arXiv:2603.01619v1 [math.GT] 2 Mar 2026

纽结彩色琼斯多项式的提升

STAVROS GAROUFALIDIS 和 CAMPBELL WHEELER

Abstract. Habiro 将整同调三维球面上的 Witten–Reshetikhin–Turaev 不变量（定义在复单位根集合上的复值函数）提升为 Habiro 环中的一个元素。我们将亚历山大多项式$\Delta(t)$的纽结彩色琼斯多项式，提升到最近引入的 Habiro 环中，该环对应于 ´étale 映射 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}] \to \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, \Delta(t)^{-1}]$（对所有素数 p均具有弗罗贝尼乌斯提升 $t \mapsto t^p$）。这意味着存在单位根处的圈展开（证实了 Habiro 猜想），并且贝蒂数为 1 的三维流形的 Ohtsuki 幂级数不变量可以提升到 Habiro 环中。我们的结果可自然推广到纽结补空间的 skein 模，并且表明，由单李（超）代数的表示着色的彩色琼斯多项式存在一种自然的提升。

Contents

1. 引言 2 1.1. 拓扑量子场论与 Habiro 环 2 1.2. 拓扑量子场论不变量环 3 1.3. 我们的结果 3 1.4. 推广到 skein 模 6 1.5. 与李代数相关的纽结多项式 6 1.6. 证明思路 7 致谢 8 2. 量子纽结不变量与有理性 8 2.1. 彩色琼斯多项式的状态和 8 2.2. $q \to 1$ 极限、Burau 表示与亚历山大多项式 12 2.3. 通过 MacMahon主定理得到的有理性 15 2.4. 通过 Lagrange反演进一步得到的有理性 17 3. etale $\mathbb{Z}[t]$-代数的 Habiro 环综述 22 3.1. p-进完备化基础 22 3.2. $\mathbb{Z}[t]$-´etale 代数、它们的 Habiro 环及其元素 23 3.3. 分圆展开 25 4. 证明 26 4.1. 定理 1.3 的变形 26 4.2. 单位根附近 q-Pochhammer 符号展开基础 27 4.3. 最后的证明 31 附录 A. Burau 表示与亚历山大多项式 32 参考文献 33

日期：2026年2月27日。关键词：纽结、Habiro 环、 ´étale 映射的 Habiro 环、拓扑量子场论、Chern–Simons理论、琼斯多项式、有色琼斯多项式、 q-超几何和、Witten-Reshetikhin-Turaev 不变量、三维流形、贝蒂数1。

1. Introduction

1.1. **拓扑量子场论与 Habiro 环。** 琼斯多项式对纽结或链环的发现 S^3 由 V. Jones 提出 [17] 以及 Witten 将其解释为拓扑量子场论（即以陈-西蒙斯函数为作用量的规范理论）的可观测量 [29] 促成了 Atiyah 提出的拓扑量子场论概念（简称 TQFT） [2]。

拓扑量子场论（TQFT）是一种有效的方法，可用于组织关于 0、1、2 和 3 维流形的复杂信息。已知的构造例如使用紧李群（如 SU(2)）和一个复单位根 ζ。Reshetikhin–Turaev [24], 最初构造了具有这类数据的拓扑量子场论，后来许多作者也进行了构造。

这些理论为闭三维流形赋予数值不变量，为闭曲面赋予有限维向量空间，为闭一维流形赋予范畴；这些对象满足相当复杂的切割与粘合性质，也允许处理带边界和角的流形。

特别地，闭三维流形的 WRT 不变量是定义在复单位根集合 μ 上的复值函数。当时，Reshetikhin–Turaev 曾指出，他们不知道其不变量是否像琼斯多项式那样，是某个多项式在单位根处的取值。Habiro [16]的一个重要发现是，事实并非如此；相反，他找到了整同调三维球面 M 的 WRT 不变量 $Z_M(\zeta)$ 到 Habiro 环中一个元素 $f_M(q)$ 的提升

$$\mathcal{H} \;=\; \varprojlim_n \mathbb{Z}[q]/(q;q)_n\mathbb{Z}[q] \tag{1}$$

（其中 $(q;\ q)_n = (1-q)\ldots(1-q^n)$ 是 q-Pochhammer 符号），使得对于每个 $\zeta \in \mu$，都有 $Z_M(\zeta) = f_M(\zeta)$。

Habiro 环的元素不仅可以在单位根处取值，也可以在单位根附近取值，从而得到同态

$$f(q) \in \mathcal{H} \to f_m(q-\zeta_m) \in \mathbb{Z}[\zeta_m][\![q-\zeta_m]\!] \tag{2}$$

其中 $(\zeta_m)_{m\geq 1}$ 是一个阶为 m 的相容复单位根族，即满足以下条件的一个族

$$\zeta_{mm'} \;=\; \zeta_m\zeta_{m'}, \qquad (m,m') \;=\; 1, \qquad (\zeta_{p^r})^p \;=\; \zeta_{p^{r-1}} \tag{3}$$

对于所有正整数 m 和 m'、素数 p 以及正整数 r。

这一族 同态2）所给出的满足一个 p-进拼接性质，即

$$f_m(q-\zeta_{pm}+\zeta_{pm}-\zeta_m) \;=\; f_{pm}(q-\zeta_{pm}) \in \mathbb{Z}_p[\zeta_{pm}][\![q-\zeta_{pm}]\!], \qquad (m\in\mathbb{Z}_{>0},\quad p \text{ 素数}) \tag{4}$$

其中 $\mathbb{Z}_p = \lim_n \mathbb{Z}/(p^n)$ 是 p-进整数环。方程 (4) 之所以成立，是因为一个关键事实：对于适当的 $\{\zeta_m\}_m$，我们有 $|\zeta_{pm}-\zeta_m|_p < 1$ 其中 $|\cdot|_p$表示 p-qdic 范数，定义在 $\mathbb{Q}_p$。

综合以上内容，Habiro 在 [15] 中证明存在一个同构 $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$，其中

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \;=\; \left\{ (f_m(q-\zeta_m))_m \;\in\; \prod_{m\geq 1} \mathbb{Z}[\zeta_m][\![q-\zeta_m]\!] \;\middle|\; (4) \text{ holds} \right\}. \tag{5}$$

1.2. 拓扑量子场论不变量环。最近，受微扰 Chern–Simons 理论的算术性质启发， ´étale $\mathbb{Z}[t^{\pm1}]$-代数 R 的 Habiro 环在 [13], 中被隐式讨论，并在 Scholze 的课程 [27] 中引入，随后又在 [14]中进一步研究。 $\mathcal{H}_{R/\mathbb{Z}[t^{\pm1}]}$ 的定义与（5）类似，其中我们将 $\mathbb{Z}$ 替换为 R，将 $\mathbb{Z}_p$ 替换为 $R_p = \lim_n R/(p^n)$；至关重要的是，我们在公式（4）右侧插入了 p-弗罗贝尼乌斯 φ_p，使其满足 $\varphi_p(t) = t^p$。

定义 1.1. $R/\mathbb{Z}[t^{\pm1}]$ 的 Habiro 环定义为

$$\mathcal{H}_R = \Big\{(f_m)_m \in \prod_{m\geq1} R[\zeta_m, t^{1/m}][\![q-\zeta_m]\!] \;\Big|\; \text{for all } m\in\mathbb{Z}_{>0} \text{ and } p \text{ prime} \\ f_m(x, q-\zeta_{pm}+\zeta_{pm}-\zeta_m) = \varphi_p f_{pm}(x^p, q-\zeta_{pm})\Big\}, \tag{6}$$

其中 $\varphi_p(q) = q$ 和 $\varphi_p(\zeta) = \zeta$。

弗罗贝尼乌斯的作用 φ 使 $\mathcal{H}_R$ 成为一个有趣且非平凡的环。微扰陈-西蒙斯不变量自然地属于此处 [13], ，而非完备化 $\varprojlim_n R[q]/(q;q)_n R[q]$。

这些环与分圆展开也有根本的不同 n

$$\varprojlim_n \mathbb{Z}[q^{\pm1}, t^{\pm1}]/((t^{-1}q^a;q)_n \,|\, a\in\mathbb{Z})\,. \tag{7}$$

事实上，正如下文所示，它们包含的信息严格更多:

引理 1.2。 如果环同态 $\mathrm{ev}_{t=1}: \mathbb{Z}[t^{\pm1}]\to\mathbb{Z}$ 可以扩展为映射 $\mathrm{ev}_{t=1}: R\to\mathbb{Z}$，那么存在一个单射

$$\mathcal{H}_{R/\mathbb{Z}[t^{\pm1}]} \hookrightarrow \varprojlim_n \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}[t^{\pm1}]/(t^{-1};q)_n\,. \tag{8}$$

此外，如果 $f(t, q)\in\mathcal{H}_{R/\mathbb{Z}[t^{\pm1}]}$对所有 $n>0$都满足 $f(q^{n-1}, q)\in\mathbb{Z}[q^{\pm1}]$，那么它的像属于由 $\varprojlim_n \mathbb{Z}[t^{\pm1}, q^{\pm1}]/(t^{-1}; q)_n$给出的子环。

1.3. **我们的结果**。 回顾一下，纽结 K的彩色琼斯多项式 $J_{K,\,n}(q)\in\mathbb{Z}[q^{\pm1}]$ 是由劳朗多项式组成的一个序列，其中 $n\geq1$ 粗略地说，它编码了通过 SU(2) 的 $(n+1)$ 维表示观察到的纽结；或者说，它由纽结及其平行副本 [24]的琼斯多项式编码。

我们的定理将纽结的彩色琼斯多项式提升为 Habiro 环$\mathcal{H}_{\mathbb{Z}[t^{\pm1},\Delta_K(t)^{-1}]/\mathbb{Z}[t^{\pm1}]}$中的一个元素，其中 $\Delta_K(t)\in\mathbb{Z}[t^{\pm1}]$ 是 K的亚历山大多项式，它刻画了纽结补空间 [1]的万有阿贝尔覆盖的同调。由函子性以及 $\Delta_K(1) = 1$这一事实，可得一个映射

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Z}[t^{\pm1},\Delta_K(t)^{-1}]/\mathbb{Z}[t^{\pm1}]} \to \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}\,, \qquad t\mapsto q^n \qquad (n\in\mathbb{Z})\,. \tag{9}$$

定理 1.3. 存在一个映射

$$J: \{Knots\ K\ in\ S^3\} \to \mathcal{H}_{\mathbb{Z}[t^{\pm1},\Delta_K(t)^{-1}]/\mathbb{Z}[t^{\pm1}]}\,, \qquad K\mapsto J_K(t,q) \tag{10}$$

满足

$$J_K(q^{n-1}, q) = J_{K,n}(q)\in\mathbb{Z}[q^{\pm1}]\subset\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}\hookrightarrow\mathbb{Z}[\![q-1]\!] \qquad (for\ all\ n>0)\,. \tag{11}$$

上述定理没有用到 Habiro 关于 [16]彩色琼斯多项式的定理，并且有一些直接推论。

第一个涉及彩色琼斯多项式的分圆展开，该展开最初由 Habiro [16]证明。

推论 1.4。对于每个 K 中的纽结 S^3，都存在一个多项式序列 $a_{K,k}(q) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$，使得对所有 $n > 0$，均有

$$J_{K,n}(q) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_{K,k}(q)(q^{-n+1};q)_k \,. \tag{12}$$

下一个推论涉及 Rozansky [26]引入的所谓彩色琼斯多项式的圈展开

$$J_K^{\mathrm{loop}}(t,q) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, \Delta(t)^{-1}][\![q-1]\!], \qquad J_K^{\mathrm{loop}}(t,1) \;=\; \frac{1}{\Delta_K(t)} \tag{13}$$

其特征是由以下事实唯一确定：

$$J_{K,n}(q) \;=\; J_K^{\mathrm{loop}}(q^{n-1},q) \in \mathbb{Q}[n][\![q-1]\!], \qquad (n>0)\,. \tag{14}$$

在 [16, 猜想 7.4], 中，Habiro 猜想圈展开可以在所有单位根 ζ_m附近定义。这一性质内在于 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}, \Delta(t)^{-1}]$的 Habiro 环的定义。回顾一下，一个元素 $J_K(t,q) \in \mathcal{H}_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1},\Delta(t)^{-1}]/\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]}$是一族级数 $J_{K,m}(t, q-\zeta_m) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, \Delta(t)^{-1}][t^{1/m}, \zeta_m][\![q-\zeta_m]\!]$，它们经过弗罗贝尼乌斯扭曲后彼此粘合。

推论 1.5。对于每个纽结 K in S^3，我们有

$$J_{K,1}(t, q-1) \;=\; J_K^{\mathrm{loop}}(t,q) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, \Delta(t)^{-1}][\![q-1]\!]\,, \tag{15}$$

并且单位根处的级数族 $J_{K,m}(t, q-\zeta_m)$ 存在（这证明了 Habiro 的猜想）。此外，这些单位根处的展开在经过弗罗贝尼乌斯扭曲粘合后彼此确定。

下一个推论讨论纽结补空间上的几何德恩填充操作与定理 1.3 中 Habiro 环上的代数前推操作之间的相容性。回顾一下，斜率为 $\gamma \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ 的德恩填补，是指通过边界环面的微分同胚，将一个实心环面 $S^2 \times D^2$ 粘到具有环面边界的 3-流形边界上的过程，并使斜率为 γ 的曲线围成一个圆盘。对纽结补空间 $S^3 \setminus K$ 应用这一操作，将得到一个闭三维流形 $S^3_{K,\gamma}$，其同调由 $H_1(S^3_{K,a/b}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ 给出，其中 (a,b) 是互素整数。

正如引言中所述，Habiro 将整同调球的 WRT 不变量提升为一个映射

$$\{\mathbb{Z}\mathrm{HS}\} \to \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}\,. \tag{16}$$

Beliakova–B¨uhler–Lˆe [5] 将这一映射扩展为有理同调三维球面的 WRT 不变量的一个提升 M，其中 $|H_1(M,\ \mathbb{Z})| = N$。

在代数方面，我们使用引理 1.2 和 [6, 第 3] 来定义扭曲前推映射

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &: \mathcal{H}_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1},\Delta(t)^{-1}]/\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]} \to \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}, \qquad t^k \mapsto q^{-k^2} \\ \mathcal{L}_{-1} &: \mathcal{H}_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1},\Delta(t)^{-1}]/\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]} \to \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}, \qquad t^k \mapsto q^{k^2}\,. \end{aligned} \tag{17}$$

注意，在 [7] 中，为 $\gamma \in \mathbb{Q}$ 定义了一种分子为 1 的手术操作，但为简便起见，我们在此不作讨论。下文将证明这些映射是良定义的。Beliakova–Lˆe 的主定理以及同构 $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}[N^{-1}]/\mathbb{Z}} \cong \lim_{\longleftarrow n} \mathbb{Z}[N^{-1}][q]/(q;\ q)_n$ 推出以下结论：

推论 1.6。对于每个 $\gamma \neq 0$，我们都有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Knots}\} & \xrightarrow{J} & \mathcal{H}_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1},\Delta(t)^{-1}]/\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \text{Dehn}_\gamma} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{L}_\gamma} \\ \{\mathbb{Q}\text{HS}\} & \longrightarrow & \mathcal{H}_{\mathbb{Z}[N^{-1}]/\mathbb{Z}} \end{array} \tag{18}$$

下一个推论涉及具有 $H_1(M;\ \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ 的 3-流形 M 的 WRT 不变量（即具有贝蒂数1且同调无挠的闭三维流形）。这类流形 M 有定义良好的亚历山大多项式 $\Delta_M(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$，典型例子包括对 S^3 中的纽结做 0-手术得到的流形。

在 [22]，中，大槻从 WRT 不变量中提取了幂级数不变量

$$\{M \mid H_1(M,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\} \to \mathbb{Z}[\delta_M^{-1}][\![q-1]\!], \tag{19}$$

其中 δ_M 是 $\Delta_M(t)$ 的首项系数，以及不变量

$$\{M \mid H_1(M,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\} \to \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[\text{disc}(\mathbb{K})^{-1}][\![q-1]\!] \tag{20}$$

其中 α 是亚历山大多项式的一个根，而 $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha)$ 是相应的数域，其判别式为 $\text{disc}(\mathbb{K})$，整数环为 $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$。

接下来的推论将上述大槻关于由在 S^3 中的纽结进行 0-手术所得流形的不变量提升到一个 Habiro 环中。

推论 1.7. 我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Knots}\} & \xrightarrow{J} & \mathcal{H}_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1},\Delta(t)^{-1}]/\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \text{Dehn}_0} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{L}_0} \\ \{M \mid H_1(M,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\} & \longrightarrow & \mathcal{H}_{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[\text{disc}(\mathbb{K})^{-1}]/\mathbb{Z}} \end{array} \tag{21}$$

