{*,\lambda}), \qquad \sigma_1^\lambda = \beta'(T^{*,\lambda}).$$

根据命题 1.3，温度异常的平稳方差 $Y_t^{\tau,\lambda} = \widetilde{T}_t^{\tau,\lambda} - T^{*,\lambda}$ is

$$\mathrm{Var}_\infty(\lambda) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}|Y_t^{\tau,\lambda}|^2 = \frac{\tau(\sigma_0^\lambda)^2}{2b^\lambda - \tau(\sigma_1^\lambda)^2} = \frac{\tau\,\beta(T^{*,\lambda})^2}{2\big(r_1 - Q\beta'(T^{*,\lambda})\big) - \tau\,\beta'(T^{*,\lambda})^2}.$$

步骤 *1*：增加 λ 会提高平衡温度 $T^{*,\lambda}$。对 λ 中的平衡方程进行隐式微分可得

$$\left(Q\beta'(T^{*,\lambda}) - \mathcal{R}_e'(T^{*,\lambda})\right)\frac{dT^{*,\lambda}}{d\lambda} + 1 = 0.$$

由于 $\mathcal{R}_e'(T) \equiv r_1$ 和 $b^\lambda = r_1 - Q\beta'(T^{*,\lambda})$，因此变为

$$\frac{dT^{*,\lambda}}{d\lambda} = \frac{1}{b^\lambda} > 0.$$

步骤 2：平稳方差单调增加。为简便起见，设

$$N(\lambda) := \tau\beta(T^{*,\lambda})^2, \qquad D(\lambda) := 2\big(r_1 - Q\beta'(T^{*,\lambda})\big) - \tau\,\beta'(T^{*,\lambda})^2$$

因此

$$\mathrm{Var}_\infty(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{D(\lambda)}.$$

在步骤 1 中，我们已证明 $\lambda \mapsto T^{*,\lambda}$ 单调递增。此外，根据能量平衡模型的标准建模，共反照率 β 递增。因此

$$N'(\lambda) = 2\tau\beta(T^{*,\lambda})\beta'(T^{*,\lambda})\frac{dT^{*,\lambda}}{d\lambda} > 0. \tag{1.13}$$

注意，$\beta'(T^{*,\lambda})$ 非零（且为正），因为 $T^{*,\lambda} \in (T_l,\ T_u)$，由（1.2）可知。关于 $D(\lambda)$，由于 β 是分段线性的，因此 $\beta'' = 0$. 因此

$$D'(\lambda) = -2\beta''(T^{*,\lambda})(Q + \tau\beta'(T^{*,\lambda}))\frac{dT^{*,\lambda}}{d\lambda} = 0. \tag{1.14}$$

结合（1.13）和（1.14），我们得出

$$\mathrm{Var}'_\infty(\lambda) = \frac{N'(\lambda)D(\lambda) - N(\lambda)D'(\lambda)}{D(\lambda)^2} = \frac{N'(\lambda)D(\lambda)}{D(\lambda)^2} > 0,$$

因为 $D(\lambda) > 0$，这要归功于假设 $2b^\lambda - \tau(\sigma_1^\lambda)^2 > 0$。 □

从气候角度看，前一个结果表明，增强的 CO_2 强迫不仅会使平衡状态升温，还会通过冰反照率反馈放大平衡状态附近的温度异常。事实上，平稳方差的单调增加可以直接从显式公式中看出

$$\mathrm{Var}_\infty(\lambda) = \frac{\tau\,\beta(T^{*,\lambda})^2}{2\big(r_1 - Q\beta'(T^{*,\lambda})\big) - \tau\,\beta'(T^{*,\lambda})^2}.$$

根据前一个证明中的步骤 1，增大 λ 会提高平衡温度 $T^{*,\lambda}$。如果 $T^{*,\lambda} \in (T_l, T_u)$，那么 β 严格递增，因此分子 $\tau\,\beta(T^{*,\lambda})^2$ 随 λ 增大。此外，由于 β 在 (T_l, T_u) 上是仿射函数，我们有 $\beta'(T^{*,\lambda}) \equiv (\beta_{\max} - \beta_{\min})/(T_u - T_l)$，所以分母 $2(r_1 - Q\beta'(T^{*,\lambda})) - \tau\,\beta'(T^{*,\lambda})^2$ 在此范围内为常数。因此，$\mathrm{Var}_\infty(\lambda)$ 随 λ 增大。从气候角度看，增强的 CO_2 强迫不仅会使平衡状态升温，还会通过共反照率的温度依赖性（冰反照率反馈）放大其周围的波动。

2. 空间异常模型与有限维近似

本节将第1节中的零维随机能量平衡模型（1.6）扩展为适用于区域模型（北极）的空间依赖版本。为此，我们引入水平热输运。首先，在第2.1 节中，我们建立一个带有乘性噪声的能量平衡随机偏微分方程，其中狄利克雷非齐次边界数据表示相邻区域的影响。随后，在第2.2 节中，我们构造有限差分半离散化，得到描述温度异常的有限维随机微分方程。在第2.3节中，我们推导随机微分方程协方差矩阵的封闭演化方程，并确定其平稳极限。最后，在第2.4 节中，我们证明，在噪声协方差和确定性动力学满足自然假设的条件下，平稳协方差随辐射强迫参数 λ 逐项增大。

2.1. 具有狄利克雷数据和异常形式的空间能量平衡模型。 设 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有界区域，其边界 $\partial\mathcal{D}$ 足够光滑。我们考虑一个带扩散的哈塞尔曼型随机能量平衡模型，即方程（1.6）的空间依赖扩展。（近地表）温度场 $T^{\tau,\lambda}(t,\ x)$ 依赖于时间尺度参数 τ 和辐射强迫 λ，满足非齐次狄利克雷边界条件

$$T^{\tau,\lambda}(t,\xi) = \theta(\xi), \qquad t \geq 0,\ \xi \in \partial\mathcal{D}, \tag{2.1}$$

其中， θ 是给定的边界剖面；下文中，我们假设 θ 与辐射强迫参数 λ 无关，但我们的分析也适用于 $\theta=\theta^{\lambda}$ 的情形。在 $\mathcal{D}$ 上，我们假设伊藤随机偏微分方程

$$\begin{cases} dT_t^{\tau,\lambda} = \left(\Delta T_t^{\tau,\lambda} + Q\,\beta(T_t^{\tau,\lambda}) + \lambda - \mathcal{R}_e(T_t^{\tau,\lambda})\right) dt + \sqrt{\tau}\,\beta(T_t^{\tau,\lambda})\,dW_t, \\ T^{\tau,\lambda}|_{\partial\mathcal{D}} = \theta \\ T^{\tau,\lambda}|_{t=0} = T_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 $Q=Q(x)$ 表示给定的日照函数， β 表示共反照率， λ 表示辐射强迫参数， W_t 表示定义在 $L^2(\mathcal{D})$上的维纳过程，而 T_0 表示初始条件。这里不具体说明这些对象的细节，因为我们仅以启发式方式使用它们；感兴趣的读者可参阅 [12]。

为简单起见，假设狄利克雷数据 θ 与时间无关。我们将参考剖面$T^{*,\lambda}$ 定义为具有相同边界值的确定性问题的一个（稳定）平稳解

$$\begin{cases} \Delta T^{*,\lambda}(x) + Q(x)\,\beta(T^{*,\lambda}(x)) + \lambda - \mathcal{R}_e(T^{*,\lambda}(x)) = 0, & x\in\mathcal{D}, \\ T^{*,\lambda}(\xi) = \theta(\xi), & \xi\in\partial\mathcal{D}. \end{cases} \tag{2.3}$$

温度异常定义为

$$Y_t^{\tau,\lambda}(x) := T_t^{\tau,\lambda}(x) - T^{*,\lambda}(x).$$

根据构造，(2.1) 和 (2.3) 得到

$$Y_t^{\tau,\lambda}(\xi) = 0, \qquad \xi\in\partial\mathcal{D}, \tag{2.4}$$

也就是说，异常满足齐次狄利克雷边界条件。从（2.3）中减去（2.2），得到异常随机偏微分方程

$$dY_t^{\tau,\lambda} = \left(\Delta Y_t^{\tau,\lambda} + Q(\beta(T^{*,\lambda}+Y_t^{\tau,\lambda}) - \beta(T^{*,\lambda})) - (\mathcal{R}_e(T^{*,\lambda}+Y_t^{\tau,\lambda}) - \mathcal{R}_e(T^{*,\lambda}))\right) dt + \sqrt{\tau}\,\beta(T^{*,\lambda}+Y_t^{\tau,\lambda})\,dW_t, \tag{2.5}$$

满足齐次狄利克雷边界条件（2.4）。与零维情形一样，如果 y 很小，则有如下关系

$$\beta(T^{*,\lambda}+y) = \beta(T^{*,\lambda}) + \beta'(T^{*,\lambda})\,y.$$

由于在我们的 模型中， $\mathcal{R}_e$是仿射的（例如， $\mathcal{R}_e(T)=r_0+r_1T$），我们得到线性乘性随机偏微分方程

$$\begin{cases} dY_t^{\tau,\lambda} = \left(\Delta Y_t^{\tau,\lambda} - a^{\lambda}Y_t^{\tau,\lambda}\right) dt + \sqrt{\tau}\left(\beta(T^{*,\lambda}) + \beta'(T^{*,\lambda})\,Y_t^{\tau,\lambda}\right) dW_t, \\ Y^{\tau,\lambda}|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \\ Y^{\tau,\lambda}|_{t=0} = T_0 - T^{*,\lambda}, \end{cases} \tag{2.6}$$

其中

$$a^{\lambda}(x) := -Q(x)\,\beta'(T^{*,\lambda}(x)) + \mathcal{R}_e'(T^{*,\lambda}(x)).$$

方程（2.6）补充了齐次狄利克雷边界条件（2.4）。这里我们不讨论（2.6）的适定性；该随机偏微分方程是半离散协方差分析的形式化起点。

2.2. **有限差分半离散化**。 现在，我们在二维网格上推导式（2.6）的有限差分近似。为简便起见，我们在矩形网格上介绍这一构造；在一般网格上，所得半离散随机微分方程具有相同的结构，只需将 A_{Δ} 替换为相应的刚度矩阵即可。关于抛物型偏微分方程有限差分方法的详细论述，请参阅 [34, 44] 。

为描述数值离散化，简单起见，假设 $\mathcal{D}=(0,L_x)\times(0,L_y)$。考虑均匀网格 $x_i=ih_x$，其中 $i=0,\ldots,N_x$，且 $y_j=jh_y$，其中 $j=0,\ldots,N_y$。我们记

$$\mathcal{I} := \{1,\ldots,N_x-1\}\times\{1,\ldots,N_y-1\}$$

内部索引对的集合，以及由

$$z_{i,j} := (x_i,y_j)\in\mathcal{D}, \qquad (i,j)\in\mathcal{I},$$

相应的内部网格点。我们通过双射，用单一索引 $m = 1, \dots, d$（其中 $d = (N_x - 1)(N_y - 1)$）对内部节点进行枚举

$$m = m(i, j) := (j - 1)(N_x - 1) + i, \qquad (i, j) \in \mathcal{I},$$

并记 $z_m := z_{i,j}$，当 $m = m(i, j)$ 时。定义节点未知量 $Y^{\tau,\lambda}_{i,j}(t) := Y^{\tau,\lambda}_t(z_{i,j})$，其中 $(i, j) \in \mathcal{I}$。利用双射 $m = m(i, j)$，将这些内部节点值收集为向量 $Y^{\tau,\lambda}_t \in \mathbb{R}^d$，其中$d = (N_x - 1)(N_y - 1)$，定义为 $(Y^{\tau,\lambda}_t)_m := Y^{\tau,\lambda}_{i,j}(t)$，当 $m = m(i, j)$ 时。内部节点处拉普拉斯算子的五点模板为

$$(\Delta_h Y^{\tau,\lambda})_{i,j} = \frac{Y^{\tau,\lambda}_{i+1,j} - 2Y^{\tau,\lambda}_{i,j} + Y^{\tau,\lambda}_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{Y^{\tau,\lambda}_{i,j+1} - 2Y^{\tau,\lambda}_{i,j} + Y^{\tau,\lambda}_{i,j-1}}{h_y^2},$$

