arXiv:2603.01645v1 [math.NA] 2 Mar 2026

具有无界支撑目标测度的最优传输问题近似的逐点收敛分析

AXEL G. R. TURNQUIST

Abstract. 我们考虑紧支撑源测度与具有无界支撑的目标概率测度之间的最优传输Monge问题。我们考虑目标测度被近似时最优映射与势函数的收敛，并特别关注一种截断近似：我们用目标测度的“截断”半径 R 来参数化该近似。我们在多种情形下研究正问题与逆问题中映射与势函数的收敛，例如：1）一般代价函数下采用截断近似的径向对称情形；2）平方距离代价函数下的非径向对称情形。在特殊情形中，我们基于Delalande与M`erigot [7]所建立的 $L^2$ 收敛速率，导出定量的非渐近逐点收敛速率。这些结果可用于，例如，为在计算求解该问题时使用某些类型的数值Monge-Amp`ere方程求解器提供依据。

Contents

1. 引言 2 1.1. 最优传输的 Monge 问题 2 1.2. 无界支撑问题与截断近似 3 1.3. 计算方法与应用讨论 4 1.4. 定量稳定性界讨论 L^2 5 1.5. 论文结构 5 2. 定义与讨论 6 2.1. 理论背景 6 3. 径向情形的快速收敛 8 3.1. 径向源分布和目标分布导出径向解 9 3.2. 逆最优径向映射的收敛速率 T_ν 13 3.3. 径向映射的收敛 T_μ 14 3.4. 逆径向势函数的收敛 $\phi_{\nu;R}$ 15 3.5. 径向势函数的收敛速率 $\phi_{\mu;R}$ 16 3.6. 某些分布类的分布函数收敛速率 μ 18 4. 一般情形下的收敛结果 20 4.1. L^2 收敛速率 20 4.2. 估计 $W_1(\nu, \nu_R)$ 22

Date: 2026年3月3日。

4.3. Brenier势的逐点收敛与最优映射的几乎处处逐点收敛 27 4.4. Brenier势函数的显式一致收敛速率 29 4.5. 逆 Brenier 势的收敛及其他性质 33 4.6. 逆 Brenier映射的几乎处处收敛 39 5. 用于求解无界区域上椭圆型偏微分方程的收敛数值方法 39 5.1. 背景与定义 40 5.2. Hamfeldt 的收敛结果 [10] 415.3. 无界区域上最优传输收敛格式的讨论 42 6. 结论 43 参考文献 44

1. Introduction

本文中，我们考虑在欧几里得空间中求解 Monge 最优传输问题：从有界支撑的源测度到无界支撑的目标测度。我们推导了此类问题的截断近似的逐点收敛速率。

1.1. 最优传输的 Monge 问题。 我们在 $\mathbb{R}^n$ 上定义最优传输的 Monge 问题。典型的最优传输介绍通常会包含 Kantorovich表述，参见任何一本关于最优传输的书籍，例如非常流行的 Villani [26], ，但为求简洁，我们选择省略这部分内容。

定义 1（最优传输的 Monge 问题）。给定概率分布 μ、ν（分别为源测度与目标测度），其支撑位于 $\mathbb{R}^n$，并给定代价函数 $c\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，我们将最优传输的 *Monge* 问题定义为使下列代价泛函最小化：

$$C(\mu,\nu) := \int_{\mathbb{R}^d} c(x, S(x)) d\mu(x), \tag{1}$$

满足约束 $\mu(S^{-1}(E) = \nu(E)$，对每个博雷尔集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 均成立，其中 $S^{-1}(E) := \{x \in \mathbb{R}^d \colon S(x) \in E\}$，通常简记为 $T_{\#}\mu = \nu$。最优映射 T 通常称为前推映射，因为 ν 是 μ 关于映射 T 的前推测度。

当然，一般而言，费用泛函并不一定存在极小化子。即使存在极小化子，它也可能不唯一。为了保证Monge问题极小化子的存在性，例如对于代价函数 $c(x,y) = |x-y|^2$，必须限制源测度的类别。一个充分但不必要的简单条件是，μ 关于勒贝格测度绝对连续。于是，在这种情况下，不仅可以保证极小化子的存在性，而且代价函数 $c(x,y) = |x-y|^2$ 的选取实际上还将保证极小化子是唯一的。

与最优传输的Monge问题相关联的是最优传输的一个相关对偶表述，参见 Villani [26]。此类问题的极大元

包含一个称为势函数的函数。势函数往往与最优映射密切相关。例如，在平方距离代价 $c(x,y) = |x-y|^2$的情形下，最优映射（当其存在时）为 $T = \nabla\phi$，其中势函数 ϕ被称为Brenier势，得名于Yann Brenier，他在Brenier [4]中首次严格证明了这一结果。因此，我们因而关注与最优传输问题相关联的下列量，它们在应用与理论中有着无穷的用处：

(1) 总成本 $C(\mu, \nu)$。对于选择 $c(x, y) = |x-y|^p$，对于 $p \in [1,\infty)$，该量的p次方根称为 μ与 ν之间的 Wasserstein-p 距离，通常记作 $W_p(\mu, \nu)$，即：

$$W_p(\mu,\nu) := \left(\int_{\mathbb{R}^d} |x - S(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}.$$

(2) 最优映射 T （未必存在，也未必唯一），即满足 $C(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}^d} c(x, T(x))$ $d\mu(x)$ 且 $T_{\#}\mu = \nu$ 的 T。(3) 势函数 ϕ （通常在相差一个常数的意义下唯一）。在$c(x, y) = |x-y|^2$的情形下，势函数 ϕ 称为 Brenier势。

1.2. 无界支撑问题与截断近似。在本文中，我们研究从源测度 μ到目标测度 ν的 Monge 最优传输问题，其中源测度支撑于紧集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上，密度函数为 f；目标测度支撑于 $\mathbb{R}^n$ 上，密度函数为g。我们所研究问题的关键特征是，ν的支撑可能无界。一般而言，我们考虑连续的非负代价函数c：$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，但之后会修改和/或限制这些假设。

出于各种原因（通常受应用驱动），人们往往希望以某种方式近似目标测度 ν 。也就是说，定义任意序列 $\{\nu_\rho\}$，其中 $\nu_\rho \rightharpoonup \nu$ 弱收敛于 $\rho \to 0$，并研究最优传输问题的序列如何随 ρ 变化。也就是说，我们可以研究 $C(\mu, \nu_\rho)$、T_ρ 和 ϕ_ρ 分别如何收敛到 $C(\mu, \nu)$、T 和 ϕ（假设 T 唯一，且 ϕ 已被唯一确定）。例如，长期以来，人们一直关注当 ν_ρ 为 ν 的经验测度时这类收敛问题，参见 [2], [15], 等文献。

本文主要考虑以下方式对 ν 进行弱近似。我们定义一个“截断”半径 $R > 0$ ，并定义截断概率测度 $\nu_R := \nu/\nu(B_R(0))$，其中 $B_R(0)$ 表示以原点为中心、半径为 R 的开欧几里得球。这是受使用 Monge-Amp`ere 方程求解器这一动机驱动时，近似最优传输问题的一种自然方式。我们将从 μ 到 ν 的最优传输问题称为正向问题，将从 ν 到 μ 的最优传输问题称为逆问题。我们分别用 T_μ和 ϕ_μ 表示正向问题的最优映射和势函数。同样，T_ν 和 ϕ_ν 分别表示逆问题的最优映射和势函数。对于截断问题，它们分别记为 $T_{\mu;R}$、$\phi_{\mu;R}$、$T_{\nu;R}$ 和 $\phi_{\nu;R}$。在全文中，我们假设 μ和 ν 都具有概率密度函数，分别记为 f_μ 和 f_ν。我们将 μ 的支撑记为闭集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$。

在第3节和第4节中，我们分别研究 T_R 和 ϕ_R 收敛到 T 和 ϕ。我们还研究从 ν_R 到 μ的逆最优传输问题。在第3节中，我们推导出当 μ 和 ν 径向对称时，

对于各种各样的代价函数，均有对称性。在第4节中，对于代价函数 $c(x,\ y) = |x-y|^2$，我们推导出定量收敛结果，并认为这是本文的主要结果。这些结果建立在Delalande和M`erigot [7], 关于 ϕ_R 的 L^2收敛结果以及关于 T_R的几乎处处收敛结果之上。我们还推导出一系列结果，以期未来能够扩展L^2 收敛理论。

1.3. 关于计算方法与应用的讨论。 目前，大多数用于计算 Ω 上的概率测度与具有无界支撑的概率测度之间最优传输相关量的算法，都需要从目标测度中进行采样。一种方法是分别从两个分布中直接采样一定次数，然后使用网络单纯形算法的某种现代变体计算离散康托罗维奇计划，参见 Peyr´e 和 Cuturi [22]。随后，为了提取最优传输映射，可以采用 Oberman 和 Ruan [21] 提出的方法，使用多重网格方法。另一种方法是从目标分布中采样，然后使用半离散最优传输工具，例如参见 [13], 。

第二种常用策略是对离散最优传输问题进行熵正则化，然后使用著名的Sinkhorn算法，参见 Cuturi [6] ，以获得康托罗维奇计划的“平滑”近似。这种计算速度很快，但难以据此辨识最优传输映射；不过，可以使用重心投影近似最优传输映射，参见 Peyr´e 和 Cuturi [22]。

另一个颇有意思的可能方案，是将该问题表述为一个矩和平方问题的实例，参见 Lasserre [14], ；该方法可用于估计最优传输映射的支撑，参见 Mula 和 Nouy [20]。这种方法尚未用于无界问题，但可以应用于此类问题，因此目前尚不清楚它在实践中的效果如何。

本文稿未讨论 μ 和 ν 均具有无界支撑的情形。不过，本文稿中的技术或可通过“瓶颈化”用于某些此类应用（需要推前映射的情形）。也就是说，我们可以通过一个中间步骤计算从 μ 到 ν 的推前映射 T：先将其映射到一个边长为 $2R$的 n 维立方体上的常密度分布，举例来说。这样一来，虽然整体上并未得到最优传输映射，但确实构造出了一个推前映射，仍可用于采样和动网格方法等应用。如果我们的目标是计算从 μ 到 ν的最优传输映射，就不能使用瓶颈化方法。

对于采样方法，Berman [2] 证明，如果布雷尼耶势函数是 C^2，那么在 H_1 范数下的收敛速率为 $\mathcal{O}(\sqrt{h})$；如果不能确定布雷尼耶势函数是否光滑，则收敛速率会降至 $\mathcal{O}(1/2^q)$。采样方法是高维问题中少数可用的工具之一，但采样过程本身仍有一些缺点：即使可以通过马尔可夫链蒙特卡罗获得密度函数，在许多实际问题中需要重复使用数千次乃至数百万次时，采样仍然很慢。更深入的讨论请参见 Moselhy 和 Marzouk [19]。

我们的截断方法旨在推导出界并提升性能，尤其是在以下情况下：(a) 密度函数已知；(b) 可以高效计算密度函数在球 $B_R(0)$上的积分。即使在非常宽松的假设下，也能证明良好的收敛率。对于对数凹概率分布，则能证明极佳的收敛率，参见定义 10。

这一类分布包括次指数分布（因此也包括指数分布）、次高斯分布（因此也包括高斯分布），以及许多其他分布。

1.4. 关于定量 L^2 稳定性界。我们所使用的 L^2 界源自一系列涉及多位作者的工作，其目标在于证明映射 $\mu \mapsto T_\mu$ 是否为双 H¨older，其中 T_μ 是从测度 μ 到测度 ν的最优传输映射，二者均位于欧几里得空间中，且具有有限的二阶矩。Andoni、Naor 与 Neiman [1]的一项基本结果表明，维数为 $n \geq 3$ 的概率空间（$\mathcal{P}_2$（$\mathbb{R}^n$） W_2）不允许双 H¨older 嵌入到希尔伯特空间中。也就是说，在一般情形下，我们不能期望得到如下类型的不等式:

$$\|T_{\mu_1} - T_{\mu_2}\|_{L^2(\mu)} \leq C W_2(\nu_1, \nu_2), \tag{2}$$

在最一般情形下，其中 T_{μ_1} 与 T_{μ_2} 分别是从 μ到 ν_1 以及到ν_2的最优映射。Ambrosio 提出并由 Gigli [9] 报道的一个早期结果表明，对于支撑在紧集上的 μ 与 ν，若假设最优映射 T_{μ_1} 为 L-利普希茨，则可得到不等式 (2) 类型的界，只是右端以 W_1 代替 W_2 。就我们的目的而言，Delalande 与 M`erigot 结果的一个自然前身归功于 Berman [2], ，作者在其中证明了如下结论:

定理2。设 μ在紧凸集 X 上具有概率密度 f，且f 有上下界。设 Y 是一个有界连通开集，且具有利普希茨边界。那么，存在一个常数 C，仅取决于 μ、 X 和 Y，使得对于 Y 上的任意概率测度 ν_1 和 ν_2，我们有:

$$\|T_{\nu_1} - T_{\nu_2}\|_{L^2(\mu)} \leq C W_1(\nu_1, \nu_2)^{\alpha(n)}, \tag{3}$$

其中 $\alpha(n)$ 是一个仅取决于环境维数 n的指数。

这个定理相当一般，但有两个缺点，后来 Delalande 和 M`erigot [7]对此作了改进。首先，指数 $\alpha$(n)（细节从略）并非最优。第二个缺点对我们的研究目的而言最为重要，即目标区域 $Y$ 必须是紧的。Delalande 和 M`erigot 的工作正是由这两个目标所推动的。我们将在定理23中介绍他们的定理。他们的工作还有一项益处，即为布雷尼耶势函数的收敛提供了 L^2界。结合布雷尼耶势函数的凸性性质，这些结果还能导出更多收敛结论，我们将在本文中对此进行探讨。

这些估计之所以引起关注，是因为它们既可用于证明将线性化最优传输用于应用的合理性，也可用于证明问题数值近似的合理性，尤其是在测度（目标测度或两者）由经验分布近似时。在数值方面，Li 和 Nochetto [15], 的工作推导出了定量稳定性结果：当 μ 和 ν 分别由 δ 测度近似时，可在紧集 X 和 Y上近似从μ到 ν 的传输计划。

1.5. 论文提纲。 第2节介绍本文将用到的诸多定义和基本定理。第3节针对源概率测度和目标概率测度均为径向对称的情形，证明了在多种代价函数下，截断问题和逆截断问题中最优映射与势函数的逐点收敛速率

。我们还展示了在某些分布函数类别（包括对数凹分布函数）下，收敛速率可以达到多快。第4节是本文的主要结果所在，我们考虑代价函数$c(x,\ y) = \frac{1}{2}c(x,\ y)^2$，并放宽径向对称性假设，利用 Delalande 和 M´erigot [7] 建立的一些基本 L^2 界，为截断问题中的布雷尼耶势函数和逆布雷尼耶势函数推导出多种逐点收敛速率。在某些情形下，这些速率可以定量确定；不过，只要其他近似方法的 L^1 收敛速率已经得到确立，这些逐点收敛速率对这些方法仍然成立。我们再次展示了某些情形下的明确速率，例如对数凹分布函数。在一般情形下，我们无法推导出蒙日映射（或其反函数）的逐点收敛速率，但可以得到几乎处处逐点收敛保证。第5节给出一种可证明收敛的单调有限差分近似示例，可用于计算逆布雷尼耶势函数，其理论依据最初由 Hamfeldt [10]建立。第6节总结本文的贡献。

2. Definitions and Discussion

在第2.1节中，我们将介绍本文中会用到的许多有用概念和结果。

2.1. 理论背景。 这里我们陈述平方距离代价函数下最优传输的最优性条件，这通常称为布雷尼耶定理。对于满足 Ma-Trudinger-Wang 条件的更一般的代价函数，也可以得到类似的结论，见 [17], ；不过，此时势函数不再是凸的，而是 c-凸的，且映射是 c-凸势函数梯度的一个更复杂的函数。

定理*3*（平方距离代价函数下最优传输的最优性条件，例如参见 *Loeper* [16], ）。设 $\mu,\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$，且 μ 关于 $\mathbb{R}^d$ 上的勒贝格测度绝对连续。令 $c(x,y) = \frac{1}{2}|x-y|^2$。则最优传输映射 T 存在，且在 μ 的支撑上几乎处处唯一。它满足方程 $\bar{T}_{\#}\mu = \nu$。此外，存在一个下半连续凸函数 u，称为布雷尼耶势函数，使得 $T(x) = \nabla u(x)$ 在 μ 的支撑上几乎处处成立。注意，$v = u + C$ 也满足 $T(x) = \nabla v(x)$，在 μ 的支撑上几乎处处成立，因此 u 在相差一个常数的意义下唯一。

逆命题也成立。设 u 是一个下半连续凸函数。几乎处处定义 $T = \nabla u(x)$ 。如果 T 也满足 $T_{\#}\mu = \nu$，那么 T 是一个最优映射。最优映射在 μ-*a.e.* 意义下相等，并且 $Cl(\nabla u(F \cap spt(\mu))) = spt(\nu)$ ，其中 F 是 u 的可微点集。

注 4. 对于本文而言，若 μ 支撑在紧集$\mathcal{X}$上，则我们只考虑满足 $\int_{\mathcal{X}} u(x)dx = 0$ 的势函数，这将唯一确定该函数在 $\mathcal{X}$ 上的取值。请注意，映射 T 并非处处唯一确定。本文中，对于径向情形，我们将利用累积分布函数定义特定的T 和布雷尼耶势 u ，以避免这一技术问题。对于一般情形，我们能够证明开集内布雷尼耶势函数序列 u 的显式收敛速率，但对于映射序列 ，只能证明几乎

处处收敛。因此，由于 T 可能存在不连续性，且最优映射仅在μ-几乎处处有定义，我们无法期待获得优于几乎处处收敛的结果。

在凸分析中，一个有用的做法是定义整个欧几里得空间上的凸函数 $\mathbb{R}^d$ ，并允许它取扩展实数值，即可以取值 $\pm\infty$。于是，凸函数 u 可以定义为这样一种函数：其割线位于函数图像上方，即对于任意 x， $y \in \mathbb{R}^d$ 以及任意 $t \in [0,1]$，均有 $tu(x) + (1-t)u(y) \geq u(tx + (1-t)y)$。尽管这个定义简单而且极其有用，但它确实会带来一些复杂问题。凸函数可能是不适当的，这意味着它处处等于 $+\infty$ ，或在某处等于 $-\infty$ 。因此，通常将本质定义域 $\mathrm{dom}(u)$定义为 u 取有限值的点集。在本质定义域的边界上， u 可能不连续。不过，如果 $\mathrm{dom}(u)$的内部非空，那么 u 在区域内部的性质相当良好。它在区域内部连续，并且在内部的任意闭子集上都是利普希茨连续的。然而，由于无法保证 u可微，而 u的图像存在支撑超平面，因此可以在 $\mathrm{dom}(u)$中的每一点定义次微分。由此我们引入次微分：

定义5. 凸函数 u 在点 x 处的次微分，记作$\partial u(x)$，定义为以下集值函数：

$$\partial u(x) := \{y \in \mathbb{R}^d : f(z) \geq f(x) + y \cdot (z - x) \ \forall z \in \mathbb{R}^d\}. \tag{4}$$

对于集合 $\Omega \in \mathbb{R}^d$，我们定义 $\partial u(\Omega) := \cup_{x\in\Omega}\partial u(x)$。根据这些定义，可以陈述以下结果：

定理6. 设 u 为凸函数。令 $dom(u)$ 表示 u 有限的集合，并令 F 表示 u 的可微点集合。那么，对于每个$x \in dom(u)$，都有 $\partial u(x) \neq \emptyset$ 。此外，如果 u 在点 x 处可微，则 $\partial u(x) = \nabla u(x)$。最后，次微分具有以下连续性。对于每个点 $x \in F$ 以及每个 $\epsilon > 0$，都存在一个 $\delta > 0$ ，使得 $\partial u(B_\delta(x)) = B_\epsilon(\nabla u(x))$。

在假设足够的正则性后，对于平方距离代价函数 $c(x, y) = |x-y|^2$ 最优传输势函数 u将满足以下全非线性偏微分方程，该方程在凸函数空间上是椭圆型的：

定义 7（带第二边值条件的 Monge-Amp`ere 方程）。偏微分方程

$$\det(D^2 u(x)) = f(x)/g(\nabla u(x)), \tag{5}$$

称为 *Monge-Amp`ere* 方程的一种形式。令 $\Omega = spt(\mu)$ 和 $\Omega' = spt(\nu)$。在全局条件 $\partial u(\Omega) \subset \Omega'$ 下，存在唯一的凸函数u （相差一个加法常数），见 *Urbas* [25]。

在 $\mathbb{R}$ 中，在温和条件下，对于各种各样的代价函数，最优传输映射都有显式公式。该公式源于这样一个观察：单调映射 $T(x)$ 是最优的。如果映射 T 单调，那么它在 $\mathbb{R}$ 中只能具有某种特定形式。这里，我们讨论 μ 关于 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度绝对连续的情形。该结果改编自 Maggi [18] 中更一般的论述。