特别地，对于所有阶与 $\text{disc}(\mathbb{K})$ 互素的单位根 ζ_m，我们都能如上得到 $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[\text{disc}(\mathbb{K})^{-1}][\zeta_m]$ 中闭 3- 流形 M 的拓扑不变量。

备注 1.8. 注意

$$\mathcal{H}_{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[\text{disc}(\mathbb{K})^{-1}]/\mathbb{Z}} \neq \varprojlim_n \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[\text{disc}(\mathbb{K})^{-1}][q]/(q;q)_n, \quad \mathcal{H}_{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[\text{disc}(\mathbb{K})^{-1}]/\mathbb{Z}} \neq \mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[\text{disc}(\mathbb{K})^{-1}] \tag{22}$$

而大槻不变量给出 $\mathcal{H}_{O_{\mathbb{K}}[\text{disc}(\mathbb{K})^{-1}]/\mathbb{Z}}$ 中定义良好的元素，这是一项非平凡的陈述。此类环的其他元素则是在 [13] 的主要结果中，利用陈-西蒙斯微扰理论构造出来的。

我们的下一个推论涉及彩色琼斯多项式的提升的 q-全纯方面。注意，将 t平移至 qt 的映射 σ 是一个环自同构

$$\sigma : \mathcal{H}_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1},\Delta(t)^{-1}]/\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]} \to \mathcal{H}_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1},\Delta(t)^{-1}]/\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]}, \qquad t \mapsto qt\,. \tag{23}$$

利用 σ，我们可以为上述环中的 q元素定义一个q-全纯性概念。 $J_K(t,q)$ 的 q-超几何起源，或者说彩色琼斯多项式是 [11] -全纯的这一事实，结合方程（14），推出如下结论：

推论 1.9. 对于每个纽结 K，$J_K(t,q)$ 都是 q-全纯的，事实上还满足与 $(J_{K,n}(q))_{n\geq 1}$ 相同的q-差分方程。

我们以一则括号中的评论结束本小节。

注 1.10. 映射（9）实际上是一个复合映射：先作用 σ^n ，再在$t=1$处取值，其中

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1},\Delta(t)^{-1}]/\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]} \to \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}, \qquad f(t,q) \mapsto f(1,q)\,. \tag{24}$$

1.4. **向缠结模的扩展**。 定理 1.3 可扩展到 3-流形 $\mathcal{S}_q(S^3 \setminus K)$ 的考夫曼括号缠结模 $M = S^3 \setminus K$。后者可追溯至 20 世纪 90 年代的 Przytycki [23] 和 Turaev [28] ，是与 3- 流形相关联的一个（非有限生成的） $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/4}]$- 模，其生成元为带框架链环；这一构造体现了 Conway 对纽结不变量的诠释以及琼斯多项式的缠结理论。 q 的四次根是一个技术问题（因此必须将素数 2 取逆），考虑偶缠结模 $\mathcal{S}^{\mathrm{ev}}_q(M) \subset \mathcal{S}(M)$ 即可避免这一问题。它由 M中具有偶颜色的链环（即颜色取自 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 的根格）生成，或者等价地，由 M中所有带框架链环的 2-平行副本生成；参见 [10]。

由定理 1.3 的证明可知，等式 (11) 可扩展为映射

$$\mathcal{S}^{\mathrm{ev}}_q(S^3 \setminus K) \to \mathcal{H}_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1},\Delta_K(t)^{-1}]/\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]} \tag{25}$$

从纽结补空间的 skein模 $M = S^3 \setminus K$ 出发，使得 $L \subset S^3 \setminus K$ 映射到 $K \cup L$ 的彩色琼斯多项式，其中我们用 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 的 n 维表示为 K 着色，并用 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 的 2 维表示为 L 的所有分支着色。

这样表述时，这个扩展后的定理是 [12, 定理 1.1]关于具有环面边界的 3 维流形的相对版本，并且对于 S^3 中的固定纽结 K 以及 $\gamma \neq 0$，它适合以下交换图。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}^{\mathrm{ev}}_q(S^3 \setminus K) & \xrightarrow{J} & \mathcal{H}_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1},\Delta_K(t)^{-1}]/\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]} \\ \mathrm{Dehn}_\gamma \downarrow & & \downarrow \mathcal{L}_\gamma \\ \mathcal{S}_q(S^3_{K,\gamma}) & \longrightarrow & \mathcal{H}_{\mathbb{Z}[N^{-1}]/\mathbb{Z}} \end{array} \tag{26}$$

1.5. **与李代数相关的纽结多项式**。定理1.3指出，可以显而易见地将量子纽结多项式 $J^{\mathfrak{g}}_{K,\lambda}(q) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ 推广为由单李代数 $\mathfrak{g}$ 的最高权 λ 表示定义的多项式；对 $q \mapsto q^{a_{\mathfrak{g}}}$ 进行缩放，其中非零有理数 $a_{\mathfrak{g}}$ 仅取决于李代数，而与纽结或表示无关，参见 [20]。

为 $j=1,\ldots\ldots,r$ 固定单根 α_j，其中 $\mathfrak{g}$ 的秩为 r，并考虑变量$t=(t_1,\ldots\ldots,t_r)$，以及每个正根 $\alpha=\sum_{i=1}^{r}c_i\alpha_i$ 对应的单项式 $t_\alpha=\prod_{i=1}^{r}t_i^{c_i}$。若 λ 是支配权，则特化 $t=q^\lambda$ 意味着对所有正根 α，$t_\alpha=q^{(\lambda,\alpha)}$。

MMR猜想的证明 [4] 表明，对于每个单李代数 $\mathfrak{g}$ 以及每个支配权 λ，都有

$$J^{\mathfrak{g}}_{K,\lambda}(q)\;=\;\frac{1}{\Delta^{\mathfrak{g}}(q^\lambda)}+O(q-1) \tag{27}$$

其中 $\Delta^{\mathfrak{g}}(t)\;=\prod_{\alpha>0}\Delta_K(t_\alpha)$。将 MMR猜想与定理1.3 关于 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$结合起来，可以得到单李代数的彩色琼斯多项式的一个简洁提升。

猜想1.11。存在一个映射

$$\{\text{Knots } K \text{ in } S^3\}\to\mathcal{H}_{\mathbb{Z}[t^{\pm1},\Delta^{\mathfrak{g}}_K(t)^{-1}]/\mathbb{Z}[t^{\pm1}]},\qquad K\mapsto J^{\mathfrak{g}}_K(t,q) \tag{28}$$

满足

$$J^{\mathfrak{g}}_K(q^\lambda,q)=J^{\mathfrak{g}}_{K,\lambda}(q)\in\mathbb{Z}[q^{\pm1}]\subset\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}\hookrightarrow\mathbb{Z}[\![q-1]\!],\qquad(\text{for all dominant }\lambda)\,. \tag{29}$$

上述猜想应当蕴含推论1.4、1.5、1.6和1.7 对于所有单李代数的类似表述。从某种意义上说，上述猜想绕开了这样一个问题：对于与单李代数 $\mathfrak{g}$ 相关的量子群的表示，寻找能够推广 Habiro 为 $\mathfrak{sl}_2$ [16]所构造基的整基，同时保留与德恩填充相关的函子性。

注记 1.12. 事实上，猜想1.11 可以对由单李超代数的不可约表示着色的量子纽结多项式来表述。我们将在未来的出版物中讨论这一推广。

1.6. **证明计划**。 起初，定理1.3似乎是一项艰巨的任务，因为 Habiro 环 $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}[t^{\pm1},\Delta(t)^{-1}]/\mathbb{Z}[t^{\pm1}]}$ 中所求的元素是在单位根处的幂级数的集合，它们按 p-进方式粘合，并且它们还是拓扑不变量。然而，通过结合以下想法，我们可以同时完成这两项任务。

- 纽结 K 的平面投影 D （或者更好的是，辫表示）导出彩色琼斯多项式的一个真q-超几何多重和。该多重和的形状由 R-矩阵的元素决定，而求和项是 q-二项式与q-Pochhammer 符号的乘积。
- Rozansky 对上述多重和及其变形（在每个交叉处插入独立变量）所作的分析，结合麦克马洪主定理和 Burau 表示，得到了一个在 $\mathbb{Z}[t^{\pm1},\Delta(t)^{-1}][\![q-1]\!]$ 中定义良好的级数。
- 拉格朗日反演公式进一步给出了有理性结果，以及相关纳姆方程的一个特定有理解。
- 在单位根处展开 q-二项式和 q-Pochhammer 符号，并利用上述有理性，可按照 [13] 和 [14] 的思路，得到每个单位根附近的级数族。
- 这些级数的粘合源于如下事实：它们是同一个q-超几何级数的展开。

• 这证明了存在一个提升 $J_K(t,q)$ 满足 (11)。由于这些 Habiro 环的元素由其 $q-1$-展开唯一确定，特化 (11) 蕴含 $J_K(t,q)$ 的拓扑不变性。

致谢。 作者谨向 Peter Scholze、Ferdinand Wagner 和 Don Zagier 致谢，感谢他们进行的许多启发性讨论。C.W. 获得了法国高等科学研究所 Huawei´青年人才计划的资助。作者´谨向马克斯·普朗克数学研究所和高等科学研究所致谢，感谢两家机构的热情接待。

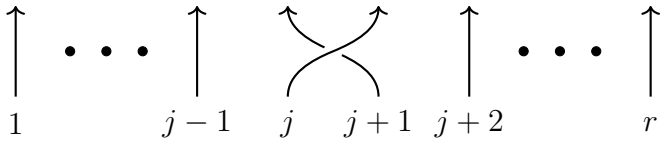
2. Quantum knot invariants and rationality

所有量子纽结多项式（例如着色琼斯多项式）都可以通过对纽结平面投影中的张量进行缩并得到，或者通过对纽结辫子表示的表示取迹得到。本节将详细讨论纽结的彩色琼斯多项式的这些状态和公式的结构。事实证明，这些状态和公式导出 Habiro 环中的元素。

2.1. 彩色琼斯多项式的状态和。 链环的琼斯多项式不变量是通过使用由 S^3 定义的辫子群表示构造的，这些表示由一个 R-矩阵确定；也就是说，一个满足 Yang–Baxter 方程的端同态 $R \in \mathrm{End}(V^{\otimes 2})$

$$R_1 R_2 R_1 = R_2 R_1 R_2 \in \mathrm{End}(V^{\otimes 3}) \tag{30}$$

其中 $R_1 = R \otimes \mathrm{id}_V$ 且 $R_2 = \mathrm{id}_V \otimes R$。这种 R-矩阵最初由琼斯发现 [17]，由此得到辫群的一个相容表示 B_r，也就是说 $r \geq 2$。后者由 σ_j（其中 $j = 1, \dots, r-1$）生成，满足



这些关系

$$\sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j \;=\; \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1} \tag{31}$$

且当 $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ 时 $|i-j| > 1$。于是，一个 R-矩阵给出一列同态

$$\rho_r : B_r \to \mathrm{End}(V^{\otimes r}), \qquad \sigma_j \mapsto \mathrm{id}_{V^{\otimes i-1}} \otimes R \otimes \mathrm{id}_{V^{\otimes r-i-1}} \,. \tag{32}$$

我们将着重研究由 n 维不可约表示 V（属于 $\mathfrak{sl}_2$）着色的纽结的彩色琼斯多项式。以 V 的基 $(e_0、\ e_1、\ \dots\dots、\ e_{n-1})$ 表示，R- 矩阵为

由下式给出 [26, 公式（2.13）] （另见 [19, 推论 2。32][1]）

$$\begin{aligned} R^{+}(e_i \otimes e_j) &= q^{n^2/4} \sum_{k=0}^{\infty} R^{+}_{ij,k} e_{j+k} \otimes e_{i-k} \\ R^{+}_{ij,k} &= (-1)^k q^{ij+k(k-1)/2} t^{-(i+j+k)/2} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}_q (q^{-j}t;q^{-1})_k \,, \\ R^{-}(e_i \otimes e_j) &= q^{-n^2/4} \sum_{k=0}^{\infty} R^{-}_{ij,k} e_{j-k} \otimes e_{i+k} \,, \\ R^{-}_{ij,k} &= q^{-(i+k)(j-k)} t^{(i+j-k)/2} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q (q^{-i}t;q^{-1})_k \end{aligned} \tag{33}$$

其中 $t = q^n$ ，本文中我们始终取

$$\binom{k}{\ell} = \begin{bmatrix} k \\ \ell \end{bmatrix}_q = 0 \tag{34}$$

当我们有整数 k， ℓ 且不满足 $0 \le \ell \le k$时。

为了计算纽结 K 的彩色琼斯多项式 $J_{K,\,n}(q)$，我们将该纽结表示为辫子 $\beta \in B_r$ 的闭包。事实上，我们将研究长纽结，它们由 β 中除第一股以外的所有股闭包而得。于是， K 的彩色琼斯多项式为

$$J_{K,n}(q) = \mathrm{tr}'((\mathrm{id}_V \otimes h^{\otimes r-1})\rho_r(\beta)) \tag{35}$$

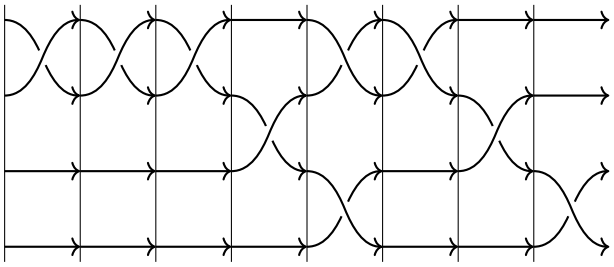
其中 $h \in \mathrm{End}(V)$ 是一个对角矩阵，用于编码帽的贡献；tr′ 表示我们对 $V^{\otimes r}$ 中除第一个因子以外的所有因子取迹。如此定义后，彩色琼斯多项式 $J_{K,\,n}(q) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ 在平凡结处归一化为 1。

现在有一个重要之处。由于 β 的闭包是一个纽结，上述求和是有限的；事实上，还可以将其扩展到最高权为 $n-1$、基为 $(e_0,\ e_1,\ e_2,\ \ldots\ldots)$ 的（无限维）对偶 Verma 模 W。彩色琼斯多项式的公式用一个例子来说明最为清楚。

例 2.1. 考虑由四股辫子的闭包表示的纽结 9_{44}

$$\sigma_1^{-3}\sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_1^2\sigma_2^{-1}\sigma_3 \in B_4 \tag{36}$$

这个辫子的图示如下（在词中从左到右复合辫子生成元，在辫子图中从下到上）：



[1]其中，在他们的公式中，将 $(i,\ j,\ n,\ m,\ m')$ 替换为 $(i-k-n/2,\ j+k-n/2,\ k,\ n/2,\ n/2)$。

我们可以通过取迹来计算量子不变量。这可以化为对附着在每个交叉处的变量求和。由此得到边上的标记：将第一条边固定为标记 0 后，我们得到图 1。

彩色琼斯多项式 $J_{9_{44},n}(q)$ 是表达式在 $t = q^{n-1}$ （对所有 $n \geq 1$ 的终止和）处的求值

$$\begin{aligned}
&\sum_k (-1)^{k_5+k_6+k_7+k_8} q^{\frac{1}{2}Q(k)-3k_1+3k_2-3k_3-k_4+\frac{3}{2}k_5-\frac{3}{2}k_6-\frac{5}{2}k_7+\frac{3}{2}k_8-k_9} t^{-k_2-k_4+k_5-k_6-k_8-k_9+2} \\
&\begin{bmatrix} k_1-k_2+k_3+k_7-k_8 \\ k_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} k_3+k_7-k_8 \\ k_3 \end{bmatrix}_q \\
&\begin{bmatrix} k_1-k_2+k_3+k_4-k_5+k_6 \\ k_4 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} k_1-k_2+k_3+k_4 \\ k_5 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} k_1-k_2+k_3-k_5+k_6+k_7-k_8+k_9 \\ k_6 \end{bmatrix}_q \\
&\begin{bmatrix} k_7-k_8 \\ k_7 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} k_1-k_2+k_3-k_5+k_6+k_7 \\ k_8 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} k_1-k_2+k_3+k_7-k_8+k_9 \\ k_9 \end{bmatrix}_q \\
&(t;q^{-1})_{k_1} (q^{k_2-k_3-k_7+k_8}t;q^{-1})_{k_2} (q^{-k_1+k_2}t;q^{-1})_{k_3} (q^{-k_1+k_2-k_3}t;q^{-1})_{k_4} \\
&(q^{-k_1+k_2-k_3+k_5-k_7+k_8-k_9}t;q^{-1})_{k_5} (q^{-k_1+k_2-k_3-k_4+k_5}t;q^{-1})_{k_6} (q^{-k_1+k_2-k_3+k_5-k_6}t;q^{-1})_{k_7} \\
&(q^{k_8}t;q^{-1})_{k_8} (q^{-k_1+k_2-k_3+k_5-k_6-k_7+k_8}t;q^{-1})_{k_9}
\end{aligned} \tag{37}$$