参见 [34, 第 3 节。2] 有关拉普拉斯算子离散化的更多细节。由于 $Y^{\tau,\lambda}$ 满足齐次狄利克雷边界条件（2.4），边界值为零，因此不存在边界强迫。用矩阵形式表示，

$$\Delta_h Y^{\tau,\lambda}_t = A_\Delta Y^{\tau,\lambda}_t, \tag{2.7}$$

其中

$$A_\Delta = \frac{1}{h_x^2}\left(I_{N_y-1} \otimes A_x\right) + \frac{1}{h_y^2}\left(A_y \otimes I_{N_x-1}\right), \tag{2.8}$$

且 $A_x = \mathrm{tridiag}(1, -2, 1) \in \mathbb{R}^{(N_x-1)\times(N_x-1)}$ $A_y = \mathrm{tridiag}(1, -2, 1) \in \mathbb{R}^{(N_y-1)\times(N_y-1)}$。定义内部节点上的采样系数

$$b^\lambda_m := a^\lambda(z_m), \qquad d^\lambda_m := \beta'(T^{*,\lambda}(z_m)), \qquad f^\lambda_m := \beta(T^{*,\lambda}(z_m)), \qquad m = 1, \dots, d.$$

Set

$$B^\lambda := \mathrm{diag}(b^\lambda) \in \mathbb{R}^{d\times d}, \qquad D^\lambda := \mathrm{diag}(d^\lambda) \in \mathbb{R}^{d\times d}, \qquad f^\lambda := (f^\lambda_i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d.$$

为离散化空间相关噪声，令 $C \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 表示由 W 的协方差算子在网格上诱导的离散协方差矩阵，并固定一个分解 $C = LL^T$。令 $(W_t)_t$ 为一个 d 维布朗运动。于是，式（2.6）的半离散逼近为

$$dY^{\tau,\lambda}_t = (A_\Delta - B^\lambda)Y^{\tau,\lambda}_t\, dt + \sqrt{\tau}\,\mathrm{diag}\left(D^\lambda Y^{\tau,\lambda}_t + f^\lambda\right) L dW_t, \qquad Y^{\tau,\lambda}|_{t=0} = y_0. \tag{2.9}$$

本节最后，我们引入一个标量代理，用于表示半离散异常过程（2.9）的涨落水平，该代理由其协方差矩阵的迹给出。从现在起，固定 $\tau > 0$ 并记作$Y^\lambda := Y^{\tau,\lambda}$。

定义 2.1（空间方差）。设 $(Y^\lambda_t)_t$ 是随机微分方程 (2.9) 的解，并令 $\Gamma^\lambda_t := \mathbb{E}[(Y^\lambda_t - \mathbb{E}[Y^\lambda_t])(Y^\lambda_t - \mathbb{E}[Y^\lambda_t])^T]$ 为其协方差矩阵。时刻 的空间方差为 t 是

$$\mathrm{Var}_{\mathrm{sp}}(t; \lambda) := \mathrm{Tr}(\Gamma^\lambda_t),$$

并且，只要极限存在，平稳空间方差为

$$\mathrm{Var}_{\mathrm{sp},\infty}(\lambda) := \mathrm{Tr}(\Gamma^\lambda_\infty), \qquad \Gamma^\lambda_\infty := \lim_{t\to\infty} \Gamma^\lambda_t.$$

在下面讨论空间方差时，我们假设 $y_0 = 0$。在下一小节中，我们暂时允许一般的 y_0 来描述均值，然后再次令 $y_0 = 0$，以得到自治协方差方程。因此，在假设 $y_0 = 0$下，由于漂移项是线性的，且随机积分是鞅，可得 $\mathbb{E}[Y^\lambda_t] = 0$ 对所有 $t \geq 0$均成立。在这种情况下，

$$\mathrm{Var}_{\mathrm{sp}}(t; \lambda) = \mathrm{Tr}(\Gamma^\lambda_t) = \sum_{i=1}^d \mathrm{Var}(Y^\lambda_{t,i}) = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^d |Y^\lambda_{t,i}|^2\right].$$

因此，$\mathrm{Var}_{\mathrm{sp}}(t; \lambda)$ 是区域内局部涨落强度之和，而 $\mathrm{Var}_{\mathrm{sp},\infty}(\lambda)$ 则衡量平稳状态下的总方差。

注 2.2（平稳空间方差与极端天气事件）。 自然地，我们关注平稳空间方差$\mathrm{Var}_{\mathrm{sp},\,\infty}(\lambda)=\mathrm{Tr}(\Gamma_\infty^\lambda)$，因为它衡量的是与辐射强迫 λ 所决定的气候配置相对应的长期状态下温度异常的涨落水平（瞬态过程消退之后）。特别是，比较$\mathrm{Var}_{\mathrm{sp},\,\infty}(\lambda_1)$ 与$\mathrm{Var}_{\mathrm{sp},\,\infty}(\lambda_2)$ 可以量化持续空间涨落的典型振幅如何随强迫水平（例如CO_2）的变化而改变。

尽管极端事件并不能仅由二阶矩决定，方差$\mathrm{sp}(t;\lambda)$ 仍可作为一种有用的二阶矩控制量，用于估计在区域某处观测到较大异常的概率。为简便起见，假设 $y_0=0$，于是对所有 $t\geq 0$，都有 $\mathbb{E}[Y_t^\lambda]=0$。对于任意 $\vartheta>0$，由马尔可夫不等式

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq d}|Y_{t,i}^\lambda|\geq\vartheta\right)\leq\frac{1}{\vartheta^2}\mathbb{E}\left[\max_{1\leq i\leq d}|Y_{t,i}^\lambda|^2\right]\leq\frac{1}{\vartheta^2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^d|Y_{t,i}^\lambda|^2\right]=\frac{\mathrm{Var}_{\mathrm{sp}}(t;\lambda)}{\vartheta^2}.$$

并且在平稳状态下，同样的估计也适用于 方差$\mathrm{sp},\infty(\lambda)$。

2.3. **半离散异常随机微分方程的平稳协方差**。 回顾定义2.1，我们的涨落水平标量代理是空间方差 $\mathrm{Var}_{\mathrm{sp}}(t;\lambda)=\mathrm{Tr}\big(\Gamma_t^\lambda\big)$，其平稳极限为 $\mathrm{Var}_{\mathrm{sp},\infty}(\lambda)=\mathrm{Tr}\big(\Gamma_\infty^\lambda\big)$（若存在）。因此，确定 Γ_∞^λ 的存在性和单调性，可立即得到 $\mathrm{Var}_{\mathrm{sp},\infty}(\lambda)$ 的相应结果。

2.3.1. 预备知识：矩阵序、 M-矩阵与向量化。我们汇总一些标准事实，用于控制平稳协方差的符号与单调性。对于 $A\in\mathbb{R}^{d\times d}$，我们用 $\rho(A)$表示其谱半径，

$$\rho(A):=\max\{|\mu|:\mu\text{ eigenvalue of }A\},$$

并将 $A\geq B$ 记为逐分量序。回顾一下，矩阵 A 是 Z-矩阵，若 $a_{ij}\leq 0$ 对所有 $i\neq j$均成立。一个(非奇异) M-矩阵是形如 Z的 $A=sI-B$-矩阵，其中 $B\geq 0$ 且 $s>\rho(B)$；等价地， A 是一个 Z-矩阵，且 $\mathrm{Re}(\mu)>0$ 对每个特征值 μ均成立，见 [6, 43]。我们将用到的关键结论是其逆矩阵逐元素非负。

定理 2.3。设 A是一个 Z-矩阵。以下条件等价：

(i) A 是一个非奇异的 M-矩阵，(ii) 对于 A 的每个特征值 μ，都有$\mathrm{Re}(\mu)>0$，(iii) A 可逆且 $A^{-1}\geq 0$ 逐分量。

其次，我们回顾一下，不可约矩阵*irreducible matrix* A 是一个方阵，无法通过置换矩阵 P（具体而言是 PAP^T）变换为具有多个正阶对角块的分块上三角矩阵。等价地，如果其关联的有向图是强连通的，则 A是不可约的。有关不可约矩阵的更多细节和性质，请参阅 [6, 第 2.2 章。]

最后，我们固定 n 关于向量化和克罗内克积的记号。给定 $A=(v_1\mid\ldots\mid v_d)\in\mathbb{R}^{d\times d}$，w 我们定义

$$\mathrm{vec}(A):=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{d^2}.$$

对于矩阵 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $B\in\mathbb{R}^{p\times q}$，我们将其克罗内克积记为 $A\otimes B\in\mathbb{R}^{mp\times nq}$，其按分块定义为

$$A\otimes B:=\begin{pmatrix}a_{11}B&\cdots&a_{1n}B\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{m1}B&\cdots&a_{mn}B\end{pmatrix}.$$

我们将反复使用以下恒等式

$$(A\otimes B)^T=A^T\otimes B^T,\qquad \mathrm{vec}(AXB)=(B^T\otimes A)\,\mathrm{vec}(X),\tag{2.10}$$

以及对每个自变量的双线性。

2.3.2. 协方差动力学与李雅普诺夫向量化表述。 在本小节中，我们推导半离散异常过程的协方差矩阵所满足的演化方程。通过对所得李雅普诺夫型方程进行向量化，我们得到关于 $\mathbb{R}^{d^2}$的线性常微分方程，其长时间极限给出平稳协方差的显式表示。

首先，注意到随机微分方程（2.9）可改写为

$$dY_t^\lambda = M^\lambda Y_t^\lambda\, dt + \Sigma^\lambda(Y_t^\lambda) dW_t, \quad Y^\lambda|_{t=0} = y_0.$$

其中 $M^\lambda := A_\Delta - B^\lambda$ 且 $\Sigma^\lambda(y) = \sqrt{\tau}\mathrm{diag}(D^\lambda y + f^\lambda)L$. 那么期望 $\mathbb{E}[Y_t^\lambda]$ 满足

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}[Y_t^\lambda] = M^\lambda \mathbb{E}[Y_t^\lambda], \qquad \mathbb{E}[Y_0^\lambda] = y_0$$

解为

$$\mathbb{E}[Y_t^\lambda] = e^{M^\lambda t} y_0.$$

与第 1.3 节一样，温度异常随 $t \to +\infty$ 趋于零是合理的。对于任意初始条件 y_0，只要 M^λ 为负定，这一结论就成立；从现在起我们始终采用这一假设。我们关注协方差矩阵

$$\Gamma_t^\lambda := \mathbb{E}\big[(Y_t^\lambda - \mathbb{E}[Y_t^\lambda])(Y_t^\lambda - \mathbb{E}[Y_t^\lambda])^T\big].$$

对于一般的 y_0，协方差动力学会通过$\mathbb{E}[Y_t^\lambda] = e^{M^\lambda t} y_0$包含一个额外的（随时间变化的）强迫项。为使协方差方程保持自治，并简化后续的向量化李雅普诺夫公式，我们采用简化假设 $y_0 = 0$，因此 $\mathbb{E}[Y_t^\lambda] = 0$ 对所有 $t \geq 0$ 均成立，进而 $\Gamma_t^\lambda = \mathbb{E}\big[Y_t^\lambda (Y_t^\lambda)^T\big]$.