定理 8（ $\mathbb{R}$ 中的最优传输 *Monge*问题）。如果 μ 关于 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度绝对连续，且 μ、$\nu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ 和 $c(x,y) = h(|y-x|)$，其中 $h(0) = 0$， h 是递增且严格凸的，那么令 F、G 分别为 μ 和 ν 的累积分布函数，并定义 $G^{[-1]} := \inf\{x \in \mathbb{R} : G(x) \geq t\}$，则最优传输映射 T 由下式给出： $T(x) = G^{[-1]} \circ F(x)$。若 ν 没有任何“间隙”，则 G 可逆，并且有 $T(x) = G^{-1} \circ F(x)$。

注记 9. 如果代价函数不满足这些条件，该公式可能不成立。最简单的例子是 $c(x, y) = |y-x|$，以及$\mu = \mathbf{1}_{[0,2]}dx$ 和 $\nu = \mathbf{1}_{[1,3]}dx$。在这种情况下，存在一个单调重排$T(x) = x+1$ 是最优的，但它并不是唯一的最优重排。例如，函数

$$S(x) = \begin{cases} x, & x \in [1,2], \\ x+2, & x \in [0,1], \end{cases} \tag{6}$$

也是一个最优传输映射，但它不是单调的。

最后，在本文中，我们将考虑其第 p 阶矩对某个 $p \in \mathbb{N}^+$ 有限的概率分布。然而，最强的结果将针对一类称为对数凹的概率分布给出。它们的密度函数不仅“快速”衰减，而且还具有密度函数的连续性和单调性等良好性质。

定义 10. 如果概率分布 μ 在 $\mathbb{R}^n$ 上存在勒贝格可积的分布函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ，且满足$\mu(E) = \int_E f(x)dx$对任意博雷尔集 $E \subset \mathbb{R}^n$以及 $f(x) = e^{-\varphi(x)}$均成立，其中 $\varphi(x)$是一个凸函数，则称该概率分布为对数凹分布。

3. Rapid Convergence for Radial Case

本节给出适用于源测度与目标测度均为径向对称情形下多种代价函数的收敛速率。假设 μ 和 ν 分别具有密度函数 f_μ 和 f_ν。

在对源测度与目标测度作出一些假设后，最优传输映射、逆最优传输映射、势函数和逆势函数的收敛率由量 $1 - F_\nu(R)$ 控制，其中，

$$1 - F_\nu(R) = |\mathbb{S}^{n-1}| \int_R^\infty \tilde{f}_\nu(\tau)\tau^{n-1}d\tau, \tag{7}$$

其中 $\tilde{f}_\nu(|x|) = f_\nu(x)$。方程 (7) 中的量可视为一种径向累积分布函数。如下文所示，对于具有有限 p 阶矩的目标分布ν，有 $1-F_\nu(R) = \mathcal{O}(R^{-p})$；对于 ν 上对数凹且满足某些条件的 $y > 0$，有 $1-F_\nu(R) = \mathcal{O}(R^{n-1}e^{-yR})$。

在第3节.1中，我们证明径向测度会导出径向势函数和径向最优映射。在第3节.2中，我们证明逆径向映射的收敛率。在第3节.3中，我们说明在什么条件下，正向径向映射也能达到类似的收敛速率。在第3节.4中，我们建立逆势函数的收敛速率；在第3节.5中

我们说明如何为正向径向势函数得到类似的界。最后，在第3节.6中，我们说明如何为以下径向分布确立预期的收敛率：1）具有有限的 p 阶矩；2）径向分布为对数凹分布。

3.1. 径向对称的源分布和目标分布导出径向解。我们的目标是为正向与逆向问题中的最优传输映射和 Brenier 势建立显式的 L^∞ 收敛速率。我们首先给出一个定理，说明当 ν 具有径向对称性且代价函数满足某些条件时，最优传输映射和势函数也具有径向对称性，并且有显式公式；这些公式由一维最优传输的公式推导而来。关于一维最优传输的精彩论述，参见 Maggi [18] 的第16节。

定理*11.* 若代价函数 $c(x,y) = h(|x-y|)$，其中 $h(z)$ 是递增且严格凸的，并且 $h(0) = 0$，且若 f_μ 和 f_ν 具有径向对称性，即对任意正交矩阵 $O \in \mathbb{R}^{n^2}$，$f(Ox) = f_\mu(x)$ 且 $f_\nu(Ox,) = f_\nu(x)$，则最优传输映射 T_ν 和势函数 ϕ_ν 均具有径向对称性。~由于 f_μ 和 f_ν 具有径向对称性，存在函数 $f_\mu : [0,\infty) \to [0,\infty)$ ~和 $f_\nu : [0,\infty) \to [0,\infty)$，使得 $f_\mu(|x|) = f_\mu(x)$ 且 $f_\nu(|x|) = f_\nu(x)$。于是，最优映射可由下式显式给出：

$$T_\nu(x) = \frac{x}{|x|} F_\mu^{-1} \circ F_\nu(|x|) \tag{8}$$

对于 $x \neq 0$ 和 $T(0) = 0$，其中 F_μ 和 F_ν 定义如下：

$$F_\mu(t) := \left|\mathbb{S}^{n-1}\right| \int_0^t \tilde{f}_\mu(\tau)\tau^{n-1} d\tau, \tag{9}$$

$$F_\nu(t) := \left|\mathbb{S}^{n-1}\right| \int_0^t \tilde{f}_\nu(\tau)\tau^{n-1} d\tau. \tag{10}$$

此外，每个对应的势函数 ϕ_ν 都是 c-凹且径向对称的，其表达式为：

$$\phi_\nu(x) = h\left(\left|x - F_\mu^{-1} \circ F_\nu(|x|)\right|\right) + C, \tag{11}$$

其中某个常数为 $C \in \mathbb{R}$。

注 12. 这一结果适用于具有无界支撑的 ν，也适用于截断测度 ν_R。

~证明。首先，我们注意到，如果 $f_\nu(t) \neq 0$，那么映射 T_ν 可逆。为了证明方程 (8) 给出最优映射，首先我们证明 T_ν 满足 $(T_\nu)_\# \nu = \mu$。接着我们证明，任何满足 $\frac{d}{dx}\phi_\nu(x) = -\frac{\partial}{\partial x} c(x, T_\nu(x))$ 的 ϕ_ν 都是 c-凹函数。根据最优传输映射的必要充分最优性条件 [17] [16],，我们由此可知，T_ν 对于代价函数 $c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是最优的。

首先，我们证明对于任意博雷尔集 $E \subset \mathbb{R}^n$，都有 $\nu(T_\nu^{-1}(E)) = \mu(E)$，其中 $T_\nu^{-1}(E) := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : T_\nu(x) \in E\}$。为此，我们证明该结论对任意扇形都成立。令 $(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的标准球坐标系。接着，我们将扇形 $S \subset \mathbb{R}^n$ 定义为以下类型的闭集：

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 \leq r \leq r_2, \theta_{1,1} \leq \theta_1 \leq \theta_{1,2}, \ldots, \theta_{n-1,1} \leq \theta_{n-1} \leq \theta_{n-1,2}\} \tag{12}$$

对于给定的 $\theta_{i,j}$，其中 $i = 1, \ldots, n-1$ 且 $j = 1, 2$，以及 r_1, r_2，其中 $r_1 \leq r_2$ 和 $\theta_{i,1} \leq \theta_{i,2}$ 对所有 i 均成立。我们还定义集合 $\mathcal{S} := \{A \subset \mathbb{R}^n : A$ 是一个扇形$\}$。证明 T_ν 对这类集合是一个推前映射，即可证明一般情形下的结论。

首先，$T_\nu = F_\mu^{-1} \circ F_\nu$ 是单调的，因此是博雷尔可测的。因此，对于任意博雷尔集 $B \subset \mathbb{R}^n$，我们有 $T_\nu^{-1}(B)$ 是一个博雷尔集。

其次，任意开集 $A \subset \mathbb{R}^n$ 都可以写成扇形集的可数并。我们先证明有界开博雷尔集的这一性质。无界情形可通过取有界开集的可数并得到。设 B 无界。那么，存在一个由不相交的球组成的可数序列 $T_i := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 2^i\}$，使得对于 $i = 0$，1，2，.....，有 $B = \cup_{i=1}^{\infty} C_i$，其中 $C_i = B \cap T_i$ 是有界开集。

现在证明，给定一个有界开博雷尔集 $B \subset \mathbb{R}^n$，我们可以构造可数个扇形 S_i，使得 $B = \cup_i S_i$。固定一个扇形 S，使得 $S \subset A$。这是可行的，因为 A 是开集。定义S 的勒贝格测度为 R，即 $|S| =: R > 0$。设 $S_{1,1}$ 是一个勒贝格测度为$|S_{1,1}| \in [R, R/2]$ 且满足 $S_{1,1} \subset A$ 的扇形。然后构造 $A_{1,1} = A \setminus S_{1,1}$。于是 $A_{1,1}$ 是开集。选取 $S_{1,2} \in A_{1,1}$，使得$|S_{1,2}| \in [R, R/2]$，并构造 $A_{1,2}$。持续这一过程，直到第一个整数 k，使得不存在勒贝格测度属于 $[R, R/2]$ 且满足 $S \in A_{1,k-1}$ 的扇形 S。由此定义出一个由 $k-1$ 个扇形组成的集合，$\{S_{1,i}\}_{i=1}^{k-1}$，以及一个开集 $A_{1,k-1}$。设 $j \geq 1$ 是最小的整数，使得存在一个扇形 S 满足 $|S| \in [R/2^j, R/2^{j+1}]$ 和 $S \subset A_{1,k-1}$。这样的整数存在，因为 $A_{1,k-1}$ 是非空开集。接着，令 $S_{j,1}$ 为一个扇形，使得$|S_{j,1}| \in [R/2^j, R/2^{j+1}]$ 且 $S_{j,1} \subset A_{1,k-1}$。定义 $A_{j,1} = A_{1,k-1} \setminus S_{j,1}$。再次重复这一过程，直到出现第一个整数 k'，使得不存在满足 $|S| \in [R/2^j, R/2^{j+1}]$ 且 $S \subset A_{j,k'-1}$ 的扇形S。现在继续缩小区间，直到存在一个整数 j'，使得有一个扇形 $S \subset A_{j,k'+1}$ 满足 $|S| \in [R/2^{j'}, R/2^{j'+1}]$。我们继续这一过程，从$A$ 中移除体积，直到这些扇形的勒贝格测度趋于零。如果这一过程结束后仍有体积剩余，那么就会有一个非空有界开集 A'；根据定义，存在一个常数 $R' > 0$，使得一个勒贝格测度为 R' 的扇形 S 满足 $S \subset A'$，这与该过程结束后没有剩余体积相矛盾。因此，集合 A' 的勒贝格测度必为零，且它是开集。唯一满足这些条件的集合是空集。因此，存在一个由扇形 S_l 构成的可数集族$\{S_l\}$，使得 $A = \cup_{l=1}^{\infty} S_l$。

我们定义集合：

$$\mathcal{L} := \{B \subset \mathbb{R}^n : B \text{ Borel}, \nu(T_\nu^{-1}(B)) = \mu(B)\}. \tag{13}$$

因此，该集合是博雷尔 σ-代数的子集。由于 $\sigma(\mathcal{S})$ 生成开集，所以博雷尔 σ-代数包含于 $\sigma(\mathcal{S})$。因此，我们有：

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \sigma(\mathcal{S}). \tag{14}$$

现在我们证明 $\sigma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{L}$。根据 Evans 和 Gariepy [8] 中的定理 1.4（π-λ 定理），只要我们证明 $\mathcal{L}$ 是一个 λ-系，这一结论便可得出。根据扇形集的定义可知，$\mathcal{S}$ 是一个 π- 系。若 $\sigma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{L}$，则 $\mathcal{L} = \sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}$。因此，对所有博雷尔集 B，都有 $\nu(T_\nu^{-1}(B)) = \mu(B)$。这说明，只需验证对所有扇形集 S，都有 $\nu(T_\nu^{-1}(S)) = \mu(S)$。值得注意的是，$\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$，因为扇形集是博雷尔集 B 的例子，而且我们已验证对这些集合有 $\nu(T_\nu^{-1}(B)) = \mu(B)$。

断言：$\mathcal{L}$ 是一个 λ-系统。首先，由于 $T_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，我们有 $\mathbb{R}^n \in \mathcal{L}$。其次，令 $A, B \in \mathcal{L}$ 满足 $B \subset A$。于是，$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B) = \nu(T_\nu^{-1}(A)) -$

$\nu(T_\nu^{-1}(B)) = \nu(T_\nu^{-1}(A) \setminus T_\nu^{-1}(B))$，因为 A、B、$T_\nu^{-1}(A)$ $T_\nu^{-1}(B)$均为可测的。此外，$\nu(T_\nu^{-1}(A) \setminus T_\nu^{-1}(B)) = \nu(T_\nu^{-1}(A \setminus B))$，因为 $x \in T_\nu^{-1}(A \setminus B)$意味着 $T_\nu(x) \in A \setminus B$，这意味着 $T_\nu(x) \in A$ 且 $T_\nu(x) \notin B$，由此可得 $x \in T_\nu^{-1}(A)$和 $x \notin T_\nu^{-1}(B)$，进而推出 $x \in T_\nu^{-1}(A) \setminus T_\nu^{-1}(B)$。反向采用同样的论证可得，$x \in T_\nu^{-1}(A) \setminus T_\nu^{-1}(B)$蕴含 $x \in T_\nu^{-1}(A \setminus B)$。因此，$\nu(T_\nu^{-1}(A \setminus B)) = \mu(A \setminus B)$。

现在，对每个 k 令 $A_k \in \mathcal{L}$，并令 $A_k \subset A_{k+1}$。然后，根据Evans 和 Gariepy中的定理 1.6 [8], ，由于 μ 是拉东测度，我们有 $\mu(\cup_{k=1}^\infty A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \lim_{k\to\infty} \nu(T_\nu^{-1}(A_k)) = \nu(\cup_{k=1}^\infty T_\nu^{-1}(A_k)$，其中第二个等式成立是因为 $A_k \in \mathcal{L}$。现在我们证明 $T_\nu^{-1}(\cup_{k=1}^\infty A_k) = \cup_{k=1}^\infty T_\nu^{-1}(A_k)$，由此即得该结果。设 $x \in T_\nu^{-1}(\cup_{k=1}^\infty A_k)$。则 $T_\nu(x) \in \cup_{k=1}^\infty A_k$。然后，由于 A_k 是递增集合，这表明存在一个 K，使得对所有 $k \geq K$，$T_\nu(x) \in A_k$。设 $y \in \cup_{k=1}^\infty T_\nu^{-1}(A_k)$。则存在一个 K'，使得对所有 $k \geq K'$ 有 $y \in T_\nu^{-1}(A_k)$。因此，对 $k \geq K'$有 $T_\nu(y) \in A_k$。于是$y \in T_\nu^{-1}(\cup_{k=1}^\infty A_k)$且 $x \in \cup_{k=1}^\infty T_\nu^{-1}(A_k)$。因此它们相等。我们由此证明了 $\mathcal{L}$ 是一个 λ-系，从而该断言成立。

我们定义量 $V = \int_{,\theta_1}^{\theta_1{}^2{}_{,1}} \cdots \int_{,\theta_{n-1}}^{\theta_{n-1}{}^2{}_{,1}} d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}$。如果 $f_\nu(t) \neq 0$，那么 T_ν可逆，其表达式为

$$T_\mu(y) = F_\nu^{-1} \circ F_\mu(|y|)\hat{y}. \tag{15}$$

更一般地，如果允许 f_ν 等于零，那么我们可以定义 T_ν的广义逆：

$$T_\mu(y) = F_\nu^{[-1]} \circ F_\mu(|y|)\hat{y}, \tag{16}$$

其中 $F_\nu^{[-1]}(t) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F_\nu(x) \geq t\}$。注意，由于 $F_\nu^{[-1]}(t)$ 仍然是单调的，因此若 $B_1 \cap B_2 = \emptyset$，则 B_1 经由 T 的原像与 B_2 经由 T_ν 的原像不相交。我们计算：

$$\mu(B) = \int_B f_\mu(x)dx, \tag{17}$$

$$= \int_{\theta_{1,1}}^{\theta_{1,2}} \cdots \int_{\theta_{n-1,1}}^{\theta_{n-1,2}} \int_{r_1}^{r_2} r^{n-1} \tilde{f}_\mu(r)dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}, \tag{18}$$

$$= V \int_{r_1}^{r_2} r^{n-1} \tilde{f}_\mu(r)dr, \tag{19}$$

$$= \frac{V}{|\mathbb{S}^{n-1}|}(F_\mu(r_2) - F_\mu(r_1)). \tag{20}$$

我们还计算:

$$\nu(T_\nu^{[-1]}(B)) = \int_{T_\nu^{[-1]}(B)} f_\nu(x)dx, \tag{21}$$

$$= \int_{\theta_{1,1}}^{\theta_{1,2}} \cdots \int_{\theta_{n-1,1}}^{\theta_{n-1,2}} \int_{F_\nu^{[-1]}\circ F_\mu(r_1)}^{F_\nu^{[-1]}\circ F_\mu(r_2)} r^{n-1}\tilde{f}_\nu(r)drd\theta_1 \dots d\theta_{n-1}, \tag{22}$$

$$= V\int_{F_\nu^{[-1]}\circ F_\mu(r_1)}^{F_\nu^{[-1]}\circ F_\mu(r_2)} r^{n-1}\tilde{f}_\nu(r)dr, \tag{23}$$

$$= \frac{V}{|\mathbb{S}^{n-1}|}(F_\nu \circ F_\nu^{[-1]} \circ F_\mu(r_2) - F_\nu \circ F_\nu^{[-1]} \circ F_\mu(r_1)), \tag{24}$$

$$= \frac{V}{|\mathbb{S}^{n-1}|}(F_\mu(r_2) - F_\mu(r_1)), \tag{25}$$

$$= \mu(B). \tag{26}$$

因此，我们已经证明了 $(T_\nu)_\#\nu = \mu$。

定义 $\hat{} f_\nu(t) := |\mathbb{S}^{n-1}|\tilde{f}_\nu(t)t^{n-1}$ 以及 $\hat{} f_\mu(t) := |\mathbb{S}^{n-1}|\tilde{f}_\mu(t)t^{n-1}$。由于它们都是 $[0,\infty)$ 上的密度，我们在 $[0,\infty)$ 上定义 f_ν 与 $\hat{}f_\mu$ 之间的最优传输问题。根据定理 8，所得的最优映射为 $S(r) = F_\mu^{-1} \circ F_\nu(r)$。接着注意到 $T_\nu(x) = S(|x|)\hat{} x$。

为了证明 ϕ_ν 是 c-凹的，我们需要证明存在一个函数$\beta: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$，使得:

$$\phi_\nu(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^n}\{h(|x-y|) - \beta(y)\}. \tag{27}$$

我们通过以下方式定义 $w: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$w(r) = h(|r - S(r)|), \tag{28}$$

我们知道，对于 $[0,\infty)$ 上的最优传输问题， w 是 c-凹的，因为 S是最优的。因此，我们知道存在一个函数 $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得:

$$w(r) = \inf_{r'\in\mathbb{R}}\{h(|r-r'|) - \alpha(r')\}. \tag{29}$$

由于对于满足 $x = ax'$（其中某个 $a \geq 0$）的 x'，我们有:

$$\inf_{y\in\mathbb{R}^n}\{h(|x-y|) - \alpha(y)\} \leq \inf_{y\in\mathbb{R}^n, y=ax, a\geq 0}\{h(|x-y|) - \alpha(y)\} \tag{30}$$

$$= \inf_{y\in\mathbb{R}^n, y=ax, a\geq 0}\{\alpha(y) - h(||x| - |y||)\} = w(|x|). \tag{31}$$

但是，根据反三角不等式: $||x| - |y|| \leq |x-y|$。由于 h 是其自变量的增函数，我们有:

$$h(||x| - |y||) \leq h(|x-y|). \tag{32}$$

因此，我们有:

$$\inf_{y\in\mathbb{R}^n}\{h(|x-y|) - \alpha(y)\} \geq \inf_{y\in\mathbb{R}^n}\{h(||x| - |y||) - \alpha(y)\} \tag{33}$$

$$= w(|x|). \tag{34}$$

因此，我们发现存在一个满足 $\beta(y) = \alpha(|y|)$ 的 $\beta(y)$，使得:

$$\phi_\nu(x) = w(|x|) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{\beta(y) - h(|x-y|)\}, \tag{35}$$

因此， ϕ_ν 是 c-凸的，从而 T_ν 是从 ν 到 μ 的最优传输映射。我们可以将公式（11）中的常数 C 取为零。

□

注释13。 当然，这个定理可以推广，参见 *Thorpe* [24] 和 *Maggi* [18]。例如， h 的严格凸性也可以放宽为仅要求凸性。此外， $h(0) = 0$ 这一条件并非必需，因为可以通过重新定义代价函数来改变一个常数，而不影响最优传输问题的最优解。

下面我们证明一个在后文中会用到的引理:

引理14。 设 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的径向对称测度，其可积密度函数为 f。定义 $\tilde{f}(|x|) = f(x)$和 $F(r) := |\mathbb{S}^{n-1}| \int_0^r \tilde{f}(r) r^{n-1} dr$。令 $\tilde{f}$满足$\tilde{f}(t) \geq m(\tau) > 0$，其中 $t \in [0, \tau]$。那么， F严格单调，并且 $F^{-1}\colon [0,1] \to [0,\infty)$ 存在，且 F^{-1} 满足以下界:

$$|F^{-1}(t_2) - F^{-1}(t_1)| \leq \frac{n}{m(\tau)|\mathbb{S}^{n-1}| \min\{r_2^{n-1}, r_1^{n-1}\}} |r_2 - r_1|, \tag{36}$$

对于 t_1, t_2，满足 $0 \leq F^{-1}(t_1)\ F^{-1}(t_2) \leq \tau$。

证明。 不失一般性，假设 $r_2 \geq r_1$。由于 F 严格单调，因此存在良定义的反函数 F^{-1}。于是,

$$|F^{-1}(t_2) - F^{-1}(t_1)| = |r_2 - r_1| \tag{37}$$

$$= \frac{n}{\sum_{i=0}^{n-1} r_1^i r_2^{n-1-i}} \int_{r_1}^{r_2} r^{n-1} dr \tag{38}$$

$$\leq \frac{n}{m(\tau) \sum_{i=0}^{n-1} r_1^i r_2^{n-1-i}} \int_{r_1}^{r_2} \tilde{f}(r) r^{n-1} dr \tag{39}$$

$$= \frac{n}{m(\tau)|\mathbb{S}^{n-1}| \sum_{i=0}^{n-1} r_1^i r_2^{n-1-i}} |t_2 - t_1| \tag{40}$$

$$\leq \frac{1}{m(\tau)|\mathbb{S}^{n-1}| \min\{r_1^{n-1}, r_2^{n-1}\}} |t_2 - t_1|. \tag{41}$$

□

注释15。 我们将把引理的结论应用于源分布和目标分布。由于目标分布具有紧支撑，常数 $m(\tau) = m$ 的选取将是一致的。对于源分布，常数 $m(\tau)$ 将取决于 τ，正如记号所示。

3.2. 逆最优径向映射的收敛速率 T_ν。利用定理11中给出的最优传输映射的显式形式，我们可以计算映射 $T_{\nu;R}$ 到 T_ν 的收敛速率。在合理的条件下，收敛速度会非常快，即 $\mathcal{O}(1 - F_\nu(R))$.