与辫子（36）相关联，其中 Q在下文方程（41）中给出。

上述状态和可以写成如下形式

$$\begin{aligned}
&f_{A,B,\nu,\varepsilon}(t,q) \\
&= t^{\frac{r-1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^N_{\geq 0}} q^{\frac{1}{2}Q(k)-\nu(k)} \prod_{i=1}^N (-\varepsilon_i q^{\frac{-\varepsilon_i-1}{4}} t^{-\frac{1}{2}})^{k_i} \begin{bmatrix} (A^t k)_i \\ k_i \end{bmatrix}_q (q^{-(B^t k)_i} t;q^{-1})_{k_i} t^{-\frac{\varepsilon_i}{2}((A^t k)_i+(B^t k)_i+1)},
\end{aligned} \tag{38}$$

它可以看作元素 $f_{A,B,\nu,\varepsilon}(t,q) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}][\![t-1]\!]$,

$$J_{K,n}(q) = f_{A,B,\nu,\varepsilon}(q^{n-1},q), \qquad (n>0), \tag{39}$$

并且其中

- k_i 是与 $i = 1$、……、N 的 i 交叉相关联的变量,
- $\varepsilon = (\varepsilon_1$、……、$\varepsilon_N)$ 记录交叉的符号，其中 i 为正交叉时取 $\varepsilon_i = 1$（反之，i 为负交叉时取 -1），
- A 和 B 是方阵，其行和列均以交叉为索引；其中 A 的各列存储二项式系数中的线性形式，而 B 的各列存储出现在 q-Pochhammer 符号中的线性形式,
- $Q = Q_{A、B、\varepsilon}$ 是一个完全由 A、B、ε 确定的二次型

$$Q_{A,B,\varepsilon}(k) = \sum_{i:\varepsilon_i=1} 2(A^t k)_i (B^t k)_i + k_i^2 - \sum_{i:\varepsilon_i=-1} 2((A^t k)_i - k_i)((B^t k)_i + k_i)\,, \tag{40}$$

- $\nu = \sum_{i=1}^{r-1} \nu_i$ 是构成辫子闭包的各股线性形式之和。

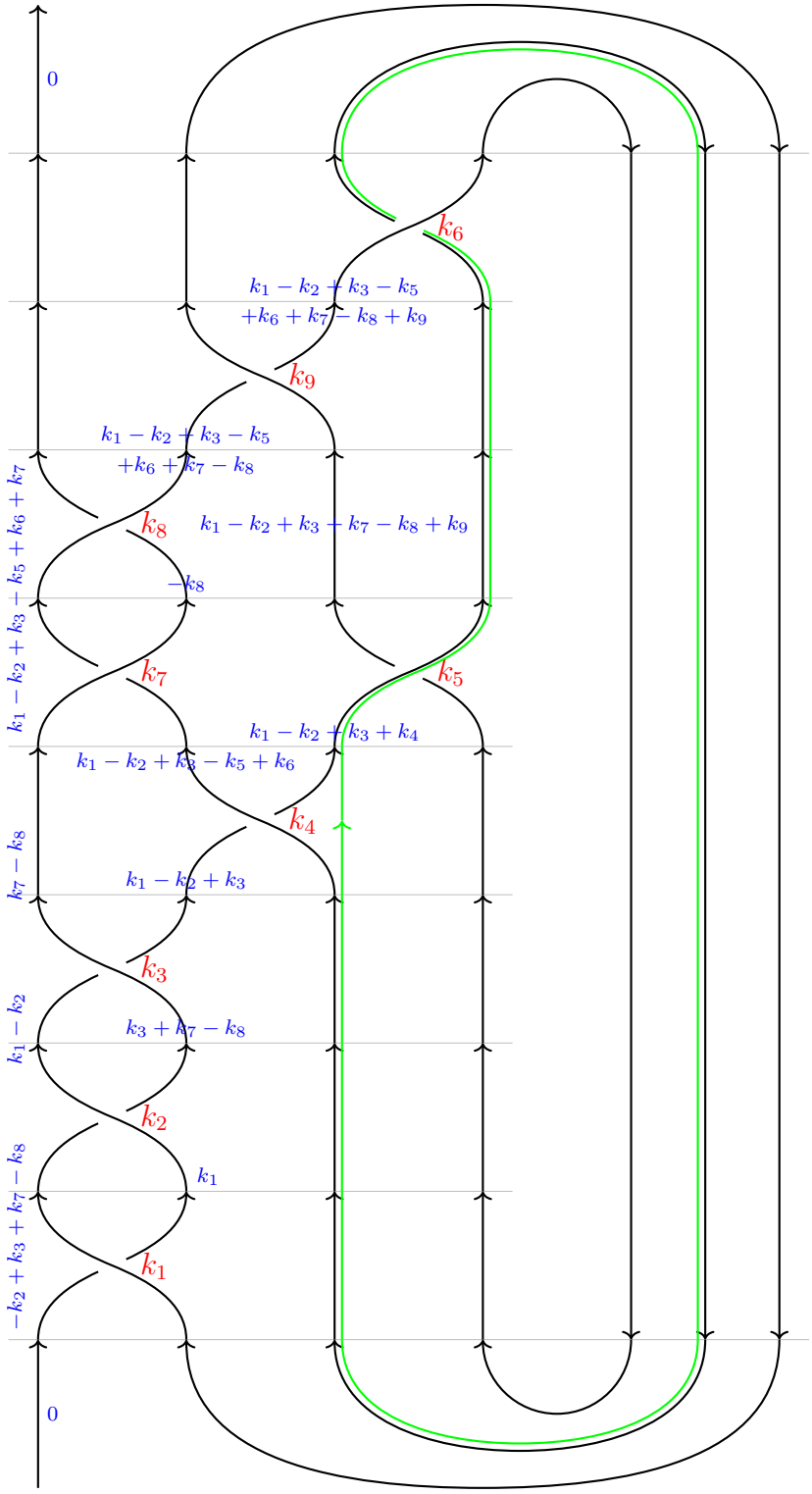


FIGURE 1. 辫子闭合 9_{44} 具有股和个交叉变量标记。它还描绘了与标记为交叉相关联的 k_4圈。

在上面的例子中，我们有 $N=9$ 和

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{41}$$

and

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -2 & 2\\ -1 & 1 & -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & -2 & 2 & -1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \nu=\begin{pmatrix} 3\\ -3\\ 3\\ 1\\ -2\\ 1\\ 2\\ -2\\ 1 \end{pmatrix},\quad \varepsilon=\begin{pmatrix} -1\\ -1\\ -1\\ -1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ -1 \end{pmatrix}. \tag{42}$$

我们发现

$$\begin{aligned} J_{9_{44},1}(q) &= 1\,,\\ J_{9_{44},2}(q) &= q^{-2}-2q^{-1}+3-3q+3q^2-2q^3+2q^4-q^5\,,\\ J_{9_{44},3}(q) &= -q^{-5}+2q^{-4}+q^{-3}-5q^{-2}+4q^{-1}+4-9q+4q^2+6q^3-9q^4+2q^5+7q^6\\ &\quad -7q^7-q^8+7q^9-4q^{10}-3q^{11}+5q^{12}-q^{13}-2q^{14}\,,\\ J_{9_{44},4}(q) &= -q^{-13}+q^{-12}+q^{-11}+2q^{-10}-4q^{-9}-4q^{-8}+4q^{-7}+8q^{-6}-3q^{-5}\\ &\quad -13q^{-4}+q^{-3}+18q^{-2}+q^{-1}-18-5q+20q^2+6q^3-18q^4-8q^5\\ &\quad +17q^6+7q^7-13q^8-9q^9+11q^{10}+8q^{11}-5q^{12}-10q^{13}+3q^{14}+8q^{15}\\ &\quad +3q^{16}-8q^{17}-6q^{18}+5q^{19}+8q^{20}-2q^{21}-8q^{22}-q^{23}+7q^{24}+2q^{25}\\ &\quad -4q^{26}-2q^{27}+q^{28}+2q^{29}-q^{30}\,. \end{aligned} \tag{43}$$

2.2. **极限、Burau 表示和亚历山大多项式。** **将公式（39）中的彩色琼斯多项式表示为级数** $J_{A,\,B,\,\nu,\,\varepsilon}(t,\,q)$**后，我们接下来讨论其** $q=1$ **极限** $f_{A,\,B,\,\nu,\,\varepsilon}(t,\,\mathbf{1})\in\mathbb{Z}[\![t-1]\!]$。关键观察是，$q=1$ 极限下的 R-矩阵存在，且由下式给出：

$$R^{+}_{ij,k}|_{q=1}=(-1)^k t^{-(i+j+k)/2}\binom{i}{k}(1-t)^k\,,\quad R^{-}_{ij,k}|_{q=1}=t^{(i+j-k)/2}\binom{j}{k}(1-t)^k\,. \tag{44}$$

这与方程（38）意味着

$$f_{A,B,\nu,\varepsilon}(t,1)=t^{\frac{r-1-\sum_{i=1}^N\varepsilon_i}{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^N_{\geq 0}}\prod_{i=1}^N(-\varepsilon_i t^{-\frac{1}{2}})^{k_i}\binom{(A^tk)_i}{k_i}(1-t)^{k_i}t^{-\frac{\varepsilon_i}{2}((A^tk)_i+(B^tk)_i)}\,. \tag{45}$$

我们将看到，$f_{A,\,B,\,\nu,\,\varepsilon}(t,\,1)$ 可以表示为对单个算子的对称幂求和。为此，我们使用加性等同 $W=k[x]$，其中 $e_i\leftrightarrow x^i$ 诱导出一个带有 $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_r]$ 的加性等同 $W^{\otimes r}$。特别地，$e_0\otimes e_1=x_1$ 与 $e_1\otimes e_0=x_2$。考虑由下式定义的端同态 $\mathcal{R}^+\in\mathrm{End}(\mathbb{Z}[x_1,x_2])$

$$\mathcal{R}^+(x_1)\;=\;yx_1+zx_2\,,\qquad \mathcal{R}^+(x_2)\;=\;zx_1\,,\qquad \mathcal{R}^+\;=\;\begin{pmatrix} y & z\\ z & 0\end{pmatrix} \tag{46}$$

for 固定的 y，z。注意，$\mathrm{Sym}^{i+j}\mathbb{Z}[x_1,x_2]$ 的维数为 $i+j+1$，并且

$$\mathrm{Sym}^{i+j}(\mathcal{R}^+)(x_1^ix_2^j)\;=\;(yx_1+zx_2)^i(zx_1)^j\;=\;\sum_k\binom{i}{k}y^kz^{i+j-k}x_1^{j+k}x_2^{i-k}\,. \tag{47}$$

同样，我们定义端同态 $\mathcal{R}^-\in\mathrm{End}(\mathbb{Z}[x_1,x_2])$

$$\mathcal{R}^-(x_1)\;=\;z^{-1}x_2\,,\qquad \mathcal{R}^-(x_2)\;=\;z^{-1}x_1+yx_2\,,\qquad \mathcal{R}^-\;=\;\begin{pmatrix} 0 & z^{-1}\\ z^{-1} & y\end{pmatrix} \tag{48}$$

对于固定的 y，z，计算

$$\mathrm{Sym}^{i+j}(\mathcal{R}^-)(x_1^ix_2^j)\;=\;(z^{-1}x_2)^i(z^{-1}x_1+yx_2)^j\;=\;\sum_k\binom{j}{k}y^kz^{-i-j+k}x_1^{j-k}x_2^{i+k}\,. \tag{49}$$

比较方程（44）与（47）和（49），可知

$$\mathcal{R}^\varepsilon\big|_{y=(1-t^{-\varepsilon}),z=t^{-1/2}}\;=\;R^\varepsilon\big|_{q=1},\qquad \varepsilon=+,-\,. \tag{50}$$

由此可知，表示 $q\to1$ 的极限 $\rho_r|_{q=1}$（取自 ρ_r 式（32））存在

$$\rho_r|_{q=1}:B_r\to\mathrm{End}(\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_r]) \tag{51}$$

对所有 $r\geq2$ 都成立，并且等于 Burau 表示（参见 [9] 以及现代版本 [8]，相差一个标量重归一化）

$$\mathfrak{b}_r:B_r\to\mathrm{End}(U_r),\qquad U_r=\mathbb{Z}x_1+\cdots+\mathbb{Z}x_r \tag{52}$$

由.....确定

$$\mathfrak{b}_2(\sigma_1)\;=\;\begin{pmatrix}1-t^{-1} & t^{-1/2}\\ t^{-1/2} & 0\end{pmatrix},\qquad \mathfrak{b}_2(\sigma_1^{-1})\;=\;\begin{pmatrix}0 & t^{1/2}\\ t^{1/2} & 1-t\end{pmatrix}. \tag{53}$$

将 U_r 视为 $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_r]$ 的次数为 1 的部分（其中每个 x_i 的次数均为 1），我们得到 $k[x_1,\dots,x_r]=S(U_r)$，其中 $S(W)$ 是 W 的对称代数。

Th关键是以下引理，它由方程 (47) 和 (49) 推出 .

引理 2.2。对于所有 $r\geq2$，我们有

$$\rho_r|_{q=1}\;=\;S(\mathfrak{b}_r)\,. \tag{54}$$

然而，状态和公式（45）与 $S(\mathfrak{b}_r)$的迹无关，而是与偏迹有关，即将辫子中除第一个分支外的所有分支闭合；见方程（35）。为此，我们需要进行如下修剪后的修改

$$S(\mathfrak{b}_r^{\mathrm{trim}}):\mathbb{Z}[x_2,\dots,x_r]\subset\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_r]\overset{S(\mathfrak{b}_r)}{\to}\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_r]\overset{x_1=0}{\to}\mathbb{Z}[x_2,\dots,x_r] \tag{55}$$

Burau 表示。 $\mathfrak{b}_r^{\mathrm{trim}}$的（$r-1$）×（$r-1$）矩阵，等于从 $\mathfrak{b}_r^{\mathrm{trim}}$的矩阵中删除第一行和第一列后得到的矩阵。以上讨论得出如下结论。

引理 2.3. 对所有 $r \geq 2$，我们有

$$f_{A,B,\nu,\varepsilon}(t,1) \;=\; t^{\frac{r-1-\mathrm{writhe}}{2}} \operatorname{tr} S(\mathfrak{b}_r^{\mathrm{trim}}(\beta)) \tag{56}$$

其中，拧数 $=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i$ 是 β 各交叉的符号之和。此外，矩阵$\mathfrak{b}_r^{\mathrm{trim}}$在 $t=1$ 处是幂零的，因此上述和是 $\mathbb{Z}[\![t-1]\!]$ 中一个良定义的元素。

所述幂零性源于辫子 $\beta \in B_r$ 的闭包是一个纽结这一事实。当 $t=1$ 时， $\mathfrak{b}_r$ 是置换表示；又因 β 的闭包是一个纽结，故 $\mathfrak{b}_r(\beta)$ 是一个 r-圈。这意味着，对每个 x_i ，存在某个 k_i ，使得 $\mathfrak{b}_r(\beta)^{k_i}(x_i) = x_1$。因此，约化 $\mathfrak{b}_r^{\mathrm{trim}}$在 $t=1$ 处是幂零的。

上述引理与麦克马洪主定理（稍后讨论）共同推出如下结论。

$$f_{A,B,\nu,\varepsilon}(t,1) \;=\; \frac{t^{\frac{r-1-\mathrm{writhe}}{2}}}{\det(I-\mathfrak{b}_r^{\mathrm{trim}})}\,. \tag{57}$$

最后，Kauffman–Saleur 的一个定理 [18, 公式（5.22）] 表明，上述行列式与某个纽结的亚历山大多项式相同：

$$f_{A,B,\nu,\varepsilon}(t,1) \;=\; \frac{1}{\Delta_K(t)} \in \mathbb{Z}[\![t-1]\!]\,, \tag{58}$$

因此，这便重现了 Rozansky 对 Melvin– Morton–Rozansky 猜想的证明（在 $\mathfrak{sl}_2$的情形下）（ [4]的定理）

$$J_{K,n}(q) \;=\; \frac{1}{\Delta_K(t)} + O(q-1)\,. \tag{59}$$

注 2.4。 Burau 表示有一种上文讨论过的修剪形式，也有一种约化形式 $\mathfrak{b}_r^{\mathrm{red}}$，三者之间的关系为

$$\mathfrak{b}_r^{\mathrm{trim}} = (0|I_{r-1})\mathfrak{b}_r \begin{pmatrix} 0 \\ I_{r-1} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{b}_r^{\mathrm{red}} = (v|I_{r-1})\mathfrak{b}_r \begin{pmatrix} 0 \\ I_{r-1} \end{pmatrix},\; v=(1,t^{1/2},\dots,t^{(r-1)/2})^t \tag{60}$$

