arXiv:2603.01627v1 [math.NT] 2 Mar 2026

关于施密特子空间理论中移动目标的一个定理

GUANHENG ZHAO，YUXI LI

摘要。近年来，作为这一领域的重要分支，带移动目标的施密特子空间理论得到了长足发展。我们延续先前工作的思路，构造了带移动目标的广义施密特子空间理论的加权版本，作为对相关结果的补充和锐化推广。

目录

1. 预备知识 1 1.1. 基数条件 2 1.2. 高度 2 1.3. 魏尔函数（局部高度函数）2 1.4. 移动超曲面/多项式 3 1.5. 移动目标族 4 1.6. 次一般位置 5 1.7. Seshadri 常数 5 2. 引言 6 3. 代数中的一个辅助结果 9 3.1. 惯性形式法 9 4. 主定理的证明 10 参考文献 14

1. 预备知识

本文采用的符号体系相对复杂。为避免歧义并确保准确理解理论框架，我们将先介绍相关定义和示例。

关键词和短语。施密特子空间定理、罗斯定理、丢番图逼近、次一般位置、移动目标、闭子概形、塞斯德常数。数学主题分类（*2020*年）：11J87, 14G40, 11J25,11J68,11D75,37P30.

1.1. 基数条件。设 k 是一个数域。记 M_k 为 k 的赋值（绝对值等价类）集合，记 M_k^∞ 为 k 的阿基米德赋值集合。对于每个 $v \in M_k$，我们选取归一化绝对值 $|\cdot|_v$，使得若 v 是阿基米德赋值，则 $|\cdot|_v = |\cdot|$ 在 $\mathbb{Q}$ 上成立（即标准绝对值）；若 v 是非阿基米德赋值且位于有理素数 p 之上，则 $|p|_v = p^{-1}$。对于每个 $v \in M_k$，记 k_v 为 k 关于 v 的完备化，并设

$$n_v := [k_v : \mathbb{Q}_v] / [k : \mathbb{Q}].$$

我们设 $\|x\|_v = |x|_v^{n_v}$。乘积公式表述如下

$$\prod_{v \in M_k} \|x\|_v = 1, \text{ for } x \in k^*$$

对于 $x = (x_0, \ldots\ldots, x_M) \in k^{M+1}$，定义

$$\|x\|_v := \max\left\{\|x_0\|_v, \ldots, \|x_M\|_v\right\}, v \in M_k.$$

1.2. 高度。我们定义射影点 $\mathbf{x} = (x_0 : \cdots : x_M) \in \mathbb{P}^M(k)$ 的绝对对数高度为

$$h(\mathbf{x}) := \sum_{v \in M_k} \log \|\mathbf{x}\|_v.$$

根据乘积公式，这与射影点 $\mathbf{x}$ 的齐次坐标 $(x_0 : \cdots : x_M)$ 的选取无关。若 $\mathbf{x} \in k^*$，则定义 $\mathbf{x}$ 的绝对对数高度为

$$h(\mathbf{x}) := \sum_{v \in M_k} \log^+ \|\mathbf{x}\|_v,$$

其中 $\log^+ a = \log \max\{1, a\}$。令 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$，对于正整数 d，设

$$\mathcal{T}_d := \left\{(i_0, \ldots, i_M) \in \mathbb{N}^{M+1} : i_0 + \cdots + i_M = d\right\}.$$

设 $Q = \sum_{I \in \mathcal{T}_d} a_I \mathbf{x}^I$ 是 $k[x_0, \ldots, x_M]$ 中次数为 d 的齐次多项式，其中 $\mathbf{x}^I = x_0^{i_0} \ldots x_M^{i_M}$ 对 $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_M)$ 以及 $I = (i_0, \ldots, i_M)$。定义 $\|Q\|_v = \max\{\|a_I\|_v ; I \in \mathcal{T}_d\}$。$Q$ 的高度定义为

$$h(Q) = \sum_{v \in M_k} \log \|Q\|_v.$$

1.3. 魏尔函数（局部高度函数）。对每个 $v \in M_k$，我们将魏尔函数 $\lambda_{Q,v}$ 定义为

$$\lambda_{Q,v}(\mathbf{x}) := \log \frac{\|\mathbf{x}\|_v^d \cdot \|Q\|_v}{\|Q(\mathbf{x})\|_v}, \mathbf{x} \in \mathbb{P}^M(k) \backslash \{Q = 0\}.$$

为了更好地理解魏尔函数的特殊性质，我们考虑一个层次更高的研究对象，即射影代数簇中的闭子概形 V（凭借其固有概念，这也适用于上述定义）。根据 [9]，它满足以下性质：若 Y 和 Z 是 V 中定义在 k 上的两个闭子概形，且 v 是 k 的一个赋值，则对于 $O(1)$，

$$\lambda_{Y \cap Z, v} = \min\{\lambda_{Y,v}, \lambda_{Z,v}\}, \lambda_{Y+Z,v} = \lambda_{Y,v} + \lambda_{Z,v}, \lambda_{Y,v} \leq \lambda_{Z,v}, \text{ if } Y \subset Z.$$

上述公式 $Y \cap Z$、 $Y + Z$、 $Y \subset Z$ 是根据相关的理想层定义的。此外，对于 c_1, ..., c_r 为正整数的情形，通常有：若 Y_1, ..., Y_r 是 V 中的闭子概形，则

$$\lambda_{c_1Y_1\cap\ldots\cap c_rY_r,v} = \min\{c_1\lambda_{Y_1,v}, \ldots, c_r\lambda_{Y_r,v}\}, \tag{1}$$

$$\lambda_{c_1Y_1+\cdots+c_rY_r,v} = c_1\lambda_{Y_1,v} + \cdots + c_r\lambda_{Y_r,v}. \tag{2}$$

若 $\phi\colon W \to V$是射影簇之间的态射，且 $\phi(W) \not\subset Y$，那么除去$O(1)$之外，

$$\lambda_{Y,v}(\phi(P)) = \lambda_{\phi^*Y,v}(P),$$
$$\forall P \in W(k) \setminus \phi^*Y.$$

特别需要注意的是，若 Y与理想层 $\mathcal{I}_Y$相关联，则ϕ^*Y表示对应于逆像理想层 $\phi^{-1}\mathcal{I}_Y \cdot \mathcal{O}_W$的闭子概形。处理移动目标 $D(\alpha)$时，我们写作 $\lambda_{D(\alpha),\,v}(\mathbf{x}(\alpha))$，并约定这一定义在代表元有效的地方成立。

1.4. 移动超曲面/多项式。 在 $\mathbb{P}^M(k)$ 中，一个由 Λ （无穷指标集）标记、次数为 d 的移动超曲面 D 是一族超曲面 $\{D(\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$，它们分别由 $k[x_0, \ldots, x_M]$ 中的齐次多项式 $\{Q(\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的零点定义。于是，我们可以写作

$$Q = \sum_{I\in\mathcal{T}_d} a_I x^I,$$

它可称为移动齐次多项式，其中 a_I 是从 Λ 到 k 的函数，且没有公共零点。

考虑一个无限指标集 Λ；一组 $\mathcal{Q} := \{D_1, \ldots, D_q\}$ 个 $\mathbb{P}^M(k)$ 中的移动超曲面，以 Λ 为指标，分别由 $k[x_0, \ldots, x_M]$ 中的移动齐次多项式 $\{Q_1, \ldots, Q_q\}$ 的零点定义；以及由齐次理想 $\mathcal{I}(V)$ 生成的一个维数为 n 的任意射影簇 $V \subset \mathbb{P}^M(k)$。记为

$$Q_j = \sum_{I\in\mathcal{T}_{d_j}} a_{j,I}x^I (j = 1, \ldots, q), \text{ where } d_j = \deg Q_j.$$