引理 2.4. 假设 $M^\lambda = A_\Delta - B^\lambda$ 为负定且 $y_0 = 0$。则 Γ_t^λ满足矩阵常微分方程

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Gamma_t^\lambda &= M^\lambda \Gamma_t^\lambda + \Gamma_t^\lambda (M^\lambda)^T + \mathbb{E}\big[\Sigma^\lambda(Y_t^\lambda)\,(\Sigma^\lambda(Y_t^\lambda))^T\big] \\ &= M^\lambda \Gamma_t^\lambda + \Gamma_t^\lambda (M^\lambda)^T + \tau \sum_{k=1}^{d} \mathrm{diag}(l^k)(D^\lambda \Gamma_t^\lambda (D^\lambda)^T + f^\lambda (f^\lambda)^T)\mathrm{diag}(l^k),\end{aligned}$$

其中 l^k 是 L.的第 k列

证明. 为简单起见，假设 $\tau = 1$。为简化记号，我们省略对 λ的依赖。利用伊藤公式

$$\begin{aligned}d(Y_t Y_t^T) &= (dY_t)(Y_t)^T + Y_t(dY_t)^T + (dY_t)(dY_t)^T \\ &= (MY_t dt + \Sigma dW_t)(Y_t)^T + Y_t(MY_t dt + \Sigma dW_t)^T + (dY_t)(dY_t)^T.\end{aligned}$$

注意到，利用伊藤等距，我们有

$$(dY_t)(dY_t)^T = (MY_t dt + \Sigma dW_t)(MY_t dt + \Sigma dW_t)^T = \Sigma dW_t (dW_t)^T \Sigma^T.$$

由于 $dW_t(dW_t)^T = I dt$，我们得到

$$(dY_t)(dY_t)^T = \Sigma\Sigma^T dt.$$

综上，我们有

$$d(Y_t Y_t^T) = [MY_t(Y_t)^T + Y_t(Y_t)^T M^T + \Sigma\Sigma^T]dt + \widetilde{M}_t,$$

$\widetilde{\ }$其中 M_t 表示一个鞅。取期望值，可得

$$\frac{d}{dt}\Gamma_t = M\Gamma_t + \Gamma_t M^T + \mathbb{E}[\Sigma\Sigma^T].$$

但在我们的设定中，$\Sigma = \mathrm{diag}(DY_t + f)L$，因此

$$\Sigma\Sigma^T = \mathrm{diag}(DY_t + f)LL^T\mathrm{diag}(DY_t + f)^T.$$

由于

$$LL^T = \sum_{k=1}^{d} l^k (l^k)^T,$$

我们得到

$$\Sigma\Sigma^T = \sum_{k=1}^{d} \operatorname{diag}(DY_t + f) l^k (l^k)^T \operatorname{diag}(DY_t + f)^T,$$

此外，利用该性质

$$\operatorname{diag}(a)b = \operatorname{diag}(b)a, \quad a, b \in \mathbb{R}^d,$$

我们有

$$\Sigma\Sigma^T = \sum_{k=1}^{d} \operatorname{diag}(l^k) \left[(DY_t + f)(DY_t + f)^T \right] \operatorname{diag}(l^k).$$

由于 $\mathbb{E}[Y_t] = 0$，我们有

$$\mathbb{E}\left[(DY_t + f)(DY_t + f)^T \right] = D\Gamma_t D^T + ff^T,$$

因此

$$\mathbb{E}\left[\Sigma\Sigma^T\right] = \sum_{k=1}^{d} \operatorname{diag}(l^k)(D\Gamma_t D^T + ff^T)\operatorname{diag}(l^k).$$

□

在下面的技术性结果中，我们以一种更易处理的形式写出由 Γ_t 满足的协方差矩阵常微分方程。

引理 2.5. 假设 $M^\lambda = A_\Delta - B^\lambda$ 为负定，且 $y_0 = 0$。关于 Γ_t^λ 的常微分方程

$$\frac{d}{dt}\Gamma_t^\lambda = M^\lambda \Gamma_t^\lambda + \Gamma_t^\lambda (M^\lambda)^T + \tau \sum_{k=1}^{d} \operatorname{diag}(l^k)(D^\lambda \Gamma_t^\lambda (D^\lambda)^T + f^\lambda (f^\lambda)^T)\operatorname{diag}(l^k),$$

等价于

$$\frac{d}{dt} q_t^\lambda = K^\lambda q_t^\lambda + F^\lambda, \tag{2.11}$$

with

$$q_t^\lambda = \operatorname{vec}(\Gamma_t^\lambda), \quad K^\lambda := I_d \otimes M^\lambda + M^\lambda \otimes I_d + \tau \operatorname{diag}(\operatorname{vec}(C))(D^\lambda \otimes D^\lambda),$$

and

$$F^\lambda = \tau \operatorname{diag}(\operatorname{vec}(C))\operatorname{vec}(f^\lambda (f^\lambda)^T),$$

证明。 为简便起见，假设 $\tau = 1$。为使符号简洁，我们省略对 λ 的依赖。考虑矩阵常微分方程

$$\frac{d}{dt}\Gamma_t = M\Gamma_t + \Gamma_t M^T + \sum_{k=1}^{d} \operatorname{diag}(l^k) \left(D\Gamma_t D^T + ff^T \right) \operatorname{diag}(l^k).$$

将两边向量化可得

$$\frac{d}{dt} q_t = \operatorname{vec}(M\Gamma_t) + \operatorname{vec}(\Gamma_t M^T) + \sum_{k=1}^{d} \operatorname{vec}\left(\operatorname{diag}(l^k) \left(D\Gamma_t D^T + ff^T \right) \operatorname{diag}(l^k) \right).$$

根据克罗内克积的性质（2.10），

$$\operatorname{vec}(M\Gamma_t) = (I \otimes M) q_t, \qquad \operatorname{vec}(\Gamma_t M^T) = (M \otimes I) q_t.$$

对于噪声项，再由（2.10），由于 $\operatorname{diag}(l^k)^T = \operatorname{diag}(l^k)$，

$$\operatorname{vec}\left(\operatorname{diag}(l^k) X \operatorname{diag}(l^k) \right) = \left(\operatorname{diag}(l^k) \otimes \operatorname{diag}(l^k) \right) \operatorname{vec}(X), \qquad X \in \mathbb{R}^{d \times d}.$$

将此应用于 $X = D\Gamma_t D^T + ff^T$，得到

$$\sum_{k=1}^{d} \mathrm{vec}\left(\mathrm{diag}(l^k)(D\Gamma_t D^T + ff^T)\mathrm{diag}(l^k)\right) = \left(\sum_{k=1}^{d} \mathrm{diag}(l^k) \otimes \mathrm{diag}(l^k)\right) \mathrm{vec}(D\Gamma_t D^T + ff^T).$$

最后，

$$\mathrm{vec}(D\Gamma_t D^T) = (D \otimes D)\,\mathrm{vec}(\Gamma_t) = (D \otimes D)\,q_t, \qquad \mathrm{vec}(ff^T) \text{ is constant.}$$

最后，由于 $C = LL^T$ 和 l^k 表示 L的第 k列，我们有

$$\sum_{k=1}^{d} \mathrm{diag}(l^k) \otimes \mathrm{diag}(l^k) = \mathrm{diag}(\mathrm{vec}(C)),$$

因为 C的第（i, j）个元素是 $C_{ij} = \sum_{k=1}^{d} l_i^k l_j^k$，而向量化将与 C的逐元素乘法转化为与 diag(vec(C)) 的乘法。合并各项可得

$$\frac{d}{dt}q_t = (I_d \otimes M + M \otimes I_d + \mathrm{diag}(\mathrm{vec}(C))(D \otimes D))\,q_t + \mathrm{diag}(\mathrm{vec}(C))\mathrm{vec}(ff^T),$$

即为（2.11）。 □

将前一引理中的协方差恒等式与引理 2.5 中的向量化规则结合起来，我们将矩阵值协方差动力学化简为 $q_t^\lambda = vec$（Γ_t^λ）上的线性常微分方程（2.11）；在 K 为负定且 $C = LL^T$ 逐项非负的假设下，可直接得到平稳协方差的存在性及其显式公式。

推论 2.6. 假设 $M^\lambda = A_\Delta - B^\lambda$ 为负定， $y_0 = 0$ 且

$$K^\lambda = I_d \otimes M^\lambda + M^\lambda \otimes I_d + \tau\,\mathrm{diag}(\mathrm{vec}(C))(D^\lambda \otimes D^\lambda)$$

为负定。进一步假设 $C = LL^T \geq 0$ 逐分量成立。则 $\lim_{t\to\infty} \Gamma_t^\lambda =: \Gamma_\infty^\lambda$ 存在。进一步，令 q^λ =vec(Γ_∞^λ)，则有

$$q^\lambda = (-K^\lambda)^{-1} F^\lambda,$$

此外（$-K^\lambda$）$^{-1} \geq 0$ 逐分量成立。

证明。 为简便起见，假设 $\tau = 1$。为便于记号，我们略去对 λ 的依赖。命题的第一部分在于注意到，当 K 为负定时，常微分方程（2.11）的解会收敛。

L现在来验证：如果 K 是负定的，那么 $(-K)^{-1} \geq 0$ 逐分量成立。写作 e

$$-K = I_d \otimes (-M) + (-M) \otimes I_d - \mathrm{diag}(\mathrm{vec}(C))(D \otimes D).$$

我们断言， $-K$ 是一个 Z-矩阵，即它的非对角元素非正。

首先，注意到 $-M$ 是一个 Z-矩阵。事实上，离散拉普拉斯算子 A_Δ 的非对角元素非负，而 B 是对角矩阵，因此 $M = A_\Delta - B$ 的非对角元素非负。因此， $-M$ 的非对角元素非正，即 $-M$ 是一个 Z-矩阵。

其次，两个克罗内克积 $I_d \otimes (-M)$ 和 $(-M) \otimes I_d$的非对角元素都与 $-M$具有相同的符号模式，因此它们各自都是一个 Z-矩阵。它们的和也同样如此

第三，项 diag(vec(C))($D \otimes D$) 是对角且非负的。事实上，由于 D 是对角矩阵，因此 $D \otimes D$ 是对角矩阵。因此，diag(vec(C))($D \otimes D$) 也是对角矩阵。此外， $C \geq 0$ 逐项蕴含 diag(vec(C)) ≥ 0 逐项成立；因此，diag(vec(C))($D \otimes D$) 的对角元素非负。由此，diag(vec(C))($D \otimes D$) 只影响 $-K$的对角元素，不会改变任何非对角元素的符号。

总之，我们已经证明 $-K$ 是一个 Z-矩阵。根据关于 K的假设，我们有 $-K$ 是正定的。由定理2.3，可推得($-K)^{-1} \geq 0$ 逐分量成立。

□

2.4. **平稳协方差关于辐射强迫参数的单调性**。现在我们研究半离散温度异常的平稳协方差如何依赖于强迫参数 λ。对于每个 λ，令 $Y_t^\lambda \in \mathbb{R}^d$ 满足有限差分随机微分方程（2.9），其中 $y_0 = 0$，即

$$dY_t^\lambda = M^\lambda Y_t^\lambda \, dt + \sqrt{\tau}\, \mathrm{diag}\big(D^\lambda Y_t^\lambda + f^\lambda\big)\, L\, dW_t, \qquad Y_0^\lambda = 0,$$

其中

$$M^\lambda := A_\Delta - B^\lambda, \qquad B^\lambda := \mathrm{diag}(b^\lambda), \quad D^\lambda := \mathrm{diag}(d^\lambda), \quad f^\lambda \in \mathbb{R}^d, \quad C := LL^T.$$

回顾一下，这些系数是通过对内部网格点 z_m 上的均衡剖面 $T^{*,\lambda}$ 进行采样得到的：

$$b_m^\lambda = a^\lambda(z_m) = -Q(z_m)\beta'\left(T^{*,\lambda}(z_m)\right) + r_1, \quad d_m^\lambda = \beta'\left(T^{*,\lambda}(z_m)\right), \qquad f_m^\lambda = \beta\left(T^{*,\lambda}(z_m)\right). \tag{2.12}$$

这里我们使用了仿射形式 $\mathcal{R}_e(T) = r_0 + r_1 T$，因此 $\mathcal{R}_e'(T) \equiv r_1$。回顾一下，在非限制性假设 $y_0 = 0$ 下，

$$\Gamma_t^\lambda = \mathbb{E}\left[Y_t^\lambda (Y_t^\lambda)^T\right], \qquad \Gamma_\infty^\lambda = \lim_{t\to\infty} \Gamma_t^\lambda,$$