修剪形式和 约化形式都给出了亚历山大多项式的一个公式

$$\det(I_{r-1}-\mathfrak{b}_r^{\mathrm{trim}}) \;=\; t^{\frac{r-1-\mathrm{writhe}}{2}}\Delta(t) \tag{61}$$

如 Kauffman–Saleur [18, 公式（5.22）] 所示，并且

$$\det(I_{r-1}-\mathfrak{b}_r^{\mathrm{red}}) \;=\; t^{\frac{-r+1-\mathrm{writhe}}{2}}\frac{1-t^r}{1-t}\Delta(t) \tag{62}$$

Kassel–Turaev 所证明的 [18, 第 3 节4]。附录中讨论了一个关于亚历山大多项式的 Burau 表示公式，以及方程（58）的另一种证明。

2.3. **通过 MacMahon主定理证明有理性**。 本节回顾 MacMahon主定理 [21], , 该定理蕴含了有理性结论（58）。

定理 2.5 （MacMahon主定理）。 若 $C \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}[C_{ij}])$ 则

$$\frac{1}{\det(\mathrm{I}-C)} \;=\; \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathrm{Tr}(\mathrm{Sym}^{\ell} C) \;=\; \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}} \oint \cdots \oint \prod_{i=1}^{n} (Cz)_i^{k_i} \frac{dz_1 \cdots dz_n}{z_1^{k_1+1} \cdots z_n^{k_n+1}} \;\in\; \mathbb{C}[\![C_{ij}]\!]\,. \tag{63}$$

证明。 算子 $\delta_{jm} - \sum_{\ell=1}^{n} (\mathrm{I}-C)_{\ell j} \partial_{C_{\ell m}}$ 消去定理中的左边和右边，且两边都满足初始条件 $1+\mathrm{O}(C_{ij})$。由于令 $\Delta_{\ell m} = \partial_{C_{\ell m}}$ 后，方程具有以下形式，因此这些算子在该初始条件下有唯一的幂级数解

$$\Delta f \;=\; (\mathrm{I}-C)^{-t} f \tag{64}$$

且 $\Delta \det(\mathrm{I}-C) f = 0$，这意味着 $\det(\mathrm{I}-C) f$ 是常数。 □

引理 2.2 的证明表明， $q \to 1$ 极限 $f_{A,\ B,\ \nu,\ \varepsilon}(t,\ 1)$，它由辫子每个交叉处的 Burau 矩阵组成，可通过使用矩阵进行变形 $\mathcal{R}^{\pm}$，并在每个交叉处取任意参数。下面用贯穿全文的例 2.1来说明纽结 9_{44}。

例 2.6. 我们将在继续例（2.1）时看到这一点。 U_4 的端同态是一个4×4 矩阵，由辫子词（36）给出的乘积如下：

$$\begin{pmatrix} 0 & z^{-1} & 0 & 0 \\ z^{-1} & y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & z^{-1} & 0 & 0 \\ z^{-1} & y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & z^{-1} & 0 & 0 \\ z^{-1} & y_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} & 0 \\ 0 & z^{-1} & y_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_5 & z \\ 0 & 0 & z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_7 & z & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_8 & z & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} & 0 \\ 0 & z^{-1} & y_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_6 & z \\ 0 & 0 & z & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c} z^{-2}y_2y_7y_8 + y_2 & (z^{-1}y_1y_2 + z^{-3})y_7y_8 + (zy_1y_2 + z^{-1}) & y_8 & 0 \\ \hline (z^{-3}y_2y_3 + z^{-5})y_5 & ((z^{-2}y_1y_2 + z^{-4})y_3 + z^{-4}y_1)y_5 & z^{-1}y_4y_5 & 1 \\ \hline \begin{array}{c}((z^{-2}y_2y_3 + z^{-4})y_5y_9 + z^{-2}y_2y_7)y_6 \\ +(y_2y_3 + z^{-2})\end{array} & \begin{array}{c}(((z^{-1}y_1y_2 + z^{-3})y_3 + z^{-3}y_1)y_5y_9 \\ +(z^{-1}y_1y_2 + z^{-3})y_7)y_6 + ((zy_1y_2 + z^{-1})y_3 + z^{-1}y_1)\end{array} & \begin{array}{c}(y_4y_5y_9 + 1)y_6 \\ +z^2y_4\end{array} & zy_9y_6 \\ \hline (z^{-1}y_2y_3 + z^{-3})y_5y_9 + z^{-1}y_2y_7 & ((y_1y_2 + z^{-2})y_3 + z^{-2}y_1)y_5y_9 + (y_1y_2 + z^{-2})y_7 & zy_4y_5y_9 + z & z^2y_9 \end{array}\right)^t. \tag{65}$$

因此，约化算子由底部的 3×3 矩阵给出。特化 $z=1$后，我们得到：

$$\begin{aligned} f_A(y) &:= \sum_{k\in\mathbb{Z}^9_{\geq 0}} \binom{k_1-k_2+k_3+k_7-k_8}{k_1}\binom{k_1}{k_2}\binom{k_3+k_7-k_8}{k_3}\binom{k_1-k_2+k_3+k_4-k_5+k_6}{k_4} \\ &\quad\times \binom{k_1-k_2+k_3+k_4}{k_5}\binom{k_1-k_2+k_3-k_5+k_6+k_7-k_8+k_9}{k_6}\binom{k_7-k_8}{k_7} \\ &\quad\times \binom{k_1-k_2+k_3-k_5+k_6+k_7}{k_8}\binom{k_1-k_2+k_3+k_7-k_8+k_9}{k_9} y^k \\ &= \det\begin{pmatrix} 1-((y_1y_2+1)y_3+y_1)y_5 & -y_4y_5 & -1 \\ -(((y_1y_2+1)y_3+y_1)y_5y_9+(y_1y_2+1)y_7)y_6 & 1-(y_4y_5y_9+1)y_6-y_4 & -y_9y_6 \\ -((y_1y_2+1)y_3+y_1) & & \\ -((y_1y_2+1)y_3+y_1)y_5y_9-(y_1y_2+1)y_7 & -y_4y_5y_9-1 & 1-y_9 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= (1-y_1-y_3-y_1y_2y_3-y_4-y_1y_5-y_3y_5-y_1y_2y_3y_5-y_6+y_1y_5y_6+y_3y_5y_6+y_1y_2y_3y_5y_6 \\ &\quad -y_7-y_1y_2y_7+y_4y_7+y_1y_2y_4y_7-y_4y_5y_6y_7-y_1y_2y_4y_5y_6y_7-y_9+y_4y_9-y_4y_5y_6y_9)^{-1} \end{aligned} \tag{66}$$

另一方面，将 $y_i=1-t$特化为 $i=1,2,3,4,9$, $y_i=1-t^{-1}$特化为 $i=5,6,7,8$, 以及 $z=t^{-1/2}$，我们发现 $f_{A,B,\nu,\varepsilon}(t,1)\in\mathbb{Z}[\![t-1]\!]$等于

$$\begin{aligned} &\sum_{k\in\mathbb{Z}^9_{\geq 0}} \binom{k_1-k_2+k_3+k_7-k_8}{k_1}\binom{k_1}{k_2}\binom{k_3+k_7-k_8}{k_3}\binom{k_1-k_2+k_3+k_4-k_5+k_6}{k_4} \\ &\quad\times \binom{k_1-k_2+k_3+k_4}{k_5}\binom{k_1-k_2+k_3-k_5+k_6+k_7-k_8+k_9}{k_6}\binom{k_7-k_8}{k_7} \\ &\quad\times \binom{k_1-k_2+k_3-k_5+k_6+k_7}{k_8}\binom{k_1-k_2+k_3+k_7-k_8+k_9}{k_9} \\ &t^{-k_2-k_4+2k_5+k_7-k_9}(1-t)^{k_1+k_2+k_3+k_4+k_9}(1-t^{-1})^{k_5+k_6+k_7+k_8} \\ &= \frac{1}{t^4-4t^3+7t^2-4t+1} \\ &= 1-2(t-1)+3(t-1)^2-4(t-1)^3+4(t-1)^4-2(t-1)^5-3(t-1)^6 \\ &\quad +12(t-1)^7-25(t-1)^8+40(t-1)^9+\mathrm{O}(t-1)^{10}. \end{aligned} \tag{67}$$

这与 9_{44} 的亚历山大多项式的倒数一致。

对于一般的辫子 $\beta\in B_r$，其闭包是一个纽结，，$_{B,\nu,\varepsilon}(t,1)$ 的变形如上所示，它只取决于矩阵 A，并且按照方程（38）的记号，它表示为

$$f_A(y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^N_{\geq 0}}\prod_{i=1}^N \binom{(A^tk)_i}{k_i} y_i^{k_i}. \tag{68}$$

$f_{A,B,\nu,\varepsilon}(t,1)$ 与 $f_A(y)$ 之间的关系，可以通过分析纽结上的某些循环来描述。对于每个交叉，我们都可以关联一个循环：沿着纽结前进，从它第一次进入该交叉时开始，到再次遇到该交叉时结束，

第二次。设 γ_i 为与第 i个交叉相关联的循环。（与标记为 γ_4 的交叉相关联的循环见图 k_4 所示：1。）设 $s(i) = \pm 1$ 在 i 首次以底交叉的形式出现时为正（这就是二项式和中 k_i 的符号）。最后，对 γ 经过的交叉按重数计数，令 $d_i = \#$（循环 γ_i中的负交叉）$-\#$（循环 γ_i中的正交叉）$-\varepsilon_i(1+s(i))$。

引理 2.7. 我们有如下结论：

$$f_{A,B,\nu,\varepsilon}(t,1) \;=\; f_A(y)\big|_{y_i\to(t^{\varepsilon_i}-1)t^{s(i)d_i/2}}\,. \tag{69}$$

证明可由方程（44）直接得出。

例2.8. 对于 9_{44}, ，我们有 $N=9$ 以及

$$\begin{aligned} s &= (\;\; 1,-1,\;\; 1,\;\; 1,-1,\;\; 1,\;\; 1,-1,\;\; 1)\,,\\ d &= (\;\; 2,\;\; 0,\;\; 2,\;\; 0,-2,-2,\;\; 0,\;\; 2,\;\; 0)\,. \end{aligned} \tag{70}$$

2.4. **借助Lagrange反演的进一步有理性。** 在计算状态和$f_{A,\ B,\ \nu,\ \varepsilon}(t,\ q)$在单位根处的展开时，我们需要进一步级数的有理性，即将（68）中的 $\binom{(A^tk)_{\ k_i}^{\ i}}{}$ 替换为整数 s_i所对应的 $\binom{s_i+\ (A^tk)_{\ k_i}^{\ \ i}}{}$ 而得到的那些级数。

结果表明，这些新的和由与 A-矩阵相关联的纳姆方程的解所确定，而这源于 Rodriguez-Villegas [25]所用的Lagrange反演的一次应用。

定理 2.9。 方程组

$$1-z_i \;=\; -y_i\prod_j z_j^{A_{ij}} \qquad i=1,\dots,N\,, \tag{71}$$

有唯一解 $\mathbb{Q}[\![y_1,\dots,y_N]\!]$ 满足

$$\prod_i z_i^{s_i} \;=\; \delta(y)\sum_{k\in\mathbb{Z}^N_{\geq 0}}\prod_{i=1}^N\binom{s_i+(A^tk)_i}{k_i}y_i^{k_i}\,. \tag{72}$$

其中

$$\delta(y) \;=\; \det(\mathrm{I}+\mathrm{diag}(1-z_i)\,A\,\mathrm{diag}(z_i^{-1}))\,. \tag{73}$$

注意，当 $s_i=0$ 二项式和与 $f_A(y)$ 中的方程（68）相同。

下一个例子给出了一个出乎意料的整数项矩阵 A来源，其纳姆方程是有理函数（而非代数函数）。其证明用到了 Peter Scholze 向我们提出的一个论证。

定理2.10. 如果 $\delta(y)\in\mathbb{Q}(y)$，则 $z_i\in\mathbb{Q}(y)$ 对 $i=1$，……，N 成立，反之亦然。证明。注意到

$$\begin{aligned} z_i^{-1} &= \delta(y)\sum_{k\in\mathbb{Z}^N_{\geq 0}}\prod_{\ell=1}^N\binom{-\delta_{i\ell}+(A^tk)_\ell}{k_\ell}y_\ell^{k_\ell}\,,\\ &= \delta(y)\sum_{k\in\mathbb{Z}^N_{\geq 0}}\frac{-k_i+(A^tk)_i}{(Ak)_\ell}\prod_{\ell=1}^N\binom{\sum_{j=1}^N(A^tk)_\ell}{k_\ell}y_\ell^{k_\ell}\,. \end{aligned} \tag{74}$$

我们看到，对于 $\theta_i = y_i\partial_{y_i}$，我们有

$$\Big(\sum_{j=1}^N A_{ji}\theta_j\Big)\frac{z_i^{-1}}{\delta(y)} \;=\; \Big(-\theta_i + \sum_{j=1}^N A_{ji}\theta_j\Big)\frac{1}{\delta(y)} \in \mathbb{Q}(y)\,. \tag{75}$$

此外，我们看到 $z_i^{-1}|_{y_i=0} \in \mathbb{Q}(y)$。

考虑坐标 $\log(y_j)$ 中的这个方程。如果 $A_{ii} \neq 0$，那么我们可以将 $\log(\eta_1)$ =$\log(y_i)$ 补充为一组坐标 $\log(\eta_j)$，其中 η_j 是 $y_j^{\pm 1/D}$ 中的单项式，适用于某个 D（且 y_j 是 $\eta_j^{\pm 1}$ 中的单项式），使得 $\sum_{j=1}^N A_{ji}\theta_j = \sum_{j=1}^N A_{ji}\partial_{\log(y_j)} = \partial_{\log(\eta_1)}$，并且 y_i 只在 η_j 中以正号出现。因此，我们看到，对于某个 d，有 $\eta_1\partial_{\eta_1}\delta^{-1}z_i \in \mathbb{Q}(\eta)$。

注意，z_i 求解了 $\mathbb{Q}(\eta)$ 上的一个代数方程组，因此存在一个有限阶伽罗瓦群 G，由作用于 z_i 上的自同构构成。我们看到

$$Z_i^{-1} \;=\; \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\sigma\cdot z_i^{-1} \in \mathbb{Q}(\eta)\,. \tag{76}$$

这一切都意味着

$$\partial_{\eta_1}\frac{Z_i^{-1}-z_i^{-1}}{\delta} \;=\; 0 \;=\; \frac{Z_i^{-1}-z_i^{-1}}{\delta}\Big|_{\eta_1=0}, \tag{77}$$

这进而表明 $Z_i^{-1} = z_i^{-1} \in \mathbb{Q}(\eta)$。此外，由于 $z_i^{-1} \in \mathbb{Q}[\![y]\!]$，我们得出结论：$z_i^{-1} \in \mathbb{Q}(y)$。

