arXiv:2603.01646v1 [math.AP] 2 Mar 2026

二维水弹性波的精确可控性

LIZHE WAN 和 Jiaqi Yang

Abstract. 我们证明了周期情形下二维水弹性波的精确可控性。我们证明，若初始数据和终端数据足够小，则对于支集为任意非空开集 ω的外部压力，二维水弹性波系统可在任意短时间内实现精确可控。

1. Introduction

我们考虑二维无旋、无黏且不可压缩的流体，其顶面与一块无摩擦薄弹性片接触。流体占据随时间变化的区域 $\Omega_t \subseteq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$，该区域具有自由周期上边界 Γ_t 和固定平坦下边界 $\Gamma_b = \{(x,\ y)|y = -h\}$（在无穷水深情形下，$\Gamma_b$ 为空）。记流体速度为 $(u(t,\ x,\ y)\ v(t,\ x,\ y))$，压力为 $p(t,\ x,\ y)$，则区域 Ω_t 内的方程由以下不可压缩无旋欧拉方程给出：

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y = -p_x, \\ v_t + uv_x + vv_y = -g - p_y, \\ u_x + v_y = 0, \quad u_y - v_x = 0. \end{cases}$$

在边界 Γ_t 上，我们假设不存在表面张力。相反，动力边界条件包含非线性弹性回复力以及外部压力 P_{ext},

$$p = -\sigma\Delta_{\Gamma_t}\kappa - \frac{\sigma}{2}\kappa^3 + P_{ext} \quad \text{on } \Gamma_t,$$

而运动学边界条件为

$$\partial_t + (u, v) \cdot \nabla_{x,y} \text{ is tangent to } \Gamma_t.$$

这里，κ 是曲面 Γ_t 的平均曲率，$g > 0$ 表示重力加速度，$\sigma > 0$ 是抗弯刚度系数。在有限水深情形下，我们还在底部施加一个边界条件：

$$v = 0 \quad \text{on } \Gamma_b.$$

这个自由边界问题通常称为二维**水弹性波**系统，最初由 Toland [34] 在研究稳态周期波时提出。

2020 数学学科分类。76B15, 74F10, 76B07。关键词与短语。水弹性波，可控性，Nash-Moser-H¨ormander 定理。

水弹性波的柯西问题由 Ambrose 和 Siegel 进行了研究 [8], Ambrose 和 Liu [28], 以及 Wang 和 Yang [37, 38]。近来, [35]中建立了一个低正则适定性结果。此外, [36] 作者证明了具有弹性界面的 Muskat问题的适定性。关于水弹性波中的孤立波结果, 请参阅 Groves等人 [1, 23]。

本文研究二维水弹性波的内部可控性。该问题可用 Zakharov-Craig-Sulem 公式表示。假设时刻 t 的流体区域 Ω_t 可表示为

$$\Omega_t = \{(x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}; -h < y < \eta(t, x)\},$$

其中 $\eta(t, x)$: $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \to \mathbb{R}$ 参数化自由表面 Γ_t, 而 h 是区域的深度（在无穷水深的情形下也可以为 ∞ ）。不失一般性, 我们假设 η 为零均值。我们定义速度势 ϕ , 使得 $(u, v) = \nabla\phi$, 其中 ϕ 满足方程

$$\Delta_{x,y}\phi = 0, \quad \partial_t\phi + \frac{1}{2}|\nabla_{x,y}\phi|^2 + gy = p, \quad \partial_y\phi|_{y=-h} = 0.$$

根据椭圆方程的经典理论, 该问题可归结为边界 Γ_t 上速度势的演化。令 $\psi(t, x) = \phi(t, x, \eta(t, x))$ 表示自由表面上速度势的迹。于是, 该系统可改写为:

$$\begin{cases} \eta_t = G(\eta)\psi\,, \\ \psi_t + g\eta + \frac{1}{2}\psi_x^2 - \frac{1}{2}\frac{(\eta_x\psi_x - G(\eta)\psi)^2}{1+\eta_x^2} + \sigma\mathbf{E}(\eta) = P_{ext}\,, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $G(\eta)$ 是 Dirichlet–Neumann算子, 定义为

$$G(\eta)\psi := \sqrt{1+\eta_x^2}\phi_n|_{y=\eta(t,x)} = (\phi_y - \eta_x\phi_x)|_{y=\eta(t,x)}\,,$$

而弹性项$\mathbf{E}(\eta)$由下式给出

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\eta) :=& \sigma\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\eta_x^2}}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\eta_x^2}}\left(\frac{\eta_{xx}}{(1+\eta_x^2)^{3/2}}\right)_x\right]_x + \frac{1}{2}\left(\frac{\eta_{xx}}{(1+\eta_x^2)^{3/2}}\right)^3\right\} \\ =& \sigma\left\{\left(\frac{\eta_{xx}}{(1+\eta_x^2)^{\frac{5}{2}}}\right)_{xx} + \frac{5}{2}\left(\frac{\eta_x\eta_{xx}^2}{(1+\eta_x^2)^{\frac{7}{2}}}\right)_x\right\}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

水弹性波系统是一类具有非线性弹性边界条件的特殊水波问题。相关水波模型的控制理论目前已相当成熟, 我们在此简要回顾相关结果。Reid 与 Russell [33] 以及 Reid [31, 32]研究了线性化水波方程在原点处的可控性。随后, Alazard、Baldi 和 Han-Kwan 在 [7] 中运用拟微分演算和 Ingham型不等式, 证明了二维空间中完整重力-毛细水波系统的可控性。Zhu 在 [39] 中采用一种不同的半经典方法, 将他们的结果推广到了更高维情形。

Alazard 还运用乘子法证明了二维与三维重力水波的边界可观测性 [4]。此外，Alazard 还分别得到了重力水波 [5]和重力毛细水波 [3]的稳定化结果。

在陈述系统（1.1）的可控性结果之前，我们首先简要考察零解附近线性化水弹性波的控制理论。该系统由下式给出

$$\begin{cases} \partial_t \eta = G(0)\psi, \\ \partial_t \psi + g\eta + \sigma \partial_x^4 \eta = P_{ext}, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $G(0) = |D|tanh(h|D|)$ （$G(0) = |D|$ 在无穷水深情形下）。当 $g = P_{ext} = 0$且 $h = +\infty$ 时，线性系统（1.3）在 $H^{s+\frac{3}{2}}(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T})$ 中对任意 $s \in \mathbb{R}$ 都是适定的。然后我们定义乘积索伯列夫空间

$$\mathcal{H}^s := H^{s+\frac{3}{2}}(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T}).$$

逆矩阵 $G(0)^{-1}$ 对具有零均值的周期函数是良定义的。引入线性算子

$$L := ((g + \sigma \partial_x^4) G(0))^{\frac{1}{2}},$$

则 $u = \psi - iLG(0)^{-1}\eta$ 求解线性色散方程

$$(\partial_t + iL)u = P_{ext}. \tag{1.4}$$

根据第 4 节.1，Micu 与 Zuazua [29], ，我们有如下**Ingham不等式**，适用于（1.4）的一个变体。

引理 1.1 ([29])。对于任意 $T > 0$，存在一个正常数 $C_1(T)$，使得对所有$(w_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$，$m \geq c$ 对某个常数 $c > 0$，有如下 *Ingham*不等式：设 $\mathfrak{t}(\xi)$ 是定义于(4.8)中的符号，则

$$\int_0^T \left| \sum_{n\in\mathbb{N}} w_n e^{-i\mathfrak{t}(n)t} \right|^2 dt \geq C_1(T) \sum_{n\in\mathbb{N}} |w_n|^2.$$