只要极限存在。根据引理 2.5 和推论 2.6，在满足关于 M^λ 和 K^λ 的稳定性假设时，我们有

$$q_\infty^\lambda := \mathrm{vec}(\Gamma_\infty^\lambda) = (-K^\lambda)^{-1} F^\lambda,$$

其中

$$F^\lambda = \tau\, \mathrm{diag}(\mathrm{vec}(C))\, \mathrm{vec}(f^\lambda (f^\lambda)^T). \tag{2.13}$$

与零维情形一样，我们预期 $\lambda \mapsto T^{*,\lambda}(x)$ 对每个 $x \in \mathcal{D}$ 都是递增的（见第1节）。由于对于 $T \in (T_l, T_u)$ β 是递增的，因此 $\lambda \mapsto f^\lambda$ 逐分量递增。

为了控制 λ 对 $B^\lambda = \mathrm{diag}(b^\lambda)$ 和 $D^\lambda = \mathrm{diag}((\beta'(T^{*,\lambda}(x_i))_i))$ 的依赖性，我们像上文一样假设平衡温度保持在 β 递增的范围内，例如

$$T^{*,\lambda}(z_m) \in (T_l, T_u), \qquad m = 1, \dots, d, \tag{2.14}$$

从而 $\partial_\lambda b^\lambda = 0$ 和 $\beta'(T^{*,\lambda}) \equiv \frac{\beta_{\max} - \beta_{\min}}{T_u - T_l} =: s$。

命题 2.7（平稳协方差严格逐分量递增）。设

$$s := \frac{\beta_{\max} - \beta_{\min}}{T_u - T_l} > 0.$$

假设对于所考虑的每个 λ，均衡剖面满足

$$T^{*,\lambda}(x) \in (T_l, T_u) \qquad \textit{for all } x \in \mathcal{D},$$

使得 $\beta'(T^{*,\lambda}(x)) \equiv s$ 在 $\mathcal{D}$ 上成立。此外，假设强制性条件

$$r_1 - Q(x)s \geq 0 \qquad \textit{in } \mathcal{D}. \tag{2.15}$$

令 $C = LL^T$ 并假设

$$C \geq 0 \ \textit{entry-wise}, \qquad C \neq 0.$$

假设 K^λ 为负定，其中

$$M^\lambda := A_\Delta - B^\lambda, \qquad K^\lambda := I_d \otimes M^\lambda + M^\lambda \otimes I_d + \tau\, \mathrm{diag}(\mathrm{vec}(C))\, (D^\lambda \otimes D^\lambda).$$

那么 $\partial_\lambda \Gamma_\infty^\lambda > 0$ 逐项成立。

证明。步骤 *1*： $\partial_\lambda T^{*,\lambda} > 0$ 在内部。令 $u^\lambda := \partial_\lambda T^{*,\lambda}$。对椭圆均衡问题（2.3）关于 λ 求导，得到

$$\Delta u^\lambda(x) + Q(x)\beta'(T^{*,\lambda}(x))u^\lambda(x) + 1 - r_1 u^\lambda(x) = 0, \qquad u^\lambda|_{\partial\mathcal{D}} = 0.$$

由于 $T^{*,\lambda}(x) \in (T_l, T_u)$ 对所有 x 均成立，且 β 在 (T_l, T_u) 上是仿射的，因此有 $\beta'(T^{*,\lambda}(x)) \equiv s$。于是

$$-\Delta u^\lambda(x) + (r_1 - Q(x)s)u^\lambda(x) = 1, \qquad u^\lambda|_{\partial\mathcal{D}} = 0.$$

由（2.15）和最大值原理（参见 [20,第 6 节。4],）可得

$$u^\lambda(x) > 0 \quad \text{in } \mathcal{D},$$

尤其对于所有内部网格点 z_m， $u^\lambda(z_m) > 0$ 均成立。

步骤 2： $\partial_\lambda f^\lambda > 0$逐分量。回顾 $f_m^\lambda = \beta(T^{*,\lambda}(z_m))$。由于 $\beta'(T^{*,\lambda}(z_m)) \equiv s$,

$$\partial_\lambda f_m^\lambda = \beta'(T^{*,\lambda}(z_m))\partial_\lambda T^{*,\lambda}(z_m) = s u^\lambda(z_m) > 0, \qquad m = 1, \dots, d.$$

此外， $f^\lambda > 0$逐分量，因为 $\beta \in (0, 1)$。

步骤 3： K^λ在 λ-独立于(T_l, T_u)上。由于 $\beta'(T^{*,\lambda}(z_m)) \equiv s$，我们有 $D^\lambda = sI$和 $B^\lambda = \text{diag}(-Q(z_m)s + r_1)$，因此 D^λ， M^λ和 K^λ在此状态下不依赖于 λ。我们简单地将它们记为 D， M 和 K。

步骤 4： $-K$ 是不可约非奇异 M矩阵，且$(-K)^{-1} > 0$ 逐项成立。由于 A_Δ 是连通内部网格上的标准有限差分拉普拉斯算子（五点模板），其有向图是强连通的，因此 A_Δ是不可约的。由于 B^λ是对角的， $M^\lambda = A_\Delta - B^\lambda$与 A_Δ具有相同的非对角模式，故 $-M$ 是不可约 Z矩阵。考虑克罗内克和

$$S := I_d \otimes (-M) + (-M) \otimes I_d.$$

则 S 是一个 Z-矩 阵且不可约[1]。此外，由于 D 是对角的， $D \otimes D$ 是对角的，因此diag(vec(C))是对角的。因此

$$-K = S - \tau\, \text{diag}(\text{vec}(C))(D \otimes D)$$

仍是 Z矩阵，且保持不可约（对角修改不影响不可约性）。根据假设， K 是负定的，因此 $-K$ 是正定的，特别地， $-K$的所有特征值均具有严格为正的实部。由于 $-K$ 是 Z矩阵，这意味着 $-K$ 是非奇异 M 矩阵。结合不可约性，由 [43, 推论3.8，第 5],章可知

$$(-K)^{-1} > 0 \qquad \text{entry-wise.}$$

步骤 5：对平稳协方差公式求导，并得出严格正性。由引理 2.5和推论 2.6,

$$q_\infty^\lambda := \text{vec}(\Gamma_\infty^\lambda) = (-K)^{-1} F^\lambda, \qquad F^\lambda = \tau\, \text{diag}(\text{vec}(C))\text{vec}(f^\lambda (f^\lambda)^T).$$

由于 K 在 λ 中为常数，求导可得

$$\partial_\lambda q_\infty^\lambda = (-K)^{-1}\, \partial_\lambda F^\lambda,$$

and

$$\partial_\lambda F^\lambda = \tau\, \text{diag}(\text{vec}(C))\, \text{vec}((\partial_\lambda f^\lambda)(f^\lambda)^T + f^\lambda (\partial_\lambda f^\lambda)^T).$$

由步骤 2， f^λ 和 $\partial_\lambda f^\lambda$ 的每个分量都严格为正，因此矩阵

$$G^\lambda := (\partial_\lambda f^\lambda)(f^\lambda)^T + f^\lambda (\partial_\lambda f^\lambda)^T$$

逐元素严格为正，所以 vec(G^λ) > 0 逐分量成立。由于 $C \geq 0$ 逐元素成立，diag(vec(C)) ≥ 0 逐元素成立；又因为 $C \neq 0$ ，我们有 diag(vec(C)) vec(G^λ) $\neq 0$。因此

$$\partial_\lambda F^\lambda \geq 0, \qquad \partial_\lambda F^\lambda \neq 0.$$

最后，由于 $(-K)^{-1} > 0$ 逐元素成立（步骤 4），可得

$$\partial_\lambda q_\infty^\lambda = (-K)^{-1}\, \partial_\lambda F^\lambda > 0 \quad \text{component-wise,}$$

因此 $\partial_\lambda \Gamma_\infty^\lambda > 0$ 逐元素成立。 □

特别是，由于平稳空间方差是 Γ_∞^λ 的迹（见定义2.1），前述结果保证它关于 λ单调递增。

[1]确实，将 $\mathbb{R}^{d^2}$ 的指标集写成由 (i, j) 构成的集合，其中 $i, j \in \{1, \dots, d\}$。根据克罗内克和的定义， S^λ 允许每次仅改变一个坐标的移动：当 $(-M)_{ii'} \neq 0$时，可从 (i, j) 移至 (i', j)；当 $(-M)_{jj'} \neq 0$时，可从 (i, j) 移至 (i, j')。由于 $-M$是不可约的，其图是强连通的，因此任意一对 (i, j) 都能到达另一任意一对 (i', j')：先沿 i坐标移动，再沿 j坐标移动。因此， S是不可约的。

推论 2.8（平稳空间方差的单调性）。 在命题2.7的假设下，平稳空间方差

$$\mathrm{Var}_{\mathrm{sp},\infty}(\lambda) = \mathrm{Tr}\big(\Gamma_\infty^\lambda\big)$$

关于 λ 单调递增。

注 2.9（更强的强迫，更强的气候空间协变性）。 我们指出，命题 2.7表明

$$\partial_\lambda(\Gamma_\infty^\lambda)_{ij} > 0 \qquad \textit{for all } i,j,$$

因此，对于任意两个不同的网格点 $z_i \neq z_j$，

$$\partial_\lambda \mathrm{Cov}\left(Y_\infty^\lambda(z_i), Y_\infty^\lambda(z_j)\right) > 0.$$

从气候角度看，辐射强迫增强不仅会增大局部波动的幅度（方差或空间方差），还会增强它们的 空间共同波动：不同位置的异常倾向于更加“同步”地变化，即协方差增大。

这种协方差放大效应与近期关于球面跨时间温度场的统计研究相辅相成。该研究考察球谐系数的时间演化（及其可能存在的非平稳性），并发展了严格的变点方法；例如，参见 *[9, 10, 39, 40]*。这些研究着重于检测观测数据中偏离平稳性的情况，而我们的结果则为约化随机能量平衡模型中由外部强迫驱动的单调协方差放大提供了一种机制。

请注意，命题 2.7 的假设之一是 $C = LL^T \geq 0$ 逐元素成立。这是必要条件。事实上，在下一个例子中，我们将说明，若噪声的空间协方差矩阵 C 哪怕只有一个负元素，那么即使噪声振幅在 λ中逐分量递增，空间方差也可能不再单调。

例 2.10（负相关导致单调性失效）。 考虑带有加性噪声的二维随机微分方程

$$dY_t^\lambda = MY_t^\lambda\, dt + \Sigma^\lambda\, dW_t, \qquad Y_0^\lambda = 0,$$

其中 W_t 是一个2维布朗运动，并且

$$\Sigma^\lambda := \mathrm{diag}(f^\lambda)\, L, \quad C := LL^T.$$

我们选择

$$M = \begin{pmatrix} -1 & s \\ s & -1 \end{pmatrix}, \qquad 0 < s < 1,$$

使得 M 为对称负定矩阵（其特征值为 $-1 \pm s < 0$）。令

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ -c & 1 \end{pmatrix}, \qquad 0 < c < 1,$$

它是正定矩阵（其特征值为 $1 \pm c > 0$），但有一个负 非对角元素 $C_{12} = -c < 0$。令 $L \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 满足 $LL^T = C$；注意， L 存在，例如可由 ***Cholesky*** 分解得到。最后，定义

$$f^\lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \geq 0,$$

它关于 λ逐分量递增。

令 $\Gamma_t^\lambda := \mathbb{E}[Y_t^\lambda (Y_t^\lambda)^T]$。由于噪声是加性的，根据伊藤公式， Γ_t 满足常微分方程

$$\frac{d}{dt}\Gamma_t^\lambda = M\Gamma_t^\lambda + \Gamma_t^\lambda M^T + S^\lambda, \quad S^\lambda := \Sigma^\lambda(\Sigma^\lambda)^T.$$