命题16。 设代价函数为 $c(x, y) = h(\|x - y\|)$，其中 $h(z)$ 递增且严格凸，并且 $h(0) = 0$。设存在 $m > 0$，使得 $f_\mu \geq m > 0$ 对于 $x \in \Omega$ 成立，且令 $f_\nu > 0$。那么，对于 $R \geq R_0$，有如下估计，其中 R_0 是满足 $F_\nu(R_0) \geq 1/2$ 的最小值:

$$|T_{\nu;R}(x) - T_\nu(x)| \leq C(m, n, |x|)(1 - F_\nu(R)), \tag{42}$$

其中常数由不等式 (46) 给出。

证明。对于 $x = 0$，我们有 $T_\nu(x) = T_{\nu;R}(x) = 0$。对于 $x \neq 0$，有：

$$\|T_\nu(x) - T_{\nu;R}(x)\| = \left| F_\mu^{-1} \circ F_\nu(|x|) - F_\mu^{-1} \circ \left(\frac{F_\nu(|x|)}{F_\nu(R)} \right) \right|. \tag{43}$$

由引理14应用于 F_μ，可得：

$$\left| F_\mu^{-1} \circ F_\nu(|x|) - F_\mu^{-1} \circ \left(\frac{F_\nu(|x|)}{F_\nu(R)} \right) \right| \leq \frac{1}{m|\mathbb{S}^{n-1}|(F_\mu^{-1} \circ F_\nu(|x|))^{n-1}} \left(F_\nu(|x|) - \frac{F_\nu(|x|)}{F_\nu(R)} \right) \tag{44}$$

$$= \frac{F_\nu(|x|)}{m|\mathbb{S}^{n-1}|(F_\mu^{-1} \circ F_\nu(|x|))^{n-1} F_\nu(R)} \left(1 - F_\nu(R)\right). \tag{45}$$

现在利用事实 $F_\nu(|x|) \leq 1$，并选取 $R \geq R_0$，其中 R_0 是满足 $F_\nu(R_0) \geq \frac{1}{2}$ 的最小值。此外，由于 $f_\nu(x) > 0$，若 $|x| > 0$，则 $F_\nu(|x|) = \int_0^{|x|} \tilde{f}_\nu(r) r^{n-1} dr > 0$。因此，存在一个单调递增函数 $p\colon [0, \infty) \to [0, \frac{1}{2}\mathrm{diam}(\Omega)]$，使得对于 $t > 0$，有 $p(t) > 0$，并且满足 $F_\nu(|x|) = \int_0^r \tilde{f}_\mu(t) t^{n-1} dt$ 的 r 的值满足 $r = p(|x|)$，其中对于 $t > 0$，有 $p(t) > 0$。因此，对于 $R \geq R_0$，我们有：

$$|T_{\nu;R}(x) - T_\nu(x)| \leq \frac{2}{m|\mathbb{S}^{n-1}|p(|x|)^{n-1}} (1 - F_\nu(R)) \tag{46}$$

$$= C(m, n, |x|)(1 - F_\nu(R)). \tag{47}$$

□

3.3. 径向映射的收敛 T_μ。现在需要计算最优映射 T_μ的收敛情况。结果总结如下命题~，该命题表明渐近收敛速度很快，尤其是在 f_μ 本质有界的情况下。

命题*17*。固定 $y \in \Omega$ 的内部。接着，令 x 和 x_R 为满足$T_\nu(x) = y$和 $T_{\nu;R}(x_R) = y$的点。设代价函数 $c(x, y) = h(\|x - y\|)$，其中$h(z)$是单调递增、可微且严格凸的函数，满足 $h(0) = 0$，并且存在~ ~ ~ m、$M \in \mathbb{R}$，使得 $M \geq m > 0$ 和 $0 < m \leq f_\mu$、$\|f_\mu\|_{L^\infty} \leq M$ 和 $f_\nu > 0$。那么，_存在单调递增函数 $q\colon [0, \frac{1}{2}\mathrm{diam}(\Omega)] \to [0, \infty)$，且对于 $t > 0$，有 $q(t) > 0$：

$$|x - x_R| \leq \frac{M|y|^n}{m(q(|y|))|\mathbb{S}^{n-1}|q\left(\frac{|y|}{2}\right)^{n-1}} (1 - F_\nu(R)). \tag{48}$$

~如果 f_μ 的本质上界不存在，那么令 ω 为 F_μ的连续模，我们有：

$$|x - x_R| \leq \frac{1}{m(q(|y|))|\mathbb{S}^{n-1}|q\left(\frac{|y|}{2}\right)^{n-1}} \omega(|y|(1 - F_\nu(R))). \tag{49}$$

证明。由定理11，我们有：

$$|x - x_R| = \left| F_\nu^{-1} \circ F_\mu(|y|) - F_\nu^{-1} \circ F_\mu(F_\nu(R)|y|) \right|. \tag{50}$$

令 $\tilde{f}_\nu(t) \geq m > 0$在$[0, F_\nu^{-1} \circ F_\mu(|y|)]$上成立。然后，如果我们对 F_ν^{-1} 应用引理14，并沿用命题16中的论证思路（该命题要求 f_μ 有界）

且远离零点，我们得到存在一个单调递增函数 $q:[0,\frac{1}{2}\mathrm{diam}(\Omega)]\to[0,\infty)$，满足 $q(t)>0$，对 $t>0$ 成立，使得：

(51)
$$\left|F_\nu^{-1}\circ F_\mu(|y|)-F_\nu^{-1}\circ(F_\nu(R)|y|)\right|\le\frac{1}{m(q(|y|))|\mathbb{S}^{n-1}|q(F_\nu(R)|y|)^{n-1}}\left|F_\mu(|y|)-F_\mu(F_\nu(R)|y|)\right|.$$

令我们选择 $R\ge R_0$，其中 R_0 是使得 $F_\nu(R_0)\ge\frac{1}{2}$ 的最小值。那么，

(52)
$$\left|F_\nu^{-1}\circ F_\mu(|y|)-F_\nu^{-1}\circ(F_\nu(R)|y|)\right|\le\frac{1}{m(q(|y|))|\mathbb{S}^{n-1}|q\left(\frac{|y|}{2}\right)^{n-1}}\left|F_\mu(|y|)-F_\mu(F_\nu(R)|y|)\right|.$$

由于连续且有界的单调函数是一致连续的，因此存在一个连续模 $\omega:[0,\infty)\to[0,\infty)$，使得：53

$$\left|F_\nu^{-1}\circ F_\mu(|y|)-F_\nu^{-1}\circ F_\mu(F_\nu(R)|y|)\right|\le\frac{1}{m(q(|y|))|\mathbb{S}^{n-1}|q\left(\frac{|y|}{2}\right)^{n-1}}\omega(|y|(1-F_\nu(R))).$$

根据微积分基本定理和以下估计，我们有：当且仅当被积函数 $\tilde{f}_\mu(r)r^{n-1}$ 在局部是本质有界时，F_μ 是局部利普希茨的；而这当且仅当 f_μ 在上方本质有界时成立，估计式为：

$$|F_\mu(r_2)-F_\mu(r_1)|=\int_{r_1}^{r_2}\tilde{f}_\mu(r)r^{n-1}dr \tag{54}$$

$$\le M\max\{r_1^{n-1},r_2^{n-1}\}|r_2-r_1|. \tag{55}$$

因此，将其应用于方程（53），可得：

$$|x-x_R|\le\frac{M|y|^n}{m(q(|y|))|\mathbb{S}^{n-1}|q\left(\frac{|y|}{2}\right)^{n-1}}(1-F_\nu(R)). \tag{56}$$

□

3.4. 逆径向势函数的收敛 $\phi_{\nu;R}$。尽管径向势函数的表达式相对简单，但要获得势函数的收敛速率，主要的挑战在于，对于许多我们感兴趣的代价函数，通常不存在代价函数的连续模；其中包括 $h(t)=t$ 或 $h(t)=t^2$，因为这些函数无界。有鉴于此，我们简化假设，以便获得显式的收敛率。

命题*18.* 设 $R\ge R_0$，其中 R_0 是满足 $F_\nu(R_0)\ge1/2$ 的最小值，并设 R_1 满足：对所有 $R\ge R_1$，均有 $|\|x-T_R(x)\|-\|x-T(x)\||\le\epsilon$。设代价函数 $c(x,y)=h(\|x-y\|)$，其中 $h(z)$ 是递增的、几乎处处可微且严格凸的，并且 $h(0)=0$。假设存在一个 $M\ge0$ 和一个整数 $k\ge0$，使得 $\|h'(r)\|_{L^\infty}\le\frac{M}{2^k}r^{2^k-1}$。那么，对所有 $R\ge\max\{R_0,R_1\}$，均有：

$$|\phi_{\nu;R}(x)-\phi_\nu(x)|\le C(k,diam(\Omega),M,m,n,\|x\|)\|x\|^{2^k-1}(1-F_\nu(R)), \tag{57}$$

其中，$C(\mu、k、diam(\Omega))$ 在不等式(62)中给出。

证明。我们有：

(58)

$$|\phi_\nu(x) - \phi_{\nu;R}(x)| = \left| \int_{\|x - T_\nu(x)\|}^{\|x - T_{\nu;R}(x)\|} h'(r) dr \right|$$

(59)
$$\leq \left| \int_{\|x - T_\nu(x)\|}^{\|x - T_{\nu;R}(x)\|} |h'(r)| dr \right|,$$

(60)
$$= M \left| \|x - T_\nu(x)\|^{2^k} - \|x - T_{\nu;R}(x)\|^{2^k} \right|$$

(61)
$$= M \left| \|x - T_\nu(x)\| - \|x - T_{\nu;R}(x)\| \right| \prod_{i=0}^{k-1} \left(\|x - T_\nu(x)\|^{2^i} + \|x - T_{\nu;R}(x)\|^{2^i} \right)$$

由于 $T_{\nu;R}(x) \to T_\nu(x)$，我们可以找到一个 $R_1 > 0$，使得对于固定的 $\epsilon > 0$，有 $\left| \|x - T_{\nu;R}(x)\| - \|x - T_\nu(x)\| \right| \leq \epsilon$ 对所有 $R \geq R_1$ 都成立。然后，令 $\gamma := \|x\| + \frac{1}{2}\operatorname{diam}(\Omega) + \epsilon$，我们看到，对于 $R \geq R_1$，有 $\max\{\|x - T_\nu(x)\|, \|x - T_{\nu;R}(x)\|\} \leq \gamma$。因此，

(62)
$$\frac{1}{2^k} \left| \|x - T_\nu(x)\| - \|x - T_{\nu;R}(x)\| \right| \prod_{i=0}^{k-1} \left(\|x - T_\nu(x)\|^{2^i} + \|x - T_{\nu;R}(x)\|^{2^i} \right)$$

(63)
$$\leq M \|T_\nu(x) - T_{\nu;R}(x)\| \prod_{i=0}^{k-1} 2\gamma^{2^i}$$

(64)
$$= 2M\gamma^{2^k - 1} \|T_\nu(x) - T_{\nu;R}(x)\|$$

(65)
$$\leq 2MC(m, n, \|x\|)\gamma^{2^k - 1}(1 - F_\nu(R))$$

(66)
$$= C(k, \operatorname{diam}(\Omega), M, m, n, \|x\|)(1 - F_\nu(R)),$$

其中，第一个不等式是由反三角不等式得到的。□

正如预期的那样，在 $B_R(0)$ 的边界上，收敛率有所下降。

3.5. 径向势函数的收敛速率 $\phi_{\mu;R}$。势函数及其反函数的收敛速率具有相同的界，除非在 $\partial\Omega$ 上；这里假设代价函数满足强制性条件。

命题*19.* 设代价函数 $c(x, y) = h(\|x - y\|)$，其中 $h(z)$ 递增、几乎处处可微且严格凸，并且 $h(0) = 0$ *and* $h'(r) \to \infty$ *as* $r \to \infty$。设存在一个 $M \geq 0$ 和一个整数 $k \geq 0$，使得 $\|h'(r)\|_{L^\infty} \leq \frac{M}{2^k} r^{2^k - 1}$。对于 $y \in \Omega$ 的内部，我们有一个常数 $C(\mu, k, diam(\Omega), \|\tilde{x}\|) > 0$ 以及 $R_0 > 0$，使得对于所有 $R \geq R_0$，有：

(67)
$$|\phi_{\mu;R}(y) - \phi_\mu(y)| \leq C(\mu, k, diam(\Omega), \|\tilde{x}\|)(1 - F_\nu(R)).$$

证明。我们回顾 Ma、Trudinger 和 Wang [17] 中的 c-变换定义，以及正向与逆向问题的势函数互为

c-变换。因此，我们有：

$$\phi_\mu(y) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n}\{c(x,y) - \phi_\nu(x)\}, \tag{68}$$

$$\phi_{\mu;R}(y) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n}\{c(x,y) - \phi_{\nu;R}(x)\}. \tag{69}$$

我们将证明，对于每个 $y \in \Omega$ 的内部，都存在 $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$，使得 $\phi_\mu(y) = c(\tilde{x}, y) - \phi_\nu(\tilde{x})$。由此可知，对于这样的 y，有：

$$\phi\mu; R(y) \le c(\tilde{x}, y) - \phi_{\nu;R}(\tilde{x}) \tag{70}$$

$$= \phi_\nu(\tilde{x}) + \phi_\mu(y) - \phi_{\nu;R}(\tilde{x}). \tag{71}$$

同理，

$$\phi_{\mu;R}(y) - \phi_\mu(y) \le \phi_\nu(\tilde{x}) - \phi_{\nu;R}(\tilde{x}). \tag{72}$$

同样，我们将证明，对于每个 $y \in \Omega$ 的内部，都存在 $\tilde{x}_R \in \mathbb{R}^n$，使得 $\phi_{\mu;R}(y) = c(\tilde{x}_R, y) - \phi_\nu(\tilde{x}_R)$。由此可得：

$$\phi_\mu(y) \le c(\tilde{x}_R, y) - \phi_\nu(\tilde{x}_R) \tag{73}$$

$$= \phi_{\nu;R}(\tilde{x}_R) + \phi_{\mu;R}(y) - \phi_\nu(\tilde{x}_R), \tag{74}$$

因此，

$$\phi_\mu(y) - \phi_{\mu;R}(y) \le \phi_{\nu;R}(\tilde{x}_R) - \phi_\nu(\tilde{x}_R). \tag{75}$$

因此，我们有：

$$|\phi_\mu(y) - \phi_{\mu;R}(y)| \tag{76}$$

$$\le \max\{C(k, \operatorname{diam}(\Omega) M, m, n, \|\tilde{x}\|) C(k, \operatorname{diam}(\Omega) M, m, n, \|\tilde{x}_R\|)\}(1 - F_\nu(R))。$$

对于 $y \in \Omega$ 的内部，我们有 x 满足 $\nabla_x c(x,y) - \nabla\phi_\nu(x) = 0$ 是下确界的一个候选值。对于每个 $y \in \Omega$ 的内部，该方程都有解，因为 $\nabla_x c(x, T_\nu(x)) - \nabla\phi_\nu(x) = 0$ 有解，并且根据假设，对于每个$y \in \Omega$ 的内部，$T_\nu(x) = F_\mu^{-1} \circ F_\nu(x)$ˆ$x = y$ 都可解。因此，我们将证明当 $\|x\| \to \infty$时，下确界无法取到。由于当 $\|x\| \to \infty$时，$\|T_\nu(x)\| \to \frac{1}{2}\operatorname{diam}(\Omega)$，也就是说$T_\nu(x)$会随着 $\|x\|$ 增大而“趋近”Ω 的边界，并且 $y \notin \partial\Omega$，我们发现˜ ˜当 $\|x\| \to \infty$时，存在一个半径 R，使得对于所有 $\|x\| \le R$，都存在一个 $\epsilon > 0$，满足 $|\|x-y\| - \|x - T_\nu(x)\|| \ge \epsilon$。因此，对于 $\|x\| \ge R$，我们有˜

$$c(x,y) - \phi_\nu(x) = h(\|x-y\|) - \int_0^{\|x-T_\nu(x)\|} h'(r)dr \tag{77}$$

$$= \int_{\|x-T_\nu(x)\|}^{\|x-y\|} h'(r)dr \tag{78}$$

$$\ge \int_{\|x-y\|-\epsilon}^{\|x-y\|} h'(r)dr. \tag{79}$$

由于当 $r \to \infty$ 时，$h'(r) \to \infty$，我们有，当 $\|x\| \to \infty$ 时，$c(x,y) - \phi_\nu(x) \to \infty$。因此，下确界不可能在 $\|x\| \to \infty$ 时取得，所以对于满足 $\nabla_x c(\tilde{x}, y) - \nabla\phi_\nu(\tilde{x}) = 0$ 的 $\tilde{x}$，下确界能够取得。完全相同的推理表明，$c(x,y) - \phi_{\nu;R}(x)$ 的下确界在满足 $\nabla_x c(\tilde{x}_R, y) - \nabla\phi_\nu(\tilde{x}_R) = 0$ 的 $\tilde{x}_R$ 处取得。因此，我们证明了不等式（76）。

最后一步是估计 $\|\tilde{x}_R\|$。由于 $\tilde{x}_R$ 满足 $\nabla_x c(\tilde{x}_R, y) - \nabla\phi_\nu(\tilde{x}_R) = 0$，并且对每个 $y \in \Omega$ 的内部，我们有存在一个 x 使得 $T_\nu(x) = y$，我们

得到 $T_\nu^{-1}(y) = \tilde{x}_R$。我们已在定理 17 中建立了 $\tilde{x}_R$ 到 $\tilde{x}$ 的收敛率。因此，固定 $\epsilon > 0$，存在一个 $R_2 > 0$ 使得对所有$R \geq R_2$，我们有 $\|\tilde{x} - \tilde{x}_R\| \leq \epsilon$。因此，对于 $R \geq R_2$，我们有这些界

$$|\phi_\mu(y) - \phi_{\mu;R}(y)| \leq C(k, \operatorname{diam}(\Omega), M, m, n, \|\tilde{x}\|)(1 - F_\nu(R)). \tag{80}$$

我们指出，对于 $y \notin \Omega$，公式（68）中的下确界在 $\|x\| \to \infty$时 $-\infty$达到。对于 $y \in \partial \Omega$，上述推理无法得出结论。□

3.6. 某些类别分布的分布函数的收敛速率 μ**.** 在本节的收敛结果中，所有估计都取决于分布函数 $F_\nu(t)$随 $t \to \infty$收敛到1的快慢。显式速率进而取决于该累积分布函数，而该累积分布函数取决于概率测度 ν。