借助上述 Ingham不等式和**希尔伯特唯一性方法**（HUM），可以证明（1.4）的精确可控性。

与零解附近的线性化系统相比，证明完整水弹性波系统的可控性主要面临以下困难：

(1) 水弹性波系统是一个拟线性系统，而非一个具有常系数的单一色散方程。不能指望通过简单的对称化步骤将（1.1）转化为（1.4）。(2) 线性化系统（1.3）经对称化后，不含$_{3\ 2}$ 阶次阶项和一阶输运项。(3) 经典的 Ingham不等式和调和分析方法仅适用于具有常系数的线性色散方程。

本文克服了上述困难，并证明了二维完整水弹性波的精确可控性。

1.1. **主要结果**。 我们的主要结果表明，水弹性波系统（1.1）在任意短时间内都可实现精确控制。更确切地说，我们有如下结果。

定理1.2。 设 $T>0$ 为任意（可能很短的）时间， $\omega \subset \mathbb{T}$ 为非空开集。存在一个正的普适常数 s_*，以及一个足够小的正数常数δ_*， 它依赖于 T和 ω， 使得若 $(\eta_{in}, \psi_{in}),(\eta_{end}, \psi_{end}) \in \mathcal{H}^{s_*}(\mathbb{T};\mathbb{R})$ 满足

$$\|(\eta_{in},\psi_{in})\|_{\mathcal{H}^{s_*}} + \|(\eta_{end},\psi_{end})\|_{\mathcal{H}^{s_*}} < \delta_*,$$

则存在一个外部压力 $P_{ext}(t,x)$，其支集包含于 $[0,T]\times\omega$，并具有以下控制性质：

(1) 水弹性波系统 (1.1) 存在唯一解

$$(\eta,\psi) \in C([0,T];\mathcal{H}^{s_*}) \cap C^1([0,T];\mathcal{H}^{s_*-\frac{5}{2}}) \cap C^2([0,T];\mathcal{H}^{s_*-5}),$$

并且 $(\eta,\psi)|_{t=T} = (\eta_{end},\psi_{end})$。 *(2)* $P_{ext}(t,x)$ 属于函数空间 $C([0,T];H^{s_*})\cap C^1([0,T];H^{s_*-\frac{5}{2}})\cap C^2([0,T];H^{s_*-5})$，并满足控制估计

$$\sum_{k=0}^{2}\left(\|P_{ext}\|_{C^k([0,T];H^{s_*-\frac{5}{2}k})} + \|(\eta,\psi)\|_{C^k([0,T];\mathcal{H}^{s_*-\frac{5}{2}k})}\right) \lesssim \|(\eta_{in},\psi_{in})\|_{\mathcal{H}^{s_*}} + \|(\eta_{end},\psi_{end})\|_{\mathcal{H}^{s_*}}.$$

尽管原则上可以调整 [7]的方法来建立系统（1.1）的零可控性，并由此推出精确可控性，但我们选择直接采用 Nash-Moser H¨ormander 定理方法。该方法由 Baldi、Haus 和 Montalto [15]在哈密顿非线性薛定谔（¨NLS）方程的背景下提出。正如 [35], 所指出的，系统（1.1）可以改写为一个 5/2 阶拟线性拟微分方程。与 5/2 阶的重力-毛细水波相比，水弹性波的符号演算与对称化要复杂得多，也带来了额外的技术挑战。Nash–Moser–H¨ormander 方法避免了直接依赖拟微分表述，也不必进行完整的拟微分符号演算。

定理中的小数据假设 1.2 源于问题的拟线性本质。我们预期，若能得到二维水弹性波的适当稳定化结果，便可仿照 [3] 第 2.2 节中的论证，将可控性扩展到大数据情形。

1.2. **证明思路。** 现在我们简要概述证明二维水弹性波可控性的方法。我们将系统（1.1）改写为

$$\Phi(\mathbf{u}, f) := \begin{pmatrix} P_1(\mathbf{u}) \\ P_2(\mathbf{u}) - \chi_\omega f \\ \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{u}(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{u}_{in} \\ \mathbf{u}_{end} \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

其中 $\mathbf{u} = (\eta, \psi)$、$P_{ext} = \chi_\omega f$，以及

$$P_1(\mathbf{u}) = \eta_t - G(\eta)\psi\,,$$
$$P_2(\mathbf{u}) = \psi_t + g\eta + \frac{1}{2}\psi_x^2 - \frac{1}{2}\frac{(\eta_x\psi_x - G(\eta)\psi)^2}{1+\eta_x^2} + \sigma\mathbf{E}(\eta).$$

˜ ˜ Φ(u f) 在 (u f) 处沿方向 (˜u f) 的线性化算子 Φ′(u f)[˜u f] 为

$$\Phi'(\mathbf{u}, f)[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{f}] = \begin{pmatrix} P_1'(\mathbf{u})[\tilde{\mathbf{u}}] \\ P_2'(\mathbf{u})[\tilde{\mathbf{u}}] - \chi_\omega \tilde{f} \\ \tilde{\mathbf{u}}(0) \\ \tilde{\mathbf{u}}(T) \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

我们首先得到线性化算子的右逆的存在性。更确切地说，我们证明：给定任意 (u f) 以及合适函数空间中的任意 $\mathbf{g} := (g_1, g_2, g_3, g_4)^T$，便˜存在 (˜u f)，使得

$$\Phi'(\mathbf{u}, f)[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{f}] = \mathbf{g}. \tag{1.7}$$

˜此外，我们还必须得到 (˜u f) 关于 u f, g 的适当估计。

为了得到所需线性化控制的存在性，我们首先需要将算子矩阵 $\mathbf{P}'(\mathbf{u}) = (P_1'(\mathbf{u})\ P_2'(\mathbf{u}))^T$ 在 (2.5) 中化简并对称化为常系数微分算子。这通过以下步骤完成：

(1) 用式（2.8）中定义的矩阵 $\mathcal{Z}$ 对P′(u)进行共轭变换，因此由式（2.6）可得 $\mathcal{L}_0 = \mathcal{Z}^{-1}\mathbf{P}'(\mathbf{u})\mathcal{Z}$。(2) 用式（3.1）中定义的变换 $\mathcal{B}$ 对矩阵 $\mathcal{L}_0$ 进行共轭变换，从而将矩阵 $\mathcal{L}_0$ 化为式（3.3）中的 $\mathcal{L}_1$。(3) 用式（3.6）中定义的变换 $\mathcal{A}$ 对矩阵 $\mathcal{L}_1$ 进行共轭变换，从而将矩阵 $\mathcal{L}_1$ 化为式（3.7）中的 $\mathcal{L}_2$。(4) 选取式（3.14）中的矩阵 P, Q，则矩阵 $\mathcal{L}_2$ 化为式（3.15）中的 $\mathcal{L}_3$，其主$_{5\ 2}$ 阶项具有常系数。(5) 用式（3.18）中定义的矩阵算子 $\mathcal{S}$ 对矩阵 $\mathcal{L}_3$ 进行共轭变换，从而使矩阵 $\mathcal{L}_4$ 的主$_{5\ 2}$ 阶项对称化。