上述设定在后续内容中均假定成立。现在给出若干关键术语的定义：

定义 1.1（凝聚）。 子集 $A \subseteq \Lambda$ 关于 $\mathcal{Q}$ 是凝聚的，若对于每个多项式

$$P \in k[\{x_{j,I}\}_{j=1,\ldots,q;I\in\mathcal{T}_{d_j}}]$$

该多项式关于变量 $x_{j,\,1}$, ..., $x_{j,\,M_{d_j}}$ 是齐次的。对于每个 j，要么 $P(a_{1,\,I_{1,\,1}}(\alpha)\ldots) = 0$ 对除有限多个 $\alpha \in A$ 之外的所有情形成立，要么仅对有限多个 $\alpha \in A$ 成立。

由 [19, 命题 2.3], 可知，存在一个无穷凝聚子集 $A \subseteq \Lambda$。对于这样的 A，对每个 j 固定一个指标 $I_j \in \mathcal{T}_{d_j}$，使得 $a_{j,\,I_j} \not\equiv 0$ 在 A 上。则环

$$\mathcal{R}^0_{A,\mathcal{Q}} := \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b : A \to k,\ b(\alpha) \neq 0 \text{ for a.e. } \alpha \right\}$$

包含比值 $a_{j,\,I}/a_{j,\,I_j}$。由这些比值在 k 上生成的子环的分式域记为 $\mathcal{R}_{A,\,\mathcal{Q}}$。

定义 1.2（特殊代表元）。对于 $f \in \mathcal{R}_{A,\ \mathcal{Q}}$，特殊代表元是一个映射

$$\widehat{f} : \{\alpha \in A : b(\alpha) \neq 0\} \to k$$

对于某个表达式 $f = a/b$。对于多项式 $Q = \sum a_I x^I \in \mathcal{R}_{A,\mathcal{Q}}[x_0, \ldots, x_M]$，$\widehat{\ }$按系数定义一个特殊代表元 Q。若所有系数代表元均在 α 处有定义，则该代表元在 α 处也有定义。

定义 1.3（V-代数非退化）. 若点序列 $x = [x_0 : \cdots : x_M] : \Lambda \to V$关于 $\mathcal{Q}$ 是 V-代数非退化的，是指对于关于 $\mathcal{Q}$ 的每个无穷凝聚子集 $A \subset \Lambda$，都不存在齐次多项式 $Q \in \mathcal{R}_{A,\mathcal{Q}}[x_0, \ldots, x_M] \setminus \mathcal{I}_{A,\mathcal{Q}}(V)$，使得

$$\widehat{Q}(\alpha)\,(x_0(\alpha), \ldots, x_M(\alpha)) = 0$$

$\widehat{\ }$对于除有限多个 $\alpha \in A$ 之外的所有 $\alpha \in A$，存在 Q 的某个（因而也是所有）代表元 Q，其中$\mathcal{I}_{A,\mathcal{Q}}(V)$ 是 $\mathcal{R}_{A,\mathcal{Q}}[x_0, \ldots, x_M]$ 中由 $\mathcal{I}(V)$ 生成的理想。

注 1.4. 对于每个固定的 $\alpha \in \Lambda$, $D(\alpha) = \mathrm{Proj}(k[x]/(Q(\alpha)))$，它是 $\mathbb{P}^M$ 的一个经典闭子概形。根据标准《代数几何》 [8]，有限个这样的超曲面的交集仍是一个闭子概形。

根据上述定义和结论，我们可以构造如下概念：

1.5. **移动目标族**。设 $A \subset \Lambda$ 是一个无限子集，并用 (A, a) 表示每个集合论映射 $a : A \to k$。用 $\mathcal{R}_A^0$ 表示由有序对 (C, a) 的等价类组成的集合，其中 $C \subset A$ 是一个补集有限的子集，且 $a : C \to k$ 是一个映射。我们可以定义如下等价关系：若存在 $C \subset C_1 \cap C_2$，使得C 在 A 中补集有限，且 $a_1|_C = a_2|_C$，则有 $(C_1, a_1) \sim (C_2, a_2)$。

设 $\mathbf{x} : \Lambda \to V \subset P^M(k)$ 是一个映射。映射 $(C, a) \in \mathcal{R}_A^0$ 关于$\mathbf{x}$ 称为小映射，当且仅当

$$h(a(\alpha)) = o(h(\mathbf{x}(\alpha))),$$

对于每个 $\epsilon > 0$，存在一个补集有限的子集 $C_\epsilon \subset C$，使得对所有 $\alpha \in C_\epsilon$，都有 $h(a(\alpha)) \leq \epsilon h(\mathbf{x}(\alpha))$。用 $\mathcal{K}_{\mathbf{x}}$ 表示所有这类小映射构成的集合。那么， $\mathcal{K}_{\mathbf{x}}$ 是 $\mathcal{R}_A^0$ 的子环。然而，它并非一个完整的环；若 $(C, a) \in \mathcal{K}_x$ 且对于除有限多个 $\alpha \in C$ 之外的所有 $\alpha \in C$， $a(\alpha) \neq 0$，则有 $\left(C \setminus \{\alpha : a(\alpha) = 0\}, \frac{1}{a}\right) \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}}$。用 $\overline{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}$ 表示在 Λ 的某个有限子集之外定义于 Λ 上的所有正函数 g 构成的集合，使得

$$\log^+(g(\alpha)) = o(h(\mathbf{x}(\alpha)))$$

那么 $\mathcal{C}_{\mathbf{x}}$ 是一个环。

此外，若 $(C, a) \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}}$，则对每个 $v \in M_k$，由 $\alpha \mapsto \|a(\alpha)\|_v$ 定义的函数 $\|a\|_v : C \to \mathbb{R}^+$属于 $\mathcal{C}_{\mathbf{x}}$。此外，若 $(C, a) \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}}$，且对除有限多个 $\alpha \in C$ 之外的所有情形都有 $a(\alpha) \neq 0$，则函数

$$g : \{\alpha \mid a(\alpha) \neq 0\} \mapsto \frac{1}{\|a(\alpha)\|_v}$$

也属于 $\mathcal{C}_{\mathbf{x}}$。我们还有以下引理（参见 [21]）：

引理 1.5. 设 $A \subset \Lambda$ 关于 $\mathcal{Q}$凝聚，并假设它们处于一般位置。那么，对每个满足 $\sharp J = n+1$的 $J \subset \{1,\dots,q\}$，都存在函数$\gamma_{1,\ v}$、$\gamma_{2,\ v} \in \mathcal{C}_{\mathbf{x}}$ 使得

$$\gamma_{2,v}(\alpha)\|\mathbf{x}(\alpha)\|_v^d \le \max_{j\in J}\|Q_j(\alpha)(\mathbf{x}(\alpha))\|_v \le \gamma_{1,v}(\alpha)\|\mathbf{x}(\alpha)\|_v^d$$

对有限子集之外的所有 $\alpha \in A$ 以及所有 $v \in S$。

1.6. 次一般位置。 现在我们给出超曲面位置关系的定义:

定义 1.6. 设 V 是定义在数域 k 上的射影簇，并设 $D_1(\alpha)\dots,D_q(\alpha)$为 $V.$的 q 个移动超曲面。设 m 与 κ 为正整数，满足 $m \ge \dim V \ge \kappa.$