最后，若 $A_{ii} = 0$，则对 y_iz_i 而非 z_i^{-1} 应用相同的论证；当 $A_{ii} \neq 1$ 时，该论证成立。

其逆命题由方程（73）显然可得。 □

我们用贯穿全文的例子来说明前述定理2.1。

例 2.11。 继续例 2.1，纳姆方程（71）对于矩阵 A （41）具有有理解

$$
\begin{aligned}
z_1 =& (-1 - y_1y_2 - y_4 - y_1y_2y_4 - y_6 - y_1y_2y_6 - y_1y_8 - y_3y_8 - y_1y_2y_3y_8 - y_7y_8 - y_1y_2y_7y_8 - y_4y_7y_8 - y_1y_2y_4y_7y_8 \\
& - y_9 - y_1y_2y_9 - y_4y_9 - y_1y_2y_4y_9 + y_4y_5y_6y_9 + y_1y_2y_4y_5y_6y_9 - y_1y_8y_9 - y_3y_8y_9 - y_1y_2y_3y_8y_9 + y_1y_5y_6y_8y_9 \\
& + y_3y_5y_6y_8y_9 + y_1y_2y_3y_5y_6y_8y_9 - y_7y_8y_9 - y_1y_2y_7y_8y_9 - y_4y_7y_8y_9 - y_1y_2y_4y_7y_8y_9 + y_4y_5y_6y_7y_8y_9 + y_1y_2y_4y_5y_6y_7y_8y_9)(\\
& -1 - y_1 - y_4 + y_1y_5 - y_6 + y_1y_5y_6 - y_3y_8 - y_7y_8 - y_4y_7y_8 + y_1y_5y_7y_8 \\
& - y_9 - y_4y_9 + y_4y_5y_6y_9 - y_3y_8y_9 + y_3y_5y_6y_8y_9 - y_7y_8y_9 - y_4y_7y_8y_9 + y_4y_5y_6y_7y_8y_9)z_2 =-(\\
& 1 - y_2 - y_2y_4 - y_5 - y_2y_6 - y_5y_6 - y_8 - y_2y_3y_8 - y_2y_7y_8 - y_2y_4y_7y_8 - y_5y_7y_8 - y_2y_9 - y_2y_4y_9 + y_2y_4y_5y_6y_9 - y_8y_9 \\
& - y_2y_3y_8y_9 + y_5y_6y_8y_9 + y_2y_3y_5y_6y_8y_9 - y_2y_7y_8y_9 - y_2y_4y_7y_8y_9 + y_2y_4y_5y_6y_7y_8y_9)(\\
& -1 - y_1y_2 + y_5 + y_1y_2y_5 + y_5y_6 + y_1y_2y_5y_6 + y_8 + y_5y_7y_8 + y_1y_2y_5y_7y_8 + y_8y_9 - y_5y_6y_8y_9)z_3 =(\\
& -1 - y_1 - y_4 + y_1y_5 - y_6 + y_1y_5y_6 - y_3y_8 - y_7y_8 - y_4y_7y_8 + y_1y_5y_7y_8 - y_9 - y_4y_9 + y_4y_5y_6y_9 - y_3y_8y_9 \\
& + y_3y_5y_6y_8y_9 - y_7y_8y_9 - y_4y_7y_8y_9 + y_4y_5y_6y_7y_8y_9)(\\
& -1 - y_1 - y_3 - y_1y_2y_3 - y_4 + y_1y_5 + y_3y_5 + y_1y_2y_3y_5 - y_6 + y_1y_5y_6 + y_3y_5y_6 + y_1y_2y_3y_5y_6 \\
& - y_7y_8 - y_4y_7y_8 + y_1y_5y_7y_8 + y_3y_5y_7y_8 + y_1y_2y_3y_5y_7y_8 - y_9 - y_4y_9 + y_4y_5y_6y_9 - y_7y_8y_9 - y_4y_7y_8y_9 + y_4y_5y_6y_7y_8y_9)z_4 =-(\\
& 1 + y_1y_2 + y_4y_5 + y_1y_2y_4y_5 - y_8 + y_1y_5y_8 + y_3y_5y_8 + y_1y_2y_3y_5y_8 + y_4y_5y_7y_8 + y_1y_2y_4y_5y_7y_8 - y_8y_9)(\\
& -1 - y_1y_2 - y_4 - y_1y_2y_4 + y_4y_5y_6 + y_1y_2y_4y_5y_6 + y_8 + y_4y_8 - y_1y_5y_8 - y_3y_5y_8 - y_1y_2y_3y_5y_8 + y_8y_9 + y_4y_8y_9 - y_4y_5y_6y_8y_9)z_5 =-(\\
& -1 - y_1y_2 + y_5 + y_1y_2y_5 + y_5y_6 + y_1y_2y_5y_6 + y_8 + y_5y_7y_8 + y_1y_2y_5y_7y_8 + y_8y_9 - y_5y_6y_8y_9) \quad (78)(\\
& 1 + y_1y_2 + y_4y_5 + y_1y_2y_4y_5 - y_8 + y_1y_5y_8 + y_3y_5y_8 + y_1y_2y_3y_5y_8 + y_4y_5y_7y_8 + y_1y_2y_4y_5y_7y_8 - y_8y_9)z_6 =-(\\
& -1 - y_1y_2 - y_4 - y_1y_2y_4 + y_4y_5y_6 + y_1y_2y_4y_5y_6 - y_1y_8 - y_3y_8 - y_1y_2y_3y_8 - y_6y_8 + y_1y_5y_6y_8 \\
& + y_3y_5y_6y_8 + y_1y_2y_3y_5y_6y_8 - y_7y_8 - y_1y_2y_7y_8 - y_4y_7y_8 - y_1y_2y_4y_7y_8 + y_4y_5y_6y_7y_8 + y_1y_2y_4y_5y_6y_7y_8)(\\
& 1 + y_1y_2 + y_4 + y_1y_2y_4 + y_6 + y_1y_2y_6 + y_1y_8 + y_3y_8 + y_1y_2y_3y_8 + y_7y_8 + y_1y_2y_7y_8 + y_4y_7y_8 + y_1y_2y_4y_7y_8 - y_6y_8y_9)z_7 =(\\
& -1 - y_1 - y_3 - y_1y_2y_3 - y_4 + y_1y_5 + y_3y_5 + y_1y_2y_3y_5 - y_6 + y_1y_5y_6 + y_3y_5y_6 + y_1y_2y_3y_5y_6 - y_7y_8 - y_4y_7y_8 \\
& + y_1y_5y_7y_8 + y_3y_5y_7y_8 + y_1y_2y_3y_5y_7y_8 - y_9 - y_4y_9 + y_4y_5y_6y_9 - y_7y_8y_9 - y_4y_7y_8y_9 + y_4y_5y_6y_7y_8y_9)(\\
& -1 - y_1 - y_3 - y_1y_2y_3 - y_4 + y_1y_5 + y_3y_5 + y_1y_2y_3y_5 - y_6 + y_1y_5y_6 + y_3y_5y_6 + \\
& y_1y_2y_3y_5y_6 - y_7 - y_1y_2y_7 - y_4y_7 - y_1y_2y_4y_7 + y_4y_5y_6y_7 + y_1y_2y_4y_5y_6y_7 - y_9 - y_4y_9 + y_4y_5y_6y_9)z_8 =(\\
& -1 - y_1y_2 - y_4 - y_1y_2y_4 + y_4y_5y_6 + y_1y_2y_4y_5y_6 + y_8 + y_4y_8 - y_1y_5y_8 - y_3y_5y_8 - y_1y_2y_3y_5y_8 + y_8y_9 + y_4y_8y_9 - y_4y_5y_6y_8y_9)(\\
& -1 - y_1y_2 - y_4 - y_1y_2y_4 + y_4y_5y_6 + y_1y_2y_4y_5y_6 - y_1y_8 - y_3y_8 - y_1y_2y_3y_8 - y_6y_8 + y_1y_5y_6y_8 \\
& + y_3y_5y_6y_8 + y_1y_2y_3y_5y_6y_8 - y_7y_8 - y_1y_2y_7y_8 - y_4y_7y_8 - y_1y_2y_4y_7y_8 + y_4y_5y_6y_7y_8 + y_1y_2y_4y_5y_6y_7y_8)z_9 =-(\\
& 1 + y_1y_2 + y_4 + y_1y_2y_4 + y_6 + y_1y_2y_6 + y_1y_8 + y_3y_8 + y_1y_2y_3y_8 + y_7y_8 + y_1y_2y_7y_8 + y_4y_7y_8 + y_1y_2y_4y_7y_8 - y_6y_8y_9)(\\
& -1 - y_1y_2 - y_4 - y_1y_2y_4 - y_6 - y_1y_2y_6 - y_1y_8 - y_3y_8 - y_1y_2y_3y_8 - y_7y_8 - y_1y_2y_7y_8 - y_4y_7y_8 - y_1y_2y_4y_7y_8 \\
& - y_9 - y_1y_2y_9 - y_4y_9 - y_1y_2y_4y_9 + y_4y_5y_6y_9 + y_1y_2y_4y_5y_6y_9 - y_1y_8y_9 - y_3y_8y_9 - y_1y_2y_3y_8y_9 + y_1y_5y_6y_8y_9 \\
& + y_3y_5y_6y_8y_9 + y_1y_2y_3y_5y_6y_8y_9 - y_7y_8y_9 - y_1y_2y_7y_8y_9 - y_4y_7y_8y_9 - y_1y_2y_4y_7y_8y_9 + y_4y_5y_6y_7y_8y_9 + y_1y_2y_4y_5y_6y_7y_8y_9)
\end{aligned}
$$

and

$$\begin{aligned}\delta(y)= & \ 1-y_1-y_3-y_1y_2y_3-y_4-y_1y_5-y_3y_5-y_1y_2y_3y_5-y_6+y_1y_5y_6+y_3y_5y_6+y_1y_2y_3y_5y_6\\ & -y_7-y_1y_2y_7+y_4y_7+y_1y_2y_4y_7-y_4y_5y_6y_7-y_1y_2y_4y_5y_6y_7-y_9+y_4y_9-y_4y_5y_6y_9=(z_4)^{-1}-(z_4z_6)^{-1}-(z_4z_8)\\ & ^{-1}+(z_4z_6z_8)^{-1}+(z_3z_9)^{-1}-(z_2z_3z_9)^{-1}+(z_1z_2z_3z_9)^{-1}-(z_4z_9)^{-1}-(z_3z_5z_9)^{-1}+(z_2z_3z_5z_9)^{-1}-(z_1z_2z_3z_5z_9)^{-1}+(\\ & z_4z_5z_9)^{-1}+(z_4z_6z_9)^{-1}-(z_3z_8z_9)^{-1}+(z_2z_3z_8z_9)^{-1}-(z_1z_2z_3z_8z_9)^{-1}+(z_4z_8z_9)^{-1}+(z_3z_5z_8z_9)^{-1}-(z_2z_3z_5z_8z_9)^{-1}+(\\ & z_1z_2z_3z_5z_8z_9)^{-1}-(z_4z_5z_8z_9)^{-1}-(z_4z_6z_8z_9)^{-1}+(z_3z_7z_8z_9)^{-1}-(z_2z_3z_7z_8z_9)^{-1}+(z_1z_2z_3z_7z_8z_9)^{-1}-(z_3z_4z_7z_8z_9)\\ & ^{-1}+(z_2z_3z_4z_7z_8z_9)^{-1}-(z_1z_2z_3z_4z_7z_8z_9)^{-1}-(z_3z_5z_7z_8z_9)^{-1}+(z_2z_3z_5z_7z_8z_9)^{-1}-(z_1z_2z_3z_5z_7z_8z_9)^{-1}+(\\ & z_3z_4z_5z_7z_8z_9)^{-1}-(z_2z_3z_4z_5z_7z_8z_9)^{-1}+(z_1z_2z_3z_4z_5z_7z_8z_9)^{-1}+(z_3z_4z_6z_7z_8z_9)^{-1}-(z_2z_3z_4z_6z_7z_8z_9)^{-1}+(\\ & z_1z_2z_3z_4z_6z_7z_8z_9)^{-1}.\end{aligned} \tag{79}$$

下一个引理将特化（69）的作用与 $z_i = z_i(y)$ 联系起来。

引理 2.12. 若 A 是与一个辫子词关联的矩阵，则将71）中的方程按y_i （69）所示进行特化后，解为 $z_i = t^{\varepsilon_i}$。

证明。 我们沿用引理 2.7 的记号。稍微滥用一下记号，对于 $j \in \gamma_i$ 遇到的每个交叉 j ，记作 γ （按惯例，按重数计数）。令 γ_i（上交叉点）和γ_i（下交叉点）分别表示 γ 遇到的上交叉点和下交叉点集合，并且当且仅当 $\sigma_i(j) = \pm 1$ 为正时， $j \in \gamma_i$（上交叉点）。我们也可以用类似的方式描述矩阵 A ，但它只记录上交叉点。具体地，我们有：

$$A_{ii} = (1 + s(i))/2, \qquad A_{ij} = s(i)(1 + \sigma_i(j))/2 \qquad (i \neq j)\,. \tag{80}$$

然后，在代入 $z_i = t^{\varepsilon_i}$ 和 y_i（如引理 2.7 所示）后，我们可以计算方程（71）的右端；又因为 $d_i = -\sum_{j\in\gamma_i} \varepsilon_j$， 可得

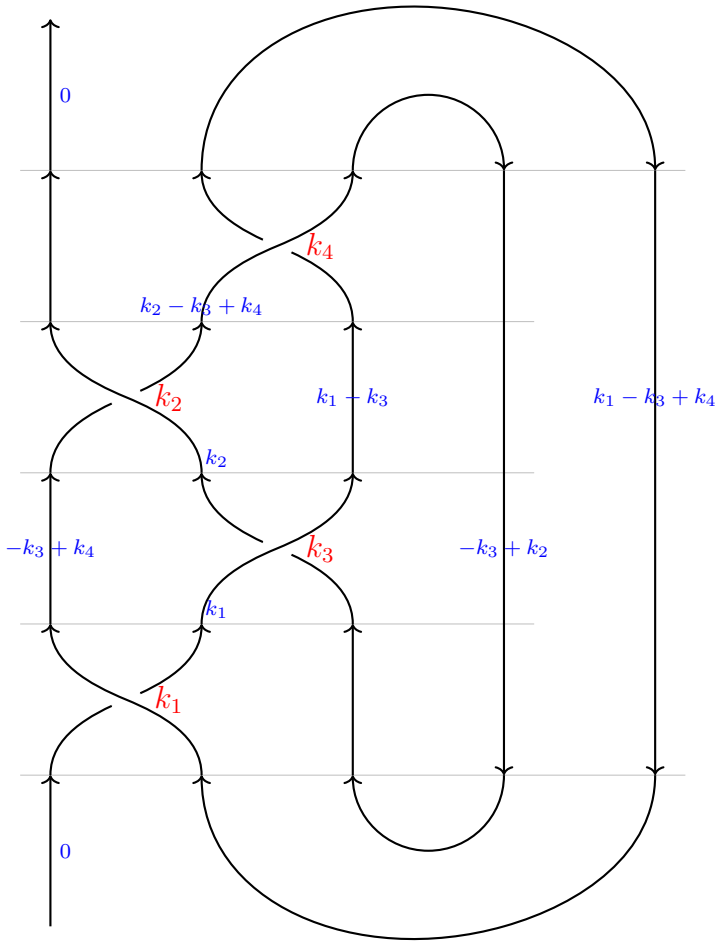
$$-(t^{\varepsilon_i} - 1) \prod_{j\in\gamma_i} t^{-s(i)\varepsilon_j/2} \prod_{j\in\gamma_i(\text{over})} t^{s(i)\varepsilon_j} \;=\; (1 - t^{\varepsilon_i}) \prod_{j\in\gamma_i} t^{\sigma_i(j)s(i)\varepsilon_j/2}\,. \tag{81}$$

如果我们考虑表示 $\pi_1(S^3 \setminus K) \to \mathbb{C}^\times$ ，其中绕纽结的环具有单值化 $t^{1/2}$，那么我们可以用两种方式计算圈 γ 的单值化。我们可以将围道推开，也可以将其拉向我们。这两种计算分别给出$\prod_{j\in\gamma_i\text{（上）}} t^{\varepsilon_j/2} = \prod_{j\in\gamma_i\text{（下）}} t^{\varepsilon_j/2}$。因此，我们看到方程（71）的右端在该特化下等于 $1 - t^{\varepsilon_i}$，而这等于方程（71）的左端在同一特化下的值。

因此，对于 $y_i = (t^{\varepsilon_i} - 1)t^{s(i)d_i/2}$，量子不变量的特化 $z_i = t^{\varepsilon_i}$是方程（71）的唯一解，该方程出自定理2.9。□

我们以一个例子结束本节，其中集中展示状态和的 $q \to 1$ 极限、其变形及其有理性性质。

例 2.13. 考虑由三股辫子的闭包 $\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2$ 所描述的八字结 4_1 。图示如下：



由此得到量子不变量

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^4_{\geq 0}} (-1)^{k_3+k_4} q^{2k_1k_2-k_1k_3-k_2k_3-k_3k_4+3k_3(k_3+1)/2+k_4(k_4-1)/2-k_1-k_2-k_4} t^{-k_1-k_2+1} \begin{bmatrix} k_1-k_3+k_4 \\ k_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} k_1 \\ k_3 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} k_2-k_3+k_4 \\ k_4 \end{bmatrix}_q (t;q^{-1})_{k_1} (q^{k_3-k_4}t;q^{-1})_{k_2} (q^{k_3-k_2}t;q^{-1})_{k_3} (q^{-k_1+k_3}t;q^{-1})_{k_4} . \tag{82}$$

这个辫子词导出变形和

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^4_{\geq 0}} \binom{k_1-k_3+k_4}{k_1} \binom{k_2}{k_2} \binom{k_1}{k_3} \binom{k_2-k_3+k_4}{k_4} y^k \\ &= \frac{1}{1-y_1-y_2-y_4+y_1y_2-y_1y_2y_3y_4} . \end{aligned} \tag{83}$$

特化

$$y_1 = y_2 = t^{-1}-1, \qquad y_3 = y_4 = t-1 \tag{84}$$

给出

$$\frac{t^{-1}}{-t^{-1}+3-t} \tag{85}$$

这与 4_1 的亚历山大多项式为 $-t^{-1}+3-t$这一事实相符。与该辫子词相关联的组合数据是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{86}$$

and

$$\begin{aligned} s &= (\ 1,\ \ 1, -1,\ \ 1)\,, \\ d &= (\ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0)\,. \end{aligned} \tag{87}$$

与该矩阵相关联的纳姆方程为

$$1-z_1 = -y_1 z_1 z_3\,, \quad 1-z_2 = -y_2 z_2 z_4\,, \quad 1-z_3 = -y_3 z_1^{-1} z_4^{-1}\,, \quad 1-z_4 = -y_4 z_1 z_4\,. \tag{88}$$