在本稿中，我们考察两类概率分布 ν。第一类是最大有限矩为第 p阶矩的概率分布。第二类分布是对数凹的，见定义 10。正如预期，对于前者， $1 - F_\nu(R)$以不差于常数乘以 R^{-p} 的速率收敛到0；对于后者，收敛率是“指数”的（精确速率见引理 21。

有限的 p 阶矩的结果很容易得到：

引理 20. 设 μ 是一个径向对称概率分布，其密度函数 f_ν 径向对称，且 $f_\nu(|x|) = f(x)$ ，令 p 表示满足 $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^p d\mu(x) =: M_p$ 有限的最大正整数。那么，

$$\frac{1 - F_\nu(R)}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \leq M_p R^{-p}. \tag{81}$$

证明。 若 $\mu \in \mathcal{P}^p(\mathbb{R}^n)$，则可推出：

$$\int_0^\infty r^{n-1+p} \tilde{f}_\nu(r) dr < \infty. \tag{82}$$

因此，对于这类概率分布，我们得到：

$$\frac{1 - F_\nu(R)}{|\mathbb{S}^{n-1}|} = \int_R^\infty r^{n-1} \tilde{f}_\nu(r) dr \tag{83}$$

$$= \int_R^\infty r^{-p} r^{n-1+p} \tilde{f}_\nu(r) dr \tag{84}$$

$$\leq R^{-p} \int_R^\infty r^{n-1+p} \tilde{f}_\nu(r) dr \tag{85}$$

$$\leq M_p R^{-p}. \tag{86}$$

□

对于对数凹分布，我们可以得到指数衰减速率。

引理 21. 设 μ 是$\mathbb{R}^n$上的径向对称对数凹概率分布，即 μ 的分布函数对 $x \in \mathbb{R}^n$为 $e^{-\varphi(|x|)}$ ，其中 φ 是凸函数且 $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varphi(x)} dx = 1$。则 φ 是真凸函数，且存在常数 $r_0 > 0$、 $y > 0$ ，使得 $\varphi(x) \geq y(|x| - r_0) + \varphi(r_0)$。此外，我们有

存在常数 $C = C(y, r_0, n)$，当 $R \geq 1$时，由式(91)给出，使得

$$\frac{1 - F_\nu(R)}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \leq C(y, r_0, n) R^{n-1} e^{-yR}. \tag{87}$$

证明。首先，我们证明 φ 必须是真凸函数。如果它不是真凸函数，那么对于所有 r，可能都有 $\varphi(r) = +\infty$，此时 $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\varphi(|x|)} dx = 0$，这与我们有一个概率分布相矛盾。否则，对于某个 r，有$\varphi(r) = -\infty$。在这种情况下，我们只能得出结论：只有 $\varphi(0) = -\infty$，否则概率分布的积分就会发散。但是，为了保持凸性，对于 $r > 0$，$\varphi(r) = +\infty$，这再次导致矛盾。因此，φ 是真凸函数。

根据凸性和径向对称性，$\varphi(r)$ 的最小值必然出现在$\varphi(0) = \varphi_0$。函数 $\varphi(r)$ 单调递增。它不可能是常数，否则概率分布的积分将为无穷大。

令 $\bar{\varphi}(r)$ 表示 $\varphi(r)$ 的下半连续包络。由于 φ 可能不可微，我们必须使用次微分进行论证，见定义5。由于 $\partial\varphi(r) = \{0\}$ 对所有 r 都成立，当且仅当 $\varphi =$ 为常数，因此存在一个值 r_0，使得 $\partial\varphi(r)(r_0) \neq \{0\}$，且 $\partial\varphi(r)(r_0) \neq \{+\infty\}$。这里，我们对 $\varphi(r)$ 作出这一断言，因为有可能 $\partial\varphi(r) = \{0\}$ 对所有 $r < r_0$ 都成立，而此时若 φ 恰好不是下半连续的，则 $\partial\varphi(r) = \emptyset$ 对所有 $r \geq r_0$ 都成立。令 $y \in \varphi(r_0)$ 满足 $y \neq 0$ 和 $y < \infty$。注意，由于 φ 单调递增，且 φ 取最小值的充要条件是 $0 \in \varphi(r_0)$，我们有 $y > 0$。这种对 y 的选取是可行的，因为 $\partial\varphi(r_0) \neq \{0\}$，并且一点处的次微分可以包含无穷大，但不能等于集合 $\{+\infty\}$。作出这一选择后，我们有：

$$\varphi(|x|) \geq y(|x| - r_0) + \varphi(r_0), \tag{88}$$

因为凸函数的切线位于该凸函数的图像下方。现在，我们利用 φ 上的这个下界来估计以下内容：

$$\frac{1 - F_\nu(R)}{|\mathbb{S}^{n-1}|} = \int_R^\infty r^{n-1} e^{-\varphi(r)} dr \tag{89}$$

$$\leq e^{yr_0 - \varphi(r_0)} \int_R^\infty r^{n-1} e^{-yr} dr. \tag{90}$$

到这里，我们可以直接进行计算，首先反复运用分部积分。完成分部积分后，本可以就此结束，但我们选择进一步化简表达式，以便清楚地看出其对

on R的依赖关系。计算如下:

$$\frac{1-F_\nu(R)}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \leq e^{yr_0-\varphi(r_0)-yR}\left(\frac{R^{n-1}}{y^n}+\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-1)\dots(n-k+1)}{y^k}R^{n-k}\right) \tag{91}$$

$$\leq e^{yr_0-\varphi(r_0)-yR}R^{n-1}\left(\frac{1}{y^n}+\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-1)\dots(n-k+1)}{y^k}\right) \tag{92}$$

$$= \frac{e^{yr_0-\varphi(r_0)-yR}R^{n-1}}{y^n}\left(1+(n-1)!\sum_{k=0}^{n-2}\frac{y^k}{k!}\right) \tag{93}$$

$$\leq \frac{e^{yr_0-\varphi(r_0)-yR}R^{n-1}}{y^n}\left(1+(n-1)!\left(e^y-\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\right)\right) \tag{94}$$

$$= C(y,r_0,n)R^{n-1}e^{-yR}, \tag{95}$$

其中，第二行源于使用 $R \geq 1$，第三行源于代数运算，第四行则源于将泰勒定理应用于在 $y=0$处展开的函数e^y 。□

4. Convergence Result for General Case

本节构成本文的主要结果。我们关注源测度与目标测度不再假设为径向对称的情形。在该情形下，我们仅针对代价函数 $c(x,y)=\frac{1}{2}\|x-y\|^2$建立收敛结果。在第4.1节中，我们介绍所考虑的问题设置、Delalande和M`erigot的基本 $L^2$ 估计 [7], 以及截断问题在Wasserstein-2距离下的稳定性。在第4.2节中，我们展示如何从上方估计距离 $W_1(\nu,\nu_R)$，并据此证明：对于具有有限 $p$阶矩的测度 $\nu$ ，以及 $\nu$ 为对数凹测度的情形，截断方法的 $L^2$收敛率。随后，本节的其余部分不再明确提及截断方法。这样做是为了说明，一旦建立了 $L^1$ 收敛率，无论 $\nu$ 采用何种方式进行近似，都可以得到一整套非常有力的结果。请注意，尽管我们的目标是利用这些结果研究目标测度具有无界支撑的情形，但由于Delalande和M`erigot给出的 L^2 界同样适用于目标测度 ν 具有紧支撑的情形，因此这些结果可以立即推广到目标测度具有紧支撑的情形。唯一的区别在于我们最终得到的具体显式收敛率。

在第4.3节中，我们证明了布雷尼耶势函数逐点收敛。这进而表明，最优映射几乎处处收敛。在第4.4节的主要结果（定理 39）中，我们证明，对于布雷尼耶势函数满足 H¨older 连续性的情形，可以确定一致的显式收敛速率。在第4.5节中，我们证明，关于布雷尼耶势函数的同样收敛结果大体上也适用于逆 Brenier 势。最后，在第4.6节中，我们证明逆映射几乎处处收敛。

4.1. L^2 收敛率。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一个紧凸集，且$c(x,y) = \frac{1}{2}\|x-y\|^2$并且 spt($\mu$) $=\Omega$。设 spt(ν) $\subset \mathbb{R}^n$无界。我们进一步假设， μ 和 ν 相对于勒贝格测度绝对连续，并且 $\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$，也就是说，存在一个有限常数 $M_2 > 0$ 使得 $\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2 d\nu(x) \leq M < \infty$。特别是，最后一个假设保证了 $W_2(\mu,\nu)$ 的有限性。我们还引入集合的以下性质:

定义 22. 给定一个闭集 $A \subset \mathbb{R}^n$，若对于某个固定的 $\epsilon > 0$，存在一个集合 A' 使得 $A = \cup_{x \in A'} B_\epsilon(x)$，则称 A 具有内 ϵ-球性质。

注意，对于某个 ϵ，Ω 具有 ϵ-球性质，当且仅当 Ω 是某个集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ 与 $B_\epsilon(0)$ 的闵可夫斯基和，即 $\Omega = S \oplus B_\epsilon(0)$。在第4.4节中，我们将针对 $p > n$ 和 $p \geq 4$ 的情形推导出明确的逐点收敛速率，其中 p 是 ν 的最高有限阶矩。为了推导出这样的速率，我们将假设存在某个 $\epsilon > 0$，使得 Ω 满足内ϵ-球性质。对于 Ω 为矩形的情形，我们也将建立类似的结果。

本节中的收敛结果得益于 Delalande 和 M´erigot [7] 建立的重要 L^2稳定性结果。这些结果将导出我们在本节中建立的明确逐点收敛速率，因为我们正在用截断近似来逼近目标测度 ν。在 Delalande 和 M´erigot 的 L^2 收敛速率不适用的情况下，我们仍将提供保证逐点收敛的定理，以期此类 L^2 稳定性结果未来能够得到明确建立。

在本节中，我们通过要求$\int_\Omega \phi_\mu(x)dx = 0$来确定Brenier势 ϕ_μ 的任意常数的选取。我们将使用的Delalande和M`erigot [7] 的主要结果是如下 L^2 稳定性结果，并已根据本文的语境加以改写：

定理23（Delalande与M`erigot）。设 p 表示μ 与 ν的最高有限矩，并将该矩的值记为 M_p，考虑满足 $p > n$ 与 $p \geq 4$的 μ 和ν。设 μ 的密度函数上下均由常数界定。则，

$$\|T_\mu - T_{\mu;R}\|_{L^2(\mu)} \leq C_{n,p,\overline{\Omega},\mu,M_p} W_1(\nu,\nu_R)^{\frac{p}{6p+16n}}, \tag{96}$$

$$\|\phi_\mu - \phi_{\mu;R}\|_{L^2(\mu)} \leq C_{n,p,\overline{\Omega},\mu,M_p} W_1(\nu,\nu_R)^{1/2}. \tag{97}$$

即使没有 L^2 界，我们也可以证明 $W_2(\mu,\nu_R) \to W_2(\mu,\nu)$，仅需非常弱的假设 $\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$，该假设保证了此问题的Wasserstein-2距离有限。

命题 24. 对于 $p \geq 2$，我们有：

$$W_2(\mu,\nu_R) \to W_2(\mu,\nu), \tag{98}$$

其中，$W_2(\mu,\nu)$ 是 μ 与 ν 之间的 *Wasserstein-2*距离，二者均支撑在 $\mathbb{R}^n$ 上。

证明。一旦我们证明了$\nu_R \to \nu$在 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$ 中弱收敛，且对于任意固定的 $x_0 \in \Omega$，有 $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|x_0 - x\|^2 d\nu(x) < \infty$，该证明便可由 Villani [27], 中的定理6.9得出。对于任意 $g \in C_b(\mathbb{R}^n)$，我们有：

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)d\nu_R(x) = \frac{1}{\nu(B_R(0))}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)d\nu(x) \to \int_{\mathbb{R}^n} g(x)d\nu(x), \tag{99}$$

因为当 $R \to \infty$ 时， $\nu(B_R(0)) \to 1$ 。因此， $\nu_R \to \nu$ 弱收敛。固定 $x_0 \in \Omega$，计算得：

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|x_0 - x\|^2 d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|x_0\|^2 d\nu(x) + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|x\|^2 d\nu(x) \tag{100}$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} x_0 \cdot x d\nu(x) \tag{101}$$

$$\leq \frac{1}{2}\|x_0\|^2 + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|x\|^2 d\nu(x) + \int_{\mathbb{R}^n} \|x_0\|\|x\| d\nu(x) \tag{102}$$

$$\leq \frac{1}{2}\|x_0\|^2 + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|x\|^2 d\nu(x) + \int_{|x|\leq 1} \|x_0\| d\nu(x) \tag{103}$$

$$+ \int_{|x|\geq 1} \|x_0\|\|x\|^2 d\nu(x) \tag{104}$$

$$< \infty. \tag{105}$$

□

4.2. 估计 $W_1(\nu, \nu_R)$。我们在两种情形下估计量 $W_1(\nu, \nu_R)$。第一种情形假设 ν 具有最大有限矩 p。第二种情形假设 ν 是对数凹分布，这将使 $W_1(\nu, \nu_R)$指数收敛。首先，我们定义一个量，作为累积分布函数的自然推广；在本文所考察的情形下，该量将控制 $W_1(\nu, \nu_R)$趋于零的收敛速率。我们先给出以下引理，它涵盖最一般的情形，此时 ν只是 $\mathbb{R}^n$中的一个概率分布。

引理25。设 $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$。则以下不等式给出了$\nu$ 与 ν_R之间的 W_1 距离上界：

$$W_1(\nu, \nu_R) \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} |x| d\nu(x) + R(1 - \nu(B_R(0))). \tag{106}$$

证明。对于任意满足 $S_\# \nu = \nu_R$ 的 S，我们有如下界： $W_1(\nu, \nu_R) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |x - S(x)| d\nu(x)$。现在，我们构造一个特定的推前映射 S。定义概率测度为满足 $d\tilde{\nu}(x) := d\nu/(1 - \nu(B_R(0)))$（当 $x \in \mathbb{R}^d \setminus B_R(0)$ 时）且满足 $d\tilde{\nu}(x) = 0$ （当 $x \in B_R(0)$ 时）的唯一测度 $\tilde{\nu}$。此外，定义 $\tilde{\nu}_R$，其中 $d\tilde{\nu}_R(x) = d\nu_R(x) - d\nu(x)$（当 $x \in B_R(0)$ 时），且 $d\tilde{\nu}_R = 0$ （当 $x \in \mathbb{R}^d \setminus B_R(0)$ 时）。设 $M(x)$ 是 $\tilde{\nu}$ 与 $\tilde{\nu}_R$之间任意一个保测映射，例如最优传输映射；由于 ν 具有密度函数，这种映射的存在性得以保证。然后，我们定义映射 $S(x)$ 如下：

$$S(x) := \begin{cases} x, & x \in B_R(0), \\ M(x), & x \in \mathbb{R}^n \setminus B_R(0). \end{cases} \tag{107}$$

注意， $S(x)$ 满足 $S_\# \nu = \nu_R$。根据这些定义，我们得到以下简单估计：

$$W_1(\nu,\nu_R) \le \int_{\mathbb{R}^d} |x-S(x)|d\nu(x) \tag{108}$$

$$= \int_{\mathbb{R}\setminus B_R(0)} |x-M(x)|d\nu(x) \tag{109}$$

$$\le \int_{\mathbb{R}\setminus B_R(0)} (|x|+R)d\nu(x) \tag{110}$$

$$= \int_{\mathbb{R}\setminus B_R(0)} |x|\,d\nu(x) + R(1-\nu(B_R(0)). \tag{111}$$

□

将 n-立方体定义为 $C_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : -1 \le x_1 \le 1, \ldots\ldots, -1 \le x_n \le 1\}$ 和

$$d\nu_{R_C} := \begin{cases} d\nu(x)/\nu(RC_1(0)), & \text{if } x \in RC_1(0) \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{112}$$

则我们有如下结果：

引理 26. 设 $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$。则下述估计界定了$\nu$ 与 ν_{R_C}之间的 W_1 距离：

$$W_1(\nu,\nu_{R_C}) \le \int_{\mathbb{R}^n\setminus RC_1(0)} |x|d\nu(x) + \sqrt{n}R(1-\nu(RC_1(0))). \tag{113}$$

证明与引理25的证明完全相同。在本节中，我们假设了 $\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$。因此，我们将引理25的结果推广到 ν 具有有限 p阶矩的情形。

命题 27. 令 p 表示 ν 的最高有限矩。那么，我们有：

$$W_1(\nu,\nu_R) \le 2M_pR^{1-p}, \tag{114}$$

其中 M_p 是 ν 的 p 阶矩。

证明. 由于 p 阶矩有界，直接应用 Hölder 不等式可得：

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_R(0)} |x|\,d\nu(x) \le (1-\nu(B_R(0)))^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_R(0)} |x|^p\,d\nu(x)\right)^{1/p} \tag{115}$$

$$\le (M_p)^{1/p}(1-\nu(B_R(0)))^{1/q}, \tag{116}$$

其中 q 是 p的共轭。显然，这个界还可以进一步收紧，因为积分 $\int_{\mathbb{R}^d} |x|^p\,d\mu(x)$ 有限意味着 $\tilde{M}_p(R) := \int_{\mathbb{R}^d\setminus B_R(0)} |x|^p\,d\mu(x) \to 0$当 $R\to\infty$ 时。因此，根据引理25，我们得到如下估计：

$$W_1(\nu,\nu_R) \le R(1-\nu(B_R(0))) + (M_p)^{1/p}(1-\nu(B_R(0)))^{1/q}. \tag{117}$$

如果存在常数 $C(\nu)$，使得对于足够大的 R，有 $(1-\nu(B_R(0))) \le C(\nu)R^{-p}$，那么项 $(1-\nu(B_R(0)))^{1/q}$ 占主导，因此我们得到：

$$W_1(\nu,\nu_R) \le (1-\nu(B_R(0)))^{1/q}\left((M_p)^{1/p} + R(1-\nu(B_R(0)))^{1/p}\right) \tag{118}$$

$$= (1-\nu(B_R(0)))^{1/q}\left((M_p)^{1/p} + (C(\nu))^{1/p}\right). \tag{119}$$

现在我们应用马尔可夫不等式来证明，实际上 $1-\nu(B_R(0)) \leq M_p R^{-p}$，即不等式（118）成立。设随机变量 X 服从分布律 μ。那么，

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} d\mu(x) = \mathbb{P}[|X| \geq R], \tag{120}$$

$$= \mathbb{P}[|X|^p \geq R^p] \tag{121}$$

$$\leq \mathbb{E}[X^p] R^{-p} \tag{122}$$

$$= M_p R^{-p}. \tag{123}$$

因此，我们看到

$$W_1(\nu, \nu_R) \leq 2 M_p^{1/p} M_p^{1/q} R^{-p/q} \tag{124}$$

$$= 2 M_p R^{1-p}. \tag{125}$$

□

对于 n 维立方体，我们也有以下结果：

命题 28. 令 p 表示 ν 的最高有限矩。则有：

$$W_1(\nu, \nu_{R_C}) \leq 2 M_p R^{1-p}. \tag{126}$$

证明。 证明与命题 27 的证明相同，只需作相应调整，并在不等式（120）中加入一行： $\nu(\mathbb{R}^n \setminus RC_1(0)) \leq \nu(\mathbb{R}^n \setminus B_R(0))$。□

对于对数凹分布，我们还可以给出一个界，并进一步收紧常数 $C(\nu)$。当然，对于这类分布，不等式（118）适用。

命题 29. 设 ν 为一个对数凹分布，即 $f_\nu(x) = e^{-\varphi(x)}$，其中 $\varphi(x)$ 是一个凸函数，并设 $R \geq 1$。那么，存在常数 $C = C(\nu, n)$ 以及$a > 0$，使得：

$$W_1(\nu, \nu_R) \leq C(\nu, n) R^n e^{-aR}, \tag{127}$$

其中 $C(\nu, n)$ 由方程 (136)给出。

证明. 在 A-D 部分中，我们证明存在常数 $a > 0$ 和 $b \in \mathbb{R}$，使得 $\varphi(x) \geq a|x| + b$。我们利用 φ 是凸的这一事实，以及 $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varphi(x)} dx = 1$。证明中的大部分难点都在于证明这一点（A-D 部分）。得到这个界后，我们进行常规计算，求出 μ 与 μ_R 之间的 Wasserstein-1 距离（G 部分）。

A 部分）我们首先证明 $\varphi(x)$ 必须是真凸函数。假设$\varphi(x)$不是真凸函数。这意味着 i) 对所有点，$\varphi(x) = +\infty$，此时对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 都有$e^{-\varphi(x)} = 0$，这与 $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varphi(x)} dx = 1$ 这一事实矛盾；或者 ii)$\varphi(x) = -\infty$ 对某个 $x \in \mathbb{R}^n$成立。令 E 表示满足 $\varphi(x) = -\infty$的集合。那么 E必定是勒贝格测度为零的凸集，因此它是某个超平面的子集。于是 ∂E 是可测集，因为它是凸集的边界，而且其测度为零。集合 ∂E 是 φ能够取有限值的唯一集合。因此，我们不得不由此得出 $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varphi(x)} dx = 0$，这再次构成矛盾。出于类似的原因，$\varphi$ 不可能仅在一个零测集上取有限值。