由于 $\Sigma^\lambda = \mathrm{diag}(f^\lambda)L$ 且 $LL^T = C$，我们有

$$S^\lambda = \mathrm{diag}(f^\lambda)\, C\, \mathrm{diag}(f^\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & -c\lambda \\ -c\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Since M 为负定，Γ_t^λ 收敛到唯一的平稳协方差 Γ_∞^λ ， 其满足

$$M\Gamma_\infty^\lambda + \Gamma_\infty^\lambda M + S^\lambda = 0.$$

平稳协方差矩阵 Γ_∞^λ 也可表示为

$$\Gamma_\infty^\lambda = \int_0^\infty e^{Mu} S^\lambda e^{Mu} du.$$

设 $\sigma_+ := -1+s$ 与 $\sigma_- = -1-s$ 为特征值，并设 v_+、v_- 分别为对应于 σ_+ 与 σ_- 的特征向量。我们可以取它们为标准正交的，并由下式给出

$$v_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad v_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1.\end{pmatrix}$$

Let

$$V := \begin{pmatrix} | & | \\ v_+ & v_- \\ | & | \end{pmatrix}$$

使得 $VV^T = V^T V = I$. 因此

$$V^T M V = \begin{pmatrix} -1+s & 0 \\ 0 & -1-s \end{pmatrix} := D_M.$$

回顾

$$e^{Mu} = V e^{D_M u} V^T, \quad e^{D_M u} = \begin{pmatrix} e^{\sigma_+ u} & 0 \\ 0 & e^{\sigma_- u} \end{pmatrix}.$$

利用线性性和迹的循环性

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\Gamma_\infty^\lambda) &= \mathrm{Tr}(\int_0^\infty e^{Mu} S^\lambda e^{Mu} du) = \int_0^\infty \mathrm{Tr}(e^{Mu} S^\lambda e^{Mu}) du = \int_0^\infty \mathrm{Tr}(V e^{D_M u} V^T S^\lambda V e^{D_M u} V^T) du \\
&= \int_0^\infty \mathrm{Tr}(V^T V e^{D_M u} V^T S^\lambda V e^{D_M u}) du \\
&= \int_0^\infty \mathrm{Tr}(e^{D_M u} V^T S^\lambda V e^{D_M u}) du \\
&= \int_0^\infty \mathrm{Tr}(e^{2D_M u} V^T S^\lambda V) du.
\end{aligned}$$

令 $\tilde{S}^\lambda := V^T S^\lambda V$，则

$$\mathrm{Tr}(\Gamma_\infty^\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{Tr}(e^{2D_M u}\tilde{S}^\lambda) du = \int_0^\infty \left(e^{2u\sigma_+}\tilde{S}_{11}^\lambda + e^{2u\sigma_-}\tilde{S}_{22}^\lambda\right) du = -\frac{\tilde{S}_{11}^\lambda}{2\sigma_+} - \frac{\tilde{S}_{22}^\lambda}{2\sigma_-}.$$

由于

$$\tilde{S}_{11}^\lambda = \frac{\lambda^2 - 2c\lambda + 1}{2}, \quad \tilde{S}_{22}^\lambda = \frac{\lambda^2 + 2c\lambda + 1}{2},$$

经过一些计算，我们得到

$$\mathrm{Tr}(\Gamma_\infty^\lambda) = \frac{\lambda^2 - 2cs\lambda + 1}{2(1-s^2)}.$$

对 λ 求导，我们发现

$$\partial_\lambda \mathrm{Tr}(\Gamma_\infty^\lambda) = \frac{\lambda - cs}{1-s^2}.$$

由于 $s \in (0,1)$，对于 $\lambda < cs$ 空间方差（即平稳协方差矩阵的迹）而言，其数值正在减小。

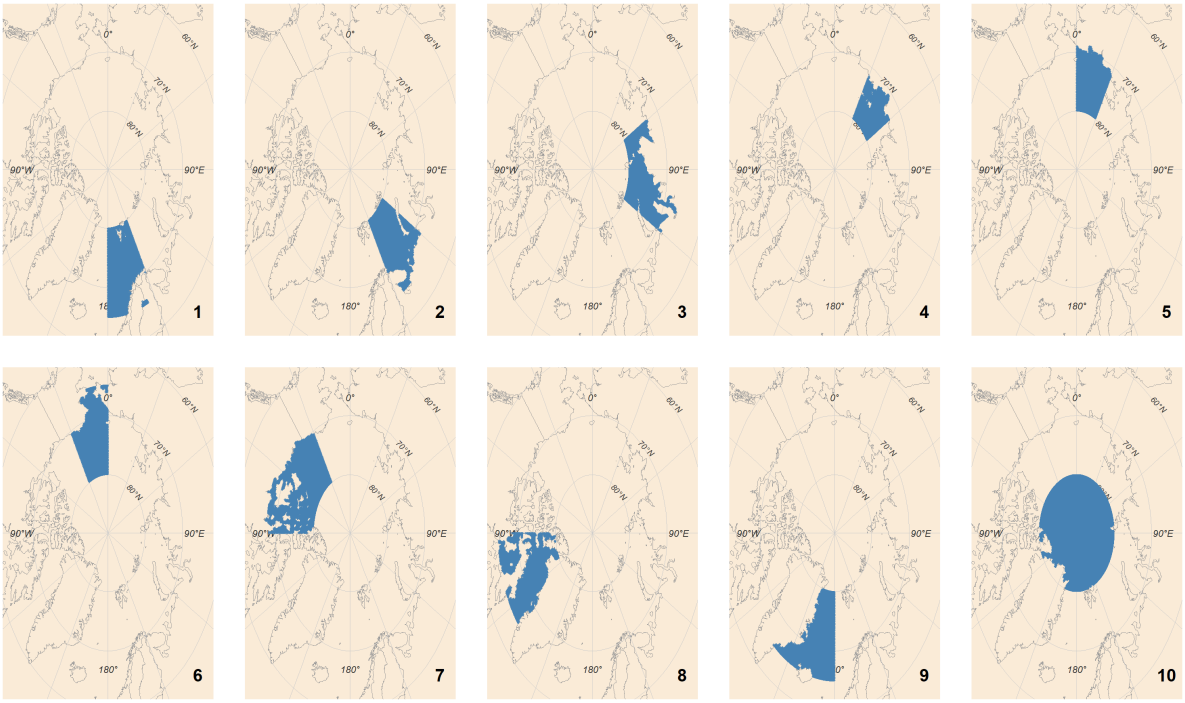

图1. 北冰洋及其边缘海的地理分布。编号标注分别表示：（1）挪威海、（2）巴伦支海、（3）喀拉海、（4）拉普捷夫海、（5）东西伯利亚海、（6）楚科奇海、（7）波弗特海、（8）巴芬湾、（9）格陵兰海和（10）北冰洋。

3. 观测海表温度数据分析

本节将我们的结果与数据进行比较。真实世界的数据是系统内各种地球物理过程共同作用的净结果；从这一角度看，本文提出的模型进行了高度简化。我们关注北半球高纬度（北纬 60°以北）夏季（八月）的海表温度（SST），因为冰反照率反馈在此处占主导地位。

在冰川区，微小的温度升高就可能触发强烈的反馈，进一步加速初始升温。尤其是冰反照率反馈，它是调控北极海表温度的关键机制，在夏季尤为如此 [53]。当温度接近某一阈值时，微小的温度升高便会引发冰融化，使冰转变为液态水；由于水的反照率低得多，这会导致吸热增加，进而使温度升高。

由于CO_2, 北极地区正在经历所谓的北极放大 [50] 以及海冰的严重退缩 [26]。因此，目前的8月海表温度高于过去 [11] ，北部海域也正经历剧烈的年际变化 [33] ，，导致海表温度波动加剧 [1,53]。这正是我们在第1节中所描述的动力学。

关于第2节，我们讨论了空间方差的概念。我们借此考察上述局部机制如何在更大尺度上显现。这反映了冰水动力学在整个海洋中的空间均匀性，有助于明确这一过程是均匀的，还是呈现斑块状分布 [4,52,54]。换言之，我们通过海表温度的空间变率来评估这一现象的异质性，观察系统在多大程度上分裂为若干斑块。具体而言，我们已表明，在特定状态下，温度变率也会在空间上增加，这意味着其呈现斑块状行为和非均匀分布。

我们使用了 NOAA（美国国家海洋和大气管理局）的观测数据，尤其是 NOAA OI SST V2 高分辨率数据集（https://psl.noaa.gov/data/gridded/data.noaa.oisst.v2.highres.html），该数据由美国科罗拉多州博尔德的 NOAA物理科学实验室提供（https://psl.noaa.gov） [30]。用于时间方差分析的数据集包含 1981/09 至 2026/01 的每日海表温度值，空间覆盖范围为全球网格，纬度和经度间距均为 0.25 度（1440×720）。进行空间方差分析时，我们使用了月平均海表温度，其时间范围和地理范围与上述数据集相同。

首先，为了检测海表温度时间变率的信号，我们先确定了一个研究区域。随后，我们提取了1982年至2025年间每年八月的数据，并计算所选月份的日空间平均值。接着，我们对重叠的十年时段（31×10 每个时段的数据）计算统计量（直方图、均值、标准差），每次将时间窗口向前移动一年。

在图2 中，我们展示了喀拉海这一北冰洋边缘海的案例。该示例与我们的研究结果一致。左上图显示研究区域的位置。右上图比较了第一个（蓝色）和最后一个（红色）可计算年代的8月空间平均日海表温度直方图，并标出了各自的均值和方差。我们注意到，随着时间推移，分布发生了显著变化：均值升高，分布尾部也有所扩展；均值和标准差值的增加分别证实了这一点。左下图显示了8月海表温度年代际空间平均值随时间的变化（以各年代的年中为中心），可以观察到显著的上升趋势。右下图显示了8月海表温度年代际空间标准差随时间的变化（以各年代的年中为中心）。在一个平稳阶段之后（均值趋势中也可观察到这一阶段），可以清楚地辨认出一个增长时期，即变率增加。图3所示的拉普捷夫海案例也有类似的发现 [51]。

将阿拉伯海（图4）与此前的情形进行比较，均值的增长趋势明显较弱，且分布尾部的形状没有变化。因此，标准差没有增长，保持稳定。这或许可以解释为，该区域的平衡温度远高于参考区间，也就是说，我们讨论的是共反照率曲线的右侧平台（方程（1.2）），即在（1.4）中 $\text{方差}'_\infty \equiv 0$。

关于温度的空间变率，如前所述，我们更换了数据集。对于研究区域内的每个网格点，我们使用八月平均海表温度值绘制密度图，其中颜色强度表示海表温度值随时间出现的频率。随后，我们计算了每年的标准差，从而捕捉该区域的空间分布范围，即围绕平均值的波动，也就是其异质性。

图 5 和 6 分别展示了前文讨论的海域——喀拉海和拉普捷夫海的空间变率。上图为密度图。两种情况下，分布范围都明显扩大，表明离散程度增大。下图显示了年际标准差及其增长趋势（红色虚线），后者呈上升趋势。

与前述海域不同，北冰洋（图 1中的第 10 幅图）表现出不同的特征。如图7所示，标准差保持稳定。这或许可以解释为这些海域的平均温度仍然过低；也就是说，我们讨论的是共反照率曲线（公式（1.2））左侧的平台区，即在（1.4）中，$\text{方差}'_\infty \equiv 0$。事实上，即使在八月，该区域仍以常年冰为特征。

致谢

G.D.S. 感谢德国研究联合会项目 FOR 5528 提供的支持。F.F. 的研究由 PRIN-PNRR 项目“气候变化及其影响的一些数学方法”（编号 P20225SP98）和欧盟（欧洲研究委员会，NoisyFluid，编号 101053472）资助。所表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧洲研究委员会的立场。欧盟和授予资助的机构均不对此承担责任。M.L. 获得意大利可持续发展与气候变化国家级跨大学博士课程的支持。M.L. 在帕维亚高等研究大学学院 IUSS 攻读可持续发展与气候变化博士项目期间完成了这项工作