这些方程有唯一解

$$\begin{aligned} z_1 &= \tfrac{-1-y_1 y_3}{-1+y_1-y_1 y_3 y_4}\,, & z_2 &= \tfrac{-1+y_1+y_4}{-1+y_1+y_2-y_1 y_2+y_4+y_1 y_2 y_3 y_4}\,, \\ z_3 &= \tfrac{1+y_3-y_3 y_4}{1+y_1 y_3}\,, & z_4 &= \tfrac{1-y_1+y_1 y_3 y_4}{1-y_1-y_4}\,. \end{aligned} \tag{89}$$

该解可用于如下表示 δ

$$\begin{aligned} \delta &= 1-y_1-y_2-y_4+y_1 y_2-y_1 y_2 y_3 y_4 \\ &= z_2^{-1}-(z_1 z_2)^{-1}-(z_2 z_3)^{-1}+(z_1 z_2 z_3)^{-1}+(z_1 z_2 z_4)^{-1}\,. \end{aligned} \tag{90}$$

特化$z_1^{-1}=z_2^{-1}=z_3=z_4=t$ 于方程（88）得（84）。

3. A review of the Habiro ring of an étale $\mathbb{Z}[t]$-algebra

3.1. 关于 p-进完备化的基础知识。若 R 是一个特征零的环，那么对于每个素数$p\in\mathbb{Z}$，我们可以构造两个环：由 R/pR定义的 R 模 p 的约化，以及由 $R_p=\lim_{\leftarrow n} R/p^nR$定义的 R 在 p 处的完备化。根据其定义，我们有自然映射 $R\to R_p\to R/pR$。由二项式定理可立即推出，若环 R 的特征为零，则 p次幂映射 $F_p: R/pR\to R/pR$ 定义为$x\mapsto x^p$ ，是一个环同态。弗罗贝尼乌斯提升是满足 $\varphi_p(x)\equiv x^p \pmod p$的同态 $\varphi_p:\ R_p\to R_p$ 。

在本文中，我们关注 $R=\mathbb{Z}[t^{\pm1},1/\Delta(t)]$ ，其中 $\Delta(t)\in\mathbb{Z}[t^{\pm1}]$。在这个例子中，我们看到， $Q(t)\in R$ 中的元素可以表示为 $Q(t)=P(t)/\Delta(t)^n$ ，其中某个 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和$P(t)\in\mathbb{Z}[t^{\pm1}]$。我们看到，当 $P(t)\in p\mathbb{Z}[t^{\pm1}]$时， $Q(t)\in pR$。于是，我们可以用和的形式非唯一地表示 R_p 中的元素

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q_k(t)p^k \in R_p\,, \tag{91}$$

其中 $Q_k(t)\in R$。我们看到，如果选择某个[2] $t\in\mathbb{C}_p$ ，满足 $|t|_p\leq 1$ 且 $|\Delta(t)|_p\geq 1$，那么 R_p 中的元素可以在 t处求值。

存在许多不同的弗罗贝尼乌斯提升 $\varphi_p: R_p\to R_p$。以下给出一个颇为典范的提升： $a=0$

[2]可以简单地将任意子集 $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}_p\subseteq\mathbb{C}_p$视为.....

命题 3.1. 如果 $R = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, 1/\Delta(t)]$ 对 $\Delta(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$成立，那么对于 $a \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ ，映射$t \mapsto (t+a)^p - a^p$ 在 R_p 上定义了一个弗罗贝尼乌斯提升。

证明。 首先，令 $\delta(t) = p^{-1}(\Delta(t)^p - \Delta((t+a)^p - a^p)) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$。于是我们发现

$$\frac{1}{\Delta((t+a)^p - a^p)} = \frac{1}{\Delta(t)^p - p\delta(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta(t)^k}{\Delta(t)^{p(k+1)}} p^k \in R_p \,. \tag{92}$$

因此，此映射将 $1/\Delta(t)$ 映至 R_p ，当然也将 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ 映至 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$。这可用于定义映射 $R_p \to R_p$ □

注 3.2。 注意， R_p 与 $\mathbb{Z}_p[t^{\pm 1}, 1/\Delta(t)]$ 并不同构。例如， $\mathbb{Z}_p[t] \subsetneq \mathbb{Z}[t]_p \subseteq \mathbb{Z}_p[\![t]\!]$ ，并且我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^{L} \sum_{k=\ell}^{\infty} p^k t^\ell &= \sum_{k=0}^{L} p^k \frac{1-t^{k+1}}{1-t} + \sum_{k=L+1}^{\infty} p^k \frac{1-t^{L+1}}{1-t} \in \mathbb{Z}_p[t] \,, \\
\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=\ell}^{\infty} p^k t^\ell &= \sum_{k=0}^{\infty} p^k \frac{1-t^{k+1}}{1-t} = \frac{1}{(1-p)(1-pt)} \in \mathbb{Z}[t]_p \,, \\
\frac{1}{(1-p)(1-t)} &= \sum_{\ell,k=0}^{\infty} p^k t^\ell \in \mathbb{Z}_p[\![t]\!] \,.
\end{aligned} \tag{93}$$

我们看到，尽管 t 在 $\mathbb{Z}[t]_p$ 中的元素的次数没有上界，但对于 p 的固定幂次， t 中的次数有有限上界。因此，可以在任意 $|t|_p \le 1$ 处取 $\mathbb{Z}[t]_p$ 中元素的值，而 $\mathbb{Z}_p[\![t]\!]$ 中的元素只能在 $|t|_p < 1$ 处取值。

命题 3.3. 环 $\mathbb{Z}[t^{1/p^\infty}, \frac{1}{\Delta(t)}]_p$ 有一个弗罗贝尼乌斯提升 $t \mapsto t^p$ ，且这是一个自同构。

证明. 由归纳法可知，存在 $P_k(t) \in \mathbb{Z}[t^{1/p^\infty}, 1/\Delta(t)]$ 使得

$$\frac{1}{\Delta(t^{1/p})} = \sum_{k=0}^{n} P_k(t) p^k \pmod{p^{n+1}} \,, \tag{94}$$

因为

$$\frac{1 - \Delta(t^{1/p}) \sum_{k=0}^{n} P_k(t) p^k}{p^{n+1} \Delta(t^{1/p})} \equiv \frac{1 - \Delta(t^{1/p}) \sum_{k=0}^{n} P_k(t) p^k}{p^{n+1} \Delta(t)} \Delta(t^{1/p})^{p-1} \pmod{p} \,. \tag{95}$$

□

3.2. $\mathbb{Z}[t]$-**étale 代数、它们的 Habiro 环及元素**。 本节将回顾仿射空间的 Habiro 环以及其上的 étale 映射的基本性质。

首先，我们回顾 Habiro 环与原始定义之间的关系。该关系由以下命题支配。

命题 3.4。 如果 $\varphi_p:\ R\to R$ 并且是映射到其像上的同构[3] 对于所有素数 p，则

$$\mathcal{H}_{R/\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]}\cong \varprojlim_n R[q]/(q;q)_n R[q]\,. \tag{96}$$

证明。 这由同构

$$\begin{aligned}\varprojlim_n R[q]/(q;q)_n R[q]\cong \Big\{(f_m)_m\ \in \prod_{m\geq 1} R[\zeta_m][\![q-\zeta_m]\!]\ \Big|\ \text{for all } m\in\mathbb{Z}_{>0} \text{ and } p\in\mathbb{Z}_{>0} \text{ prime}\\ f_m(q-\zeta_{pm}+\zeta_{pm}-\zeta_m)\ =\ f_{pm}(q-\zeta_{pm})\in R_p[\zeta_{pm}][\![q-\zeta_{pm}]\!]\Big\}\,,\end{aligned} \tag{97}$$

结合同构 $(f_m)_m\to(\varphi_m f_m)_m$ 可得，其中 $\varphi_m=\prod_p \varphi_p^{v_p(m)}$。 □

$\mathbb{Z}[t]$ 的 Habiro 环及其 Frobenius 提升 $t\mapsto t^p$，可由同构描述

$$\varphi:\mathcal{H}_{\mathbb{Z}[t]}\to\varprojlim_n \mathbb{Z}[t,q]/(q;q)_n\mathbb{Z}[t,q]\,. \tag{98}$$

因此，利用这个同构，我们可以通过取 $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}[t]}$ 的所有元素

$$\varphi^{-1}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t;q)(q;q)_n\Big)\,, \tag{99}$$

对于任意序列 即 $a_n(t;\ q)\ \in\mathbb{Z}[t,q]$ （当然要注意， $a_n(t;q)$ 的选择并不唯一）).

这些环满足与 Habiro 的原始环 $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$类似的性质。总结如下:

命题 3.5。典范映射

$$\mathcal{H}_{R/\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]}\to R[\![q-1]\!]\,,\qquad \mathcal{H}_{R/\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]}\to\prod_{m=1}^{\infty} R[t^{1/m},\zeta_m] \tag{100}$$

是单射。

也就是说，环 $\mathcal{H}_{R/\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]}$ 中的元素由其在 1 附近的展开式，或由其在单位根处的值唯一确定。

证明。第一个单射由公式（4）推出。第二个单射由第一个推出。事实上，如果元素 f满足 $f\ (\zeta_m)\ =0$对所有 m，且 $f_1\ (t,\ q-1)\ =\sum_{k=0}^{\infty} c_k\ (q-1)^{\ k}$，根据假设我们有 $c_0=0$。于是由公式（4）可知， c_1 含有无穷多个素因子，因此 $c_1\ =\ 0$，然后 $c_k\ =\ 0$ 可通过相同的推理和归纳法得到。 □

我们现在回顾来自 [14, 第1节5]的Habiro环中元素的一个基本构造。主要思想是将有理函数展开式中的任意阶乘替换为 q-阶乘。由此得到定义在同一有理函数环上的Habiro环中的元素。作为一个基本例，考虑有理函数

$$f_{\mathcal{A},Q}(t)\ =\ \frac{1}{1-\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}(-1)^{Q_{\alpha\alpha}}t_\alpha}\ =\ \sum_{k\in\mathbb{Z}^{\mathcal{A}}_{\geq 0}}(-1)^{\mathrm{diag}(Q)k}\frac{(\sum_\alpha k_\alpha)!}{\prod_\alpha(k_\alpha)!}\prod_\alpha t_\alpha^{k_\alpha} \tag{101}$$

[3]主要条件是陪域不需要进行 p-进完备化。

在有限个变量 $\mathcal{A}$ 中，其中 $t=(t_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, $k=(k_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ and Q 是一个整对称矩阵（目前除模二意义下的对角线外，其余部分都冗余）。将阶乘替换为 q-阶乘，并加上来自 Q 的二次项，我们得到一个 q-变形，其定义如下：

$$f_{\mathcal{A},Q}(t,q) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^{\mathcal{A}}_{\geq 0}} (-1)^{\mathrm{diag}(Q)k} q^{\frac{1}{2}k^tQk+\frac{1}{2}\mathrm{diag}(Q)k} \frac{(q;q)_{\sum_\alpha k_a}}{\prod_\alpha (q;q)_{k_\alpha}} \prod_\alpha t_\alpha^{k_\alpha}. \tag{102}$$

定理 3.6。 [14] 对于每个有限集 $\mathcal{A}$ 以及以 $\mathcal{A}$ 为指标的 Q 整对称矩阵，我们有 $f_{\mathcal{A},Q}(t,q)\in\mathcal{H}_{\mathbb{Z}[t,f_{\mathcal{A},Q}(t)]/\mathbb{Z}[t]}$。

这个基本例子可通过特化各种$t_\alpha=1$ 或取前推来构造许多新的元素。

例 3.7。 上述定理的一个例子是 $f(t,q)=(1-t)^{-1}\in\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}[t,(1-t^{-1})]$，因为

$$f_m = \frac{1}{1-t^{1/m}} = \frac{1}{1-t}(1+t^{1/m}+t^{2/m}+\cdots+t^{(m-1)/m}) \in \mathbb{Z}[t^{1/m},(1-t)^{-1}]. \tag{103}$$

另一类例子来自第 2.4 节中应用拉格朗日反演定理所产生的二项式和。事实上，令 R 为代数$\mathbb{Z}[z^{\pm1},\delta^{-1},y^{\pm1}]$ 模方程（71），我们有如下结论：

定理 3.8。 [14] 对于任意整数矩阵 A，Q 对角项为奇数的整二次型，ν 是具有奇数项的整线性型，并且对任意整 s_i，q-超几何和

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^N_{\geq 0}} (-1)^{k_1+\cdots+k_N} q^{\frac{1}{2}Q(k)+\frac{1}{2}\nu(k)} \prod_{i=1}^N \begin{bmatrix} s_i+(A^tk)_i \\ k_i \end{bmatrix}_q y_i^{k_i}, \tag{104}$$

定义一个 *Habiro* 环的元素 $R/\mathbb{Z}[y]$，相对于弗罗贝尼乌斯提升 $y\mapsto y^p$.

注 3.9. 这个例子与 $f_{A、B、\nu、\varepsilon}$有根本不同。主要区别在于弗罗贝尼乌斯在变量 t上的作用。这凸显了 q-Pochhammer 符号与弗罗贝尼乌斯提升之间的相互作用。

3.3. **分圆展开。** 回顾了 Habiro 环及其元素的基础知识后，现在我们可以证明引理 1.2。首先，我们需要以下初等结果。

命题 3.10. 如果 $\Delta(1)=1$ 且 $R=\mathbb{Z}[t^{\pm1},\Delta(t)^{-1}]$，那么 $\mathrm{ev}_{t=1}:\mathcal{H}_{R/\mathbb{Z}[t^{\pm1}]}\to\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$。

证明。这由弗罗贝尼乌斯 $t\mapsto t^p$ 与 $\mathrm{ev}_{t=1}$ 可交换这一事实得出 . □

有了这一点，我们就可以完成引理的证明。

引理 证明 *1.2*。 考虑算子

$$(Tf)(t,q) = \frac{f(t,q)-f(1,q)}{t-1}. \tag{105}$$

注意，若 $f_m(t,q-\zeta_m)\in\mathbb{Z}[t^{\pm1/m},\zeta_m,\frac{1}{\Delta(t)}]][\![q-\zeta_m]\!]$，则 $(f_m(t,q-\zeta_m)-f_m(1,q-\zeta_m))/(t-1)\in\mathbb{Z}[t^{\pm1/m},\zeta_m,\frac{1}{\Delta(t)}]][\![q-\zeta_m]\!]$。

由命题 3.10 和例 3.7可容易看出，若 $f \in \mathcal{H}_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1},\Delta(t)^{-1}]/\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]}$，则 $Tf \in \mathcal{H}_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1},\Delta(t)^{-1},\ (t-1)^{-1}]/\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]}$。此外，由于 $(Tf)^m \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1/m}, \zeta_m, \Delta^1(t)^{-1}][\![q-\zeta_m]\!]$，我们实际上可以看出 $Tf \in \mathcal{H}_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1},\Delta(t)^{-1}]/\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]}$。

因此，我们有

$$f(t,q) = a_0(q) + (t^{-1}-1)f_1(t,q) \tag{106}$$

其中 $a_0(q) = f(t,1) \in \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ 和 $f_1(t,q) = -t(Tf)(t,q) \in \mathcal{H}_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1},\Delta(t)^{-1}]/\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]}$。容易看出，$f$ 唯一确定了 a_0 和 f_1。将 $f_1(t,q)$平移为 $f_1(qt,q)$，并反复应用（106），可得

$$f(t,q) = a_0(q) + (t^{-1}-1)(a_1(q) + (qt^{-1}-1)f_2(t,q)) \tag{107}$$

对于唯一的 $a_0(q)$ $a_1(q) \in \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ 和 $f_2(t,q) \in \mathcal{H}_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1},\Delta(t)^{-1}]/\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]}$。继续使用归纳法，我们得到如下形式的展开式

$$f(t,q) = \sum_{k=0}^{\infty} (t^{-1};q)_k a_k(q) \tag{108}$$

其中 $a_k(q)$由 $f(t,q)$唯一确定。这给出了一个定义良好的单射环同态

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1},\Delta(t)^{-1}]/\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]} \hookrightarrow \varprojlim_k \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}[t^{\pm 1}]/((t^{-1};q)_k) \tag{109}$$

并完成了引理的第一部分。

对于第二部分，注意到

$$f(q^n,q) = \sum_{k=0}^{n} (q^{-n};q)_k\, a_k(q), \qquad (n \geq 0)\,. \tag{110}$$

因此，如果 $f(q^n, q) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$，那么由关于 n 的归纳法可得 $a_n(q) \in \frac{1}{(q;q)_n}\mathbb{Z}[q^{\pm 1}] \cap \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$。但是

$$\tfrac{1}{(q;q)_n}\mathbb{Z}[q^{\pm 1}] \cap \mathcal{H}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]\,. \tag{111}$$