B部分）既然我们知道 $\varphi(x)$必定是适当的，不妨假设 $\varphi(x)$在 $\mathbb{R}^n$ 处取得最小值，例如在 $x_0 \in \mathbb{R}^n$处。我们将证明，如果 dom(φ) 的仿射维数等于 n，那么 φ 的最小值必定在某个紧集上取得。此外，

根据可积性条件，dom(φ) 的仿射维数不可能小于 n。

经过仿射坐标变换后，我们假设 $\varphi(0) = 0$。如果 $\varphi(x) = 0$对某个 $x \neq 0$成立，那么沿着连接 x 与 0 的直线，φ必定等于零，因为 φ 是凸的。因此，如果 $\varphi(x)$在距原点任意远处取值为零，那么它在从原点出发的射线上也取值为零。再经过一次仿射坐标变换，我们令这条射线沿正第一坐标轴方向。于是，根据坐标系的选取，对于任意满足 $x_1 \geq 0$ 和 $x_2 = \cdots = x_n = 0$的 x，都有$\varphi(x) = 0$。由于我们在 A部分中证明了，φ 只能在零测集上取有限值，且 dom(φ)是凸的，因此 dom(φ)的仿射维数必定等于 n。所以，int(dom(φ)) $\neq \emptyset$。令 $\tilde{x} \in$ int(dom(φ))。那么，存在一个球 $B_\epsilon(\tilde{x}) \subset$int(dom($\varphi$))，因此对于每个 $y \in B_\epsilon(\tilde{x})$，都有$\varphi(y) < \infty$。由于 e_1 是 dom(φ)的一个衰退方向，因此对于 $t \geq 0$ 以及每个 $y \in B_\epsilon(\tilde{x})$，都有$y + te_1 \in$ dom(φ)。此外，$(e_1, 0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是 epi(φ)的一个衰退方向，因此，对于每个 $t \geq 0$，都有 $\varphi(y + te_1) \leq \varphi(y)$。于是，

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varphi(x)}dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_\epsilon(\tilde{x}+2\epsilon k)} e^{-\varphi(x)}dx \tag{128}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_\epsilon(\tilde{x})} e^{-\varphi(x)}dx = \infty. \tag{129}$$

C部分）假设 $\varphi(x)$ 没有最小值。通过仿射坐标变换，令$\varphi(0) = 0$。那么，$\varphi(x) \to -\infty$ 沿着从原点出发的射线 $R = \{ay$ 单调递减：$a \geq 0, , y \in \mathbb{R}^n\}$。由于 $\varphi(x)$ 是凸函数，它沿射线 R 必定也是凸的。由于$\varphi(0) = 0$，且 φ 是凸的（因此沿射线R单调递减），所以对于 $x \in R$，$\varphi(x) \leq 0$。

然后，我们定义一个新函数 $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$，对于 x，使得 $\varphi(x) \geq 0$，并且对于 x，使得 $\tilde{\varphi}(x) = 0$ 和 $\varphi(x) < 0$。那么，$\tilde{\varphi}$ 是凸的且有最小值。但是，由此可得 $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varphi(x)}dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\tilde{\varphi}(x)}dx = \infty$，将 B部分应用于函数 $\tilde{\varphi}(x)$ 即可。

D 部分）因此，我们已经证明 φ 必须存在一个最小值。如果不存在常数 $a > 0$ 和向量 $b \in \mathbb{R}$，使得 $\varphi(x) \geq b + a|x|$，那必定是因为 φ 在从最小值点 x_0 出发的某条射线上为常数。不失一般性，假设 φ 的最小值出现在原点。固定 $b < \varphi(0)$ 和 $a > 0$。令 $S = \{x : b + a|x| \leq \varphi(x)\}$。那么，如果存在一点 $y \in \mathbb{R}^n$ 使得$\varphi(y) < b + a|y|$。因此，我们可以找到一个新的值 a'，使其满足 $a' \leq \frac{\varphi(y) - b}{|y|}$，并保证 $\forall x \in S$，于是有 $\varphi(x) \geq b + a'|x|$。由此可见，存在一个一致的 a'，使得对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 均有 $\varphi(x) \geq b + a|x|$，等价于保证 $\alpha = \inf_y \frac{\varphi(y) - b}{|y|} > 0$。由于对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 都有 $b < \varphi(x)$，这只有在$\varphi(x)$ 随着 $|y| \to \infty$ 增大而渐近地比任何线性函数增长得更慢时才有可能。常数 $\alpha = 0$ 仅当 φ 在从原点（最小值点）出发的某条射线上为常数时才成立。这是因为，如果 φ 在从原点出发的任何射线上都不为常数，那么根据 φ 的凸性，在任意一条从原点出发的射线上，都存在一条斜率非零且位于 φ 在该射线上的限制函数下方的切线。于是，由于 φ 位于这条切线上方，它会随着 $|y| \to \infty$ 的增大至少线性增长。更精确地说，固定 $z \in \mathbb{S}^{n-1}$ 并定义 $r_z = \{tz : t \geq 0\}$。定义$\varphi_z(t) := \varphi(tz)$。那么，$\varphi_z(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上是凸的。如果 φ_z 在 $[0, \infty)$ 上不是常数，那么由于对 $t = 0$，$\varphi_z(t)$ 是有限的，存在一个值 $y > 0$ 使得 $y \in \partial\varphi_z(t_0)$

对某个 $t_0 \in [0,\infty)$ 成立。因此，对所有 $t \in [0,\infty)$， $\varphi_z(t) \geq \varphi_z(t_0) + y(t-t_0)$。因此，由于 α 的值可以通过先沿射线取最小值、再在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上取最小值求得，而 $\mathbb{S}^{n-1}$ 是一个紧集，所以 α 等于零的唯一可能情形是 φ 在从原点出发的某条射线上为常数。由于我们在上文已经证明这不可能，因此可以得出结论：必定存在 $a>0$ 和 $b \in \mathbb{R}$，使得对所有 $x \in \mathbb{R}^n$，$\varphi(x) \geq b + a|x|$。

E部分）由此可知，存在 $a>0$ 和 $b \in \mathbb{R}$ 使得 $\varphi(x) \geq a\,|x| + b$。因此，对于对数凹分布 ν，我们可以使用引理25。首先，我们计算：

$$1 - \nu(B_R(0)) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus B_R(0)} e^{-\varphi(x)}dx \tag{130}$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} e^{-a|x|-b}dx \tag{131}$$

$$\leq |\mathbb{S}^{n-1}|e^{-b}\int_R^\infty r^{n-1}e^{-ar}dr \tag{132}$$

$$= |\mathbb{S}^{n-1}|e^{-b-aR}R^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{R^{1-k}}{a^k}\frac{(n-1)!}{(n-k)!}. \tag{133}$$

因此，对于 $R \geq 1$，我们有：

$$1 - \nu(B_R(0)) \leq |\mathbb{S}^{n-1}|e^{-b-aR}R^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{a^k(n-k)!}. \tag{134}$$

同样，对于 $R \geq 1$，我们得到以下估计：

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_R(0)} |x|e^{-\varphi(x)}dx \leq |\mathbb{S}^{n-1}|e^{-b-aR}R^n\sum_{k=1}^{n+1}\frac{n!}{a^k(n-k+1)!}. \tag{135}$$

因此，利用不等式（113），对于 $R \geq 1$，我们得到：

$$W_1(\nu,\nu_R) \leq \left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{n!}{a^k(n-k+1)!} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{a^k(n-k)!}\right)|\mathbb{S}^{n-1}|R^n e^{-b-aR} \tag{136}$$

$$= C(a,b,n)R^n e^{-aR}. \tag{137}$$

□

这初步体现了这种截断方法的有效性，因为我们预期对数凹分布会呈现指数型收敛。对于 n-立方体情形，我们有如下结果：

命题30。设 ν 为对数凹分布，即 $f_\nu(x) = e^{-\varphi(x)}$，其中 $\varphi(x)$ 是凸函数，并且设 $R \geq 1$。那么，存在常数 $C = C(\nu,n)$ 和$a>0$，使得：

$$W_1(\nu,\nu_{R_C}) \leq C(\nu,n)R^n e^{-aR}, \tag{138}$$

其中 $C(\nu,n)$ 由公式(136)给出。

证明。与命题 29 的证明相比，唯一需要修改之处是：在不等式（130）中，我们注意到 $\nu(\mathbb{R}^n \setminus RC_1(0)) \leq \nu(\mathbb{R}^n \setminus B_R(0))$；在不等式（135）中，我们注意到 $\int_{\mathbb{R}^n\setminus RC_1(0)} |x|e^{-\varphi(x)}dx \leq \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_R(0)}|x|e^{-\varphi(x)}dx$。□

4.3. **Brenier势的逐点收敛与最优映射的几乎处处收敛**。 一旦我们得到关于紧集 Ω 上收敛的 R 意义下的 L^1 或 L^2 速率，就可以证明 Brenier势逐点收敛，且最优映射几乎处处收敛。事实上，我们不需要显式的 L^p 速率，只需在 L^p中收敛。由于 Wasserstein距离能够度量概率测度的弱收敛（参见 Villani 的定理6.9），[27], 这一事实结合定理23便可推出，只要 $\mu_R \rightharpoonup \mu$ 弱收敛，假设 μ 的密度函数严格有正下界后，我们就能在 Ω 的任意真开子集上得到逐点收敛。因此，由于 Brenier势的凸性，我们未必能期望逐点收敛的唯一位置是 Ω 的边界 ∂。

首先，我们证明存在序列 $\{\phi_{\mu;R_k}\}_k$，使得当 $k \to \infty$ 时， $\phi_{\mu;R_k} \to \phi_\mu$ 几乎处处成立。

命题31。 对于概率分布 μ，其中 μ 的密度函数 f_μ 满足 $f_\mu > 0$，定义在 Ω 上，并且 ν 满足 $\|\phi_\mu - \phi_{\mu;R}\|_{L^2(\mu)} \to 0$ 在 $R \to 0$ 时成立，我们有：若 $R_k \to \infty$ 随 $k \to \infty$ 增长得足够快而收敛，则 $\phi_{\mu;R_k}$ 几乎处处逐点（且几乎一致地）收敛到 Ω 上的 ϕ_μ。

证明。 首先，由于我们处于紧集上，利用 H¨older 不等式，可用 L^2 范数从上界估计 L^1 范数：

$$\|\phi_\mu - \phi_{\mu;R}\|_{L^1(\mu)} \leq \sqrt{|\Omega|}\,\|\phi_\mu - \phi_{\mu;R}\|_{L^2(\mu)}\,, \tag{139}$$

$$\leq \sqrt{|\Omega|} C_{n,p,\overline{\Omega},\mu,M_p} W_1(\nu,\nu_R)^{1/2} \tag{140}$$

现在我们定义一个序列 $\{R_k\}$，使得 $\sum_{k=1}^{\infty} W_1(\nu,\nu_{R_k}) < \infty$。采用这一选择，我们得到：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\phi_\mu - \phi_{\mu;R_k}\|_{L^1(\mu)} < \infty. \tag{141}$$

我们将把 L^1 范数改写为关于一个分布律为 μ 的随机变量的期望。记 $g_k(x) := |\phi_{\mu;R_k}(x) - \phi_\mu(x)|$。注意， $g_k(X)$ 是一个非负随机变量，其中 X 是分布律为 μ 的随机变量。采用这一记号，我们写作：

$$\|\phi_{\mu;R_k} - \phi_\mu\|_{L^1(\mu)} = \mathbb{E}_\mu[g_k(X)]. \tag{142}$$

因此，记 $\mathcal{L}_\Omega$ 为限制在 Ω 上的勒贝格测度，利用马尔可夫不等式，我们得到，对于 $a > 0$:

$$\mathbb{P}_\mu(g_k(X) \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}_\mu[g_k(X)]}{a}, \tag{143}$$

因此，

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_\mu(g_k(X) \geq a) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}_\mu[g_k(X)]}{a} < \infty. \tag{144}$$

因此，由于 $\min_{x\in\Omega} f > 0$，我们看到：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}_\Omega(g_k(x) \geq a) < \infty. \tag{145}$$

应用博雷尔-坎特利引理，我们立即得出：

$$\mathcal{L}_\Omega\left(\limsup_{k\to\infty}(g_k(x)\geq a)\right)=0, \tag{146}$$

对任意 $a>0$，其中 $\limsup_{k\to\infty}A_k=\cap_{k=1}^{\infty}\cup_{j=k}^{\infty}A_j$。结论指出，使 $g_k(x)\geq a$ 对任意 $a>0$ 无穷多次成立的点集是一个零测集。这正是我们不具有到零函数的逐点收敛的集合。因此，我们得出 $g_k(x)\to 0$ 几乎处处逐点收敛。由于 Ω 有界，应用埃戈罗夫定理可得，该收敛在 Ω 上几乎一致。□

由于 $\phi_{\mu;R}$ 与 ϕ_μ的凸性，几乎处处逐点收敛在 Ω 的任意开真子集上成为逐点收敛，并在 Ω 的内部的任意闭子集上成为一致收敛，前提是 L^2 界存在。

定理32. 对于概率分布 ν，使得$\|\phi_\mu-\phi_{\mu;R}\|_{L^2(\Omega)}=h(R)\to 0$ 当 $R\to 0$ 时，我们有 $\phi_{\mu;R}\to\phi_\mu$ 在 Ω 的任意开真子集上逐点收敛，并在(Ω)的内部的任意闭子集上一致收敛。

证明。首先，我们证明 $\phi_{\mu;R}$ 和 ϕ_μ 只可能在 $\partial\Omega$ 上取无穷值。这由布雷尼耶定理得出，即 μ 支撑在 Dom(ϕ_μ) 上，Dom($\phi_{\mu;R}$) 也同样如此。因此，由于 spt(μ) =Ω，我们可知 ϕ_μ 和 $\phi_{\mu;R}$只可能在 $\partial\Omega$ 上取无穷值。

根据命题31，一个收敛得足够快的子序列 $\{\phi_{\mu;R_k}\}_k$ 几乎处处收敛到 ϕ_μ。现在我们证明，这样的子序列在 Ω 的紧子集上一致收敛到 ϕ_μ。为此，我们将 Rockafellar 的定理10.8 [23], 应用于 Ω 的一个严格开凸子集 C。由于 $\phi_{\mu;R_k}\to\phi$ 在 C 的稠密子集 C' 中，且 ϕ_μ 在 C'上有限。因此， C上的任意序列 $\phi_{\mu;R_k}\to\psi$，其中 ψ 为凸函数。函数 ψ 在 C 中几乎处处等于 ϕ_μ。因此，根据凸函数在开集上的连续性，$\psi=\phi_\mu$ 在 C上。根据 Rockafellar 的定理10.8，收敛在 C 的闭子集上一致。

我们刚刚证明的是，每个收敛得足够快的序列 $\{\phi_{\mu;R_k}\}_k$ 都收敛到 ϕ_μ。现在，固定这样一个紧子集 C。假设有一个序列 $\{\phi_{\mu;R_l}\}_l$，它在 C 上不收敛到 ϕ_μ。我们提取一个子序列 $\{\phi_{\mu;R_l}\}_l$，使得存在一个 $y\in C$，并且存在一个 $\epsilon>0$，满足对每个 l，都有 $|\phi_{\mu;R_l}(y)-\phi(y)|>\epsilon$。于是，按照上述相同的论证，该子序列存在一个收敛子序列，这与我们假设 $\phi_{\mu;R_l}$ 不收敛到 ϕ_μ 矛盾。因此，所有序列 $\{\phi_{\mu;R_l}\}_l$ 都在 C 上收敛到 ϕ_μ。□

由于 $\phi_{\mu;R}$ 逐点收敛到 ϕ_μ，我们现在能够证明 $T_{\mu;R}$ 几乎处处收敛到 T_μ。这是由布雷尼耶势函数的凸性性质，以及映射在每个点 x 都包含于布雷尼耶势函数的次微分中这一事实得出的。

定理 33。若 $\phi_{\mu;R}$ 和 ϕ_μ 逐点满足 $\phi_{\mu;R}\to\phi$，则 $T_{\mu;R}\to T_\mu$ 在 Ω 上几乎处处逐点成立，其中 T_μ 是任意满足 $T_\mu(x)=\nabla\phi_\mu(x)$的映射，对几乎每个 $x\in\Omega$均成立。

证明。由于 $\phi_{\mu;R}\to\phi_\mu$ 在 spt(ν) 上逐点成立，根据 Rockafellar 定理 24.5 [23]，我们有 $\lim_{R\to\infty}\partial\phi_{\mu;R}(x)\subset\phi_\mu(x)$ 在 Ω 的内部成立，因为 $\phi_{\mu;R}(x)$ 收敛到 Ω 的内部处处有限的值

。根据 Brenier-McCann定理和 Kantorovich 定理 [18]，，最优映射满足 $T_R \subset \partial\phi_{\mu;R}$ 和 $T \subset \partial\phi_\mu$。因此，对于任意 $x \in F$，其中 $F \subset \Omega$ 表示 ϕ_μ 的可微点集，我们有 $\lim_{R\to\infty} T_R(x) \in \partial\phi_\mu(x) = \{\nabla\phi_\mu(x)\}$。由于 ϕ_μ 是凸的，根据 Rademacher定理，ϕ_μ 几乎处处可微，因此 $T_{\mu;R}(x) \to \nabla\phi_\mu(x)$ 在 Ω 上几乎处处成立。因此，$T_{\mu;R} \to T_\mu$，其中 $T_\mu = \nabla\phi_\mu(x)$ 在 Ω 上几乎处处成立，因为 ∂ Ω 是零测集（紧凸集的边界的勒贝格测度为零）。□

注 34. 我们不能期望 $T_{\mu;R}$ 逐点或一致收敛到 T_μ，因为 $T_\mu(x) \to \infty$ 当 $|x| \to \infty$ 时，而且 T_μ 也不保证连续。

注 35. 概括而言，定理 *32* 和 *33* 表明，在以下假设下：*1*） μ 和 ν 具有密度函数；*2*） μ 的密度函数严格有正下界；*3*）代价函数 $c(x,y) = |x-y|^2$；*4*） $p > n$ 和 $p > 4$，ν_R 弱收敛到 ν 会导致布雷尼耶势的逐点收敛，以及最优传输映射的几乎处处收敛。只需假设 ν_R 弱收敛到 ν ，即可保证这一结果。

4.4. **布雷尼耶势函数的一致收敛显式速率**。 本小节包含本文的主要结果。第4.3节的结果与布雷尼耶势函数的 H¨older 连续性结果结合使用，可以得到布雷尼耶势函数逐点收敛的显式收敛速率。因此，在第4.3节的问题假设下，可得到由量 $W_1(\nu_R, \nu)$ 的收敛速率所控制的收敛速率。

在 Delalande 和 M`erigot [7]，中，作者引用 Berman 和 Berndtsson [3]，作为以下结果的来源，该结果表明了 Ω 上布雷尼耶势函数的 H¨older 连续性：

命题 36。 若 $p > \max\{n, 2\}$，且 $M_p < +\infty$ 和 $0 < m < f_\mu < M < \infty$ 在Ω上，则布雷尼耶势 ϕ 在Ω上满足 *H¨older* 连续性。也就是说，存在常数 $C = C(n,p,\Omega) > 0$，使得：

$$|\phi_\mu(x) - \phi_\mu(x')| \le C(n,p,\Omega)\left(\frac{M_p}{m}\right)^{1/p} \|x - x'\|^{1-\frac{n}{p}}, \tag{147}$$

对所有 $x, x' \in \Omega$。

备注37. 注意，该结果也适用于*Brenier*势 $\phi_{\mu;R}$，因为*H¨older*常数相同。

4.4.1. 关于的显式收敛速率 $p > n$ 和 $p \ge 4$ 在Ω上的。本节中，对于情形 $p > n$ 和 $p \ge 4$，利用布雷尼耶势函数是H¨older连续的这一事实，我们将能够推导出显式收敛速率。我们还将得到收敛结果，为类似于定理23的未来结果做准备。

本小节中的大多数下述估计（除 Ω 为矩形的情况外）都首先通过在半径为 $\epsilon > 0$ 的球上建立估计得到。随后，这个关于欧几里得球的估计可用于满足内 ϵ-球性质的区域。对于 n-立方体的情形，我们在定理 41 中为矩形区域建立了显式界。因此，我们先给出以下技术性估计：