(6) 用矩阵 $\mathcal{L}_4 \quad M$ 对式（3.22）中定义的矩阵进行共轭变换，从而将矩阵 $\mathcal{L}_4$化为一个反对称矩阵 $\mathcal{L}_5$，精确到零阶。这也消除了$_3\ _2$阶的次阶项。(7) 按照式（4.1）进行空间变量的平移 $\mathcal{T}$，以消除一阶输运项中的零频分量。矩阵 $\mathcal{L}_5$ 进一步化为 $\mathcal{L}_6$。(8) 用式（4.4）中定义的酉矩阵 $\mathcal{O}$ 对矩阵 $\mathcal{L}_6$ 进行共轭变换，从而使矩阵$\mathcal{L}_6$ 化为一个对角矩阵 $\mathcal{L}_7$，精确到零阶。(9) 使用式（4.11）中的傅里叶积分算子 $A^{(1)}$ 和 $A^{(2)}$，消去 $\mathcal{L}_7$中的一阶项和$_1\ _2$ 阶项。最终得到对角矩阵 $\mathcal{L}_8$。余项矩阵 $\mathcal{R}_8$采用微扰方法处理。

利用这些约化，我们可以方便地借助英厄姆型不等式得到线性化水弹性波系统的适定性与可观测性。它们可按上述约化步骤反向得到。此外，由可观测性、柯西问题的适定性以及 HUM，可以得到线性化系统的可控性。最后，完整非线性系统的可控性便可从线性化可控性出发，通过应用**Nash-Moser-H¨ormander** 定理A.6。

我们指出，利用上述约化程序，也可以证明二维水弹性波（1.1）在周期情形下的局部适定性，其做法类似于对 Korteweg–de Vries（KdV）方程的扰动，见 [13]。然而，这一适定性结果处于高正则性，且与 [35, 37]中的已有结果相比要弱得多。我们在此不证明二维水弹性波的这一适定性结果。

上述对线性化算子的对称化与约化过程，改编自 Feola 与 Procesi [22]在拟线性非线性薛定谔方程 KAM 理论研究中所采用的方法。类似的约化技术也在周期情形下得到发展和应用，用于研究水波、拟线性 KdV 方程、Benjamin-Ono 方程、Kirchhoff 方程和不可压缩欧拉方程等问题，例如参见 [6, 7, 9–12,16–20, 25, 30].

关于除水波以外的其他拟线性色散偏微分方程的可控性，Baldi、Floridia 与 Haus [13, 14] 研究了 KdV 方程拟线性扰动的内部可控性。Baldi、Haus 与 Montalto [15] 以及 Iandoli 与 Niu [24] 分别证明了在 $d = 1$ 维和$d \geq 2$ 维情形下拟线性 Hamilton 薛定谔方程的精确可控性¨。

本文其余部分安排如下。在第2节中，我们计算线性化水弹性波系统（2.5），并将 Dirichlet-Neumann 算子写成主导项与余项之和。接下来的两节中，我们将线性化水弹性波系统（2.5）化为具有常系数的对角矩阵算子 $\mathcal{L}_8$，外加低阶余项矩阵 $\mathcal{R}_8$。在第3节中，化简在主导的$_5\ _2$ 阶和次主导的$_3\ _2$ 阶进行。随后在第4节中，化简进行到

0 阶。利用对线性化水弹性波所作的这些化简，我们在第5节证明线性化水弹性波柯西问题的适定性，并在第6节获得线性化水弹性波的可观测性。作为上述结果的推论，我们在第7 节证明线性化水弹性波的可控性。最后，在第8节中，我们利用线性化水弹性波的可控性和 Nash-Moser-H¨ormander 定理A.6证明完整水弹性波的可控性。所有辅助结果汇集于附录A。这些结果包括周期情形下函数空间的定义、伪微分算子的一些估计，以及 Nash-Moser-H¨ormander 定理的陈述。

2. Linearized hydroelastic waves

回顾一下，水弹性波（1.1）可以改写为（1.5）。本节中，我们计算˜线性化算子 Φ'（$\mathbf{u}$ f）[˜$\mathbf{u}$ f]，并给出二阶导数˜ ˜Φ''（$\mathbf{u}$ f）[(˜$\mathbf{u}_1, f_1$), (˜$\mathbf{u}_2, f_2$)]的估计。

˜ ˜线性化算子 $\Phi'(\mathbf{u}\ f)[\tilde{\mathbf{u}}\ f]$ 在点 $(\mathbf{u}\ f)$ 沿方向 $(\tilde{\mathbf{u}}\ f)$ 的表达式见 (1.6)。只需计算 $P_1'(\mathbf{u})[\tilde{\mathbf{u}}]$ 和 $P_2'(\mathbf{u})[\tilde{\mathbf{u}}]$。我们先回顾 Lannes 关于 Dirichlet-Neumann算子**形状导数** 的以下结果 [26, 27]。

引理 2.1 ([26, 27])。 设 $s > 1$，且 $\psi \in H^{\frac{3}{2}}$。则映射 $G(\cdot)\psi\colon H^{s+\frac{1}{2}} \to H^{\frac{1}{2}}$ 可微，且对任意 $\tilde{\eta} \in H^{s+\frac{1}{2}}$，

$$G'(\eta)[\tilde{\eta}]\psi = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\{G(\eta+\varepsilon\tilde{\eta})\psi - G(\eta)\psi\} = -G(\eta)(B\tilde{\eta}) - \partial_x(V\tilde{\eta}), \tag{2.1}$$

其中 B 和 V 分别是 Γ_t 上速度的垂直分量和水平分量，由下式给出

$$B(\eta,\psi) := \frac{\eta_x\psi_x + G(\eta)\psi}{1+\eta_x^2}, \quad V(\eta,\psi) := \psi_x - B\eta_x. \tag{2.2}$$

B 和 V 满足以下估计，其中 $\tau > \frac{3}{2}$，

$$\|B(\eta,\psi)\|_{H^{\tau-1}} + \|V(\eta,\psi)\|_{H^{\tau-1}} \le C(\|\eta\|_{H^\tau})\|\psi\|_{H^\tau}.$$

We 还具有以下关于 Dirichlet-Neumann 算子的拟线性化 r.