超曲面 $\{D_1(\alpha)\dots,D_q(\alpha)\}$ 称为关于 V处于 m-次一般位置，如果对任意满足 $\sharp I \le m+1$,的子集 $I \subset \{1,\dots,q\}$

$$\operatorname{codim}\left(\bigcap_{i\in I} D_i(\alpha)\cap V\right) \ge \dim V - (m-\sharp I).$$

对所有除有限多个 $\alpha \in \Lambda$之外的情况。如果加上指标为 κ的条件，则还应受到.....的约束

$$\operatorname{codim}\left(\bigcap_{i\in I} D_i(\alpha)\cap V\right) \ge \sharp I$$

对满足 $\sharp I \le \kappa$的每个有限指标集。

1.7. 塞沙德里常数。 设 V 为一个射影簇， Y 为 V中的一个闭子概形， 对应于一个相干理想层 $\mathcal{I}_Y.$ 。考虑分次代数层 $\mathcal{S} = \oplus_{d\ge 0}\mathcal{I}_Y^d$，其中 $\mathcal{I}_Y^d$ 是 $\mathcal{I}_Y$的 d次幂，且按约定 $\mathcal{I}_Y^0 = \mathcal{O}_V$ 由˜给出。则 $V{:=}\operatorname{Proj}\mathcal{S}$ 称为相对于 $\mathcal{I}_Y$的 V的爆破， 换言之，即沿着 Y.对 V 进行爆破

˜设 $\pi\colon V \to V$是沿着 Y对 V进行的爆破。已知逆像理想层 $\tilde{\mathcal{I}}_Y = \pi^{-1}\mathcal{I}_Y\cdot\mathcal{O}_{\tilde V}$ 是 $\tilde V$上的一个可逆层。

现在我们有如下概念:

˜**定义 1.7.** 设 $\pi\colon V \to V$是 V沿 Y的爆破。设 A 是 V上的数值有效卡蒂埃除子。 Y关于 A 的塞沙德里常数 $\epsilon_{Y,A}$ 是由下式定义的实数

$$\epsilon_{Y,A} = \sup\{\gamma \in \mathbb{Q}^{\ge 0} \mid \pi^*A - \gamma E \text{ is } \mathbb{Q}\text{-nef}\},$$

˜其中 E 是 V上的有效卡蒂埃除子，其相伴可逆层是 $\pi^{-1}\mathcal{I}_Y\cdot\mathcal{O}_{\tilde V}$的对偶。

注 1.8. 容易验证，当 Y是次数为 d的超曲面时，我们有

$$\epsilon_{Y,A} = \frac{1}{d} \in \mathbb{Q}$$

与 A相关联，其中 A 是一个超平面。

2. 引言

自20世纪90年代末和21世纪初以来，关于固定超曲面和除子的 Schmidt 子空间理论发展迅速（[4], [7], [18] 是先驱）。

1997年，Ru-Vojta [19] 基于工作 [17]，针对射影空间中移动超平面的情形建立了如下Schmidt 子空间定理。这为移动目标领域随后的发展奠定了坚实基础。

定理 *2.1.* 设 k 为一个数域， $S \subset M_k$ 为一个包含所有阿基米德赋值的有限集。设 Λ 为一个无穷指标集， $\mathcal{H} := \{H_1, \ldots, H_q\}$ 为 $\mathbb{P}^M(k)$中由 Λ标号的一组移动超平面。设 $x = [x_0 : \cdots : x_M] : \Lambda \to \mathbb{P}^M(k)$ 为一列点。假设 *(i)* x 关于 $\mathcal{H}$是线性非退化的，这意味着，对每个关于$\mathcal{H}$的无穷凝聚子集 $A \subset \Lambda$， $x_0|_A$，$\ldots$， $x_M|_A$ 在$\mathcal{R}_A$上线性无关，$\mathcal{H}$，*(ii)* 对所有 $\alpha \in \Lambda$ 以及 $j = 1$，$\ldots$， q，有 $h(H_j(\alpha)) = o(h(x(\alpha)))$。

那么，对于任意 $\epsilon > 0$，都存在一个无限指标子集 $A \subset \Lambda$，使得

$$\log \prod_{v \in S} \max_{K} \prod_{J \in K} \left(\frac{\|\mathbf{x}(\alpha)\|_v \|H_j(\alpha)\|_v}{\|H_j(\alpha)(\mathbf{x}(\alpha))\|_v} \right) \leq (M + 1 + \epsilon) h(\mathbf{x}(\alpha))$$

对所有 $\alpha \in A$均成立。这里，最大值取遍$\{1, \ldots, q\}$的所有子集 K 、$\sharp K = M + 1$，使得对于每个 $\alpha \in \Lambda$， $H_j(\alpha)$ $j \in K$在 k上都线性无关。

在 Dethloff-Tan [5], 的方法基础上，该结果被推广到射影空间中的移动超曲面。随后，Dethloff-Tan [6]于 2019年将 Ru 的结果 [18] 进一步推广到了移动目标情形。

2018 年，Quang [14] 建立了次一般位置移动超曲面的施密特子空间定理。次年，Xie-Cao [22] 得到了带指标的次一般位置移动超曲面的第二主定理。2020年，Cao 和 Thin [2]证明了带指标 κ的 m-次一般位置移动超曲面的 Schmidt 子空间定理，陈述如下:

定理 2.2. 设 k 为一个数域，并设 $S \subset M_k$ 为一个包含所有阿基米德赋值的有限集。设$\mathbf{x} = [x_0 : \cdots : x_M] : \Lambda \to V$为一列点。假设 *(i)* $\mathcal{Q}$ 处于 m-严格次一般位置，其指标为 κ于 V，且$\mathbf{x}$关于 $\mathcal{Q}$是$V-$ 代数非退化的；*(ii)* $h(D_j(\alpha)) = o(h(\mathbf{x}(\alpha)))$ 对所有 $\alpha \in \Lambda$ 以及 $j = 1$，……， q成立。则对任意 $\epsilon > 0$，存在一个无限指标子集 $A \subset \Lambda$，使得

$$\log \prod_{v \in S} \prod_{j=1}^{q} \left(\frac{\|\mathbf{x}(\alpha)\|_v^{d_j} \|D_j(\alpha)\|_v}{\|D_j(\alpha)(\mathbf{x}(\alpha))\|_v} \right)^{\frac{1}{d_j}}$$

$$\leq \left(\left(\frac{m-n}{\max\{1, \min\{m-n, \kappa\}\}} + 1 \right) (n+1) + \epsilon \right) h(\mathbf{x}(\alpha))$$

对所有 $\alpha \in$ 成立A

众所周知，奈望林纳理论与丢番图逼近密切相关，Osgood 和 Vojta 的研究成果便证明了这一点。特别是，Vojta 建立了一套对应表，将这两种理论中的

基本概念联系起来。根据这套对应表，子空间定理及其在丢番图逼近中向移动目标问题的推广，对应于奈望林纳理论中的第二主定理。作为奈望林纳理论中最新的精确估计，Quang 研究了亚纯映射 [16], 的一个更一般的情形，其中考虑了任意族超曲面的情形，而不要求它们处于次一般位置。这一情形包含分配常数的概念。在 [3], 中，作者将这一概念调整到施密特子空间理论中的移动目标情形，即-$\Delta_{\mathcal{Q},\ V}$子簇 $V \subset \mathbb{P}^M(k)$ 中的 $\mathbb{P}^M(k)$ 的移动超曲面族 $\mathcal{Q} = \{D_i\}_{i=1}^q$，其中 $V \not\subset \operatorname{supp} D_i (i = 1, \ldots, q)$，定义如下:

$$\Delta_{\mathcal{Q},V} := \max_{\Gamma \subset \{1,\ldots,q\}, \alpha \in A} \frac{\sharp \Gamma}{\operatorname{codim}\left(\bigcap_{j\in\Gamma} D_j(\alpha)\right) \cap V}.$$