这就完成了引理的证明。 □

4. Proofs

4.1. **定理 1.3 的变形**。回顾由辫子 $f_{A,B,\nu,\varepsilon}(t,q)$ 的闭包所给纽结的彩色琼斯多项式，其状态和 38) 中的（ β 由 r 股和 N 个交叉组成。我们将考虑这些状态和的多变量版本；除了 t 和 q之外，它们还依赖于 $x = (x_1, \ldots\ldots, x_N)$：

$$\begin{aligned} &f_{A,B,\nu,\varepsilon}(x,t,q) \\ &= t^{\frac{r-1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^N_{\geq 0}} q^{\frac{1}{2}Q(k)-\nu(k)} \prod_{i=1}^{N} (-\varepsilon_i q^{\frac{-\varepsilon_i-1}{4}} t^{-\frac{1}{2}})^{k_i} \begin{bmatrix} (A^t k)_i \\ k_i \end{bmatrix}_q (q^{-(B^t k)_i} t;q^{-1})_{k_i} t^{-\frac{\varepsilon_i}{2}((A^t k)_i + (B^t k)_i + 1)} x_i^{k_i}. \end{aligned} \tag{112}$$

注意，

$$f_{A,B,\nu,\varepsilon}(x,t,q) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, q^{\pm 1}][\![x]\!], \qquad f_{A,B,\nu,\varepsilon}(x,t,1) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}][\![x]\!] \tag{113}$$

满足 $f_{A,B,\nu,\varepsilon}(0,t,q) = 1$，因此 $f_{A,B,\nu,\varepsilon}(0,1,1) = 1$。此外，$f_{A,B,\nu,\varepsilon}(1,t,q) = f_{A,B,\nu,\varepsilon}(t,q)$。考虑环

$$R = \mathbb{Z}[z^{\pm1}, t^{\pm1}, x^{\pm1}, \delta^{-1}]/(1 - z_1 + x_1 y_1 \prod_j z_j^{A_{1j}}, \cdots, 1 - z_N + x_N y_N \prod_j z_j^{A_{Nj}}), \tag{114}$$

其中 δ 如方程（73）以及 $y_i = (t^{\varepsilon_i} - 1)\, t^{s(i)d_i/2}$（如引理 2.7中所述）。环 R_p 具有弗罗贝尼乌斯提升 φ_p，将 x提升为 t 它们的 p 次幂。对于整数 b 和正整数 m，定义

$$\langle b \rangle_m \equiv b \pmod m, \qquad 0 \le \langle b \rangle_m < m\,. \tag{115}$$

定理 4.1。公式 $f_{A、B、\nu、\varepsilon}(x、t、q)$ 定义了 *Habiro* 环 $\mathcal{H}_R$ 中的一个元素。此外，

$$\begin{aligned}\delta f_{A,B,\nu,\varepsilon}(x^{\frac{1}{m}}, t^{\frac{1}{m}}, \zeta_m) = \sum_{n \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^N} & \zeta_m^{\frac{1}{2}Q(n)-\nu(n)} \prod_{i=1}^{N} (-\varepsilon_i \zeta_m^{\frac{-\varepsilon_i-1}{4}} t^{-\frac{1}{2m}})^{n_i} \begin{bmatrix} \langle (A^t n)_i \rangle_m \\ n_i \end{bmatrix}_{\zeta_m} z_i^{\lfloor \frac{(A^t n)_i - n_i}{m} \rfloor} \\ & \times (\zeta_m^{-(B^t n)_i} t^{\frac{1}{m}}; \zeta_m^{-1})_{n_i} t^{-\frac{\varepsilon_i}{2m}((A^t n)_i + (B^t n)_i + 1) + \frac{r-1}{2m}} x_i^{\frac{n_i}{m}}.\end{aligned} \tag{116}$$

在接下来的几节中，我们将证明此定理。不过，在此之前，我们先给出主定理 1.3 所需的一个引理。

引理 4.2。如果 A、B、ε 来自纽结的辫表示 K（如第 2.1 节所述），则求值映射 $x = 1$ 诱导出一个环映射

$$\mathrm{ev}_{x=1} : R \to \mathbb{Z}[t^{\pm1}, \Delta_K(t)^{-1}]\,. \tag{117}$$

证明。首先，由引理 2.12，我们看到可以得到一个从 R 到 $\mathbb{Z}[t^{\pm1}, \delta^{-1}]$ 的映射。然后，由于 $\delta^{-1} = f_{A、B、\nu、\varepsilon}(0、t、1)$，由方程（58）可知 $\delta = \Delta_K(t)$。□

4.2. 关于 q-Pochhammer 符号在单位根附近展开的基础知识。本节回顾 q-Pochhammer 符号的一些基本性质，以及它们在单位根附近的展开。首先，利用初等恒等式

$$(t;q)_k = \frac{(t;q)_\infty}{(q^k t;q)_\infty} \qquad (k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}) \tag{118}$$

我们可以根据无限 q-Pochhammer 符号的相应展开，推导有限 q-Pochhammer 符号的展开。

此外，还有一个简单但实用的同余乘积恒等式，它根据 $q = 1$ 处的情形确定 $q = \zeta_m$ 附近的行为：

$$(t;q)_\infty = \prod_{j=0}^{m-1} (q^j t; q^m)_\infty \qquad (m \in \mathbb{Z}_{>0})\,. \tag{119}$$

接下来，我们回顾在 1 附近的渐近展开。这是标准结果，详细证明可参见例如 [3,定理 2.2]。

引理 4.3. 对于 $a \in \mathbb{Z}$ 和 $q = e^{\hbar}$，其中 $\hbar \to 0$，我们有：

$$(q^a t; q)_\infty \sim \exp\Big(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell(a)}{\ell!} \mathrm{Li}_{2-\ell}(t) \hbar^{\ell-1}\Big) . \tag{120}$$

为了理解当 q 接近单位根时 $f_{A,B,\nu,\varepsilon}(x,t,q)$ 的展开，我们使用以下结果：

引理 4.4. 对于固定的 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ 和 $n \in \{0,1,\dots,m-1\}$、$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 以及 $a, b \in \mathbb{Z}$，存在 $D_{m,n,b}(\zeta_m, k, a, t, \partial_t, q-\zeta_m) \in \mathbb{Q}[\zeta_m, k, a, t^{\frac{1}{m}}, \partial_t][\![q-\zeta_m]\!]$，使得

$$(q^{am+b} t^{\frac{1}{m}}; q)_{km+n} \;=\; D_{m,n,b}(\zeta_m, k, a, t, \partial_t, q-\zeta_m)(1-t)^k \tag{121}$$

其中 $(q-\zeta_m)^\ell$ 在 $D_{m,n,b}$ 中的系数的 ∂_t 次数至多为 ℓ，且 t-次数严格小于 1，并且

$$D_{m,n,b}(\zeta_m, k, a, t, \partial_t, 0) \;=\; (\zeta_m^b t^{\frac{1}{m}}; \zeta_m)_n . \tag{122}$$

证明。 等式 (118) 和 (120) 表明

$$\begin{aligned}
(q^a t; q)_k \;&=\; \frac{(q^a t; q)_\infty}{(q^{k+a} t; q)_\infty} \\
&=\; (1-t)^k \exp\Big(\sum_{\ell=2}^{\infty} (B_\ell(a) - B_\ell(k+a)) \frac{\mathrm{Li}_{2-\ell}(t)}{\ell!} \hbar^{\ell-1}\Big) \\
&=\; (1-t)^k \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\ell} P_{\ell,j}(a,k)(1-t)^{-j}(q-1)^\ell ,
\end{aligned} \tag{123}$$

对于某些多项式 $P_{\ell,j}(a,k) \in \mathbb{Q}[a,k]$，因为 (120) 中的 $\ell = 0$ 项相消，而含有 $B_1(a) = -\frac{1}{2} + a$ 和 $\mathrm{Li}_1(t) = -\log(1-t)$ 的 $\ell = 1$ 项给出 $(1-t)^k$ 前因子，$(1-t)^{\ell-1}\mathrm{Li}_{2-\ell}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ 对于 $\ell \geq 2$，且 $(q^a t; q)_k$ 的 t-次数为 k。鉴于对于所有 k，$(q^a t; q)_k \in \mathbb{Z}[t,q]$，我们看到，对于满足 $j > k$ 的 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$P_{\ell,j}(a,k) = 0$。因此，我们看到 $Q_{\ell,j}(a,k) = P_{\ell,j}(a,k)/k(k-1)\cdots(k-j+1) \in \mathbb{Q}[a,k]$。这意味着

$$(q^a t; q)_k \;=\; \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\ell} Q_{\ell,j}(a,k) \partial_t^j (1-t)^k (q-1)^\ell \tag{124}$$

与 $Q_{\ell,j}(a,k) \in \mathbb{Q}[a,k]$。因此，

$$D_{1,0,0}(1,k,a,t,\partial_t, q-1) \;=\; \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\ell} Q_{\ell,j}(a,k) \partial_t^j (q-1)^\ell \tag{125}$$

给出了当 $m = 1$时该引理的证明。

对于一般的 $m>0$的情形，我们利用方程（119）和（123）发现存在某个$P_{\ell,\ j,\ m,\ b,\ n}(a,\ k,\ t)\in\mathbb{Q}[\zeta_m,a,k,t^{\frac{1}{m}}]$，其 t-次数严格小于1，使得

$$\begin{aligned}(q^{am+b}t^{\frac{1}{m}};q)_{km+n} &= \prod_{j=0}^{m-1}(q^{am+b+j}t^{\frac{1}{m}};q^m)_{k+\lceil\frac{n-j}{m}\rceil}\\ &= \prod_{j=0}^{m-1}(1-\zeta_m^{b+j}t^{\frac{1}{m}})^k\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\ell}P_{\ell,j}(a+\tfrac{b+j}{m},k+\lceil\tfrac{n-j}{m}\rceil)(1-\zeta_m^{b+j}t^{\frac{1}{m}})^{-j}(q^m-1)^\ell \qquad (126)\\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\ell}P_{\ell,j,m,b,n}(a,k,t)(1-t)^{k-j}(q-\zeta_m)^\ell\,.\end{aligned}$$

由于对所有 k，我们发现 $(q^{am+b}t^{\frac{1}{m}};q)_{km+n}$ 在 $t=1$ 处没有极点，并且 $P_{\ell,\ j,\ m,\ b,\ n}(a,\ k,\ t)$ 的 t-次数小于 1，因此我们再次看到，$P_{\ell,\ j,\ m,\ b,\ n}(a,\ k,\ t)$ 必须能被 $k(k-1)\cdots(k-j+1)$ 整除。□

当 $t=1$ 时，我们还需要上述引理的一个版本。

引理4.5。对于固定的 $m\in\mathbb{Z}_{>0}$ 和 $n\in\{0,1,\dots,m-1\}$、$k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 以及 $a,\ b\in\mathbb{Z}$，存在 $D_{m,\ n,\ b}(\zeta_m,\ k,\ a,\ q-\zeta_m)\in\mathbb{Q}[\zeta_m,k,a][\![q-\zeta_m]\!]$，使得

$$(q^{am+b};q)_{km+n} = (-1)^k m^{2k}(q-\zeta_m)^k\frac{\Gamma(a+k+\lceil\frac{b+n}{m}\rceil)}{\Gamma(a+\lceil\frac{b}{m}\rceil)}D_{m,n,b}(\zeta_m,k,a,q-\zeta_m)\,, \qquad (127)$$

and

$$D_{m,n,b}(\zeta_m,k,a,0) = (\zeta_m^b;\zeta_m)_n\,. \qquad (128)$$

证明。假设 $q=\zeta_m e^{\hbar}$。那么，由方程（119）和（120）以及 [3, 定理3。2] 可得

$$\begin{aligned}(q^b;q)_\infty &\sim \sqrt{2\pi}\frac{(-m\hbar)^{\frac{1}{2}-\lceil\frac{b}{m}\rceil}}{\Gamma(\lceil\frac{b}{m}\rceil)}\prod_{\langle -b\rangle_m\neq j=0}^{m-1}(1-\zeta_m^{b+j})^{\frac{1}{2}-\frac{b+j}{m}}\exp\Big(\frac{\pi^2}{6m\hbar}\\ &-\sum_{\ell=2}^{\infty}B_\ell(\lceil\tfrac{b}{m}\rceil)\frac{B_{\ell-1}(1)}{\ell-1}\frac{(m\hbar)^{\ell-1}}{\ell!}+\sum_{\langle -b\rangle_m\neq j=0}^{m-1}\sum_{\ell=2}^{\infty}\frac{B_\ell(\frac{b+j}{m})}{\ell!}\mathrm{Li}_{2-\ell}(\zeta_m^{b+j})(m\hbar)^{\ell-1}\Big)\,.\end{aligned} \qquad (129)$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}(q^{am+b};q)_{km+n} &= \frac{(q^{am+b};q)_\infty}{(q^{(a+k)m+b+n};q)_\infty}\\ &\in m^{2k+\lceil\frac{b+n}{m}\rceil-\lceil\frac{b}{m}\rceil}(-\hbar)^{k+\lceil\frac{b+n}{m}\rceil-\lceil\frac{b}{m}\rceil}\frac{\Gamma(a+k+\lceil\frac{b+n}{m}\rceil)}{\Gamma(a+\lceil\frac{b}{m}\rceil)}\\ &\quad\times\Big(\prod_{\langle -b\rangle_m\neq j=0}^{n-1}(1-\zeta_m^{b+j})+\hbar\mathbb{Q}[\zeta_m,k,a][\![\hbar]\!]\Big)\,,\end{aligned} \qquad (130)$$

其中我们使用等式

$$\prod_{\langle -b\rangle_m \neq j=0}^{m-1} (1-\zeta_m^{b+j}) \;=\; m\,. \tag{131}$$

□

推论4.6. 对于固定的 $m\in\mathbb{Z}_{>0}$、 $b\in\mathbb{Z}$ 和 $n\in\{0,1,\dots,m-1\}$，我们有

$$\begin{bmatrix} mk+b \\ m\ell+n\end{bmatrix}_q \;\in\; \binom{k+\lfloor\frac{b-n}{m}\rfloor}{\ell}\left(\begin{bmatrix}\langle b\rangle_m \\ n\end{bmatrix}_{\zeta_m} + \hbar\mathbb{Q}[\zeta_m,k,\ell][\![\hbar]\!]\right). \tag{132}$$

证明. 这是由以下事实得出的:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} mk+b \\ m\ell+n\end{bmatrix}_q \;=\; \frac{(q^{m(k-\ell)+b-n+1};q)_{m\ell+n}}{(q;q)_{m\ell+n}} \\
&\in \frac{(k+\lfloor\frac{b}{m}\rfloor)!}{\ell!(k-\ell+\lfloor\frac{b-n}{m}\rfloor)!}(-m\hbar)^{\lfloor\frac{b}{m}\rfloor-\lfloor\frac{b-n}{m}\rfloor}\left(\frac{\prod_{\langle n-b-1\rangle_m\neq j=0}^{n-1}(1-\zeta_m^{b-n+1+j})}{(\zeta_m;\zeta_m)_n}+\hbar\mathbb{Q}[\zeta_m,k,\ell][\![\hbar]\!]\right) \\
&= \binom{k+\lfloor\frac{b-n}{m}\rfloor}{\ell}((k+\lfloor\tfrac{b}{m}\rfloor)(-m\hbar))^{\lfloor\frac{b}{m}\rfloor-\lfloor\frac{b-n}{m}\rfloor}\left(\frac{\prod_{\langle n-b-1\rangle_m\neq j=0}^{n-1}(1-\zeta_m^{b-n+1+j})}{(\zeta_m;\zeta_m)_n}+\hbar\mathbb{Q}[\zeta_m,k,\ell][\![\hbar]\!]\right).
\end{aligned} \tag{133}$$