引理 2.2 ([7])。 设 $s \ge s_0$，其中 s_0 足够大。则存在 $\theta \in (0,1]$，使得

$$G(\eta) = |D|(\psi - T_B\eta) - \partial_x(T_V\eta) + F(\eta)\psi,$$

其中 $T_B\eta$ 和 $T_V\eta$ 分别是 $B\eta$ 和 $V\eta$的低高频抛物乘积，且余项$F(\eta)\psi$ 满足

$$\|F(\eta)\psi\|_{H^{s+\frac{3}{2}}} \le C(\|\eta\|_{H^s})\|\eta\|_{H^s}^{\theta}\|\psi\|_{H^s}. \tag{2.3}$$

然后我们回顾 Lannes [26] 中命题 3.25 关于 Dirichlet-Neumann算子二阶导数的估计。

引理 2.3 ([26]). 设 $s \geq 2$。假设 $\eta \in H^{s+\frac{3}{2}} \cap H^{\frac{9}{2}}$, $\psi_x \in H^{s+\frac{1}{2}}$。那么，对于所有$\tilde{\eta}_1$, $\tilde{\eta}_2 \in H^{s+\frac{3}{2}}$, -

$$\begin{aligned}\|\mathcal{G}''(\eta)[\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2]\psi\|_{H^{s+\frac{1}{2}}} \leq & C\left(s, \|\eta\|_{H^{\frac{9}{2}}}, \|\psi_x\|_{H^{\frac{3}{2}}}\right)\Big(\|\tilde{\eta}_1\|_{H^{s+\frac{3}{2}}}\|\tilde{\eta}_2\|_{H^{\frac{5}{2}}} \\ & + \|\tilde{\eta}_2\|_{H^{s+\frac{3}{2}}}\|\tilde{\eta}_1\|_{H^{\frac{5}{2}}} + \|\tilde{\eta}_1\|_{H^{\frac{5}{2}}}\|\tilde{\eta}_2\|_{H^{\frac{5}{2}}}\left(\|\eta\|_{H^{s+\frac{3}{2}}} + \|\psi_x\|_{H^{s+\frac{1}{2}}}\right)\Big).\end{aligned}$$

根据对带有滞弹性界面的 Muskat问题的计算， [36], 的引理 3.1 给出了弹性项的线性化：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'(\eta)[\tilde{\eta}] = & \sum_{\alpha=1}^{4} E_{5-\alpha}(\eta)\partial_x^{5-\alpha}\tilde{\eta} := \frac{\partial_x^4\tilde{\eta}}{(1+\eta_x^2)^{\frac{5}{2}}} + 2\big((1+\eta_x^2)^{-\frac{5}{2}}\big)_x\partial_x^3\tilde{\eta} \\ & + \left\{((1+\eta_x^2)^{-\frac{5}{2}})_{xx} - \left(\frac{5\eta_x\eta_{xx}}{(1+\eta_x^2)^{\frac{7}{2}}}\right)_x + \frac{5(1-6\eta_x^2)\eta_{xx}^2}{2(1+\eta_x^2)^{\frac{9}{2}}}\right\}\tilde{\eta}_{xx} \\ & - \left[\left(\frac{5\eta_x\eta_{xx}}{(1+\eta_x^2)^{\frac{7}{2}}}\right)_{xx} - \left(\frac{5(1-6\eta_x^2)\eta_{xx}^2}{2(1+\eta_x^2)^{\frac{9}{2}}}\right)_x\right]\tilde{\eta}_x.\end{aligned}$$

需要注意的是， $E_3(\eta) = 2\partial_x E_4(\eta)s \geq 2$。再求一次导数，可得对于$s \geq 2$,

$$\|\text{东}''(\eta)[\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2]\|_{H^s} \lesssim \|\tilde{\eta}_1\|_{H^2}\|\tilde{\eta}_2\|_{H^{s+4}} + \|\tilde{\eta}_1\|_{H^{s+4}}\|\tilde{\eta}_2\|_{H^2} + \|\tilde{\eta}_1\|_{H^2}\|\tilde{\eta}_2\|_{H^2}\|\eta\|_{H^{s+4}}. \tag{2.4}$$

˜因此，对于 $\mathbf{u} = (\eta, \psi)$ 和 ˜$\mathbf{u} = (\tilde{\eta}, \psi)$，通过与 [6], 第5节中的计算类似的直接计算，我们得到线性化算子

$$\begin{aligned}P_1'(\mathbf{u})[\tilde{\mathbf{u}}] = & \partial_t\tilde{\eta} + \partial_x(V\tilde{\eta}) - |D|(\tilde{\psi} - B\tilde{\eta}) + \mathcal{R}_G(\eta)\psi, \\ P_2'(\mathbf{u})[\tilde{\mathbf{u}}] = & \partial_t\tilde{\psi} + V\partial_x\tilde{\psi} - BG(\eta)\tilde{\psi} + (g + BV_x)\tilde{\eta} + BG(\eta)(B\tilde{\eta}) \\ & + \sigma\sum_{\alpha=1}^{4} E_{5-\alpha}(\eta)\partial_x^{5-\alpha}\tilde{\eta},\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{R}_G(\eta)\psi$ 是满足（2.3）的低阶余项。或者，也可以将这些线性化算子写成矩阵形式。

$$\begin{aligned}\mathbf{P}'(\mathbf{u})[\tilde{\mathbf{u}}] = & \mathbf{P}'(\mathbf{u})(\tilde{\eta}, \tilde{\psi})^T := (P_1'(\mathbf{u})[\tilde{\mathbf{u}}], P_2'(\mathbf{u})[\tilde{\mathbf{u}}])^T \\ = & \begin{pmatrix} \partial_t + V\partial_x + V_x + |D|B & -|D| + \mathcal{R}_G(\eta) \\ (g + BV_x) + BG(\eta)B + \sigma\sum_{\alpha=1}^{4} E_{5-\alpha}(\eta)\partial_x^{5-\alpha} & \partial_t + V\partial_x - BG(\eta) \end{pmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\eta} \\ \tilde{\psi}\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

众所周知，对于水波问题，与其使用变量 (η, ψ)，不如使用 **Alinhac好未知量**，即 $(\eta, \psi - T_B\eta)$；例如参见 [2, 26]。受此启发，$\mathbf{P}'(\mathbf{u})$ 具有如下共轭结构：

$$\mathbf{P}'(\mathbf{u}) = \mathcal{Z}\mathcal{L}_0\mathcal{Z}^{-1}, \tag{2.6}$$

其中矩阵 $\mathcal{Z}$ 及其逆矩阵 $\mathcal{Z}^{-1}$ 由下式给出

$$\mathcal{Z} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Z}^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -B & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

而矩阵 $\mathcal{L}_0$ 由下式给出

$$\mathcal{L}_0 := \begin{pmatrix} \partial_t + V\partial_x + V_x & -|D| + \mathcal{R}_G \\ a + \sigma \sum_{\alpha=1}^{4} E_{5-\alpha}(\eta)\partial_x^{5-\alpha} & \partial_t + V\partial_x \end{pmatrix}, \quad a = g + B_t + VB_x. \tag{2.8}$$

矩阵 $\mathcal{L}_0$中的 a， B， V是关于（η， ψ）的周期函数，因此在空间上也是周期的。此外，我们有如下界

$$\|(\mathcal{Z}-I)\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{H}^s} + \|(\mathcal{Z}^{-1}-I)\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{H}^s} = \|B\tilde{\eta}\|_{H^{s+\frac{3}{2}}} \lesssim \|B\|_{H^{s+\frac{3}{2}}} \|\tilde{\eta}\|_{H^{s+\frac{3}{2}}} \lesssim \|\psi\|_{H^{s+\frac{5}{2}}} \|\tilde{\eta}\|_{H^{s+\frac{3}{2}}}. \tag{2.9}$$