对于 Λ 的某个无限指标子集 A 。

定理 *2.3.* 设 k 为一个数域， S 为 k 的有限个赋值处，且 V 是 $\mathbb{P}^M(k)$ 中维数为 n 的不可约射影子簇。设 $\mathcal{Q} :=\{D_1, \ldots, D_q\}$ 是 $\mathbb{P}^M(k)$ 中以 Λ 为指标的一组移动超曲面，其分配常数为 $\bar{\Delta}_{\mathcal{Q},\ V}$ 属于 $V(k)$。假设 $h(D_i(\alpha)) = o(h(\mathbf{x}(\alpha)))$, 其中 $\mathbf{x} = [x_0 : \cdots : x_M] : \Lambda \to V$(一组点)，我们还假设 $\mathbf{x}$ 在 $\mathcal{Q}$ 上非退化。那么对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个无限指标子集 $A \subset \Lambda$，使得

$$\log \prod_{v\in S} \prod_{i=1}^{q} \left(\frac{\|\mathbf{x}(\alpha)\|_v^{d_i} \cdot \|D_i(\alpha)\|_v}{\|D_i(\mathbf{x}(\alpha))\|_v} \right)^{\frac{1}{d_i}} \leq (\Delta_{\mathcal{Q},V}(n+1) + \epsilon)\, h(\mathbf{x}(\alpha))$$

对所有 $\alpha \in A$ 和所有 $v \in S$ 均成立。其中 余维 $\varnothing = \infty$。

根据 [10], 领域的最新研究成果与进展，作者在考虑固定闭子概形的权重（其中也包含超曲面的定义）的情况下，构造了以下重要不等式:

引理2.4. （[10], 引理*3.1*的对数形式改写）设 $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n$为非负实数指标集。令 i_0 为满足 $c_i \neq 0$ 的最小指标 i （假设至少存在一个满足条件的指标），则

$$\log \prod_{i=1}^{n} \Delta_i^{b_i} \geq \log \prod_{i=1}^{n} \Delta_i^{\left(\min_{i_0 \leq j \leq n} \frac{\sum_{i=1}^{j} b_i}{\sum_{i=1}^{j} c_i}\right) c_i}.$$

推论2.5. 设 $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n$ 为非负实数指标集。假设 $b_1 \neq 0$。则

$$\log \prod_{i=1}^{n} \Delta_i^{\left(\max_{1 \leq j \leq n} \frac{\sum_{i=1}^{j} c_i}{\sum_{i=1}^{j} b_i}\right) b_i} \geq \log \prod_{i=1}^{n} \Delta_i^{c_i}.$$

他们还特别关注与闭子概形交集相对应的魏尔函数的特殊性质，由此得到如下公式形式的定理:

定理 2.6 ([10], 定理 1.2，改写为次数为 d_i 的超曲面形式。设 V 是定义在数域 k 上、维数为 n 的射影簇，且令 S 为 k 的有限个赋值处。对于每个 $v \in S$，令 $D_1, \ldots, D_q$ 为超曲面

定义在 k 上的 V，并令 c_1，…，c_q 为非负实数。对于闭子集 $W \subset V$ 和 $v \in S$，令

$$\alpha_v(W) = \sum_{\substack{i \\ W \subset \operatorname{Supp} D_i}} c_i.$$

那么存在一个真扎里斯基闭子集 Z *of* V *and* $\epsilon > 0$，使得

$$\log \prod_{v\in S}\prod_{i=1}^{q}\left(\frac{\|\mathbf{x}\|_v^{d_i}\|D_i\|_v}{\|D_i(\mathbf{x})\|_v}\right)^{c_i\cdot\frac{1}{d_i}} \leq \left((n+1)\max_{\substack{v\in S\\ \varnothing\subsetneq W\subsetneq X}}\frac{\alpha_v(W)}{\operatorname{codim} W}+\epsilon\right)h(\mathbf{x})$$

对所有点 $\mathbf{x} \in V(k) \setminus Z$。

这为下面的主要结果提供了见解和启发；我们将其推广到了权重各异的移动目标情形：

定理 *2.7.* 设 k 为一个数域， S 为 k 的有限个赋值处，并设V 为 $\mathbb{P}^M$*(k)*中的一个维数为 n的不可约射影子簇。设 $\mathcal{Q}$ *:=*$\{D_1, \ldots, D_q\}$ 为 $\mathbb{P}^M$*(k)*中的一组移动超曲面，以 Λ为指标。假设 h*(*D_i*(*α*))* $= o($*h(***x***(*α*))*，其中 ***x*** $= [x_0 : \cdots : x_M] : \Lambda \to V$*(*一组点*)*，我们还假设 ***x*** 在 $\mathcal{Q}$上非退化。那么对每个 $\epsilon > 0$，并设 c_1、……、 c_q 为非负实数，存在一个无限指标子集$A \subset \Lambda$ ，使得

$$\log \prod_{v\in S}\prod_{i=1}^{q}\left(\frac{\|\mathbf{x}(\alpha)\|_v^{d_i}\|D_i(\alpha)\|_v}{\|D_i(\alpha)(\mathbf{x}(\alpha))\|_v}\right)^{c_i\cdot\frac{1}{d_i}} \leq \left((n+1)\max_{\substack{v\in S\\ \varnothing\subsetneq W\subsetneq X}}\frac{\alpha_v(W)}{\operatorname{codim} W}+\epsilon\right)h(\mathbf{x}(\alpha))$$

对所有 $\alpha \in A$，除有限多个外均成立。其中

$$\alpha_v(W) = \sum_{\substack{i \\ W \subset \operatorname{Supp} D_i(\alpha)}} c_i.$$

具有闭子集 $W \subset X$ 和 $v \in S$，余维 $\varnothing = \infty$。

与定理 2.3 相比，在假设 $c_i = 1$ 对所有 i 均成立的情况下，根据定义以及一个直接的观察：在对 W 取最大值时，只需考虑 W 是 $\mathcal{Q}$ 的若干超曲面的交集的情形，我们有

注 2.8。（恢复 [3] 中的结果）

$$\Delta_{\mathcal{Q},V} = \max_{\Gamma\subset\{1,\ldots,q\},\alpha\in A}\frac{\sharp\Gamma}{\operatorname{codim}\left(\bigcap_{j\in\Gamma}D_j(\alpha)\right)\cap V} = \max\left\{1, \max_{\varnothing\subsetneq W\subsetneq X}\frac{\alpha_v(W)}{\operatorname{codim} W}\right\}.$$

对于 Λ 的某个无限指标子集 A 。

注 2.8 中等式的证明：当 $c_i = 1$对所有 i成立时，等式 α_v*(*W*)* $= \sharp\{i : W \subset$设 D_i*(*α*)*$\}$表示包含 W的超曲面的数量。对于 $W = \bigcap_{j\in\Gamma} D_j(\alpha) \cap V$，由于所有满足 $j \in \Gamma$ 的 D_j*(*α*)*都包含 W，因此有 α_v*(*W*)* $\geq \sharp\Gamma$。反过来，任何包含 W 的超曲面 D_i*(*α*)*都必须满足$W \subset D_i$*(*α*)*，因此当 W 恰好是某个子集 Γ中超曲面的交集时，最大值即可达到。最大值中的因子 1 用于涵盖不存在真交结构能给出更大值的情形。