引理 *38.* 设 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 和 $\epsilon > 0$，并定义 $B_\epsilon(x_0)$。然后，设 $\psi(x)$ 是定义在 $B_\epsilon(x_0)$ 上的 *H¨older* 连续函数，其 *H¨older* 指数为 α，满足 $\psi(x) \geq 0$ 于 $B_\epsilon(x_0)$，且存在 $\tilde{x} \in B_\epsilon(x_0)$ 使得 $\psi(\tilde{x}) = 0$。此外，设 $\psi(x)$ 满足 $\|\psi\|_{L^1(B_\epsilon(x_0))} \leq h(R)$，其中 $h(R) \to 0$ 当 $R \to \infty$ 时成立。那么，存在一个 $R_0 > 0$ 和常数 $C = C(n, \alpha, C_H) > 0$，使得对于所有 $R \geq R_0$，均有 $\max_{x \in B_\epsilon(x_0)} |\psi(x)| \leq C(n, \alpha, C_H)(h(R))^{\frac{\alpha}{\alpha+n}}$，其中 C_H 是 $\psi(x)$ 的 *H¨older* 常数。

证明。我们构造一个函数 ψ，使其满足 $\psi(\tilde{x}) = 0$（对某个 $\tilde{x} \in B_\epsilon(x_0)$），并且 $\psi(x) \geq 0$ 在 $B_\epsilon(x_0)$ 上成立，但我们将 ψ 在 $B_\epsilon(x_0)$ 上的最大值取在某个 $x^* \in \partial B_\epsilon(x_0)$ 处，并且 $\psi(x)$ 将尽可能快地增长（由 H¨older 条件控制，常数为 C_H、指数为 α），从 $\tilde{x}$ 到 x^*。令 $\Delta x := \|\tilde{x} - x^*\|$。函数 $\psi(x)$ 将由此被显式选取为：

$$\tilde{\psi}(x) := \begin{cases} C_H(\Delta x - \|x - x^*\|)^\alpha, & \text{for } \|x - x^*\| \leq \Delta x \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{148}$$

根据这一构造，任何满足该引理假设且使得 $\int_{B_\epsilon(x_0)} \psi(x)dx \leq \int_{B_\epsilon(x_0)} \tilde{\psi}(x)dx$ 的 ψ，都将自动满足 $\max_{x \in B_\epsilon(x_0)} \psi(x) \leq \max_{x \in B_\epsilon(x_0)} \tilde{\psi}(x)$。

现在我们计算 ψ 的积分：

$$\int_{B_\epsilon(x_0)} \tilde{\psi}(x)dx = C_H \int_{B_\epsilon(x_0) \cap B_{\Delta x^*}} (\Delta x - \|x - x^*\|)^\alpha dx \tag{149}$$

$$= C|\mathbb{S}^{n-1}| \frac{|B_\epsilon(x_0) \cap B_{\Delta x}(x^*)|}{|B_{\Delta x}(x^*)|} \int_0^{\Delta x} r^{n-1}(\Delta x - r)^\alpha dr. \tag{150}$$

当 Δx 足够小时，我们有：

$$\frac{1}{4}|B_{\Delta x}(x^*)| \leq |B_\epsilon(x_0) \cap B_{\Delta x}(x^*)|. \tag{151}$$

这是基于这样的观察：在极限情况下，$B_\epsilon(x_0)$ 与 $B_{\Delta x}(x^*)$ 的交集是 $B_{\Delta x}(x^*)$ 的一半。也就是说，存在一个值 $0 < \Delta x \leq 2\epsilon$，使得对于所有 $\Delta x \leq \Delta x$，不等式（151）都成立。我们通过重复分部积分精确计算以下积分：

$$\int_0^{\Delta x} r^{n-1}(\Delta x - r)^\alpha dr = \frac{(n-1)!}{\prod_{i=1}^n (\alpha + i)} \Delta x^{\alpha+n}. \tag{152}$$

我们通过要求.....来高估 Δx 的大小 ng:

$$\int_{B_\epsilon(x_0)} \psi(x)dx \geq \frac{1}{4} C_H |\mathbb{S}^{n-1}| \frac{(n-1)!}{\prod_{i=1}^n (\alpha + i)} \Delta x^{n+\alpha} \tag{153}$$

$$= h(R). \tag{154}$$

因此我们选择：

$$\Delta x = \left(\frac{h(R)}{\beta} \right)^{\frac{1}{n+\alpha}}, \tag{155}$$

其中 $\beta = \frac{1}{4}C_H|\mathbb{S}^{n-1}|\frac{(n-1)!}{\prod_{i=1}^{n}(\alpha+i)}$。令 $R_0 > 0$ 表示满足对所有 $R \geq R_0$ 都有 $\Delta x \leq \Delta x$ 的值。于是，这就保证了：

$$\int_{B_\epsilon(x_0)} \tilde{\psi}(x)dx \geq \frac{C_H}{4}|\mathbb{S}^{n-1}|\frac{(n-1)!}{\prod_{i=1}^{n}(\alpha+i)}\Delta x^{n+\alpha} \tag{156}$$

$$= h(R) \tag{157}$$

$$\geq \int_{B_\epsilon(x_0)} \psi(x)dx, \tag{158}$$

对所有 $R \geq R_0$ 均成立。因此，对所有 $R \geq R_0$，我们有如下界：

$$\max_{x\in\overline{B_\epsilon(x_0)}} \psi(x) \leq \max_{x\in\overline{B_\epsilon(x_0)}} \tilde{\psi}(x) \leq C_H\Delta x^\alpha = \frac{C_H}{\beta^{\frac{\alpha}{\alpha+n}}}(h(R))^{\frac{\alpha}{\alpha+n}}, \tag{159}$$

对所有 $R > 0$ 均成立。 □

接下来给出我们认为是本文主要结果的内容。利用引理 38，我们可以证明如下结论：

定理 39. 设 Ω满足内 ϵ-球性质（见定义 *22*），其中$\epsilon > 0$为某个值。设 $0 < m \leq f_\mu \leq M < \infty$ 且令 $p > n$, $p \geq 4$，并设 $\|\phi_{\mu;R} - \phi_\mu\|_{L^1(\Omega)} \leq h(R)$。那么，存在一个常数 $C = C(n, p, \Omega\ m, M, C_H)$ 以及一个值 $R_0 > 0$，使得对所有 $R \geq R_0$，均有 $\max_{x\in\Omega}|\phi_{\mu;R}(x) - \phi_\mu(x)| \leq C(n,p,\Omega,m,M,C_H)(h(R))^{\frac{p}{1+\frac{p}{q}}}$, *where* q *satisfies* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

证明。定义 $\psi(x) := |\phi_{\mu;R}(x) - \phi_\mu(x)|$。因此，由于 $\int_\Omega \phi_{\mu;R}(x)d\mu(x) = \int_\Omega \phi_\mu(x)d\mu(x) = 0$，密度函数 f_μ 有正下界，且 ϕ_μ 和 $\phi_{\mu;R}$ 在 Ω 上均连续，我们可知 $\psi(x)$ 必在 Ω 中某处等于零。此外，$\psi(x) \geq 0$。另外，由于 $\phi_{\mu;R}$ 和 $\phi_\mu(x)$均为 H¨older 连续函数，具有相同的常数和指数 $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$，因此 $\psi(x)$ 也是 H¨older 连续函数（常数为原来的两倍），且指数仍为 $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$。由于我们已有 L^2 的收敛率，且积分区域为紧集 Ω，因此可立即得到 Ω 上的 L^1 收敛率。由此可知，$\int_\Omega \psi(x)dx = h(R)$，并且 $h(R) \to 0$，当 $R \to \infty$ 时。

˜我们可以通过寻找一个具有相同性质、但以最小面积取得体积 $h(R)$ 的函数 $\psi(x)$，来界定 $\psi(x)$ 的最大值。具体做法是固定˜，使 $\psi(x)$ 的最大值在某点 $x^* \in \partial\Omega$ 处取得，并让函数尽可能快地下降至零，且在其他位置均为零。也就是说，我们希望 $\tilde{x}$˜ 是使 $\psi(\tilde{x}) = 0$ 的一个点。令 C_H 为 ψ 的 H¨older 常数。于是，

$$\tilde{\psi}(x) := \begin{cases} C_H(\|x^* - \tilde{x}\| - \|x - x^*\|)^\alpha, & \text{for } \|x - x^*\| \leq \|x^* - \tilde{x}\| \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{160}$$

˜固定 $R > 0$。接着，我们通过令 $\tilde{x}$ 为满足以下条件的点，来选取 $\psi(x)$：

$$\int_\Omega \tilde{\psi}(x)dx = h(R). \tag{161}$$

现在，我们按如下方式定义另一个函数 $\Theta(x)$。由于 Ω 满足内 ϵ-球性质，因此存在一点 $x_0 \in\Omega$，使得 $x^* \in \partial B_\epsilon(x_0)$。然后，

we define Θ as:

(162)
$$\Theta(x) := \begin{cases} C_H(\|x^* - y\| - \|x - x^*\|)^\alpha, & \text{for } x \in \{\|x - x^*\| \leq \|x^* - y\|\} \cap \{B_\epsilon(x_0)\} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

并确定选择 y 为满足以下条件的点：

$$\int_\Omega \Theta(x)dx = h(R). \tag{163}$$

˜注意，存在一个 $R_0 > 0$，使得对于所有 $R \geq R_0$， $\Theta(x)$ 和 $\psi(x)$ 都在 $B_\epsilon(x_0)$ 中某处取值为零。此外，根据构造可知，$\max_{x\in\Omega} \psi(x) \leq \max_{x\in\Omega} \Theta(x)$。现在，我们使用 ψ 的 H¨older 常数和指数应用引理 38 来界定 Θ，得到：

$$\max_{x\in\Omega} \psi(x) \leq \max_{x\in\Omega} \tilde{\psi}(x) \leq \max_{x\in\Omega} \Theta(x) \leq C(n, p, \Omega, m, M, C_H)(h(R))^{\frac{1-\frac{n}{p}}{1+\frac{n}{q}}}. \tag{164}$$

□

注 40。 我们在此强调，上述收敛速率并非渐近速率，而是明确给出的。

对于闭矩形区域，即 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq x \leq b, \ a, \ b \in \mathbb{R}^n, \ a_i < b_i$ 对于所有 $i\}$，这正是我们在计算中将使用的情况，参见第 5 节，我们可以给出类似的估计。

定理 41。 对于矩形区域 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \ a \leq x \leq b, a, b \in \mathbb{R}^n, a_i < b_i$ 对于所有 $i\}$，设 $p > n, p \geq 4$ 和 $\|\phi_R - \phi\|_{L^4(\Omega)} \leq h(R)$。则有：

$$\max_{x\in\Omega} |\phi_{\mu;R}(x) - \phi_\mu(x)| \leq C(n, p, \Omega, m, M, C_H)(h(R))^{\frac{1-\frac{n}{p}}{1+\frac{n}{q}}}. \tag{165}$$

证明。 与定理 39 的证明中一样，我们有 $\int_\Omega \psi(x)dx = h(R)$，其中 Ω 是一个矩形区域，值得注意的是，它不满足 ϵ-球性质。与˜同一证明中一样，我们找到一个具有方程（160）所示形式的函数 ψ，使该函数的最大值在 $x^* \in \partial\Omega$ 处取得；Ω 是矩形区域的一个角点，即满足以下条件的点：对所有 i， $x_i^* = a_i$ 或 $x_i^* = b_i$，并且我们选择 $\tilde{x}$，使得 $\int_\Omega \tilde{\psi}(x)dx = h(R)$。我们选择 $\Delta x = \|x^* - \tilde{x}\|$，使得：

$$h(R) = \int_\Omega \tilde{\psi}(x)dx \tag{166}$$

$$= \frac{1}{2^n} \int_{B_{\Delta x}(x^*)} C_H(\Delta x - \|x - x^*\|)^\alpha dx \tag{167}$$

$$= \frac{C_H}{2^n} |\mathbb{S}^{n-1}| \int_0^{\Delta x} r^{n-1}(\Delta x - r)^\alpha dx, \tag{168}$$

其中第二个等式在 Δx 足够小时成立，即 $\Delta x \leq \Delta x < \min_i b_i - \overline{a_{i\circ}}$ 利用证明中引理 38 的 $\int_0^{\Delta x} r^{n-1}(\Delta x - r)^\alpha dx$ 计算可知，选择 $\Delta x = \min \left\{ \Delta x, \left(\frac{h(R)}{\tilde{\beta}} \right)^{\frac{1}{\alpha+n}} \right\}$，其中 $\tilde{\beta} = \overline{2^{-n}|\mathbb{S}^{\overline{n-1}}|C_H}^{(n-1)!\prod_{i=1}^n(\alpha+i)}$，我们

有：

$$\max_{x\in\Omega}\psi(x) \le \max_{x\in\Omega}\tilde{\psi}(x) \tag{169}$$

$$\le C(n,p,\Omega,m,M,C_H)(h(R))^{\frac{\alpha}{\alpha+n}} \tag{170}$$

$$= C(n,p,\Omega,m,M,C_H)(h(R))^{\frac{1-\frac{n}{p}}{1+\frac{n}{q}}}. \tag{171}$$

□

注 42. 我们强调，矩形区域的估计并非渐近估计，而是显式估计。

注*43.* 尽管可以证明，势函数 ϕ_μ 和 $\phi_{\mu;R}$在例如 $\Omega' \subset\Omega$ 的内部的某个子集上是等利普希茨的（该子集满足具有不同于 Ω 对应值的 ϵ 的 ϵ-球性质），但似乎无法一般地利用 Ω'中的这一等利普希茨性质来获得加速收敛速率，尽管我们预期可以利用这种等利普希茨性质，在此类区域 Ω' 上建立收敛率。这是因为，为了应用引理 *38*、定理 *39* 或定理 *41* 中的技巧，我们必须确保 $\phi_\mu(x) - \phi_{\mu;R}(x)$ 在 Ω' 中一致地取得零点，其中 R （容易证明，对于固定的 R，在 Ω 的内部必定存在一个零点）。作者目前还不清楚如何克服这一困难。如果函数 $\phi_\mu(x) - \phi_{\mu;R}(x)$ 的零点始终都位于 Ω'中，那么便可立即得到渐近速率 $\max_{x\in\Omega_\delta}|\phi_\mu(x) - \phi_{\mu;R}(x)| \le C(n,p,\Omega\ m,M,\Omega')(h(R))^{\frac{1}{1+n}}$。

—

4.5. **逆 Brenier 势的收敛及其他性质**。本小节将证明逆 Brenier 势的一些收敛结果。回顾一下，对于 $p > n$ 和 $p \ge 4$，Brenier 势是霍尔德连续的；而对于 $p \ne n$，它不一定是霍尔德连续的，甚至可能无界。与此相反，我们证明逆 Brenier 势是利普希茨的。我们还推导出逆 Brenier 势在 $p > n$ 和 $p \le n$中的收敛；对于后一种情形，我们额外假设 ν 的密度函数有正下界。

引理44。 逆 *Brenier* 势对于 ϕ_ν 和 $\phi_{\nu;R}$ 是利普希茨的，其利普希茨常数为 ~ ~R，其中 $R = \text{上确界}_{x\in\Omega}\|x\|$。

~证明。设 $R = \sup_{x\in\Omega}\|x\|$。该结果由Brenier-McCann定理（见Maggi [18]中的定理6.1）、质量被输运到具有紧支撑的目标测度这一事实，以及凸函数次微分的连续性得出。我们对 ϕ_ν证明该结果，因为对 $\phi_{\nu;R}$ 的论证在作必要修改后完全相同。固定 x、$y \in \mathbb{R}^d$。由于 ϕ_ν 是Brenier势，根据Brenier-McCann定理（见Maggi [18], 中的定理6.1），由于目标集的支撑是紧的，可以选取 ϕ_ν，使得对所有$x \in \mathbb{R}^d$都有 $\phi_\nu(x) \ne 0$。由于 ϕ_ν 是凸的，我们进而得到 $\nabla\phi_\nu(x)$对$x \in F$存在，其中由Rockafellar [23]的定理25.5可知， F 是 $\mathbb{R}^d$ 的一个稠密子集。~然后，根据Brenier-McCann定理，$\nabla\phi_\nu(x)$在 F中满足 $|\nabla\phi_\nu| \le R$，因为对每一个 $x \in F$，$\nabla\phi_\nu(x)$都包含在目标测度的支撑中。由次微分的连续性，对每一个 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得$\partial\phi_\nu(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(\nabla\phi_\nu(x))$。固定 x、$y \in \mathbb{R}^d$ 和 $\epsilon > 0$。由于 ϕ_ν 在F上可微，而F 在 $\mathbb{R}^d$中稠密，我们可以找到一点 $\tilde{x}$ 满足 $|x - \tilde{x}| \le \delta$，其中 $\tilde{x}$ 是

˜一个可微点，使得每一个 $z \in \partial\phi_\nu(x)$都满足 $|z| \leq R + \epsilon$。利用这一点以及次微分的定义，我们得到：

$$\phi_\nu(x) - \phi_\nu(y) \leq z \cdot (x - y). \tag{172}$$

˜同样，我们可以保证每个 $z' \in \partial\phi_\nu(y)$ 都满足 $|z'| \leq R + \epsilon$。利用这一点和不等式 (172)，我们得到：

$$-z' \cdot (x - y) \leq \phi_\nu(x) - \phi_\nu(y) \leq z \cdot (x - y). \tag{173}$$

因此，

$$|\phi_\nu(x) - \phi_\nu(y)| \leq \max\{|z|, |z'|\}|x - y|, \tag{174}$$

$$\leq (\tilde{R} + \epsilon)|x - y|. \tag{175}$$

取 $\epsilon \to 0$ 即完成证明。 □

对于 $p > n$ 和 $p \geq 4$ 的情形，一旦我们得到 Ω 上 Brenier 势的收敛速率，就能立即得到逆 Brenier 势的相同收敛速率。

定理 45. 对于 $p > n$，假设 ϕ_μ 和 $\phi_{\mu;R}$ 满足$(x)-\phi_{\mu;R}(x)| \leq k(R)$，对所有 $x \in \Omega$ 均成立。那么， ϕ_ν 和 $\phi_{\nu;R}$ 满足 $|\phi_\nu(y) - \phi_{\nu;R}(y)| \leq k(R)$，其中 $y \in spt(\nu)$。

证明。 根据定义，逆 Brenier 势满足：

$$\phi_\nu(y) = \sup_x\{x \cdot y - \phi_\mu(x)\}. \tag{176}$$

首先，我们证明对于每个 $y \in$spt(ν)，都存在一个点 $\tilde{x} \in$spt(μ)，使得 $\phi_\nu(y) = \tilde{x} \cdot y - \phi_\mu(\tilde{x})$。注意，当且仅当 $x \in$ Dom(ϕ_μ) 且 $y \in \partial\phi_\mu(x)$ 时，Fenchel-Legendre 对偶公式 (176) 中的等号成立。然而，根据Brenier-McCann定理，我们知道 Cl($\nabla\phi_\mu(F \cap$spt(μ))) =spt(ν)。因此，固定 $y \in$ spt(ν)。于是存在一个序列 (x_k, y_k)，使得 $y_k = \nabla\phi_\mu(x_k)$， $y_k \to y$ 且 $x_k \in$ spt(μ)。利用这个序列，我们得到：

$$\phi_\nu(y_k) = x_k \cdot y_k - \phi_\mu(x_k). \tag{177}$$

由于 $x_k \in$spt(μ) ⊂Ω，因此存在一个子序列 $\{x_{k_l}\}$，使得$x_{k_l} \to \tilde{x}$，其中 $\tilde{x} \in$ Ω。此外，由于 ϕ_μ 在 Ω 中满足 H¨older 连续性，我们有 $\phi_\mu(x_{k_l}) \to \phi_\mu(\tilde{x})$。由于 ϕ_ν 在整个 $\mathbb{R}^d$上连续（根据引理44，它是 Lipschitz连续的），因此我们有 $\phi_\nu(y_{k_l}) \to \phi_\nu(y)$。于是，对等式 (177) 取极限，得到：

$$\phi_\nu(y) = \tilde{x} \cdot y - \phi_\mu(\tilde{x}). \tag{178}$$

这表明存在 $\tilde{x} \in \Omega$，使得方程 (176) 存在上确界。利用点 $\tilde{x}$，我们得到：

$$\phi_\nu(y) = \tilde{x} \cdot y - \phi_\mu(\tilde{x}) \tag{179}$$

$$\phi_{\nu;R}(y) \geq \tilde{x} \cdot y - \phi_{\mu;R}(\tilde{x}). \tag{180}$$

因此，

$$\phi_{\nu;R}(y) - \phi_\nu(y) \geq \phi_\mu(\tilde{x}) - \phi_{\mu;R}(\tilde{x}) \geq -k(R). \tag{181}$$

令 $\tilde{x}_R$表示任意一个满足 $\phi_{\nu;R}(y) = \tilde{x}_R \cdot y - \phi_{\mu;R}(\tilde{x}_R)$ 的点。根据上述推理应用于函数$\phi_{\mu;R}$，同样可以证明这样的点存在。利用这个点，我们得到：

$$\phi_{\nu;R}(y) - \phi_\nu(y) \leq \phi_{\mu;R}(\tilde{x}_R) - \phi_\mu(\tilde{x}_R), \tag{182}$$