在接下来的两节中，我们将进一步简化矩阵算子 $\mathcal{L}_0$。

3. Reduction of the linearized operator at leading and sub-leading order

本节中，我们通过若干变量变换来简化矩阵算子 $\mathcal{L}_0$ （2.8）中的矩阵算子，使最高阶项变为常系数且经过对称化。具体做法是进行空间变量变换、时间重参数化、对矩阵 P^{-1}和 Q进行矩阵共轭，然后通过对 S进行共轭变换来实现最高阶对称化。接着，我们对低阶矩阵算子进行对称化，同时消去矩阵算子的次阶项。

3.1. 空间变量变换。 首先，我们对˜空间变量进行可逆的含时变换。考虑变量变换 $y = x + \beta(t, x) \Leftrightarrow x = y + \beta(t, y)$，其中$\beta(t, x)$是关于空间的周期函数，且满足 $|\beta_x| \leq \frac{1}{2}$。将变换 $\mathcal{B}$及其逆矩阵 $\mathcal{B}^{-1}$ 记为 -

$$(\mathcal{B}h)(t,x) := h(t, x + \beta(t,x)), \quad (\mathcal{B}^{-1}h)(t,y) := h(t, y + \tilde{\beta}(t,y)). \tag{3.1}$$

我们稍后将选择函数 β 在（3.13）中，使得利用 Moser 估计（A.3），对于每个$t \in [0,T]$,

$$\|\beta(t,x)\|_{H^s} \lesssim \|(1+\eta_x^2)^{\frac{1}{2}} - 1\|_{H^{s-1}} \lesssim \|\eta\|_{H^s}, \quad s > 1. \tag{3.2}$$

对于给定的函数 u，我们有关于 $\mathcal{B}$的共轭规则： $\mathcal{B}^{-1}u\mathcal{B} = (\mathcal{B}^{-1}u)$。对于 $\mathcal{B}$ 作用于偏导数时的共轭规则，我们直接计算并使用规则$\mathcal{B}^{-1}\partial_x^{j+k}\mathcal{B} = (\mathcal{B}^{-1}\partial_x^j\mathcal{B})(\mathcal{B}^{-1}\partial_x^k\mathcal{B})$。

$$\mathcal{B}^{-1}\partial_x\mathcal{B} = \{\mathcal{B}^{-1}(1+\beta_x)\}\partial_y, \quad \mathcal{B}^{-1}\partial_{xx}\mathcal{B} = \{\mathcal{B}^{-1}(1+\beta_x)\}^2\partial_{yy} + (\mathcal{B}^{-1}\beta_{xx})\partial_y, \mathcal{B}^{-1}\partial_x^3\mathcal{B} = \{\mathcal{B}^{-1}(1+\beta_x)\}^3\partial_y^3 + 3\{\mathcal{B}^{-1}(1+\beta_x)\}(\mathcal{B}^{-1}\beta_{xx})\partial_y^2 + (\mathcal{B}^{-1}\partial_x^3\beta)\partial_y, \mathcal{B}^{-1}\partial_x^4\mathcal{B} = \{\mathcal{B}^{-1}(1+\beta_x)\}^4\partial_y^4 + 6\left\{\mathcal{B}^{-1}(1+\beta_x)\right\}^2(\mathcal{B}^{-1}\beta_{xx})\partial_y^3 + 4\left\{\mathcal{B}^{-1}(1+\beta_x)\right\}(\mathcal{B}^{-1}\partial_x^3\beta)\partial_y^2$$

$$+ 3(\mathcal{B}^{-1}\beta_{xx})^2\partial_y^2 + (\mathcal{B}^{-1}\partial_x^4\beta)\partial_y,$$

$\mathcal{B}^{-1}\partial_t\mathcal{B} = \partial_t + (\mathcal{B}^{-1}\beta_t)\partial_y.$

对于 $\mathcal{B}$ 在 $|D_x| = \partial_x\mathcal{H}$ 上的共轭规则，其中 $\mathcal{H}$ 是希尔伯特变换，我们记为

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}^{-1}|D_x|\mathcal{B} = \mathcal{B}^{-1}\partial_x\mathcal{H}\mathcal{B} = (\mathcal{B}^{-1}\partial_x\mathcal{B})(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{H}\mathcal{B})\\ =&\{\mathcal{B}^{-1}(1+\beta_x)\}\partial_y[\mathcal{H} + (\mathcal{B}^{-1}\mathcal{H}\mathcal{B} - \mathcal{H})] = \{\mathcal{B}^{-1}(1+\beta_x)\}|D_y| + \mathcal{R}_{\mathcal{B}},\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{R}_{\mathcal{B}} := \{\mathcal{B}^{-1}(1+\beta_x)\}\partial_y(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{H}\mathcal{B} - \mathcal{H})$ 随时间有界，并在空间上具有正则化作用，因为根据 (A.6) 和 (3.2)，对 $s > 0$,

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{R}_{\mathcal{B}}f\|_{C([0,T];H^{s+2})} \lesssim \left(1 + \|\mathcal{B}^{-1}\beta_x\|_{C([0,T];H^{s+2})}\right)\|\partial_y^3(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{H}\mathcal{B} - \mathcal{H})f\|_{H^s}\\ \lesssim&\left(1 + \|\mathcal{B}^{-1}\beta_x\|_{C([0,T];H^{s+2})}\right)\left(\|\beta\|_{C([0,T];H^5)}\|f\|_{C([0,T];H^s)} + \|\beta\|_{C([0,T];H^{s+5})}\|f\|_{C([0,T];L^2)}\right)\\ \lesssim&\|\eta\|_{C([0,T];H^5)}\|f\|_{C([0,T];H^s)} + \|\eta\|_{C([0,T];H^{s+5})}\|f\|_{C([0,T];L^2)}.\end{aligned}$$

因此，对矩阵算子 $\mathcal{L}_1$ 进行共轭变换（通过 $\mathcal{B}$），可得

$$\mathcal{L}_1 := \mathcal{B}^{-1}\mathcal{L}_0\mathcal{B} = \begin{pmatrix}\partial_t + a_1\partial_y + a_2 & -a_3|D_y| + R_1\\ \sigma\sum_{j=1}^4 a_{3+j}\partial_y^{5-j} + a_8 & \partial_t + a_1\partial_y\end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

其中系数为

$$\begin{aligned}&a_1 := \mathcal{B}^{-1}[\beta_t + V(1+\beta_x)], \quad a_2 := \mathcal{B}^{-1}(V_x) \quad a_3 := \mathcal{B}^{-1}(1+\beta_x) \quad a_4 := \mathcal{B}^{-1}[E_4(1+\beta_x)^4],\\ &a_5 := \mathcal{B}\left[6E_4(1+\beta_x)^2\beta_{xx} + E_3(1+\beta_x)^3\right], \ a_6 := \mathcal{B}^{-1}\left[E_4\left(4(1+\beta_x)\partial_x^3\beta + 3\beta_{xx}^2\right) + 3E_3(1+\beta_x)\right.\\ &\left.\beta_{xx} + E_2(1+\beta_x)^2\right], \ a_7 := \mathcal{B}^{-1}\left[E_4\partial_x^4\beta + E_3\partial_x^3\beta + E_2\beta_{xx} + E_1(1+\beta_x)\right], \qquad a_8 := \mathcal{B}^{-1}a,\end{aligned}$$