因此，如 [10], 中所述，我们可以得到一个不仅是尖锐的、而且在某些情况下也是最优的因子，尤其是在存在特定交集时。当不同超曲面对逼近误差的贡献不对称时，这种灵活性至关重要；而移动目标框架此前尚未处理这种情形。

3. 代数中的一个辅助结果

3.1. 惯性形式法。以下是我们方法的基础。设 $V \subseteq \mathbb{P}^M$ 是一个由齐次理想 $\mathcal{I}(V) \subseteq k[x_0, \ldots, x_M]$ 定义的、维数为 n 的不可约射影簇。

对于正整数 N，令

$$H_V(N) = \dim_k k[x_0, \ldots, x_M]_N / \mathcal{I}(V)_N$$

为 V 的希尔伯特函数。对于 $N \gg 0$, $H_V(N)$ 是关于 N 的次数为 n 的多项式。

下述定理在经典情形下由扎里斯基提出，后来由 Son-Tan-Thin 将其推广至移动超曲面。

定理 3.1 (惯性形式定理**)。**设 D_1、...、D_n 是 $\mathbb{P}^M$ 中次数分别为 d_1、...、d_n 的超曲面，由多项式 Q_1、...、Q_n 定义。设 $V \subseteq \mathbb{P}^M$ 是一个维数为 n 的不可约簇，且 次数$V = \Delta$。设 N 是一个能被所有 d_i 整除且充分大的正整数。

那么存在齐次多项式

$$\phi_1, \ldots, \phi_{H_V(N)} \in k[x_0, \ldots, x_M]_N$$

其剩余类构成 $k[x]_N/\mathcal{I}(V)_N$ 的一组基，使得

$$\prod_{\ell=1}^{H_V(N)} \phi_\ell \equiv (Q_1 \cdots Q_n)^{\frac{\Delta N^{n+1}}{d_1 \cdots d_n (n+1)!} - u(N)} \cdot P \pmod{\mathcal{I}(V)_N} \tag{3}$$

其中:

- $u(N) = O(N^n)$ 是一个误差项;
- P 是一个次数为 $\frac{\Delta N^{n+1}}{(n+1)!} + O(N^n)$ 的齐次多项式;
- 该同余表示差属于 $\mathcal{I}(V)_N$。

注 3.2。（3）中的指数经过选取，使等式两边的次数相同，因此有

$$N \cdot H_V(N) - \frac{n \cdot \Delta \cdot N^{n+1}}{(n+1)!} + u(N) = \frac{\Delta \cdot N^{n+1}}{(n+1)!} + O\left(N^n\right),$$

and

$$\begin{aligned} H_V(N) &:= \dim_k \frac{k\left[x_0, \ldots, x_M\right]_N}{\mathcal{I}(V)_N} \\ &= \dim_{\bar{k}} \frac{\bar{k}\left[x_0, \ldots, x_M\right]_N}{\mathcal{I}(V(\bar{k}))_N} = \Delta \cdot \frac{N^n}{n!} + O\left(N^{n-1}\right). \end{aligned}$$

4. 主定理的证明

证明分几个步骤进行。关键的创新之处在于使用惯性形式法构造辅助映射 F，然后对其应用施密特移动超平面子空间定理，使其与滤过不等式相吻合。

定理 2.7 的证明。根据定义 1.1，选取一个无穷凝聚子集 $A \subseteq \Lambda$。对于每个 $j = 1, \ldots, q$，固定一个指标 $I_j \in \mathcal{T}_{d_j}$，使得 $a_{j,I_j}(\alpha) \neq 0$ 在 A上。定义归一化系数和归一化多项式：

$$\tilde{a}_{j,I} := \frac{a_{j,I}}{a_{j,I_j}} \in \mathcal{R}_{A,\mathcal{Q}}, \qquad \tilde{Q}_j := \sum_{I \in \mathcal{T}_{d_j}} \tilde{a}_{j,I} x^I \in \mathcal{R}_{A,\mathcal{Q}}[x_0, \ldots, x_M].$$

容易验证，

$$\log \frac{\|\mathbf{x}\|_v^d \, \|Q_i\|_v}{\|Q_i(\mathbf{x})\|_v} = \log \frac{\|\mathbf{x}\|_v^d \|\tilde{Q}_i\|_v}{\|\tilde{Q}_i(\mathbf{x})\|_v}.$$

注意，$\tilde{Q}_j$ 至少有一个系数等于 1（即 x^{I_j}的系数）。由 $Q_j(\alpha)$定义的移动超曲面 $D_j(\alpha)$ 的˜ ˜魏尔函数对每个 j满足：

$$\lambda_{\tilde{Q}_j(\alpha),v}(\mathbf{x}(\alpha)) = \lambda_{\tilde{D}_j(\alpha),v}(\mathbf{x}(\alpha)) = \log \frac{\|\mathbf{x}(\alpha)\|_v^{d_j} \|\tilde{Q}_j(\alpha)\|_v}{\|\tilde{Q}_j(\alpha)(\mathbf{x}(\alpha))\|_v} + O(1), \tag{4}$$

其中 $O(1)$ 项仅取决于 v 和 I_j的选取，而与 α无关。

对于每个 $v \in S$和 $\alpha \in A$，将指标 $\{1, \ldots, q\}$ 排列为 $\{i_1(v, \alpha) \ldots, i_q(v, \alpha)\}$，使得

$$\lambda_{\tilde{Q}_{i_1(v,\alpha)}(\alpha),v}(\mathbf{x}(\alpha)) \geq \lambda_{\tilde{Q}_{i_2(v,\alpha)}(\alpha),v}(\mathbf{x}(\alpha)) \geq \cdots \geq \lambda_{\tilde{Q}_{i_q(v,\alpha)}(\alpha),v}(\mathbf{x}(\alpha)) \geq 0.$$

为了得到我们的结果，我们需要构造以下归一化超曲面的交集，令

$$\tilde{D}_{I_{(v,\alpha)}}(\alpha) = \bigcap_{i \in I} \tilde{D}_{i(v,\alpha)}(\alpha)$$

因此我们有

$$\lambda_{\tilde{Q}_{i_j(v,\alpha)}(\alpha),v}(\mathbf{x}(\alpha)) = \min_{j' \leq j} \lambda_{\tilde{Q}_{i_{j'}(v,\alpha)}(\alpha),v}(\mathbf{x}(\alpha)) = \lambda_{\tilde{Q}_{I_j(v,\alpha)}(\alpha),v}(\mathbf{x}(\alpha)).$$

令 $I_{j(v,\alpha)} = \{i_1(v, \alpha) \ldots, i_j(v, \alpha)\}$。设 $l_v(\alpha)$ 为满足下列条件的最大指标

$$\bigcap_{j=1}^{l_v(\alpha)} \tilde{D}_{i_j(v,\alpha)}(\alpha) \cap V(\bar{k}) \neq \varnothing.$$

特别地，对于 $j > l_v(\alpha)$，$\lambda_{\tilde{Q}_{i_j(v,\alpha)(\alpha)}}(\mathbf{x}(\alpha))$ 有一个与$\mathbf{x}(\alpha)$ 无关的常数上界，令 $d_i = d_{i(v,\alpha)}$，我们有

$$\sum_{v \in S} \sum_{i=1}^{q} \frac{\lambda^{c_i}_{\tilde{Q}_i(\alpha),v}(\mathbf{x}(\alpha))}{d_i} \leq \sum_{v \in S} \sum_{j=1}^{l_v(\alpha)} \frac{\lambda^{c_{i_j(v,\alpha)}}_{\tilde{Q}_{I_j(v,\alpha)}(\alpha)}(\mathbf{x}(\alpha))}{d_{i_j}}.$$