对任意 z 应用一致界 $|\phi_{\mu;R}(z) - \phi_\mu(z)| \le k(R)$，即可得出：

$$|\phi_{\nu;R}(y) - \phi_\nu(y)| \le k(R). \tag{183}$$

□

对于 $p \le n$ 或 $p < 4$ 的情形，我们没有明确的收敛速率，但一旦确定了 L^2 的收敛速率，定理32即可保证在 Ω 上逐点收敛。在此之前，我们先给出一个简短的几何引理，它表明满足 ϵ-球性质的非空凸域 Ω 的边界是一个黎曼流形，因此可以断言 Ω 的每个边界点处都存在法向量。

引理 46。 若Ω 非空、连通、凸，且满足 ϵ-球性质，则 $\partial\Omega$ 是一个光滑流形。

证明。 我们首先注意到，若 Ω 满足 ϵ-球性质，则由于 Ω 是凸的，其内部非空且连通。此外， $\partial\Omega$ 是闭集，因为 Ω 是闭的。集合 $\partial\Omega$ 的豪斯多夫维数为 $\mathbb{R}^{n-1}$。

对于每个 $x \in \partial\Omega$，都存在一点 $x_0 \in \Omega$，使得 $x \in \overline{B_\epsilon(x_0)}$。因此，根据支撑超平面定理，我们看到，Ω 在 x 处的支撑超平面也是 $B_\epsilon(x_0)$ 在 x 处的支撑超平面。由于 $B_\epsilon(x_0)$ 是一个闭球，这是唯一的支撑超平面，因此 $\partial\Omega$ 在每一点都有唯一的切平面。

此外，设 $x_n \to x$，其中 $x_n \in \partial\Omega$ 且 $x \in \overline{\Omega}$，并设 $B_\epsilon(z_n)$ 是一列开欧几里得球，使得 $x_n \in B_\epsilon(z_n)$。接着，设 $\mathfrak{T}_{x_n}$ 是 $\overline{B_\epsilon(z_n)}$ 在 x_n 处唯一确定的切平面序列。经过可能的序列抽取，由于 $\mathfrak{T}_{x_n}$ 由收敛序列 x_n 以及切平面 $\hat{n}_{\mathfrak{T}_{x_n}} \in \mathbb{S}^{n-1}$ 的法向方向确定，我们有 $\mathfrak{T}_{x_n} \to \mathfrak{T}_x$，其中 $\mathfrak{T}(x) \subset \mathbb{R}^n$ 是一个经过 x 的 $n-1$ 超平面。根据支撑超平面定理，我们必有 $\mathfrak{T}(x)$ 等于经过 x、支撑 $\partial\Omega$ 的超平面。因此，每一列切平面都必须收敛到同一个切平面。由此可知，切平面具有连续性。支撑超平面定理排除了自交的可能性。

因此， $\partial\Omega$ 是一个光滑流形。 □

在我们的问题背景下，如果假设 ν “在每个方向上无穷远处都有质量”，且点 $x \in \partial\Omega$ 处的法向量 $\hat{n}_x$ 唯一，那么布雷尼耶势函数会呈现“体育场状效应”，也就是说，随着接近边界，布雷尼耶势函数的梯度会指向法向方向；当且仅当趋近边界时，梯度才会趋于无穷。

引理 47。 设 Ω 是紧凸集，且具有非空内部。对于Ω中的可微点 $x_k \in$ ，有 $\|\nabla\phi_\mu(x_k)\| \to +\infty$ 当且仅当 $dist(x_k, \partial\Omega) \to 0$。

证明。 根据布雷尼耶定理（见 Maggi 中的定理4.2） [18], ，我们得到$\phi_\mu(x) < \infty$ μ-几乎处处成立。由于 μ 在 Ω 上有一个有正下界的密度函数，且 $\partial\Omega$ 的测度为零，那么 $\phi_\mu(x)$ 若取无穷值，只可能发生在边界$\partial\Omega$ 上。这是因为 ϕ_μ 的本质定义域是凸集，但 $\Omega \setminus \mathrm{dom}(\phi_\mu)$ 的测度为零。由于去掉 $\partial\Omega$ 只会去掉一个零测集，剩下的 Ω 的内部仍然是凸的，因此显然 ϕ_μ 可能在边界上取无穷值。从 Ω 的内部去掉任何一点，所得集合都不再是凸集。

因此，我们看到只有在 $\partial\Omega$ 上， ϕ_μ 才可能取无穷值，从而 ϕ_μ 对所有 $x \in \Omega$ 的内部中的点都有限。此外， ϕ_μ 不可能在任何地方等于 $-\infty$ 。如果确实如此，那么 ϕ_μ 只能在 ϕ_μ 等于 $-\infty$ 的集合的边界上取有限值，而该边界是零测集。由于 ϕ_μ 在 Ω 的内部 $\neq \emptyset$有限，我们看到 ϕ_μ 不可能在任何地方等于 $-\infty$。

根据布雷尼耶定理，由于 ν 的支撑无界，且 ϕ_μ 在 Ω 的内部几乎处处可微，因此存在一个点序列 $\{z_k\}$ ，其点 $z_k \in$ 属于 Ω 的内部，并满足 $\|\nabla\phi_\mu(z_k)\| \to \infty$。取一个子序列后，我们可以断言存在这样一个满足 $z_k \to z \in \Omega$ 的序列。现在，我们证明这样的点 z 只能位于边界上。这是基于如下观察：一旦一维凸函数达到 $+\infty$ 这样的"斜率"，该点"之后"的函数必定等于 $+\infty$ 。这一性质将用于在 ϕ_μ 有限的本质定义域内部导出矛盾。

设 $\{z_k\}$ 是一个满足 $z_k \to z' \in \Omega$ 且 $\|\nabla\phi_\mu(z_k)\| \to \infty$ 的序列。对于每个 k，存在一个方向向量 $\hat{}z_k \in \mathbb{S}^{d-1}$ ，使得 $\nabla\phi_\mu(z_k) = \hat{}z_k|\nabla\phi_\mu(z_k)|$。由于 $\mathbb{S}^{d-1}$ 是一个紧集，进一步取一个子序列后，我们有 $\hat{}z_k \to \hat{}z \in \mathbb{S}^{n-1}$。根据次微分的连续性，$+\infty \in \partial\phi_\mu(z')$。由于 Ω 具有非空内部，存在一点 $z_0 \in \Omega$，使得 $(z_0 - z') \cdot \hat{}z \neq 0$。

假设 $z' \in \Omega$ 的内部。定义一条从 z_0 到 z' 、经过 $l(t) = ((|z' - z_0| - t)z_0 + tz')/|z' - z_0|$ 的直线，其中 $t \in [0, |x' - z_0|]$。由于我们假设 $z' \in \Omega$ 的内部，因此可以将 $l(t)$ 延伸到边界。将边界上的点记为 z_b。于是，我们定义一条新的直线 $L(t) := ((|z_0 - z_b| - t)z_0 + tz')/|z' - z_b|$。然后，定义函数$\psi(t) := \phi_\mu(L(t))$。函数 $\psi(t)$ 是 $[0, |z_b - z_0|]$上的凸函数。由于$+\infty \in \partial\phi_\mu(z')$，且由于 $(z_0 - z') \cdot \hat{}z \neq 0$，我们有 $+\infty \in \partial\psi(t_0)$。因此，对于 $t > t_0$，$\psi(t) = +\infty$。由于存在一个值 t_m 满足 $t_0 < t_m < |z_b - z_0|$ ，使得 $\psi(t_m) = +\infty$ 且 $L(t_m)$ $\in$位于Ω 的内部，我们找到了Ω 的内部中一个等于$+\infty$的点，这与无穷大值只能在边界上取得这一事实矛盾。因此， $z' \in \partial\Omega$，这意味着，大小等于 $+\infty$ 的梯度只能存在于边界上。□

引理 *48.* 设 Ω 是紧凸集，具有非空内部，且高斯映射是单射（即 $\hat{}n_x \neq \hat{}n_y$ *for* $x \neq y \in \partial\Omega$）。假设存在一个~紧集 $K \subset \mathbb{R}^n$，使得 $spt(\nu) = K \cup (\mathbb{R}^n \setminus K)$，其中 $K \subset K$。对于 Ω 的可微点 $x_k \in$ ，有 $\|\nabla\phi_\mu(x_k)\| \to +\infty$ 当且仅当 $dist(x_k, \partial\Omega) \to 0$ ，并且$\nabla\phi_\mu(x_k)/|\nabla\phi_\mu(x_K)| \to \hat{}n_x$ *if* $x_k \to x \in \partial\Omega$。

证明。 根据引理 47，梯度若发散，则在 Ω 的边界 $\partial\,\Omega$ 上发散。

根据我们对 ν 的支撑的假设以及布雷尼耶定理，该映射必须将质量输送到无穷远的每个方向。也就是说，对于每个方向 $\hat{}z \in \mathbb{S}^{d-1}$，都存在一个序列 $\{x_k\}$ ，使得 $\|\nabla\phi_\mu(x_k)\| \to \infty$ 且$\nabla\phi_\mu(x_k)/\|\nabla\phi_\mu(x_k)\| \to \hat{}z$。令 $\{x_k\}_k$ 为任意这样的序列。现在我们将证明，若 $x_k \to x' \in \partial\Omega$，则 $\nabla\phi_\mu(x_k)/\|\nabla\phi_\mu(x_k)\| \to \hat{}n_{x'}$。我们证明，位于 x' 的质量不可能沿其他方向输送到无穷远。假设 $\hat{}z \neq \hat{}n_x$ 且 $x_k \to x$ ，但$|\nabla\phi_\mu(z_k)| \to \infty$ ，而 $\nabla\phi_\mu(x_k)/\|\nabla\phi_\mu(x_k)\| \to \hat{}z$。在这种情况下，由于 ϕ_μ 位于其支撑超平面之上，但当我们趋近边界时，会出现一个不与 $\partial\Omega$ 相切的垂直超平面。更准确地说，取定 $x \in\Omega$ 的内部，使得存在一个常数 $m > 0$和一个值 $K > 0$，满足 $\hat{}z \cdot (x - x_k) \geq m > 0$ 对所有 $k \geq K$均成立。这是可行的，因为 $\hat{}z \neq \hat{}n_{x'}$ ，因此 Ω 的内部存在位于法向量为 $\hat{}z$的超平面所定义的半空间两侧的点

经过点 x'。因此，由于 ϕ_μ 是凸的，它满足：

$$\phi_\mu(x) \geq \phi_\mu(x_k) + \nabla\phi_\mu(x_k)\cdot(x - x_k). \tag{184}$$

由于梯度的方向收敛到 $\hat{z}$，我们有：存在一个 $K_2 > 0$，使得对于所有 $k \geq K_2$，都有：

$$\phi_\mu(x) \geq \phi_\mu(x_k) + \frac{m}{2}|\nabla\phi_\mu(x_k)|. \tag{185}$$

由于 Ω 是紧的，$\phi_\mu(x_k) \geq M \in \mathbb{R}$。因此我们有：

$$\phi_\mu(x) \geq M + \frac{m}{2}|\nabla\phi_\mu(x_k)|. \tag{186}$$

因此，当 $k \to \infty$时，我们得到 $\phi_\mu(x) = +\infty$。由于 $x \in \Omega$ 的内部，我们得出矛盾。因此，我们已经证明，任何满足$x_k \to x' \in \partial\Omega$ 且在 x_k 处的梯度随着 $k \to \infty$ 而发散的点序列 $\{x_k\}$ 都必须收敛到法向方向。否则，我们可以取一个不收敛到 $\hat{x}'$ 的子序列，并由此导出矛盾。

由于法向量唯一，因此 $x \in \partial\Omega$ 与 $\hat{n} \in \mathbb{S}^{n-1}$ 之间存在一一对应关系。因此，任何满足 $x_k \to x \in \partial\Omega$ 的序列 $\{x_k\}$ 都满足 $\nabla\phi_\mu(x_k)/|\nabla\phi_\mu(x_k)| \to \hat{n}_x$，且 $|\phi_\mu(x_k)| \to \infty$。□

定理 *49.* 对于 $p \leq n$ 或 $p < 4$，假设 $\phi_{\mu;R}$ 和 ϕ_μ 满足：对任意 $x \in \Omega$ 的内部点，均有 $\phi_{\mu;R}(x) \to \phi_\mu(x)$。假设存在一个紧集 $K \subset \mathbb{R}^n$，使得 $\tilde{\ }\tilde{\ }spt(\nu) = K \cup (\mathbb{R}^n \setminus K)$，其中 $K \subset K$，并且 $\partial\Omega$ 的高斯映射是单射。那么，ϕ_ν 和 $\phi_{\nu;R}$ 满足 $\phi_{\nu;R}(y) \to \phi_\nu(y)\ \forall y \in spt(\nu)$。

证明。本证明中的记号沿用定理 45 中的部分记号。对于固定的 $y \in \text{spt}(\nu)$，凹函数 $\psi(x) = x \cdot y - \phi_\mu(x)$ 的上确界在某个满足 $0 \in \partial\psi(\tilde{x})$ 的点 $\tilde{x}$ 处取得。对于 $x_k \in F$，其中 $F \subset \text{int}(\Omega)$ 是 ϕ_μ的可微点集合，我们有 $\partial\psi(x_k) = \{y - \nabla\phi_\mu(x_k)\}$。当 x_k趋近边界时，根据引理 48，有 $|\nabla\phi_\mu(x_k)| \to \infty$。根据次微分的连续性，这同样适用于 ψ 的次微分。因此，对于足够靠近边界的 x，不可能有 $0 \in \partial\psi(x)$。因此，满足 $\phi_\nu(y) = \tilde{x} \cdot y - \phi_\mu(\tilde{x})$ 的 $\tilde{x}$ 必须属于 $\tilde{x} \in \text{int}(\Omega)$。

由此，对于每个 $y \in \mathbb{R}^d$，我们推得：

$$\phi_{\nu;R}(y) - \phi_\nu(y) \geq \phi_\mu(\tilde{x}) - \phi_{\mu;R}(\tilde{x}) \to 0, \tag{187}$$

因为在 $\tilde{x} \in \Omega$ 的内部，我们可以应用定理32中的逐点收敛。

现在我们证明，$\tilde{x}_R$ 不可能趋近边界。根据定义，$y \in \partial\phi_{\mu;R}(\tilde{x}_R)$。假设 $\tilde{x}_{R_k} \to x' \in \partial\Omega$。固定 $\delta_1 > 0$。我们选取一个序列$\tilde{\ }\{\tilde{x}_{R_k}\}_k$，其中 $\tilde{x_{R_k}} \to x'' \in \Omega$ 的内部且 $|x' - x''| \leq \delta_1$。由于 x'' 位于内部，并且我们在内部有 $\phi_{\mu;R}$ 到 ϕ_μ 的逐点收敛，利用 Rockafellar [23]定理24.5，我们得到：对于每个 $\epsilon > 0$，存在一个指标 k_0，使得对于所有$k \geq k_0$，都有

$$\partial\phi_{\mu;R_k}(\tilde{x}_{R_k}) \subset \partial\phi_\mu(x'') + \epsilon B_1(0). \tag{188}$$

根据次微分的连续性，我们可以减小 δ_1 的大小，因此$\partial\phi_\mu(x'')$包含在一个取值集合中，而该集合中的值可任意接近 $\nabla\phi_\mu(x''')$；其中，x''' 是一个可微点，既可任意接近 x''，也可任意接近边界 $\partial\Omega$。因此，减小 δ_1的大小后，$\partial\phi_\mu(x''')$会与值 y相距任意远，因为根据连续性，它必定任意接近 $\nabla\phi_\mu(x''')$，而后者的绝对值趋于无穷大。但另一方面，根据公式（188），我们有 $y \in \partial\phi_\mu(x''') + \epsilon B_1(0)$。通过减小其大小

我们看到，随着 δ_1 减小， $\partial\phi_\mu(x')$不可能与 y 相距任意远。因此，我们得出矛盾，由此可知 $\tilde{x}_R$ 不收敛到边界。

对于每个收敛子序列 $\tilde{x}_{R_k}$，我们得到 $\tilde{x}_{R_k} \to x' \in \Omega$ 的内部，其中 x'取决于子序列的选择，但不在边界上。利用这一点，我们可以证明：

$$\phi_{\nu;R_k}(y) - \phi_\nu(y) \leq \phi_\mu(\tilde{x}_{R_k}) - \phi_{\mu;R_k}(\tilde{x}_{R_k}). \tag{189}$$

由于 ϕ_μ 和 $\phi_{\mu;R}$ 在 Ω 的内部具有连续性，对于任意 $\epsilon > 0$，当 k足够大时，我们有：

$$\phi_{\nu;R_k}(y) - \phi_\nu(y) \leq \phi_\mu(x') - \phi_{\mu;R_k}(x') + \epsilon. \tag{190}$$

对 k 取极限，并利用定理32（因为 $x' \in B_{\tilde{R}}(0)$），我们得到：

$$\lim_{k\to 0} \phi_{\nu;R_k}(y) - \phi_\nu(y) \leq \epsilon. \tag{191}$$

由于 ϵ 的选择是任意的，我们得到：

$$\lim_{k\to 0} \phi_{\nu;R_k}(y) - \phi_\nu(y) \leq 0. \tag{192}$$

由于每个收敛子序列 $\{\tilde{x}_{R_k}\}$ 都会导出不等式（192），我们可以得出结论：任意序列 $\{\tilde{x}_{R_k}\}$ 都会导出不等式（192）中的结论。假设事实并非如此，即存在一个序列 $\{\tilde{x}_{R_l}\}$，使得对于每个 $l_0 \in \mathbb{N}$，都存在一个 $l \geq l_0$，使得 $\phi_{\nu;R_l}(y) > \phi_\nu(y)$。构造子序列 $\{\tilde{x}_{R_{l'}}\}$，其中

$$\phi_{\nu;R_{l'}}(y) > \phi_\nu(y), \tag{193}$$

对所有 l'。这个子序列可能不收敛，但它有一个收敛子序列，我们记为 $\{\tilde{x}_{R_{l''}}\}$。按照上述推理，这个收敛子序列必须满足不等式（192），这与不等式（193）矛盾。因此，我们只能得出结论：对于任意序列 $\{\tilde{x}_{R_k}\}$，都有 $\lim_{k\to\infty} \phi_{\nu;R_k}(y) \leq \phi_\nu(y)$。因此，

$$\lim_{R\to\infty} \phi_{\nu;R}(y) - \phi_\nu(y) \leq 0. \tag{194}$$

结合不等式（187），我们得到：

$$\lim_{R\to\infty} |\phi_{\nu;R}(y) - \phi_\nu(y)| = 0. \tag{195}$$

□

对于一般情形 $p \geq 2$，我们不期望在 Ω 的整个范围上都有收敛。不过，我们认为可以在 Ω 的某些子集上建立收敛速率，尤其是满足 $\text{dist}(\Omega', \partial\Omega) > 0$ 的子集。如果已经建立了此类收敛速率，见注43，那么我们可以进一步推出 $p \geq 2$ 情形下逆布雷尼耶势函数的收敛速率。

命题50. 令 $|\phi_{\mu;R}(x) - \phi_\mu(x)| \leq C(\Omega')k(R)$ 对于所有 $x \in \Omega' \subset \Omega$ 对于所有$\Omega' \subset \Omega$ 满足 $dist(\Omega', \partial\Omega) > 0$的情况。因此，存在一个 $R_0 > 0$ 和一个常数$C = C(\Omega'(y)) > 0$，使得对于所有 $R \geq R_0$，我们有：

$$|\phi_{\nu;R}(y) - \phi_\nu(y)| \leq C(\Omega'(y))k(R), \tag{196}$$

对所有 $y \in spt$（ν）均成立。如前所述，常数 C（Ω'（y））无需关于 y 一致。

证明。 与定理 49 的证明类似，我们只需针对给定的 $y \in \text{spt}(\nu)$，找出一个子集 $\Omega'(y) \subset \Omega$，使得对于给定的 $y \in \text{spt}(\nu)$，选择 $\tilde{x}$，$x' \in \text{int}(\Omega'(y))$（对任意这样的 $\tilde{x}$，x' 其中我们使用了定理 49 中的记号）。随后我们使用不等式（187），并通过将 R 取足够大，使得可以使用不等式（190）。因此我们断言：

$$|\phi_{\nu;R}(y) - \phi_\nu(y)| \leq C(\Omega'(y))k(R), \tag{197}$$

对于 $y \in \text{spt}(\nu)$。当 y 使得 $\text{dist}(\Omega', \Omega)$ 非常小时，我们仍然具有相同的渐近速率，但常数 $C(\Omega'(y))$ 会发散。

□

4.6. **逆Brenier映射几乎处处收敛**。假设 ν 相对于勒贝格测度绝对连续，可以很容易地证明 $T_{\nu;R}$ 依测度收敛到 T_ν。也就是说，在集合中，$\nabla\phi_{\nu;R}$ 与 $\nabla\phi_\nu$ 的差异超过某个固定 $\epsilon > 0$ 的部分，其关于测度 ν 的概率趋于零；这一点可通过 Villani [26] 中一个著名的习题来证明。然而，关于逆Brenier映射，我们实际上掌握了更多信息，因为我们知道逆Brenier映射与逆 Brenier 势相关，而后者是凸函数。逆 Brenier 势的逐点收敛可用于证明布雷尼耶映射几乎处处逐点收敛。证明过程中用到了凸函数的次微分在取极限时的稳定性，以及布雷尼耶映射在每个点 $x \in \text{spt}(\nu)$ 都包含于布雷尼耶势函数的次微分这一事实。