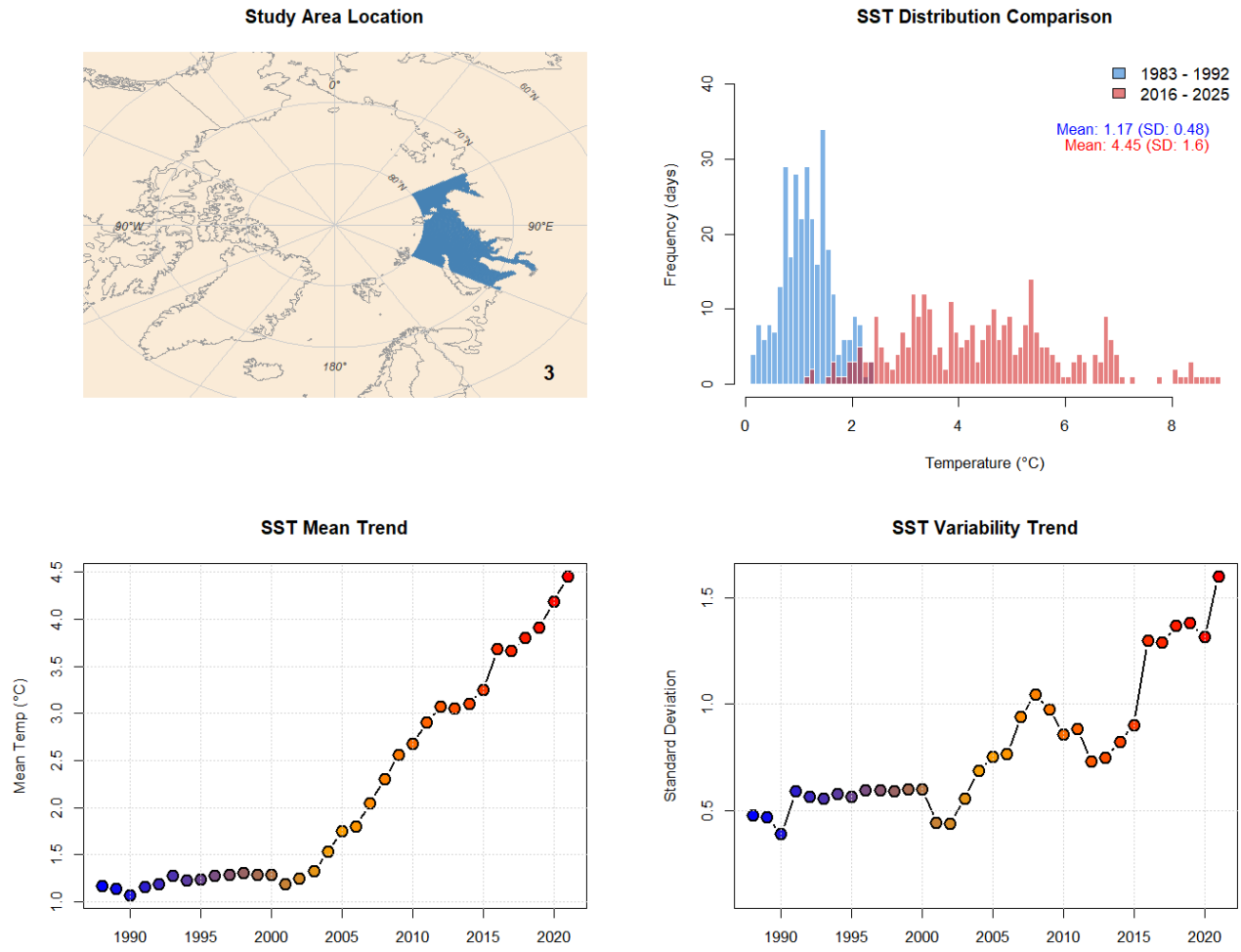

图2。喀拉海。左上：研究区域的位置。右上：首个年代（1983-1992，蓝色）与最近一个可计算年代（2016-2025，红色）的8月空间平均日海表温度直方图（天数）对比，并列出各自的均值和标准差。左下：8月海表温度年代际空间平均趋势（以各年代的年中为中心，采用一年移动窗口）。右下：8月海表温度年代际空间标准差趋势（以各年代的年中为中心，采用一年移动窗口）。蓝到红的色阶表示年代间时间的推进，与直方图所用的配色方案一致。

帕维亚，第三十八周期；奖学金由2022年4月9日第351号部长法令资助，依据由欧盟“下一代欧盟”资助的国家复苏与韧性计划——任务4“教育与研究”、组成部分1“提升教育服务供给：从托儿所到大学”——投资3.4“高级教学与大学技能”。

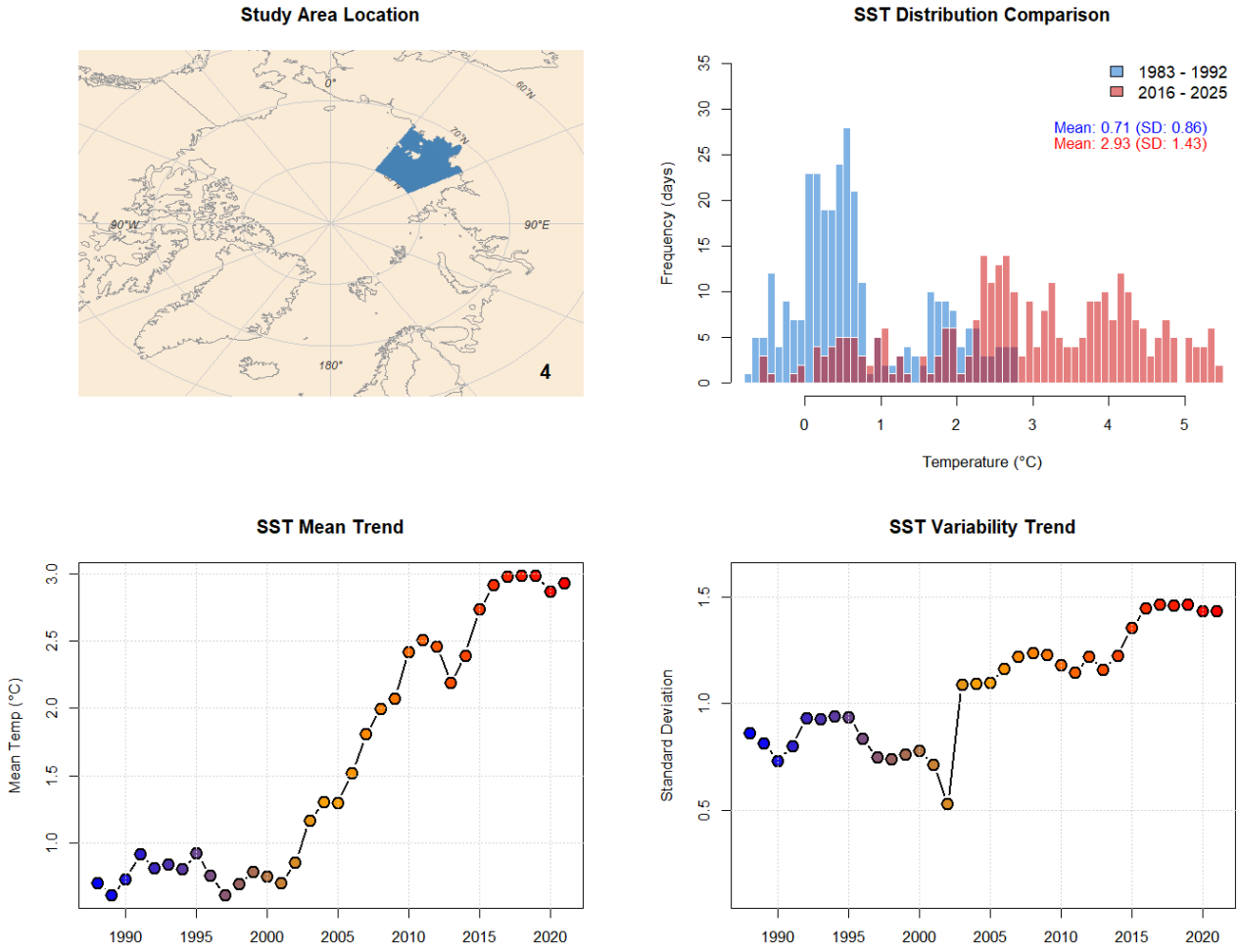

图3。拉普捷夫海。左上：研究区域的位置。右上：第一个年代（1983-1992，蓝色）与最后一个可计算年代（2016-2025，红色）的8月空间平均日海表温度直方图（天数）对比，并列出各自的均值和标准差。左下：8月海表温度的年代际空间平均趋势（以各年代中年为中心，采用一年移动窗口）。右下：8月海表温度的年代际空间标准差趋势（以各年代中年为中心，采用一年移动窗口）。蓝到红的色阶表示年代间时间的推进，与直方图中使用的配色方案一致。

参考文献

[1] M. Alexander、J. Scott、K. Friedland、J. Nye、M. Bender、D. Tommasi、C. Stock 和 A. Marshak。21世纪大型海洋生态系统区域海表温度预测：北方海洋均值、变率和极端事件的变化。*Elementa: Science of the Anthropocene*，6(1):9，2018。

[2] L. Arnold。重访 Hasselmann 计划：确定性气候模型中随机性的分析。载于随机气候模型，第49卷，第141–157页。Birkhäuser，巴塞尔，2001。[3] P. Ashwin 和 A. Von der Heydt。极端敏感性与气候临界点。*Journal of Statistical Physics*，179(5):1531–1552，2020。

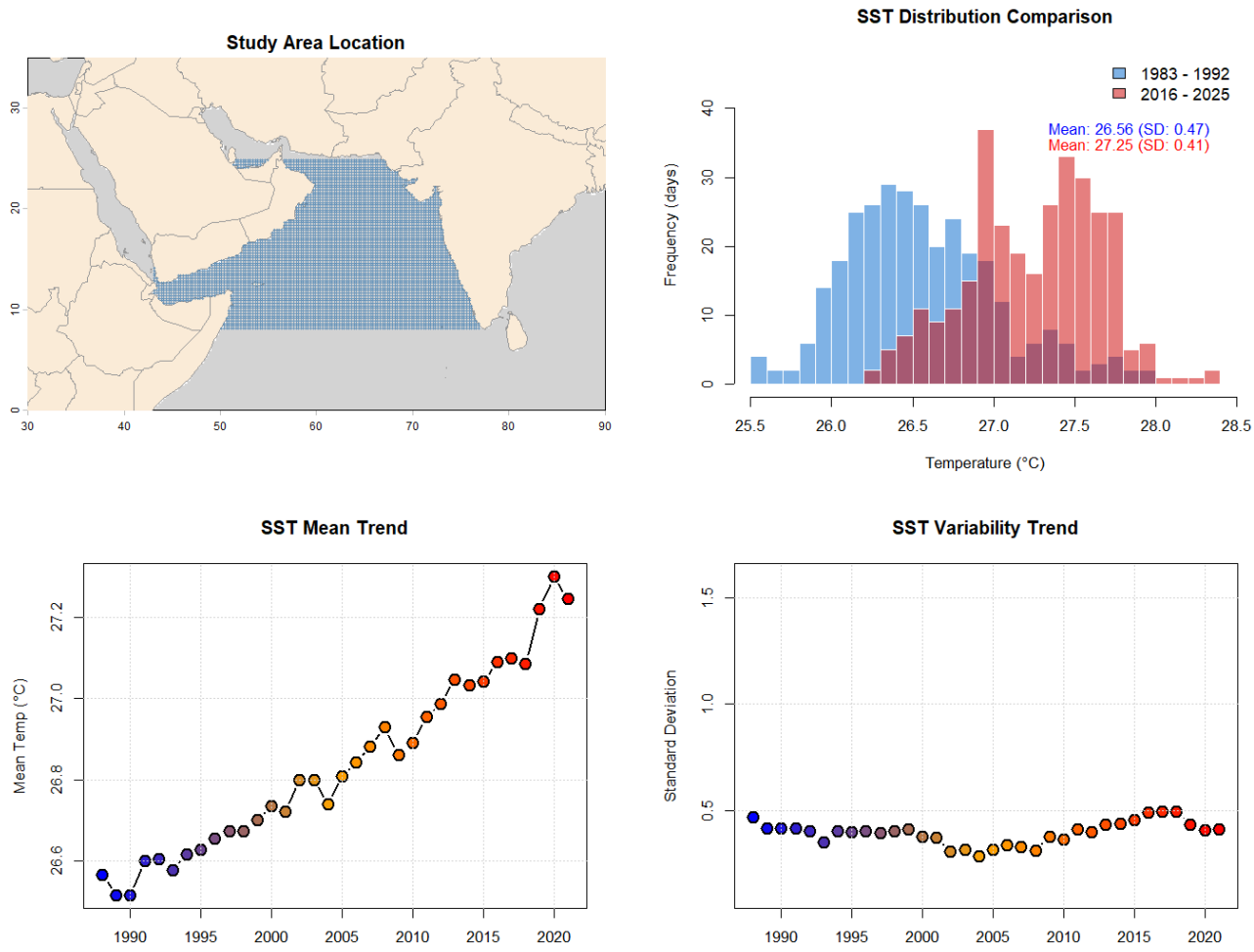

图4. 阿拉伯海。左上：研究区域的位置（经纬度）。右上：第一个十年（1983-1992，蓝色）与最后一个可计算十年（2016-2025，红色）的8月空间平均日海表温度直方图（天数）比较，并给出各自的均值和标准差。左下：8月海表温度的年代际空间平均趋势（以每个十年的中间年份为中心，一年滑动窗口）。右下：8月海表温度的年代际空间标准差趋势（以每个十年的中间年份为中心，一年滑动窗口）。由蓝到红的色标表示各十年的时间进程，与直方图所用配色方案一致。