对于每个 $v \in S$ 和 $\alpha \in A$，定义初始段交的 余维函数：

$$b_{j(v,\alpha)} := \min\left\{\operatorname{codim}\left(\bigcap_{s=1}^{j} \tilde{D}_{i_s(v,\alpha)}(\alpha) \cap V\right), n\right\}, \quad b_{0(v,\alpha)} := 0.$$

应用加权过滤不等式（引理2.4）：

- $\Delta_j = \exp\left(\frac{1}{d_{i_j}} \lambda_{\tilde{Q}_{i_j(v,\alpha)}(\alpha),v}(\mathbf{x}(\alpha))\right)$ for $j = 1, \ldots, q$;
- $b_1 = b_{1(v,\alpha)} - b_{0(v,\alpha)}, \cdots, b_{l_v(\alpha)} = b_{l_v(\alpha)(v,\alpha)} - b_{l_v(\alpha)-1(v,\alpha)}$
- $c_j = c_{i_j(v,\alpha)}$.

利用 b_i 的望远镜性质以及超曲面的塞沙德里常数性质，我们有

$$\sum_{v\in S}\left(\max_j \frac{\sum_{j'=1}^{j} c_{i_{j'}(v,\alpha)}}{b_{j(v,\alpha)}}\right)\sum_{s=1}^{l_v(\alpha)}(b_{s(v,\alpha)} - b_{s-1(v,\alpha)})\frac{\lambda_{\tilde{Q}_{I_s(v,\alpha)}}(\mathbf{x}(\alpha))}{d_{I_s}} \tag{5}$$

$$\geq \sum_{v\in S}\sum_{j=1}^{l_v(\alpha)} \frac{\lambda^{c_{i_j(v,\alpha)}}_{\tilde{Q}_{I_j(v,\alpha)}(\alpha)}(\mathbf{x}(\alpha))}{d_{i_j}}.$$

关键的观察是，我们可以构造一个新的列表，使得 $Q_{I_s(v,\alpha)}$ 相对于 V处于一般位置。（其中 $Q_{I_s(v,\alpha)}$ 重复 $b_{s(v,\alpha)} - b_{s-1(v,\alpha)}$ 次，并在 $b_{s(v,\alpha)} - b_{s-1(v,\alpha)} = 0$时省略，见 [10]）

将上述指标集设为 $\{1, \ldots, k\}$，对于每个 $v \in S$和 $\alpha \in A$，都存在一个子集

$$J(v,\alpha) = \{j_1(v,\alpha), \ldots, j_n(v,\alpha)\} \subset \{1, \ldots, k\}$$

使得

$$0 < ||\tilde{Q}_{j_1(v,\alpha)}(\alpha)(\mathbf{x}(\alpha))||_v \leq \ldots \leq ||\tilde{Q}_{j_n(v,\alpha)}(\alpha)(\mathbf{x}(\alpha))||_v \leq \min_{j\notin\{j_1(v,\alpha),\ldots,j_n(v,\alpha)\}} ||\tilde{Q}_j(\alpha)(\mathbf{x}(\alpha))||_v.$$

由引理 1.5 可得

$$\begin{aligned}
&\log\prod_{j=1}^{k}||\tilde{Q}_j(\alpha)(\mathbf{x}(\alpha))||_v \\
&= \log\prod_{\beta_j\notin J(v,\alpha)}||\tilde{Q}_{\beta_j}(\alpha)(\mathbf{x}(\alpha))||_v + \log\prod_{t=1}^{n}||\tilde{Q}_{j_t(v,\alpha)}(\alpha)(\mathbf{x}(\alpha))||_v \\
&\geq (k-n)d\log||\mathbf{x}(\alpha)||_v - \log\widetilde{h}_v(\mathbf{x}(\alpha)) + \log\prod_{t=1}^{n}||\tilde{Q}_{j_t(v,\alpha)}(\alpha)(\mathbf{x}(\alpha))||_v,
\end{aligned}$$

其中 $h_v = \prod(1+h_\mu)$，h_μ 遍历所有 $\gamma_{2,v}$ 的选择，因此 $h_v \in \mathcal{C}_x$.

现在我们通过惯性形式构造辅助映射 F（我们上述的排序不会影响后续的构造和结果）：

固定一个被所有 d_j 整除的 $N \gg 0$。考虑相对坐标环：

$$R_N := \mathcal{R}_{A,\mathcal{Q}}[x_0, \ldots, x_M]_N / \mathcal{I}_{A,\mathcal{Q}}(V)_N.$$

设 $H_V(N) = \text{维}_{\mathcal{R}_A, \mathcal{Q}} R_N$。

对于每一种 n 指标 $J(v,\alpha) = \{j_1(v,\alpha)\dots, j_n(v,\alpha)\}$的选取，将定理 ~ ~3.1应用于归一化多项式 $Q_{j_1(v,\alpha)} \cdots, Q_{j_n(v,\alpha)}$。存在:

- A basis $\phi_1^{J(v,\alpha)}, \dots, \phi_{H_V(N)}^{J(v,\alpha)}$ of R_N;
- A polynomial $P_{J(v,\alpha)}$ of degree $\frac{(\deg V)N^{n+1}}{(n+1)!} + O(N^n)$;

使得对于所有 $\mathbf{x}(\alpha) \in V(k)$:
(6)

$$\prod_{\ell=1}^{H_V(N)} \phi_\ell^{J(v,\alpha)}(\alpha)(\mathbf{x}(\alpha)) = \left(\prod_{t=1}^{n} \tilde{Q}_{j_t(v,\alpha)}(\alpha)(\mathbf{x}(\alpha))\right)^{\frac{(\deg V)N^{n+1}}{d(n+1)!} - u(N)} \cdot P_{J(v,\alpha)}(\alpha)(\mathbf{x}(\alpha))$$

其中 $d = d_{j_1} \cdots d_{j_n}$且 $u(N) = O(N^n)$。

现在固定 R_N 的任意一组基 $\Phi_1, \dots, \Phi_{H_V(N)}$。对于每个 $J(v,\alpha)$，存在一些线性形式（它们在 $\mathcal{R}_{A,\mathcal{Q}}$ 中线性无关）

$$L_1^{J(v,\alpha)}, \dots, L_{H_V(N)}^{J(v,\alpha)} \in \mathcal{R}_{A,\mathcal{Q}}[y_1, \dots, y_{H_V(N)}]$$

使得

$$\phi_\ell^{J(v,\alpha)} \equiv L_\ell^{J(v,\alpha)}(\Phi_1, \dots, \Phi_{H_V(N)}) \pmod{\mathcal{I}_{A,\mathcal{Q}}(V)}.$$

我们记

$$L_\ell^{J(v,\alpha)}(y_1, \dots, y_{H_V(N)}) = \sum_{s=1}^{H_V(N)} g_{\ell r} y_s, \quad g_{\ell s} \in \mathcal{R}_{A,\mathcal{Q}}.$$

由于 $L_1^{J(v,\alpha)}, \dots, L_{H_N\ V()}^{J(v,\alpha)}$ 在 $\mathcal{R}_{A,\mathcal{Q}}$, 上线性无关，因此 $\det(h_{\ell s}) \neq 0 \in \mathcal{R}_{A,\mathcal{Q}}$. 因此，利用 A, 的凝聚性，对所有 $\beta \in A$, 除去 A. 的一个有限子集外，$\det(h_{\ell s})(\beta) \neq 0$。必要时取一个无限子集后，我们可以假设 $L_1^{J(v,\alpha)}(\beta) \dots, L_{H_N\ V()}^{J(v,\alpha)}(\beta)$ 对所有 $\beta \in A$. 都在 k 上线性无关。