□

在 [13, 14]中提出的方法随后可用于证明定理4.1。

*P*定理 *4.1*的推论 引理 4.4和 4.5以及推论4.6，意味着

$$\begin{aligned}
&f_{A,B,\nu,\varepsilon}(x^{1/m},t^{1/m},\zeta_m+q-\zeta_m) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^N_{\geq 0}}\sum_{n\in(\mathbb{Z}_{\geq 0}\cap[0,m))^N} q^{\frac12 Q(mk+n)-\nu(mk+n)}\prod_{i=1}^N(-\varepsilon_i q^{\frac{-\varepsilon_i-1}{4}}t^{-\frac{1}{2m}})^{mk_i+n_i}\begin{bmatrix}(mA^tk+A^tn)_i\\ k_i\end{bmatrix}_q \\
&\qquad\times (q^{-(mB^tk+B^tn)_i}t;q^{-1})_{k_i}t^{-\frac{\varepsilon_i}{2}((A^tk+A^t\frac{n}{m})_i+(B^tk+B^t\frac{n}{m})_i+\frac1m)}x_i^{k_i+\frac{n_i}{m}} \\
&\in \sum_{n\in(\mathbb{Z}_{\geq 0}\cap[0,m))^N}\sum_{k\in\mathbb{Z}^N_{\geq 0}}\left(\zeta_m^{\frac12 Q(n)-\nu(n)}\prod_{i=1}^N(-\varepsilon_i\zeta_m^{\frac{-\varepsilon_i-1}{4}}t^{-\frac{1}{2m}})^{n_i}\begin{bmatrix}\langle(A^tn)_i\rangle_m\\ n_i\end{bmatrix}_{\zeta_m} z_i^{\lfloor\frac{(A^tn)_i-n_i}{m}\rfloor}\right. \\
&\left.\times(\zeta_m^{-(B^tn)_i}t^{\frac1m};\zeta_m^{-1})_{n_i}t^{-\frac{\varepsilon_i}{2m}((A^tn)_i+(B^tn)_i+1)}x_i^{\frac{n_i}{m}}+(q-\zeta_m)\mathbb{Q}[\zeta_m,t^{1/m},x^{1/m},k,\partial_t][\![q-\zeta_m]\!]\right) \\
&\times\left(\prod_{i=1}^N(-\varepsilon_i t^{-\frac12})^{k_i}\binom{(A^tk)_i+\lfloor\frac{(A^tn)_i-n_i}{m}\rfloor}{k_i}(1-t)^{k_i}t^{-\frac{\varepsilon_i}{2}(A^tk+B^tk)_i}x_i^{k_i}\right) \\
&\subseteq R\otimes\mathbb{Q}[x^{1/m},t^{1/m},\zeta_m][\![q-\zeta_m]\!]\,,
\end{aligned} \tag{134}$$

其中我们用到了这一事实：$\mathrm{diag}(Q) \equiv (\varepsilon+1)/2$ (模 2) 且 $(-1)^{mk}q^{mk(mk+1)/2} = (-1)^k + \mathrm{O}(q-\zeta_m)$，定理 2.9 以及多项式 k 所诱导的 x-导数 z^s/δ属于 R。

由于 $f_{A,\,B,\,\nu,\,\varepsilon}(x,\ t,\ q) \in \mathbb{Z}[t^{\pm1}, q^{\pm1}][\![x]\!]$，级数 $f_{A,\,B,\,\nu,\,\varepsilon}(x^{1/m},\ t^{1/m},\ \zeta_m + q - \zeta_m)$ 中 $q-\zeta_m$ 的各次幂的系数属于 $\mathbb{Z}[\zeta_m, t^{\pm1/m}][\![x^{1/m}]\!]$。另一方面，我们刚刚证明了它们是 $R \otimes \mathbb{Q}[x^{1/m}, t^{1/m}, \zeta_m]$ 的元素。然而，

$$\mathbb{Z}[\zeta_m, t^{\pm1/m}][\![x^{1/m}]\!] \cap R \otimes \mathbb{Q}[x^{1/m}, t^{1/m}, \zeta_m] \subset R[x^{1/m}, t^{1/m}, \zeta_m]\,. \tag{135}$$

由此可知，$f_{A,\,B,\,\nu,\,\varepsilon}(x^{1/m},\ t^{1/m},\ \zeta_m+q-\zeta_m) \in R[x^{1/m}, t^{1/m}, \zeta_m][\![q-\zeta_m]\!]$ 定义了一个单位根处的级数集合。由于在 $x=0$ 附近的幂级数展开中的系数是 $\mathbb{Z}[q^{\pm1}, t^{\pm1}]$ 中的多项式，因而能够拼接，我们看到集合 $f_{A,\,B,\,\nu,\,\varepsilon}(x^{1/m},\ t^{1/m},\ \zeta_m+q-\zeta_m)$ 也能通过弗罗贝尼乌斯扭曲进行拼接。□

4.3. 最终证明。 在最后一节中，我们给出主要定理及其推论的证明。

证明定理 *1.3*。映射的存在性部分 J 由定理 4.1 和引理 4.2得出。映射的拓扑不变性 J 源于如下事实：$J(t,q)$ 由其求值 $J(q^{n-1},q)$ 对于 $n \geq 1$ 唯一确定，这由单射可得

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Z}[t^{\pm1},\Delta(t)^{-1}]/\mathbb{Z}[t^{\pm1}]} \hookrightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm1}, \Delta(t)^{-1}][\![q-1]\!] \overset{t\mapsto q^n}{\hookrightarrow} \mathbb{Q}[n][\![q-1]\!]\,. \tag{136}$$

至此完成定理的证明 1.3。 □

推论 1.4 是引理 1.2的推论，将其应用于 $f(qt,q)$ 而非 $f(t,q)$。

证明推论 *1.5*。由于 $f_{K,1}(t,q-1)$ 与 $J_K^{\mathrm{loop}}(t,q)$ 由其在 $t = q^{n-1}$ 处对于 $n > 0$ 的求值唯一确定，且后者一致，因此 $f_{K,1}(t,q-1) = J_K^{\mathrm{loop}}(t,q)$。□

推论的证明 *1.6*。首先，我们证明映射（17）定义良好。这是因为复合映射

$$\mathcal{L}_{\pm1} : \mathcal{H}_{\mathbb{Z}[t^{\pm1},\Delta(t)^{-1}]/\mathbb{Z}[t^{\pm1}]} \hookrightarrow \varprojlim_n \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}[t^{\pm1}]/(t^{-1};q)_n \to \mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \tag{137}$$

在此处有定义，其中左侧映射由式（8）给出，右侧映射由 [6, 第 3 节。1]给出。图表（18）的上方映射即定理1.3中的映射。左侧竖直映射是德恩填充映射。底部水平映射的存在性已在 [6],中证明，同时也由此证明了该图表的交换性。□

推论1.7的证明。这由下方外层图表的交换性以及映射 $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[\mathrm{disc}(\mathbb{K})^{-1}]/\mathbb{Z}} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[\mathrm{disc}(\mathbb{K})^{-1}][\![q-1]\!]$ 的单射性推出。

$$\begin{array}{ccccc}
\{\mathrm{Knots}\} & \xrightarrow{J} & \mathcal{H}_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1},\Delta(t)^{-1}]/\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]} & & \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Dehn}_0} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{L}_0} & \searrow^{\mathcal{L}_0} & \\
\{M \mid H_1(M,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}\} & \longrightarrow & \mathcal{H}_{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[\mathrm{disc}(\mathbb{K})^{-1}]/\mathbb{Z}} & & \\
 & \searrow & \Big\downarrow & & \\
 & & \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[\mathrm{disc}(\mathbb{K})^{-1}][\![q-1]\!] & \leftarrow &
\end{array} \tag{138}$$

□

Appendix A. The Burau representation and the Alexander polynomial

在本附录中，为求完整起见，我们讨论 Burau 表示的原始形式和约化形式，以及 Alexander 多项式的一些众所周知的事实。

我们沿用第 2.2 节的记号。对 $y\mathfrak{b}_r(\beta)$ 取迹，其中第一股由 ℓ 着色，而第 i 股（$i=2,\ldots\ldots,r$）由 $\nu_i(k)+\ell$ 着色，可得

$$\mathrm{tr}(S(y\mathfrak{b}_r(\beta))) = \sum_{(\ell,k)\in\mathbb{Z}^{N+1}_{\geq 0}} \prod_{i=1}^{N} (-\varepsilon_i t^{-\frac{1}{2}})^{k_i} \binom{(A^t k)_i + \ell}{k_i} (1-t)^{k_i} t^{-\frac{\varepsilon_i}{2}((A^t k)_i + (B^t k)_i + 2\ell)} y^{\nu(k)+r\ell}\,. \tag{139}$$

由麦克马洪定理可知

$$\mathrm{tr}(S(y\mathfrak{b}_r(\beta))) = \det(I - y\mathfrak{b}_r(\beta))^{-1}\,. \tag{140}$$

注意，$\sum_{\ell=0}^{\infty} \ell^d y^{r\ell} = \mathrm{Li}_{-d}(y^r) \in (1-y^r)^{-d-1}\mathbb{Z}[y^r]$ 是满足以下条件的 $(-d)$ 阶多重对数

$$\operatorname*{Res}_{y=1} y^c \,\mathrm{Li}_{-d}(ty^r)\, dy = (-r)^{-1}\Big(-\frac{c+1}{r}\Big)^d t^{-\frac{c+1}{r}}\,. \tag{141}$$

由此结合（139）和（140）可得

$$\begin{aligned}
&-r \operatorname*{Res}_{y=1} \det(I - y\mathfrak{b}_r(\beta))^{-1} dy \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^N_{\geq 0}} \prod_{i=1}^{N} (-\varepsilon_i t^{-\frac{1}{2}})^{k_i} \binom{(A^t k)_i - \frac{\nu(k)+1}{r}}{k_i} (1-t)^k_i t^{-\frac{\varepsilon_i}{2}((A^t k)_i + (B^t k)_i - 2\frac{\nu(k)+1}{r})}\,.
\end{aligned} \tag{142}$$

另一方面，对除 i号股线之外的所有股线取迹，等同于对除第一股线之外的所有股线取迹（这可由相应状态和的舒尔引理得出）。由此以及 $f_{A、B、\nu、\varepsilon}(t、1)$ 的定义（见式（45）可知，对所有 $i=1、\ldots\ldots、r$，都有：

$$\begin{aligned}
&\sum_{(\ell,k)\in\mathbb{Z}^{N+1}_{\geq 0}}^{\nu_i(k)+\ell=\mathrm{const.}} \prod_{i=1}^{N} (-\varepsilon_i t^{-\frac{1}{2}})^{k_i} \binom{(A^t k)_i + \ell}{k_i} (1-t)^{k_i} t^{-\frac{\varepsilon_i}{2}((A^t k)_i + (B^t k)_i + 2\ell)} \\
&= t^{i-\frac{r-1}{2}+\frac{1}{2}\sum_i \varepsilon_i} f_{A,B,\nu,\varepsilon}(t,1)\,.
\end{aligned} \tag{143}$$

对 $i=1$、……、r 求和可知，对所有整数 $\mu_i\in\mathbb{Z}$，对于 $i=1$、……、r，以及所有$\ell\in\mathbb{Z}$，都有

$$\begin{aligned}&\sum_{k\in\mathbb{Z}^N_{\geq 0}}\prod_{i=1}^{N}(-\varepsilon_i t^{-\frac{1}{2}})^{k_i}\binom{(A^tk)_i+\ell-\sum_{j=1}^{r-1}\mu_j\nu_j(k)}{k_i}(1-t)_i^k t^{-\frac{\varepsilon_i}{2}((A^tk)_i+(B^tk)_i+2\ell-2\sum_{j=1}^{r-1}\mu_j(\nu_j(k)))}\\&=\ (1+\mu_1(t^{-1}-1)+\cdots+\mu_{r-1}(t^{1-r}-1))^{-1}\,t^{-\frac{r-1}{2}+\frac{1}{2}\sum_i\varepsilon_i}\,f_{A,B,\nu,\varepsilon}(t,1)\,,\end{aligned}\tag{144}$$

特化为 $\mu_i=1/r$ 和 $\ell=0$ 并使用（62）可得

$$\begin{aligned}-\operatorname*{Res}_{y=1}\det(I-y\mathfrak{b}_r(\beta))^{-1}dy\ &=\ (1+t+\cdots+t^{r-1})^{-1}\,t^{\frac{r-1}{2}+\frac{1}{2}\sum_i\varepsilon_i}\,f_{A,B,\nu,\varepsilon}(t,1)\\&=\ (1+t+\cdots+t^{r-1})^{-1}t^{\frac{r-1}{2}+\frac{1}{2}\sum_i\varepsilon_i}\Delta_K(t)^{-1}\\&=\ \det(I-\mathfrak{b}_r^{\mathrm{red}}(\beta))^{-1}\,.\end{aligned}\tag{145}$$

References

[1] James Alexander。《纽结与链环的拓扑不变量》。Trans. Amer. Math. Soc., 30(2):275–306, 1928.[2] Michael Atiyah。《拓扑量子场论》。Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math., (68):175–186 (1989), 1988.[3] Shubho Banerjee 和 Blake Wilkerson。《朗伯级数及相关 q-级数的渐近展开》。Int. J. Number Theory, 13(8):2097–2113, 2017.[4] Dror Bar-Natan 和 Stavros Garoufalidis。《关于 Melvin-Morton-Rozansky 猜想》。数学发明, 125(1):103–133, 1996.[5] Anna Beliakova、Irmgard B¨ uhler 和 Thang T.Q. L ̂e。《有理同调三维球面的统一量子SO(3)不变量》。数学发明, 185(1):121–174, 2011.[6] Anna Beliakova、Qi Chen 和 Thang T.Q. L ̂e。《关于 Witten-Reshetikhin-Turaev 三维流形不变量的整性》。Quantum Topol., 5(1):99–141, 2014.[7] Anna Beliakova 和 Thang T.Q. L ̂e。《量子三维流形不变量的整性与有理手术公式》。Compos. Math., 143(6):1593–1612, 2007.[8] Joan Birman 和 Tara Brendle。《辫子：综述》。载于《纽结理论手册》，第19–103页。Elsevier B. V.，阿姆斯特丹，2005年。.[9] Werner Burau。《关于辫子群与同向缠绕的链环》。Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 11(1):179–186, 1935.[10] Stavros Garoufaldis 和 Thang T.Q. L ̂e。《从三维 skein 理论到 $\mathbb{Q}$ 附近的函数》。预印本，2023年，arXiv:2307.09135，即将在 Ann. Inst. Fourier 发表。[11] Stavros Garoufalidis 和 Thang T. Q. L ̂e。《彩色琼斯函数是 q-holonomic 的》。几何与拓扑, 9:1253–1293（电子版）, 2005.[12] Stavros Garoufalidis 和 Thang T.Q. L ̂e。《从三维 skein 理论到 $\mathbb{Q}$ 附近的函数》。预印本，2023年，arXiv:2307.09135。[13] Stavros Garoufalidis、Peter Scholze、Campbell Wheeler 和 Don Zagier。《数域的 Habiro 环》。预印本，2024年，arXiv:2412.04241。[14] Stavros Garoufalidis 和 Campbell Wheeler。《Habiro上同调中的显式类》。预印本，2025年，arXiv:2505.19885。[15] Kazuo Habiro。《多项式环的分圆完备化》。Publ. Res. Inst. Math. Sci., 40(4):1127– 1146, 2004.[16] Kazuo Habiro。《整数同调球面的统一 Witten-Reshetikhin-Turaev 不变量》。数学发明, 171(1):1–81, 2008。

[17] Vaughan Jones。《辫群的 Hecke代数表示与链环多项式》。数学年刊 (2), 126(2):335–388, 1987.[18] Louis Kauffman 和 Hubert Saleur。《自由费米子与亚历山大-康威多项式》。数学物理通讯, 141(2):293–327, 1991.[19] Robion Kirby 和 Paul Melvin。《Witten 和 Reshetikhin-Turaev 的 sl(2,C) 三维流形不变量》。数学发明, 105(3):473–545, 1991.[20] George Lusztig。《量子群导论》，数学进展第110卷。Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，MA，1993年。[21] Percy MacMahon。《组合分析》。第I、II卷（合订一册）。Dover Phoenix Editions。Dover Publications, Inc.，米尼奥拉，纽约州，2004年。重印《组合分析导论》（1920年）及《组合分析》第I、II卷（1915年、1916年）。[22] Tomotada Ohtsuki。《第一贝蒂数为1的三维流形的微扰不变量》。几何与拓扑, 14(4):1993–2045, 2010.[23] J´ozef Przytycki。《三维流形的 skein 模》。波兰科学院数学通报, 39(1-2):91–100, 1991.[24] Nikolai Reshetikhin 和 Vladimir Turaev。《由量子群导出的带状图及其不变量》。数学物理通讯, 127(1):1–26, 1990.[25]Fernando Rodriguez Villegas。《箭图 A-多项式的一个精化》。预印本，2011年, arXiv:1102.5308。[26] Lev Rozansky。《通用 R-矩阵、Burau 表示与彩色琼斯多项式的 Melvin-Morton展开》。数学进展, 134(1):1–31, 1998.[27] Peter Scholze。《数域的 Habiro 环》。马克斯·普朗克数学研究所课程，2024年秋季。[28] Vladimir Turaev。《实心环面的 Conway 模与 Kauffman 模》。列宁格勒斯捷克洛夫数学研究所科学研讨会纪要（LOMI）, 167(Issled. Topol. 6):79–89, 190, 1988.[29] Edward Witten。《量子场论与琼斯多项式》。数学物理通讯, 121(3):351–399, 1989。

International Center for Mathematics, Department of Mathematics,
Southern Univer-sity of Science and Technology, Shenzhen, China
http://people.mpim-bonn.mpg.de/stavros电子邮箱: stavros@mpim-bonn.mpg.de

Institut des Hautes Etudes Scientifiques,
35 rte de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France
https://www.ihes.fr/~wheeler/电子邮箱: wheeler@ihes.fr