以及 $R_1 := -\mathcal{R}_{\mathcal{B}} - \mathcal{B}^{-1}\mathcal{R}_G\mathcal{B}$。

为了得到 变换的界 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}^{-1}$，对于，我们使用引理 A.2。 ,

$$\|\mathcal{B}f\|_{C([0,T];H^s)} \lesssim \|f\|_{C([0,T];H^s)} + \|\eta\|_{C([0,T];H^{s+2})}\|f\|_{C([0,T];L^2)}, \tag{3.4}$$

$$\|\mathcal{B}^{-1}f\|_{C([0,T];H^s)} \lesssim \|f\|_{C([0,T];H^s)} + \|\eta\|_{C([0,T];H^{s+4})}\|f\|_{C([0,T];L^2)}. \tag{3.5}$$

算子 R_1 在空间上也具有正则化作用，并且对于 $s \geq s_0$

$$\|R_1f\|_{C([0,T];H^{s+\frac{3}{2}})} \lesssim \|\eta\|_{C([0,T];H^{s+4})}^{\theta}\|f\|_{C([0,T];H^s)}.$$

3.2. 时间重参数化与最高阶约化。 考虑对 $[0,T]$, $\tau = t + \alpha(t) \Leftrightarrow t = \tau + \tilde{\alpha}(\tau)$ 中的时间进行重参数化，其中 $\alpha(t)$ 满足 $\alpha(0) = \alpha(T) = 0$。将变换 $\mathcal{A}$及其逆矩阵 $\mathcal{A}^{-1}$ 记为

$$(\mathcal{A}h)(t,y) := h(t + \alpha(t), y), \quad (\mathcal{A}^{-1}h)(\tau,y) := h(\tau + \tilde{\alpha}(\tau), y). \tag{3.6}$$

我们稍后将选择函数 $\alpha(t)$（见公式 (3.11) 与 (3.12)）。可以验证

$$\mathcal{A}^{-1}\partial_y^k\mathcal{A} = \partial_y^k, \quad \mathcal{A}^{-1}|D_y|\mathcal{A} = |D_y|, \quad \mathcal{A}^{-1}\partial_t\mathcal{A} = \{\mathcal{A}^{-1}(1+\alpha')\}\partial_\tau.$$

因此，我们得到共轭变换

$$\mathcal{L}_2 := \mathcal{A}^{-1}\mathcal{L}_1\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_9\partial_\tau + a_{10}\partial_y + a_{11} & -a_{12}|D_y| + R_2 \\ \sigma\sum_{j=1}^{4} a_{12+j}\partial_y^{5-j} + a_{17} & a_9\partial_\tau + a_{10}\partial_y \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

其中 $R_2 = \mathcal{A}^{-1}R_1\mathcal{A}$，且系数 $a_i = a_i(\tau, y)$为

$$a_9 := \mathcal{A}^{-1}(1+\alpha'), \quad a_k := \mathcal{A}^{-1}(a_{k-9}), \quad k = 10, ..., 17.$$

$\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{A}^{-1}$ 保持索伯列夫范数，使得

$$\|\mathcal{A}h\|_{C([0,T];H^s)} = \|\mathcal{A}^{-1}h\|_{C([0,T];H^s)} = \|h\|_{C([0,T];H^s)}, \quad \forall h \in C([0,T];H^s). \tag{3.8}$$

给定 b_1, b_2, b_3, b_4 作为(t, x)的函数，该系统

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

具有解 f, g, p, q，

$$f = \frac{b_1}{\lambda_1 p}, \quad g = \frac{b_3}{\lambda_3 p}, \quad q = \frac{\lambda_1 b_2 p}{b_1 \lambda_2}, \quad p = \text{any}, \tag{3.9}$$

当且仅当 b_i, λ_i 满足

$$\frac{b_1 b_4}{b_2 b_3} = \frac{\lambda_1 \lambda_4}{\lambda_2 \lambda_3}.$$

特别地，要使 λ_i 在主阶为常数，必须 $b_1 b_4 / b_2 b_3$ 在主阶为常数。

为了将矩阵 $\mathcal{L}_2$ 主项的系数化为常数，我们利用上述观察，并寻找函数 $\alpha(t)$ $\beta(t, x)$，使得

$$m a_9^2 = a_{12} a_{13},$$

对于某个常数 $m \in \mathbb{R}$，这等价于

$$m(1+\alpha')^2 = a_3 a_4.$$

由于 $a_3 = \mathcal{B}^{-1}(1+\beta_x)$、 $a_4 = \mathcal{B}^{-1}[E_4(1+\beta_x)^4]$, 和 $\alpha' = \mathcal{B}^{-1}(\alpha')$，因此我们需要

$$m(1+\alpha')^2 = E_4(1+\beta_x)^5,$$

也就是说,

$$m^{\frac{1}{5}}(1+\alpha'(t))^{\frac{2}{5}} E_4(t,x)^{-\frac{1}{5}} = 1+\beta_x. \tag{3.10}$$

对该等式关于 dx 积分，并利用 $E_4(t, x) = (1+\eta_x^2)^{-\frac{5}{2}}$这一事实，我们得到

$$1+\alpha'(t) = m^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1+\eta_x^2)^{\frac{1}{2}} dx \right)^{-\frac{5}{2}}.$$

对上述等式关于 dt 积分，我们得到

$$m=\left\{\frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+\eta_x^2)^{\frac{1}{2}}dx\right)^{-\frac{5}{2}}dt\right\}^2, \tag{3.11}$$

$$\alpha(t)=\int_0^t\left[m^{-1/2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+\eta_x^2)^{\frac{1}{2}}dx\right)^{-\frac{5}{2}}-1\right]dt. \tag{3.12}$$

Set

$$f(t)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+\eta_x^2)^{\frac{1}{2}}dx\right)^{-\frac{5}{2}},$$

于是由（3.11），可写出

$$1+\alpha'(t)=\frac{f(t)}{\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt}.$$

由于 $(1+\|\eta_x\|_{L^\infty})^{-\frac{5}{2}}\le f(t)\le 1$，我们得到一致有界

$$(1+\|\eta_x\|_{L^\infty_{t,x}})^{-\frac{5}{2}}\le 1+\alpha'(t)\le(1+\|\eta_x\|_{L^\infty_{t,x}})^{\frac{5}{2}}.$$

利用方程（3.10），得到

$$\beta(t,x)=\partial_x^{-1}\left[m^{\frac{1}{5}}(1+\alpha'(t))^{\frac{2}{5}}(1+\eta_x^2)^{\frac{1}{2}}-1\right], \tag{3.13}$$

where $\partial_x^{-1}f$ 是 x中的 f 的原函数，且空间平均值为零。或者，

$$\partial_x^{-1}e^{ikx}=\frac{1}{ik}e^{ikx}\quad\forall k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\qquad \partial_x^{-1}1=0.$$