定义映射:

$$F : A \to \mathbb{P}^{H_V(N)-1}(k), \qquad F(\alpha) = [\Phi_1(\mathbf{x}(\alpha)), \dots, \Phi_{H_V(N)}(\mathbf{x}(\alpha))].$$

我们断言， F 相对于 $\mathcal{L}$. 线性非退化。事实上，否则便存在一个线性形式 $L \in \mathcal{R}_{B,\mathcal{L}}[y_1, \dots, y_{H_N(V)}]$ 以及某个无穷凝聚子集 $B \subset A$, ， 使得 $L(F)|_B \equiv 0$ 属于 B, ， 这与假设 x 相对于 $\mathcal{Q}$.代数非退化矛盾。

另一方面，很容易看出，存在 $h_{J(v,\alpha)} \in \mathcal{C}_{\mathbf{x}}$ 使得

$$\|P_{J(v,\alpha)}(\alpha)(\mathbf{x}(\alpha))\|_v \leq \|\mathbf{x}(\alpha)\|_v^{\deg P_J} h_{J(v,\alpha)}(\alpha) = \|\mathbf{x}(\alpha)\|_v^{\frac{\deg V \cdot N^{n+1}}{(n+1)!} + v(N)} h_{J(v,\alpha)}(\alpha).$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
&\log \prod_{\ell=1}^{H_V(N)} \|\phi_\ell^{J(v,\alpha)}(\alpha)(\mathbf{x}(\alpha))\|_v \\
&\leq \left(\frac{\deg V \cdot N^{n+1}}{d(n+1)!} - u(N)\right) \cdot \log \|\prod_{t=1}^{n} \tilde{Q}_{j_t(v,\alpha)}(\alpha)(\mathbf{x}(\alpha))\|_v \\
&\quad + \log^+ h_{J(v,\alpha)}(\alpha) + \left(\frac{\deg V \cdot N^{n+1}}{(n+1)!} + v(N)\right) \log \|\mathbf{x}(\alpha)\|_v.
\end{aligned}$$

这意味着存在函数 $\zeta_1(N)$ $\zeta_2(N)$ $\leq O\left(\frac{1}{N}\right)$ 使得

$$\begin{aligned}
&\log \|\prod_{t=1}^{n} \tilde{Q}_{j_t(v,\alpha)}(\alpha)(\mathbf{x}(\alpha))\|_v \\
&\geq \left(\frac{d(n+1)!}{\deg V \cdot N^{n+1}} + \zeta_1(N)\right) \cdot \log \prod_{\ell=1}^{H_V(N)} \|\phi_\ell^{J(v,\alpha)}(\alpha)(\mathbf{x}(\alpha))\|_v \\
&\quad - \left(\frac{d(n+1)!}{\deg V \cdot N^{n+1}} + \zeta_1(N)\right) \log^+ h_{J(v,\alpha)}(\alpha) - (d + \zeta_2(N)) \log \|\mathbf{x}(\alpha)\|_v.
\end{aligned}$$

此外，我们还有以下引理来估计高度和线性形式：

引理 4.1. F 的高度满足：

$$h(F(\alpha)) \leq N \cdot h(\mathbf{x}(\alpha)) + o(h(\mathbf{x}(\alpha))).$$

证明。 每个 Φ_ℓ 在$\mathbf{x}$中的次数为 N，因此 $\|\Phi_\ell(\mathbf{x}(\alpha))\|_v \leq \|\mathbf{x}(\alpha)\|_v^N \cdot \|\Phi_\ell\|_{v\circ}$ 对 $v \in M_k$ 求和：

$$h(F(\alpha)) = \sum_{v \in M_k} \log \max_\ell \|\Phi_\ell(\mathbf{x}(\alpha))\|_v \leq N \cdot h(\mathbf{x}(\alpha)) + \sum_{v \in M_k} \log \max_\ell \|\Phi_\ell\|_v.$$

第二项有一个与 α 无关的上界。 □

引理 4.2. 对每个 J 和 ℓ，线性形式 L_ℓ^J 的高度满足：

$$h(L_\ell^{J(v,\alpha)}(\alpha)) = o(h(\mathbf{x}(\alpha))).$$

证明。 $L_\ell^{J(v,\alpha)}$ 的系数是归一化系数$\tilde{a}_{j,I}$的多项式，其系数属于 $k_\circ$ 由于根据小高度假设有 $h(\tilde{a}_{j,I}(\alpha)) \leq 2h(Q_j(\alpha)) + O(1) = o(h(\mathbf{x}(\alpha)))$，故该断言成立。□

对映射 F 以及每个 v 和 α处的移动超平面族 $\{L_\ell^{J(v,\alpha)}\}$ 应用施密特移动超平面子空间定理（Ru-Vojta [19],或 Cao-Quang-Thin [3] 的加权版本）：

对任意 $\epsilon > 0$，存在无限子集 $A' \subseteq A$，使得对所有 $\alpha \in A'$：

$$\sum_{v \in S} \sum_{\ell=1}^{H_V(N)} \log \frac{\|F(\alpha)\|_v \|L_\ell^{J(v,\alpha)}(\alpha)\|_v}{\|L_\ell^{J(v,\alpha)}(\alpha)(F(\alpha))\|_v} \leq (H_V(N) + \epsilon) h(F(\alpha)). \tag{7}$$

由惯性形式方程 (6)，取对数并使用F 和 L_ℓ^J的定义：

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in S} \sum_{j=1}^{k} \log \frac{||\mathbf{x}(\alpha)||_v^d}{||\tilde{Q}_j(\alpha)(\mathbf{x}(\alpha))||_v} &\leq (n+1)d \sum_{v \in S} \log ||\mathbf{x}(\alpha)||_v + \zeta_2(N) \sum_{v \in S} \log ||\mathbf{x}(\alpha))||_v \\
&+ \Big(\frac{d(n+1)!}{\deg V \cdot N^{n+1}} - \frac{\zeta_1(N)}{N^{n+1}}\Big) \sum_{v \in S} \log \prod_{\ell=1}^{H_N(V)} \frac{||F(\alpha)||_v ||L_\ell^{J(v,\alpha)}(\alpha)||_v}{||L_\ell^{J(v,\alpha)}(\alpha)(\mathbf{x}(\alpha))||_v} \\
&- H_V(N)\Big(\frac{d(n+1)!}{\deg V \cdot N^{n+1}} - \frac{\zeta_1(N)}{N^{n+1}}\Big) \sum_{v \in S} \log ||F(\alpha)||_v + o(h(\mathbf{x}(\alpha))).
\end{aligned}$$

重新整理并利用 (7)、引理 4.1 和引理 4.2，可得

$$\sum_{v\in S}\sum_{j=1}^{k}\log\frac{||\mathbf{x}(\alpha)||_v^d||\tilde{Q}_j(\alpha)||_v}{||\tilde{Q}_j(\alpha)(\mathbf{x}(\alpha))||_v}\le(n+1)dh(\mathbf{x}(\alpha))+\zeta_2(N)h(\mathbf{x}(\alpha))$$

$$+\epsilon\Big(\frac{d(n+1)!}{\deg V\cdot N^{n+1}}-\frac{\zeta_1(N)}{N^{n+1}}\Big)h(F(\alpha))+o(h(\mathbf{x}(\alpha))). \tag{8}$$