[4] D. Barber、R. Galley、M. Asplin、R. De Abreu、K. Warner、M. Pucko、M. Gupta、S. Prinsenberg与S. Julien。博福特海南部的多年生浮冰在2009年夏季并非如表面所见。《地球物理研究快报》，36(24):L24501，2009年。[5] R. Bastiaansen、H. Dijkstra与A. von der Heydt。空间异质世界中的碎片化临界转变。《环境研究快报》，17(4):045006，2022年3月。[6] A. Berman与R. Plemmons。数学科学中的非负矩阵，第9卷。工业与应用数学学会，1994年。[7] M. Budyko。太阳辐射变化对地球气候的影响。*Tellus*，21(5):611–619，1969年。[8] P. Cannarsa、V. Lucarini、P. Martinez、C. Urbani与J. Vancostenoble。双层能量平衡模型分析：长时间行为与温室效应。《混沌》，33(11):论文编号113111，34，2023年。

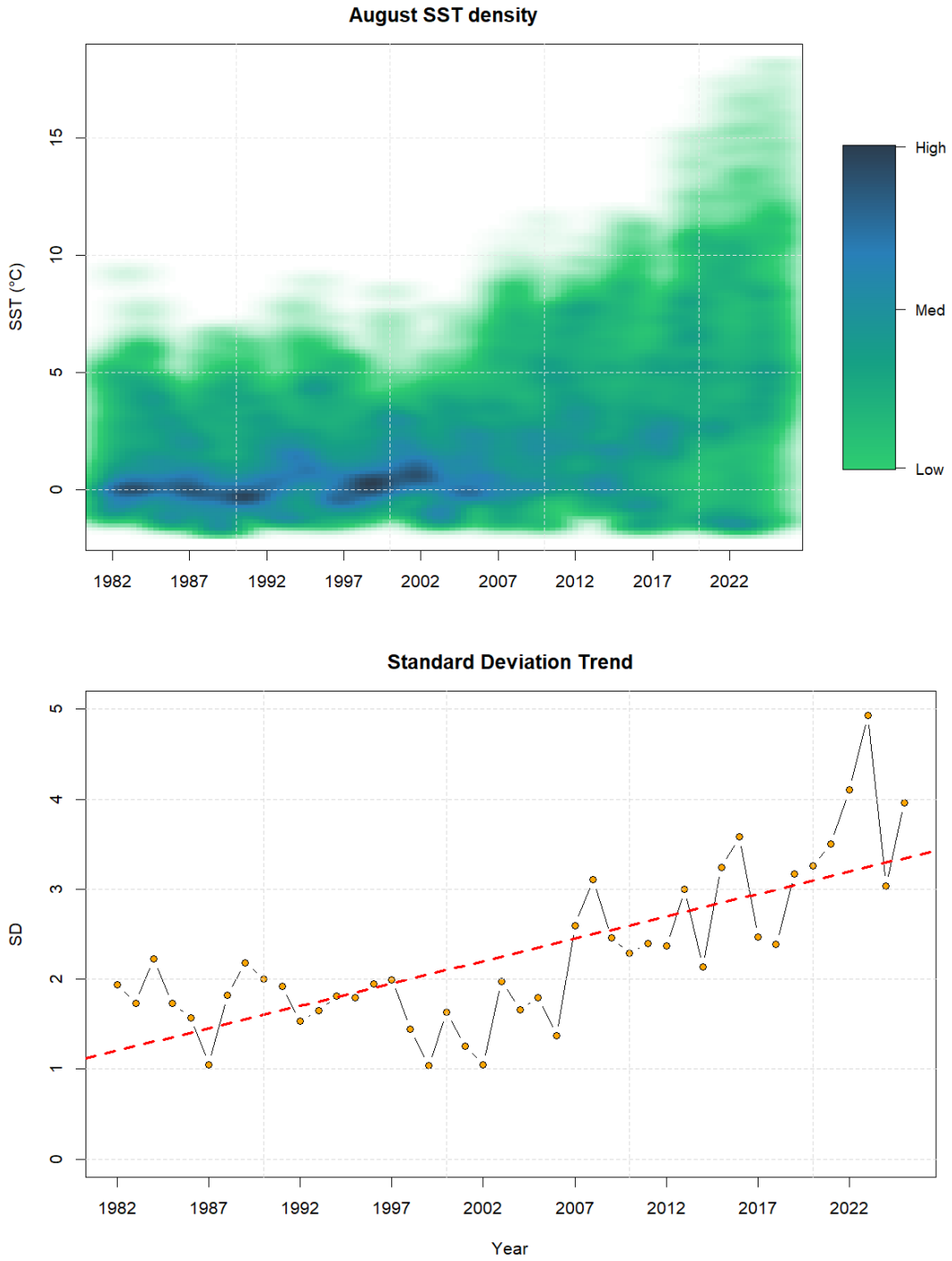

图 5. 喀拉海（图 1中的面板 3）。上：研究区域所有单个网格点的年度八月平均海表温度值的密度分布。下：年际标准差（带标记的虚线）及其增长趋势（红色虚线）。

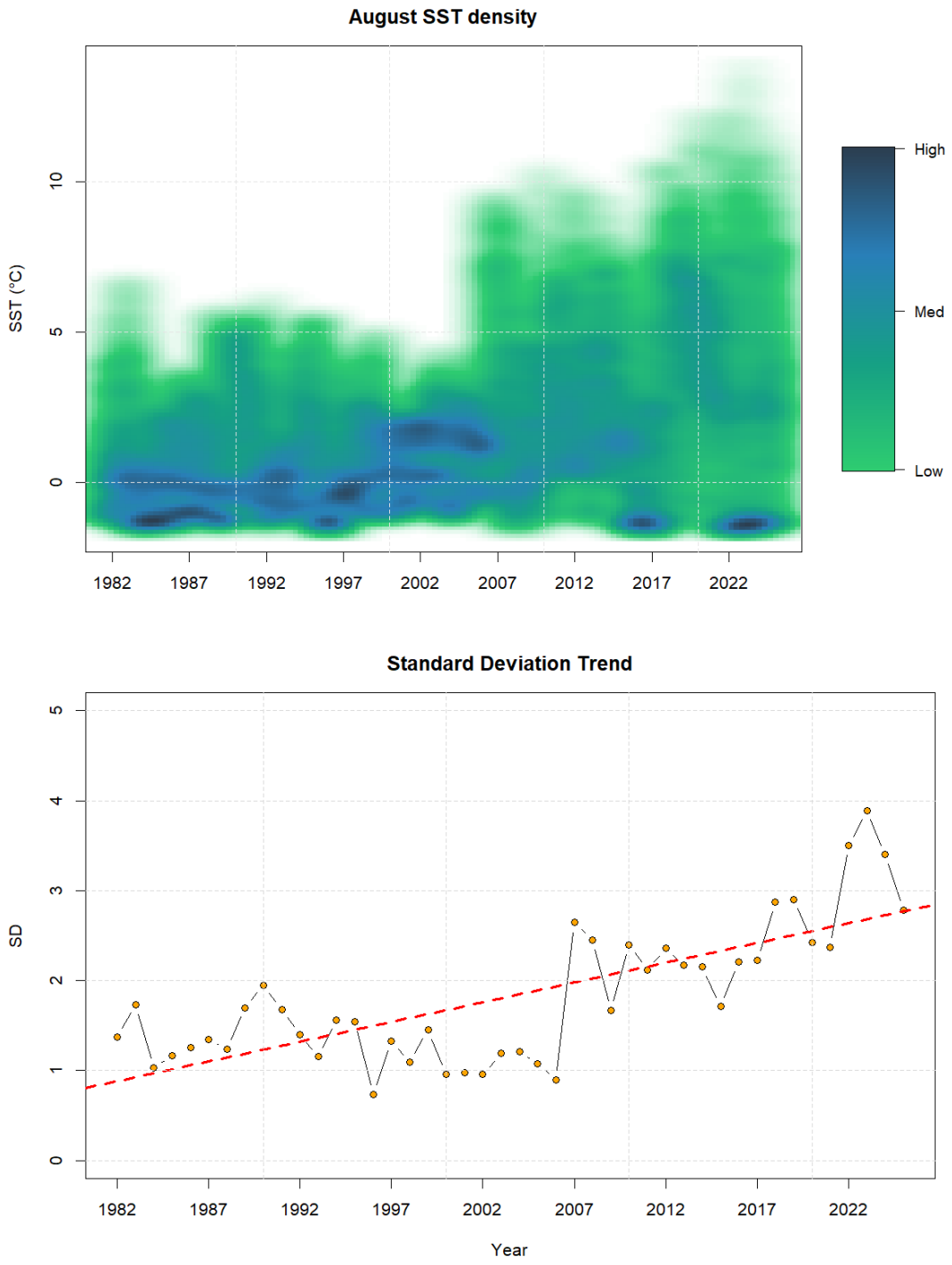

图6。 拉普捷夫海（面板4，图 1）。上：研究区域所有单个网格点的年度八月平均海表温度值的密度分布。下：年际标准差（带标记的虚线）及其增长趋势（红色虚线）。

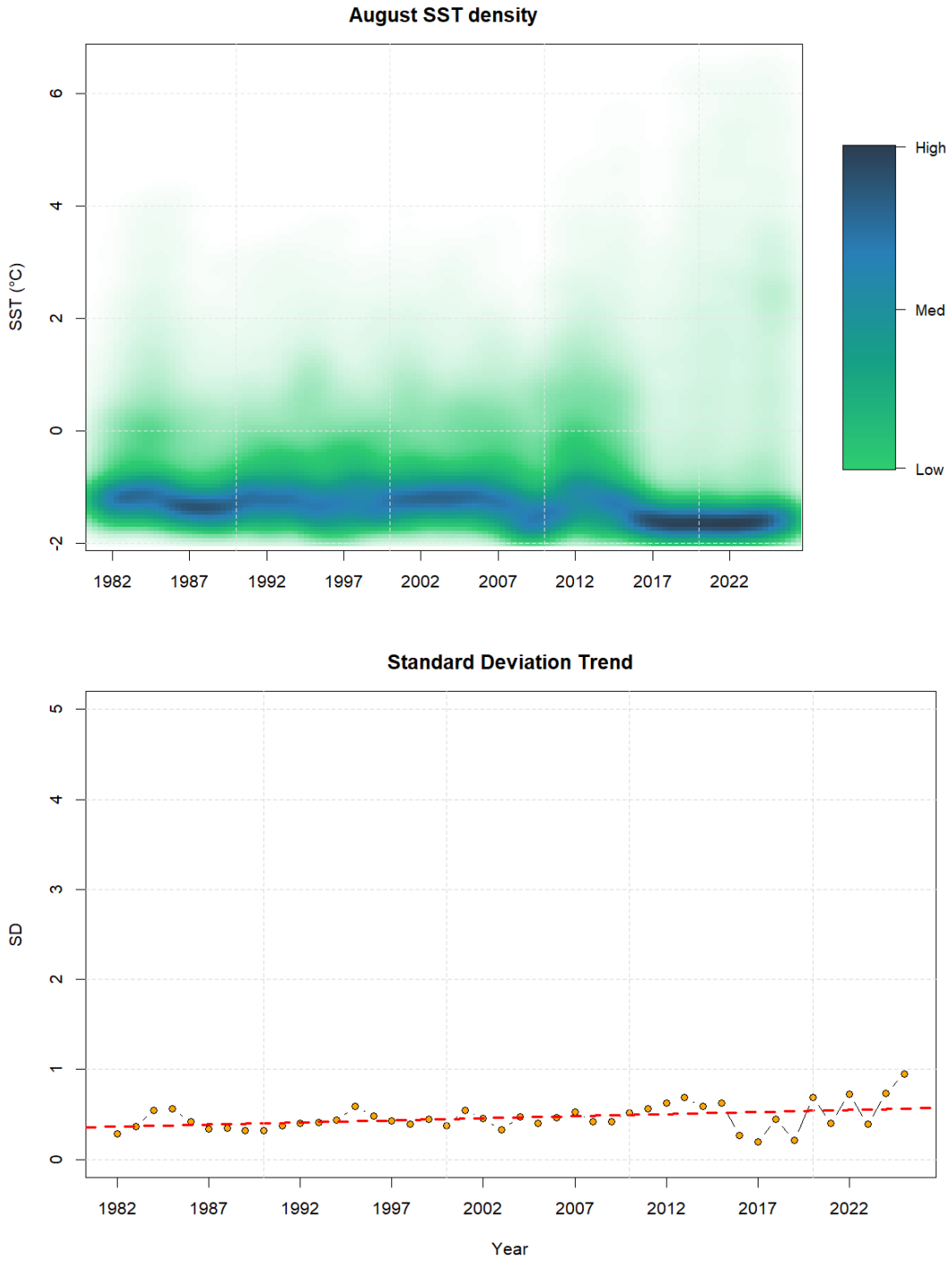

图7. 北冰洋（面板10，图1）。上：研究区域所有单个网格点的年度八月平均海表温度值的密度分布。下：年际标准差（带标记的虚线）及其增长趋势（红色虚线）。

[9] A. Caponera 和 D. Marinucci. 球面函数自回归的渐近性. Ann. Statist., 49 369, 2021 1 346( ): – .[10] A. Caponera、D. Marinucci 和 A. Vidotto. 时间依赖球面随机场的多尺度 CUSUM 检验. arXiv 预印本 arXiv:2305.01392, 2023年.[11] K. Carvalho 和 S. Wang. 变化中的气候下北冰洋及其边缘海的海表温度变率：模式与机制. 《全球与行星变化》, 193:103265, 2020. [12] G. Da Prato 和 J. Zabczyk. 无限维随机方程, 第152卷. 剑桥大学出版社, 剑桥, 第二版, 2014年. [13] G. Del Sarto、J. Bröcker、F. Flandoli 和 T. Kuna. 一维能量平衡模型的变分技术. 《地球物理学中的非线性过程》, 31(1):137–150, 2024年. [14] G. Del Sarto、M. Hieber、F. Palma 和 T. Zöchling. 受任意大外力作用的能量平衡模型与主动流体耦合系统的时间周期解. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 90:104558, 2026年.[15] G. Del Del Sarto、M. Hieber 和 T. Zöchling. 与地球物理流耦合的能量平衡模型的含噪动态边界条件. Mathematische Nachrichten, 299(1):60–84, 2026年. [16] J. Díaz. 能量平衡气候模型的数学处理. 载于《气候学与环境模型的数学》, NATO ASI Ser. I Glob. Environ. Change 第48卷, 第217–251页. Springer, 柏林, 1997年. [17] B. Dortmans、W. Langford 和 A. Willms. 古气候转变的能量平衡模型. Climate of the Past, 15(2):493–520, 2019年. [18] I. Eisenman. 控制海冰消退分岔结构的因素. Journal of Geophysical Research: Atmo- spheres, 117(D1), 2012年. [19] I. Eisenman 和 J. Wettlaufer. 北极海冰消失过程中的非线性阈值行为. Proceedings of the National Academy of Sciences, 106(1):28–32, 2009年. [20] L. Evans. 偏微分方程, 第19卷. 美国数学学会, 2022年. [21] G. Floridia. 一类非线性退化抛物方程的非负能控性及其在气候科学中的应用. Electron. J. Differential Equations, 第59篇论文, 第27页, 2020年.[22] F. Fornasaro、T. Kuna 和 G. Carigi. 具有辐射平衡的准地转海气模型的适定性与长时间动力学. arXiv 预印本 arXiv:2512.19556, 2025年. [23] M. Ghil. Sellers 型模型的气候稳定性. Journal of Atmospheric Sciences, 33(1):3–20, 1976年. [24] M. Ghil 和 V. Lucarini. 气候变率与气候变化的物理学. Rev. Mod. Phys., 92:035002, 2020年7月. [25] P. Goodwin 和 R. Williams. 概念气候模型中地表变暖的北极放大. Physica D: Nonlinear Phenomena, 454:133880, 2023年.[26] H. Goosse、O. Arzel、C. M. Bitz、A. de Montety 和 M. Vancoppenolle. 气候变暖下北极夏季海冰范围的变率增加. 《地球物理研究快报》, 36(23):L23702, 2009年. [27] A. Hall. 地表反照率反馈在气候中的作用. Journal of Climate, 17(7):1550–1568, 2004年. [28] K. Hasselmann. 随机气候模型（第一部分）：理论. Tellus, 28(6):473–485, 1976年. [29] J. Houghton、Y. Ding、D. Griggs、M. Noguer、P. van der Linden、X. Dai、K. Maskell 和 C. Johnson（编）. 《2001年气候变化：科学基础》。政府间气候变化专门委员会第三次评估报告第一工作组的贡献, 2001年. [30] B. Huang、C. Liu、V. Banzon、E. Freeman、G. Graham、B. Hankins、T. Smith 和 H.