我们沿用上述初等观察，其中 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_4=1$、$\lambda_3=m$、$p=1$、$b_1=a_9$、$b_2=a_{12}$、$b_3=a_{13}$、$b_4=a_9$，并设

$$\begin{aligned}&P:=\begin{pmatrix}a_9&0\\0&a_{13}m^{-1}\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\begin{pmatrix}a_9^{-1}&0\\0&a_{13}^{-1}m\end{pmatrix},\\&Q:=\begin{pmatrix}1&0\\0&a_{13}^{-1}a_9\end{pmatrix},\quad Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&a_{13}a_9^{-1}\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3.14}$$

根据（3.9），于是有

$$\mathcal{L}_3:=P^{-1}\mathcal{L}_2Q=\begin{pmatrix}\partial_\tau+a_{18}\partial_y+a_{19}&-|D_y|+a_{20}\mathcal{H}+R_3\\ \sigma m\partial_y^4+m\sigma\sum_{j=2}^4a_{19+j}\partial_y^{5-j}+ma_{24}&\partial_\tau+a_{18}\partial_y+a_{25}\end{pmatrix}, \tag{3.15}$$

其中系数为

$$\begin{aligned}&a_{18}=\frac{a_{10}}{a_9},\quad a_{19}=\frac{a_{11}}{a_9},\quad a_{20}=-\frac{a_{12}}{a_9}\left(\frac{a_{12}}{a_9}\right)_y,\\&a_{19+j}=\frac{a_{12+j}}{a_{13}},\ j=2,3,4,\quad a_{25}=m\frac{a_9}{a_{13}}\left(\frac{a_9}{a_{12}}\right)_\tau+m\frac{a_{10}}{a_{13}}\left(\frac{a_9}{a_{12}}\right)_y,\end{aligned}$$

且余项 R_3 由下式给出

$$R_3 = -\frac{a_{12}}{a_9}\partial_y\left[\mathcal{H}, \frac{a_9}{a_{12}}\right] + \frac{1}{a_9}R_2\frac{a_9}{a_{12}}.$$

注意，矩阵 $\mathcal{L}_3$ 中的主阶算子，即 $-|D_y|$ 和 $\sigma m\partial_y^4$，现在具有常系数。

回忆一下，根据定义，常数 a_9、a_{13} 和 a_{13} 由下式给出

$$a_9 = 1+\mathcal{A}^{-1}\alpha', \quad a_{12} = m^{\frac{1}{5}}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}^{-1}[(1+\alpha'(t))^{\frac{2}{5}}(1+\eta_x^2)^{\frac{1}{2}}], \quad a_{13} = m^{\frac{4}{5}}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}^{-1}[(1+\alpha'(t))^{\frac{8}{5}}(1+\eta_x^2)^{-\frac{1}{2}}].$$

利用 Moser 估计（A.3），可得当 $s>2$ 时，

(3.16)
$$\|(P^{\pm1} - \mathrm{diag}\{1, m^{\pm\frac{1}{5}}\})\tilde{u}\|_{\mathcal{H}^s} + \|(Q^{\pm1} - \mathrm{diag}\{1, m^{\mp\frac{1}{5}}\})\tilde{u}\|_{\mathcal{H}^s} \lesssim \|\eta\|_{H^2}\|\tilde{u}\|_{\mathcal{H}^s} + \|\eta\|_{H^{s+2}}\|\tilde{u}\|_{\mathcal{H}^2}.$$

利用交换子估计（A.5），算子 R_3 满足如下估计：当 $s\geq s_0$ 时，

$$\|R_3 f\|_{C([0,T];H^{s+\frac{3}{2}})} \lesssim \|\eta\|^{\theta}_{C([0,T];H^{s+4})}\|f\|_{C([0,T];H^s)}.$$

3.3. 最高阶对称化。 设 $\mathfrak{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ 是一个 C^∞ 函数，使得

$$\mathfrak{g}(\xi) = \left(\frac{g+\sigma\xi^4}{|\xi|}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall|\xi|\geq\frac{2}{3}; \quad \mathfrak{g}(\xi)=1, \quad \forall|\xi|\leq\frac{1}{3}. \tag{3.17}$$

我们将 Λ 定义为符号为 $\mathfrak{g}$ 的傅里叶乘子，并且

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m^{\frac{1}{2}}\Lambda \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m^{-\frac{1}{2}}\Lambda^{-1} \end{pmatrix}, \tag{3.18}$$

其中 m 在（3.11）中为常数。

记矩阵 $\mathcal{L}_3 = \begin{pmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{pmatrix}$，则有如下共轭变换

$$S^{-1}\mathcal{L}_3 S = \begin{pmatrix} A_3 & m^{1/2}B_3\Lambda \\ m^{-1/2}\Lambda^{-1}C_3 & \Lambda^{-1}D_3\Lambda \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} A_3^+ & B_3^+ \\ C_3^+ & D_3^+ \end{pmatrix}.$$

我们定义算子

$$T := \sqrt{m}|D_y|^{\frac{1}{2}}(g+\sigma\partial_y^4)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.19}$$

利用符号展开（A.7），我们得到 $A_3^+ = A_3$ 和

$$\begin{aligned}
B_3^+ &= -T + \sqrt{m}a_{20}\mathcal{H}|D_y|^{-\frac{1}{2}}(g+\sigma\partial_y^4)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{m}R_3\Lambda, \\
C_3^+ &= T + \sqrt{m}\sigma a_{21}\Lambda^{-1}\partial_y^3 + \sqrt{m}\sigma(a_{21})_y(\Lambda^{-1})_1\partial_y^3 + \sqrt{m}a_{22}\Lambda^{-1}\partial_y^2 + g\sqrt{m}\pi_0 + \mathcal{R}^+_{3,C}, \\
D_3^+ &= \partial_\tau + a_{18}\partial_y + (a_{18})_y(\Lambda^{-1})_1\Lambda\partial_y + a_{25} + \mathcal{R}^+_{3,D},
\end{aligned}$$

其中，$(\Lambda^{-1})_n := \frac{1}{i^n}\mathrm{Op}(\partial_\xi^n(1/\mathfrak{g}))$ 是 Λ^{-1} 的第 n 次展开，而 $\pi_0(h) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} h dy$ 是空间平均。我们进一步展开

$$(g+\sigma\partial_y^4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sigma}\partial_y^2 + \sqrt{g}\pi_0 + \mathcal{R}_\sigma, \quad \Lambda^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}|D_y|^{-\frac{3}{2}} + O(|D_y|^{-\frac{11}{2}}),$$
$$(\Lambda^{-1})_1 = -\frac{3}{2\sqrt{\sigma}}|D_y|^{-\frac{5}{2}}\mathcal{H} + O(|D_y|^{-\frac{11}{2}}),$$

其中，每个 $O(|D_y|^\alpha)$ 型余项都是一个傅里叶乘子，其符号 $g(\xi)$ 满足以下估计：$|g(\xi)| \le C(1+|\xi|)^\alpha$ 对所有 $\xi \in \mathbb{R}$ 成立，其中某个 $C>0$ 仅依赖于 σ。