定理 51. 假设 ν 相对于 $\mathbb{R}^n$上的勒贝格测度绝对连续，则对于 $p > n$，我们有 $T_{\nu;R} \to T_\nu$ 在 $int(spt(\nu))$上几乎处处逐点成立，其中 T_ν 是任意一个最优映射。对于 $p \leq n$，令 $spt(\nu)$。如果$\phi_{\nu;R}$ 和 ϕ_ν 逐点满足 $\phi_{\nu;R} \to \phi_\nu$，那么 $T_{\nu;R} \to T_\nu$ 在 $\mathbb{R}^n$上几乎处处逐点成立，其中 T_ν 是满足 $T_\nu(x) = \nabla\phi_\nu(x)$ 的任意映射，且该条件对几乎所有$x \in \mathbb{R}^n$成立。

证明。在这两种情形下，由于 $\phi_{\nu;R} \to \phi_\nu$ 在 $\text{spt}(\nu)$ 上逐点成立，根据 Rockafellar 定理 24.5 [23], ，我们有 $\lim_{R\to\infty} \partial\phi_{\nu;R}(x) \subset \partial\phi_\nu(x)$ 在 $\text{int}(\text{spt}(\nu))$ 上成立，因为$\phi_{\nu;R}(x)$在 $\text{int}(\text{spt}(\nu))$ 上处处收敛到有限值。根据 Brenier-McCann定理和 Kantorovich定理 [18], ，最优逆映射满足$T_{\nu;R}(x) \in \partial\phi_{\nu;R}(x)$，其中 $x \in \text{spt}(\nu_R)$；并且 $T_\nu(x) \in \partial\phi_\mu(x)$，其中 $x \in \text{spt}(\nu)$。因此，对于任意 $x \in F$，有 $T_{\nu;R}(x) \in \partial\phi_{\nu;R}(x) \to \{\nabla\phi_\nu(x)\} = \partial\phi_\nu(x)$，其中 $F \subset \text{spt}(\nu)$ 表示 ϕ_ν 的可微点集合。由于 ϕ_ν 是凸函数，根据 Rademacher定理，$T_{\nu;R}(x) \to T_\nu(x)$ 几乎处处成立。令 S 和 T 为最优映射，则根据 Brenier-McCann 定理，$S = T$ ν-几乎处处成立。因此，由于 ν 相对于勒贝格测度绝对连续，$S = T$ 几乎处处成立。□

5. Convergent Numerical Method for Approximating Elliptic PDEs on Unbounded Domains

本节将简要讨论，依据第3节和第4节所得的收敛性结果，如何设计可证明收敛的基于偏微分方程的格式，以求解从有界支撑测度到无界支撑测度的最优传输问题。我们首先介绍此类完全

非线性椭圆型偏微分方程的可证明收敛单调格式所涉及的符号和关键概念。随后，我们提出采用并讨论 Hamfeldt [10] 的结果，该结果可用于针对固定的 R 求解该问题。我们将讨论如何将此类格式应用于当前问题，包括边界条件、求解正问题还是逆问题更为合适、插值，以及提及当前工作未涉及的一些主题。

5.1. 背景与定义。 首先，我们将考虑完全非线性椭圆型二阶椭圆型偏微分方程：

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0, \tag{198}$$

对于 $x \in \Omega$，其中 Ω 是欧几里得空间的一个闭紧子集。此时，算子 F 可能编码了 $x \in \partial\Omega$ 的边界条件。

我们将介绍近似格式以及这类格式的性质，它们将使我们能够构造收敛性证明。首先，对于固定区域 Ω，我们定义网格 $\mathcal{G}^h \subset \Omega$，它是一个有限集合。离散化参数 $h > 0$ 定义为 $h := \sup_{x\in\mathcal{G}^h} \inf_{x,y\in\mathcal{G}^h} |x - y|$。离散化参数 h 用于网格 $\mathcal{G}^h$ 的记号中，意在表明随着 $h \to 0$，网格会逐渐“加密”。在所有收敛结果中，我们都将取 $h \to 0$，因此假设网格具有足够的正则性以保证这一点。

我们定义一个网格函数 $u^h : \mathcal{G}^h \to \mathbb{R}$。该网格函数将满足一个由$N$ 个 N 构成的系统，其中 N 是 $\mathcal{G}^h$的基数。它们将满足的方程记为：

$$F^h(x, u^h(x), u^h(x) - u^h(\cdot)) = 0, \tag{199}$$

其中，$x \in \mathcal{G}^h$ 和 $u(x) - u(\cdot)$ 是差分 $u(x) - u(y)$ 的简写，其中 $y \neq x$ 和 $y \in \mathcal{G}^h$。我们将 F^h 视为一个算子，并常将其写作 $F^h(x, u(x)\ u(x) - u(\cdot))$，其中函数为 u 。需要注意的是，尽管 u 不是网格函数，离散算子 F^h 也只在网格上的点处求值。我们希望，满足 $F^h(x, u^h(x)\ u^h(x) - u^h(\cdot)) = 0$ 的网格函数也满足$u^h \to u$ ，其中 $h \to 0$ 的含义是：若将网格函数 u^h 插值到 Ω 上，得到插值函数 U^h，那么在 Ω 上逐点有 $U^h \to u$。

为了实现收敛，我们需要让逼近格式 F^h “模仿”偏微分方程（PDE）。由此得到相容性的通常定义：

定义 52. 若对于任意 $u \in C^2(\Omega)$，都有，则称逼近算子 F^h 相容：

$$\liminf_{h\to 0, y\in\mathcal{G}^h\to x, \xi\to 0} F^h(y_i, u(y_i)+\xi, u(y_i)-u(y_j)) = F(x, u(x), \nabla u(x), D^2u(x)), \tag{200}$$

对于 $x \in \Omega$。

这类逼近格式的另一项重要性质是单调性：

定义 53. 若离散算子 $F^h(x, u(x)\ u(x) - u(\cdot))$ 是其最后一个自变量的非增函数，则称其为单调的。

定义 54. 若存在常数 $M > 0$ ，使得对所有 $h > 0$均有 $|u^h| \leq M$ ，则称逼近格式 F^h 的解 u^h 稳定。

定义 55. 若逼近格式 $F^h(x, u(x)\ u(x) - u(\cdot))$ 关于其最后两个参数连续，则称其为连续的。

5.2. **Hamfeldt 的收敛结果** [10]. 假设我们有测度 μ_0 和μ_1，其支撑分别位于集合 X 和 Y 上，而这两个集合是 $\mathbb{R}^n$ 的有界子集，且相应的密度函数为 f_0 和 f_1。那么，形式上，平方距离代价函数为 $c(x,y) = |x-y|^2$ 的最优传输问题的解可表述为下列方程的解：

$$f_1(\nabla u(x)) \det(D^2 u(x)) = f_0(x) \tag{201}$$

$$\nabla u(X) \subset Y. \tag{202}$$

这称为 Monge-Amp`ère 偏微分方程的第二边值问题，参见 Urbas [25]。约束 $\nabla u(X) \subset Y$ 可以例如通过符号距离函数 H 改写；这是一个连续函数 $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，满足 $H(y) < 0$，当 $y \in Y$时； $H(y) = 0$，当 $y \in \partial Y$时；以及 $H(y) > 0$，当 $y \notin Y$时。因此，可以将全局约束 $\nabla u(X) \subset Y$改写为边界条件 $H(\nabla u(x)) = 0$，当 $x, \in \partial X$。

偏微分方程 201 在凸函数空间上是椭圆型的。为了将数值方法限制为只选取凸解，我们定义算子 $\lambda_1(D^2u(x)) = \min_{\theta \in \mathbb{S}^{n-1}} \frac{\partial^2 u}{(x)\ \partial \theta^2}$，即海森矩阵 $D^2u(x)$的最小特征值。因此，我们定义如下修正后的偏微分方程：

$$\max\{-f_1(\nabla u(x)) \det(D^2 u(x)) + f_0(x), -\lambda_1(D^2 u(x)), H(\nabla u(x)) = 0, \tag{203}$$

这类 PDE 的弱解不仅应当求解 Monge-Amp`ere PDE，还应当是凸的，并满足全局约束 $\nabla u(X) \subset Y$。这类 PDE 的自然弱解概念是粘性解，参见 Crandall、Ishii 和 Lions [5], ；Hamfeldt [10] 证明了它等价于唯一的（相差一个加法常数）凸 Aleksandrov解，满足 Monge-Amp`ere PDE，因此也是最优传输问题的势函数。

定义56。我们称凸函数 u 是 *Monge-Amp`ere* 方程 (201) 的 *Aleksandrov*解，若

$$\int_E f(x)dx = \int_{\partial u(E)} g(y)dy, \tag{204}$$

对每个可测集 $E \subset X$，其中 $\partial u(E)$ 表示 u 在集合 E 上的次微分，参见定义*5*。

假设57。我们对该问题作出以下假设：

(1) X, Y 有界且 Y 为凸 *(2)* $f_0 \in L^1(X)$ 为下半连续 *(3)* $f_1 \in L^1(Y)$ 在 Y 上为正且上半连续

Hamfeldt [10] 的第一个结果是，某些单调逼近格式保证存在稳定的解。该结果使用了稍作修改的相容性定义：

定义58。 如果对于任意光滑凸函数 u 和 $x \in X$，格式 F^h 在 X 上是相容的，

$$\liminf_{h \to 0, y \in \mathcal{G}^h \to x, \xi \to 0} F^h(y_i, u(y_i) + \xi, u(y_i) - u(y_j)) \geq F(x, u(x), \nabla u(x), D^2 u(x)). \tag{205}$$

如果该格式是相容的，并且下极限在 X 上一致地取得，则称该格式是一致相容的。

为了保证稳定性，从而收敛到完全非线性椭圆型偏微分方程的弱解（粘性解或亚历山德罗夫解），Hamfeldt [10] 以及 Hamfeldt 和 Turnquist [11], 等人的研究发现，该格式的一项重要性质是低估。

定义59。若逼近格式 F^h 满足(206)，则称其为低估格式

$$F^h(x_i, u(x_i), u(x_i)-u(x_j)) \leq \max\{-f_1(\nabla u(x))\det(D^2u(x))+f_0(x), -\lambda_1(D^2u(x)), H(\nabla u(x))\},$$

对于每个光滑凸函数 u 和 $x \in \mathcal{G}^h \cap X$均成立。

请注意，在实践中，构造一个低估格式并不困难，因为我们可以取任意一个相容的单调格式 F^h，然后将其替换为$F^h - h^\alpha$，其中 h^α 与该格式的形式相容误差有关 F^h。

定理60。设 F^h 是一个一致相容、单调、连续且严格低估的逼近格式。那么，该逼近格式存在一个解 u^h，且该解是稳定的。

主要结果是 Hamfeldt [10], 中的定理29，其内容如下：

定理61。设 u^h 是相容、单调且稳定的近似格式的任意一个解。定义分段常数最近邻延拓：

$$U^h(x) = \sup\left\{u^h(y) | y \in \mathcal{G}^h, |y-x| = \min_{z\in\mathcal{G}^h} |z-x|\right\}, \tag{207}$$

那么，对于任意 $x \in X$，$\lim_{h\to 0}$，其中 $u(x)$ 是方程(201)的一个 *Aleksandrov*解。

由此可知，任何相容、单调且稳定的近似格式 F^h 都可以使用，例如形式相容误差迅速趋于零的格式。Hamfeldt [10] 提出了一种形式相容误差较小的方法。

5.3.**无界区域上最优传输收敛格式的讨论**。 在第3节中，我们看到，在径向情形下，对于种类繁多的密度函数和代价函数，格式都具有良好的收敛性质。因此，对于此类代价函数，收敛格式似乎也可能表现良好，不过对此作出恰当论证超出了本文的范围。对于代价函数 $c(x, y) = |x-y|^2$，我们在第4节中确立了关于 $R \to \infty$时收敛性的许多结果。其中最有力的结果给出了明确的（非渐近）收敛率，适用于满足$p > n$ 和 $p > 4$的目标密度函数，其中 p 是 ν的最高阶矩。对于对数凹密度函数，收敛率呈指数级。因此，在某些情况下，平方距离代价函数下的收敛是有充分依据的。

对于平方代价函数，因此我们建议固定一个“较大”的 R 值，并采用 Hamfeldt [10] 中的技术求解以下最优传输问题。设 μ 的密度函数为 g，其支撑集为有界集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$；设 ν 的密度函数为 f，其支撑集为 $\mathbb{R}^n$。定义密度

函数:

$$f_{R_C}(x) := \begin{cases} f(x)/\nu(RC_1(0)), & \text{for } x \in RC_1(0) \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{208}$$

令 ν_{R_C} 为定义在 $\mathbb{R}^n$ 上、密度函数为 f_{R_C} 的概率测度。

若要解出 ϕ，即从有界支撑的源测度到无界支撑的目标测度的 Brenier势，问题在于：是求解正向问题，还是求解逆问题后再进行插值更好。正如第4节所述，在最理想的情况下，两者的收敛速度相同。对于正向问题，在一般情形 $p > 2$ 下，如果势函数 ϕ 未知是否有界，那么当 R 较大时，我们可能会遇到与这种爆增有关的问题，或者因为目标密度函数 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上并非严格地有正下界而产生问题。因此，正如 $R \to \infty$，可能会出现稳定性问题。这些问题将在后续数值研究中进一步探讨。因此，我们也可以求解逆问题后再进行插值。

因此，为了求解从 μ 到 ν 的最优传输问题，我们提出通过数值计算以下 Monge-Amp`ere 偏微分方程的解:

$$f_{R_C}(\nabla u(x)) \det(D^2 u(x)) = g(x) \tag{209}$$

$$\nabla u(RC_1(0)) \subset \Omega. \tag{210}$$

如第5.2节所述，这需要构造算子 $F(x,\ u(x)\ Du(x)\ D^2u(x)) := -f_{R_C}(\nabla u(x))$ $\det(D^2u(x)) + g(x)$ 的一致相容、单调、稳定、连续且严格低估的格式 F^h，构造 Ω 的符号距离函数 H，并近似海森矩阵的最小特征值。详情见 Hamfeldt [10]，作者在其中提出了一种形式相容误差较小的离散化。可以设想使用 Jin等人 [12] 提出的谱伽辽金方法这类收敛速度非常快的格式，因为计算区域是矩形。

注释62。 *Hamfeldt* [10]的收敛框架不允许区域 Ω 改变大小。因此，当前框架不允许参数 R发生变化，例如使其成为 h的函数。这一研究方向将在后续工作中探讨。

6. 结论

在本文中，我们通过对后一个问题进行截断近似，针对从有界支撑源测度到无界支撑目标测度的最优传输问题，建立了许多关于逐点收敛的结果。对于截断近似，这些结果适用于径向对称情形下相当一般的代价函数。对于代价函数 $c(x,\ y) = |x-y|^2$，在一般情形下，基于 Delalande 和 M`erigot 先前的结果，我们发现截断近似在某些情况下能够快速收敛。本文的主要结果表明，在一般情形下，当 μ an ν 具有密度函数，$p > n$ 和 $p > 4$，源区域 Ω 为凸集，且源测度的密度函数有正的下界和有限的上界时，只要 $\mu_R \rightharpoonup \nu$ 弱收敛，我们就能得到布雷尼耶势的逐点收敛，以及最优传输映射的几乎处处收敛。进一步细化区域的几何假设，并利用布雷尼耶势的 H¨older 连续性，我们得到了显式收敛速率，该速率取决于

量 $W_1(\nu_R,\ \nu)$ 的显式收敛速率。对于截断近似的情形，可以显式求出该量（当然，在其他情形下也同样可以显式求出）。研究表明，截断近似的收敛相当快；事实上，对于 log-凹测度，其收敛速度是指数级的。随后，我们在略微放宽目标分布矩的假设后，推导出了许多其他收敛保证，以期未来能得到此类结果。最后，我们还推导了逆布雷尼耶势函数和逆最优传输映射的收敛保证。本文最后讨论了一种特定的、可证明收敛的数值方法，该方法可用于求解由此得到的截断近似问题。

致谢。 作者感谢北京自然科学基金 BJNSF ISP 的支撑。

References

[1] Alexandr Andoni、Assaf Naor 和 Ofer Neiman。瓦瑟斯坦空间的雪花普适性。 *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure*，51(3):657–700，2018年。[2] Robert J Berman。离散化 Monge-Amp`ère 方程的收敛率与最优传输的定量稳定性。 *Foundations of Computational Mathematics*，21:1099–1140，2020年12月。[3] Robert J Berman 和 Bo Berndtsson。环面对数法诺簇上的实 Monge-Amp`ère 方程与 K¨ahler-Ricci 孤立子。 *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse: Mathématiques* 22 4 649 711, 2013 , ( ): – 。[4] Yann Brenier。向量值函数的极分解与单调重排。 *Communications on Pure and Applied Mathematics*，44:375–417，1991年。[5] M. G. Crandall、H. Ishii 和 P.-L. Lions。二阶偏微分方程粘性解指南。 *Bulletin of the American Mathematical Society*，27(1):1–67，1992年7月。[6] M. Cuturi。辛克霍恩距离：以光速计算最优传输距离。*Advances in Neural Information Processing Systems*，26，2013年6月。[7] Alex Delalande 和 Quentin M´erigot。目标测度变化下最优传输映射的定量稳定性。 *Duke Mathematical Journal*，172(17):3321–3357，2023年11月。[8] Lawrence C. Evans 和 Ronald F. Gariepy。 *Measure Theory and Fine Properties of Functions*。数学教材。CRC Press，修订版，2015年。[9] Nicola Gigli。沿曲线趋向测度的最优传输映射关于时间的 H¨older 连续性。 *Proc. Edinb. Math. Soc. 2*，54(2):401–409，2011年。[10] B. D. Hamfeldt。Monge-Amp`ère 方程第二边值问题的收敛框架。 *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Numerical Analysis*，57(2):945–971，2019年1月。[11] Brittany Froese Hamfeldt 和 Axel G. R. Turnquist。球面上最优传输的收敛框架。 *Numerische Mathematik*，151:627–657，2022年6月。[12] Lixiang Jin、Zhaoxiang Li、Peipei Wang 和 Lijun Yi。全非线性 Monge-Amp`ère 方程的谱伽辽金方法。 *Applied Numerical Mathematics*，207(3)，2024年10月。[13] Jun Kitagawa、Quentin M´erigot 和 Boris Thibert。半离散最优传输牛顿算法的收敛性。 *J. Eur. Math. Soc.*，21(9):2603–2651，2019年。[14] Jean B. Lasserre。利用多项式进行全局优化与矩问题。 *SIAM J. Optim.* 11 3 796 817, 2001 , ( ): – 。[15] Wenbo Li 和 Ricardo H Nochetto。最优传输计划的定量稳定性与误差估计。 *IMA Journal of Numerical Analysis*，41(3):1941–1965，2021年7月。[16] G. Loeper。最优传输问题解的正则性。 *Acta Mathematica* 202 241 , : – 283，2009年。[17] X.-N. Ma、N. X. Trudinger 和 X.-J. Wang。最优传输问题势函数的正则性。 *Archive for Rational Mechanics and Analysis*，177(2):151–183，2005年。

[18] Francesco Maggi。 *Optimal Mass Transport on Euclidean spaces* 207 *Cambridge*，第 卷。剑桥 *studies in advanced mathematics* 2023 大学出版社，。[19] Tarek A El Moselhy 和 Youssef M Marzouk。利用最优映射进行贝叶斯推断。 *Journal of Computational Physics* 231 23 7815 7850, 2012 ，( ): – 10月 。

[20] Olga Mula 和 Anthony Nouy。最优传输问题的矩-SOS方法。 *Numerische Mathematik* 156 1541 1578, 2024 ，: – 6月 。[21] Adam M. Oberman 和 Yuanlong Ruan。采用多重网格线性规划方法求解最优传输问题。 *Journal of Computational Mathematics*，38:933–951，2020年6月。[22] G. Peyr´e 和 M. Cuturi。计算最优传输：及其在数据科学中的应用。*Foundations and Trends in Machine Learning*，11(5-6):355–607，2019年。[23] R. Tyrrell Rockafellar。 *Convex Analysis*。普林斯顿数学与物理学经典著作。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西，1970年。[24] Matthew Thorpe。最优传输导论。技术报告，剑桥大学数学科学中心，2019年3月。[25] J. Urbas。关于 Monge-Amp ` *Jour-* ère 型方程的第 *nal für die reine und angewandte Mathematik* 487 115 124, 1997 二边值问题。，: – 。[26] C. Villani。 *Topics in Optimal Transportation*。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛，美国，2003年。[27] C ´ *Optimal Transport: Old and New* 338 *A Series of Comprehensive* édric Villani。， *Studies in Mathematics* 2009 第 卷。施普林格，柏林，德国，。

Beijing Institute of Mathematical Sciences and Applications, Beijing, China
Email address: agrt@bimsa.cn