对于处于一般位置的移动超曲面，不等式蕴含

$$\sum_{v\in S}\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_{\tilde{Q}_i(\alpha),v}(\mathbf{x}(\alpha))}{d_i}\le(n+1+\epsilon)h(\mathbf{x}(\alpha))+o(h(\mathbf{x}(\alpha))). \tag{9}$$

应用引理2.4并利用(5)、(9)：

$$\sum_{v\in S}\left(\max_j\frac{\sum_{j'=1}^{j}c_{i_{j'}(v,\alpha)}}{b_{j(v,\alpha)}}\right)\sum_{s=1}^{l_v(\alpha)}(b_{s(v,\alpha)}-b_{s-1(v,\alpha)})\frac{\lambda_{\tilde{Q}_{I_s(v,\alpha)}}(\mathbf{x}(\alpha))}{d_{I_s}}$$

$$\le\max_{1\le j\le q}\frac{\sum_{s=1}^{j}c_{i_s(v,\alpha)}}{b_{j(v,\alpha)}}\cdot(n+1+\epsilon)h(\mathbf{x}(\alpha))+o(h(\mathbf{x}(\alpha))).$$

对于初始段$W_{j(v,\alpha)}=\bigcap_{s=1}^{j}\tilde{D}_{i_s(v,\alpha)}(\alpha)\cap V$，有：

$$\frac{\sum_{s=1}^{j}c_{i_s(v,\alpha)}}{b_{j(v,\alpha)}}=\frac{\alpha_v(W_{j(v,\alpha)})}{\operatorname{codim}W_{j(v,\alpha)}}\le\max_{\varnothing\subsetneq W\subsetneq V}\frac{\alpha_v(W)}{\operatorname{codim}W}.$$

对 $v\in S$ 和$\{1,\dots,q\}$所有有限种可能的排列取最大值，并对 $v\in S$求和：

$$\sum_{v\in S}\sum_{j=1}^{q}c_j\frac{\lambda_{\tilde{Q}_j(\alpha),v}(\mathbf{x}(\alpha))}{d_j}\le\left((n+1)\max_{\substack{v\in S\\ \varnothing\subsetneq W\subsetneq V}}\frac{\alpha_v(W)}{\operatorname{codim}W}+\epsilon\right)h(\mathbf{x}(\alpha))$$

对于有限个真闭子集之并之外的所有 $\alpha\in A'$，非退化假设保证其避开该并集。

两边取指数并利用 (4)，即可得到所需的不等式。定理 2.7 的证明至此完成

$$\log\prod_{v\in S}\prod_{i=1}^{q}\left(\frac{\|\mathbf{x}(\alpha)\|_v^{d_i}\|Q_i(\alpha)\|_v}{\|Q_i(\alpha)(\mathbf{x}(\alpha))\|_v}\right)^{c_i\cdot\frac{1}{d_i}}\le\left((n+1)\max_{\substack{v\in S\\ \varnothing\subsetneq W\subsetneq X}}\frac{\alpha_v(W)}{\operatorname{codim}W}+\epsilon\right)h(\mathbf{x}(\alpha))$$

对所有 $\alpha\in A$ （有限集之外）均成立。 □

参考文献

[1] Z. Chen、M. Ru 和 Q. Yan，带移动目标的施密特子空间定理，《国际数学研究通讯》，首次在线发表，2014年8月6日。[2] T. B. Cao、N. V. Thin 代数簇中指标处于次一般位置的移动超曲面目标的施密特子空间定理(2020年) [3] T. B. Cao、S. D. Quang 和 N. V. Thin 关于任意族移动超曲面目标的施密特子空间定理，《数论杂志》，**262** (2024年)，335-353。[4] P. Corvaja 和 U. Zannier，论一般图埃方程，《美国数学杂志》**126** (2004年)，1033-1055。

[5] *G. Dethloff* 和 *T. V. Tan*，移动超曲面目标的第二主定理，《休斯敦数学杂志》*37 (2011*年*)*，*79-111*。[6] *G. Dethloff* 和 *T. V. Tan*，取值于代数簇并与移动超曲面目标相交的全纯曲线，《越南数学学报》*45 (2020*年*)* *291-308*。[7] *J. H. Evertse* 和 *R. G. Ferretti*，射影簇上的丢番图不等式，《国际数学研究通讯》*25 (2002*年*)*，*1295-1330*。[8] *R. Hartshorne*，《代数几何》，《数学研究生文本》第*52*卷，施普林格出版社，纽约，*1977*年。[9] *G. Heier* 和 *A. Levin.* 闭子概形的广义施密特子空间定理，《美国数学杂志》*143(1):213–226*，*2021*年。[10] *G. Heier* 和 *A. Levin.* 次一般位置闭子概形的施密特–诺奇卡定理，《纯粹与应用数学杂志》（克雷尔杂志），*819 (2025*年*)*，*205–229*。[11] *R. Lazarsfeld.*《代数几何中的正性》*I*，《数学及其边界领域成果》第*48*卷，第*3*辑：现代数学概览丛书。施普林格出版社，柏林，*2004*年。[12] *L. Giang*，退化第二主定理中重数截断的显式估计，《休斯敦数学杂志》*42 (2016*年*)* *447-462*。[13] *Q. Ji*、*Q. Yan* 和 *G. Yu*，取值于代数簇并与处于次一般位置的除子相交的全纯曲线，《数学年刊》*373 (2019*年*)* *1457-1483*。[14] *S. D. Quang*，次一般位置移动超曲面的施密特子空间定理，《国际数论杂志》*14 (2018*年*)*，*103-121*，*2018*年。[15] *S. D. Quang*，取值于带超曲面的射影簇的亚纯映射的退化第二主定理，《美国数学会汇刊》*371 (2019*年*)*，第*4*期，*2431-2453*。[16] *S. D. Quang.* 退化第二主定理和施密特子空间定理的推广，《太平洋数学杂志》*318 (2022*年*)*，*153-188*。[17] *M. Ru*，论第二主定理的一般形式，《美国数学会汇刊》*349 (1997*年*)*，*5093-5105*。[18] *M. Ru*，取值于代数簇的全纯曲线，《数学年刊》*169 (2009*年*)* *255-267*。[19] *M. Ru* 和 *P. Vojta* 带移动目标的施密特子空间定理，《数学发明》*127 (1997*年*)*，*51-65*。[20] *J. Silverman.* 丢番图几何中的算术距离函数与高度函数，《数学年刊》*279(2)*，*(1987*年*)* *193–216*。[21] *N. T. Son*、*T. V. Tan* 和 *N. V. Thin*，移动超曲面目标的施密特子空间定理，《数论杂志》*186 (2018*年*)*，*346-369*。[22] *L. B. Xie* 和 *T. B. Cao*，取值于代数簇并与移动超曲面目标相交的全纯曲线的第二主定理，*arXiv: 1908.05844v2*。[23] *P. Vojta*，丢番图逼近与奈望林纳理论，载于：*J.-L. Colliot-Thélène*、*P. Swinnerton-Dyer* 和 *P. Vojta*（编），《算术几何》，*111-124*。*LNM 2009*，施普林格出版社，柏林，*2010*年。[24] *O. Zariski*，$n+1$ 多项式的结式的一般化权性质，关于 n 不定元，《美国数学会汇刊》*41 (1937*年*)*，*249-265*。

GUANHENG ZHAO 山东大学，中华人民共和国。电子邮箱：202200700222@mail.sdu.edu.cn YUXI LI 澳门大学，中华人民共和国。电子邮箱：mc55457@um.edu.mo