-M. Zhang. 每日最优插值海表温度（DOISST）第二版的改进 2939, 2021 1 34 8 2923 . . Journal of Climate, ( ): – .[31] N. Ikeda 和 S. Watanabe. 随机微分方程与扩散过程, 第24卷. North-Holland 出版公司, 阿姆斯特丹—纽约；讲谈社, 东京, 1981年. [32] I. Karatzas 和 S. Shreve. 布朗运动与随机微积分, 《数学研究生教材》第113卷. Springer-Verlag, 纽约, 第二版, 1991年.[33] L. Landrum 和 M. M. Holland. 极端事件在新兴的北极地区变得司空见惯. Nature Climate Change, 10(12):1106–1110, 2020年. [34] R. LeVeque. 常微分方程与偏微分方程的有限差分方法. SIAM, 2007年. [35] S. Lewis 和 A. King. 21世纪温度的均值、方差和极值演变. Weather and Climate Extremes, 15:1–10, 2017年.[36] G. Lohmann. 能量平衡模型给出的温度：有效热容量至关重要. Earth System Dynamics, 11(4):1195–1208, 2020年. [37] I. Longo、R. Obaya 和 A. Sanz. 气候能量平衡模型中的非自治建模：平均化的局限性与气候敏感度. Physica D: Nonlinear Phenomena, 485:135038, 2026年. [38] V. Lucarini、L. Serdukova 和 G. Margazoglou. Ghil–Sellers 能量平衡模型中的 Lévy 噪声与高斯噪声诱导转变. 《地球物理学中的非线性过程》, 29(2):183–205, 2022年.[39] D. Marinucci、M. Rossi 和 A. Vidotto. $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$上各向同性平稳场经验测度的非普适涨落. Ann. Appl. Probab., 31(5):2311–2349, 2021年. [40] D. Marinucci、M. Rossi 和 A. Vidotto. 时间依赖球面随机场等值线的涨落. Ann. H. Lebesgue, 7:583–620, 2024年.[41] G. North、R. Cahalan 和 J. Coakley. 能量平衡气候模型. Reviews of Geophysics, 19(1):91–121, 1981年.

[42] G. North 和 K. Kim。《能量平衡气候模型》。威利大气物理与遥感丛书》。约翰·威立父子出版公司，2017年。[43] R. Plemmons。 M-矩阵刻画。I. 非奇异 M-矩阵。《线性代数及其应用》，18(2):175–188，1977年。[44] A. Quarteroni。《微分问题数值模型》，MS&A《建模、仿真与应用》第16卷。施普林格，查姆，第三版，2017年。[45] J. Rombouts 和 M. Ghil。简单气候—植被模型中的振荡。《地球物理学中的非线性过程》，22(3):275–288，2015年。[46] B. Rose 和 J. Marshall。海洋热输送、海冰与多重气候状态：能量平衡模型带来的启示。《大气科学杂志》，66(9):2828–2843，2009年。[47] S. Särkkä 和 A. Solin。《应用随机微分方程》，数理统计学会教材第10卷。剑桥大学出版社，剑桥，2019年。[48] W. Sellers。基于地球—大气系统能量平衡的全球气候模型。《应用气象学与气候学杂志》，8(3):392–400，1969年。[49] S. Seneviratne、X. Zhang、M. Adnan、W. Badi、C. Dereczynski、A. Di Luca、I. Pinto、M. Magnuson、J. Iturbide、N. Küttel、G. Kurten、B. J. Lall、R. Libonati、A. Martens、C. Stevens 和 R. Vautard。《变化中的气候下的天气与气候极端事件》，第1513–1766页。剑桥大学出版社，2021年。[50] M. Serreze 和 R. Barry。北极放大的过程与影响：研究综述。《全球与行星变化》，77(1):85–96，2011年。[51] P. Shabanov、A. Osadchiev、N. Shabanova 和 S. Ogorodov。1979–2022年喀拉海和拉普捷夫海冰覆盖范围缩减及无冰期延长。《遥感》，16(11):1875，2024年。[52] C. Strong 和 I. Rigor。北极边缘冰区夏季趋宽、冬季趋窄。《地球物理研究快报》，40(18):4864–4868，2013年。[53] M. Timmermans 和 Z. Labe。海表温度。NOAA技术报告OAR ARC 23-07，美国国家海洋和大气管理局（NOAA），2023年。载于：《2023年北极报告卡》。[54] M.-L. Timmermans。储存的太阳热量对北极海冰生长的影响。《地球物理研究快报》，42(15):6399–6406，2015年。[55] K. Twardowska。随机微分方程的Wong-Zakai逼近。《Acta Appl. Math.》，43 359，1996 3 317( ): – 。[56] R. van de Wal 和 J. Oerlemans。格陵兰冰盖能量平衡模型。《全球与行星变化》，9(1):115–131，1994年。[57] N. Watkins、R. Calel、S. Chapman、A. Chechkin、R. Klages 和 D. Stainforth。气候中非马尔可夫能量平衡模型面临的挑战。《混沌：非线性科学跨学科期刊》，34(7):072105，2024年7月。[58] M. Winton。北极气候变化放大：地表反照率反馈与此有何关联？《地球物理研究快报》，33(3)，2006年。

达姆施塔特工业大学，数学系，Schlossgartenstr.7，达姆施塔特64289，德国，电子邮箱：delsarto@mathematik.tu-darmstadt.de 比萨高等师范学校，理学院，骑士广场7号，比萨56126，意大利电子邮箱：franco.flandoli@sns.it 比萨高等师范学校，理学院，骑士广场7号，比萨56126，意大利电子邮箱：marta.lenzi@sns.it 帕维亚高等研究大学学院 IUSS，科学、技术与社会系，胜利广场15号，帕维亚27100，意大利电子邮箱：marta.lenzi@iusspavia.it