因此，利用 $\partial_y = -|D_y|\mathcal{H}$，我们得到：

$$S^{-1}\mathcal{L}_3 S = \mathcal{L}_4 + \mathcal{R}_4 := \begin{pmatrix} A_4 & B_4 \\ C_4 & D_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{R}_{4,B} \\ \mathcal{R}_{4,C} & \mathcal{R}_{4,D} \end{pmatrix}, \tag{3.20}$$

for

$$A_4 := \partial_\tau + a_{18}\partial_y + a_{19}, \quad B_4 := -T - \sqrt{m\sigma}a_{20}|D_y|^{\frac{3}{2}}\mathcal{H},$$
$$C_4 := T + \sqrt{m\sigma}a_{21}|D_y|^{\frac{3}{2}}\mathcal{H} + a_{26}|D_y|^{\frac{1}{2}}, \quad D_4 := \partial_\tau + a_{18}\partial_y + a_{27},$$

并且 $\mathcal{R}_4$ 是一个吸收所有余项的平滑矩阵。它满足以下估计：

$$\|\mathcal{R}_4\mathbf{f}\|_{C([0,T];H^s\times H^s)} \lesssim \|\eta\|^\theta_{C([0,T];H^{s+4})}\|\mathbf{f}\|_{C([0,T];H^s\times H^s)}, \quad s \ge s_0.$$

系数 a_{26} 和 a_{27} 由下式给出：

$$a_{26} = \frac{3}{2}\sqrt{m\sigma}(a_{21})_y - \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\sigma}}a_{22}, \quad a_{27} = a_{25} + \frac{3}{2}(a_{18})_y.$$

3.4. 低阶对称化。 接下来，我们进一步对称化并重写线性化算子，从而消去阶数为$_{3\ 2}$ 的次主导项。为实现这一目标，我们将矩阵算子 $\mathcal{L}_4+\mathcal{R}_4$ 对称化至零阶。考虑如下对称化矩阵算子：

$$\mathcal{L}_5 := \begin{pmatrix} A_5 & -C_5 \\ C_5 & A_5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} A_5 &:= \partial_\tau + a_{18}\partial_y + a_{28}, \\ C_5 &:= T + a_{29}\mathcal{H}|D_y|^{3/2} + a_{30}|D_y|^{1/2}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

其中，a_{28}、a_{29} 和 a_{30} 是 (τ, y) 的实值空间周期函数。我们考虑一个变换

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & v \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \ell &= \ell_1|D_y|^{-5/2}, \\ v &= 1 + v_1\mathcal{H}|D_y|^{-1} + v_2|D_y|^{-2}, \end{aligned} \tag{3.22}$$

其中 v_1，v_2 和 ℓ_1 是关于 $(\tau,\ y)$ 的实值空间周期函数。利用公式 (A.7)，可以展开 $|D_y|^s a$，

$$|D_y|^s a = a|D_y|^s + sa_y|D_y|^{s-1}\mathcal{H} - \frac{s(s-1)}{2}a_{yy}|D_y|^{s-2} + O(|D_y|^{s-3}).$$

我们计算矩阵

$$\mathcal{L}_4 M - M\mathcal{L}_5 = \begin{pmatrix} A_4 - A_5 - \ell C_5 & B_4 v + C_5 + A_4\ell - \ell A_5 \\ C_4 - vC_5 & D_4 v - vA_5 + C_4\ell \end{pmatrix}.$$

我们将选择系数，使得上述矩阵的每个分量为 $O(|D_y|^{-\frac{1}{2}})$。

对于位置 (1.1)，我们需要有

$$a_{19} - a_{28} = \sqrt{m\sigma}\ell_1. \tag{3.23}$$

对于位置 (1,2)，我们计算

$$B_4 v = -T + \sqrt{m\sigma}(v_1 - a_{20})\mathcal{H}|D_y|^{\frac{3}{2}} + \sqrt{m\sigma}\Big(\frac{5}{2}(v_1)_y - v_2 + a_{20}v_1\Big)|D_y|^{\frac{1}{2}} + O(|D_y|^{-\frac{1}{2}}),$$

$$A_4\ell = \ell\partial_\tau + O(|D_y|^{-\frac{1}{2}}), \quad \ell A_5 = \ell\partial_\tau + O(|D_y|^{-\frac{1}{2}}).$$

为了消去 $O(|D_y|^{\frac{3}{2}})$ 项和 $O(|D_y|^{\frac{1}{2}})$ 项，我们必须有

$$\sqrt{m\sigma}(v_1 - a_{20}) = -a_{29}, \tag{3.24}$$

$$\sqrt{m\sigma}\left(\frac{5}{2}(v_1)_y - v_2 + a_{20}v_1\right) = -a_{30}. \tag{3.25}$$

对于位置 (2,1)，我们计算

$$vC_5 = T + (a_{29} + \sqrt{m\sigma}v_1)|D_y|^{\frac{3}{2}}\mathcal{H} + (a_{30} - a_{29}v_1 + \sqrt{m\sigma}v_2)|D|^{\frac{1}{2}} + O(|D_y|^{-\frac{1}{2}}).$$

为了消去 $O(|D_y|^{\frac{3}{2}})$ 项和 $O(|D_y|^{\frac{1}{2}})$ 项，我们必须有方程 (3.24) 以及

$$(a_{30} - a_{29}v_1 + \sqrt{m\sigma}v_2) = a_{26}. \tag{3.26}$$

对于位置(2,2)，我们有

$$\begin{aligned} D_4 v &= v\partial_\tau - a_{18}\mathcal{H}|D_y| + (a_{18}v_1 + a_{27}) + O(|D_y|^{-\frac{1}{2}}), \\ vA_5 &= v\partial_\tau - a_{18}\mathcal{H}|D_y| + (v_1 a_{18} + a_{28}) + O(|D_y|^{-\frac{1}{2}}), \\ C_4\ell &= \sqrt{\sigma m}\ell_1 + O(|D_y|^{-\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

为了消去 $O(1)$项，我们必须有

$$a_{27} - a_{28} + \sqrt{\sigma m}\ell_1 = 0. \tag{3.27}$$

(3.23)-(3.27)构成五个方程组成的方程组，其6个未知数为 v_1, v_2, ℓ_1, a_{28}, a_{29}, a_{30}。为了更好地简化线性化算子，我们令 $a_{29} = 0$，从而其余未知数便可确定，并且阶为$3\ 2$ 的矩阵 $\mathcal{L}_5$ 中的项被消去。在 [15], 中，次主导项通过共轭变换一个乘法函数而被消去。在我们的分析中，这一步被纳入对称化。

由（3.23）和（3.27），可得

$$a_{28} = \frac{a_{19} + a_{27}}{2}, \quad \ell_1 = \frac{a_{19} - a_{27}}{2\sqrt{m\sigma}}. \tag{3.28}$$

由于 $a_{29}=0$，由（3.24），可得

$$v_1 = a_{20}. \tag{3.29}$$

因此，(3.25) 和 (3.26) 变为

$$\begin{aligned}\sqrt{m\sigma}v_2 - a_{30} &= \left(\frac{5}{2}(a_{20})_y + a_{20}\right),\\ \sqrt{m\sigma}v_2 + a_{30} &= a_{26},\end{aligned}$$

由此可得

$$v_2 = \frac{1}{2\sqrt{m\sigma}}\left(\frac{5}{2}(a_{20})_y + a_{20} + a_{26}\right), \quad a_{30} = \frac{1}{2}\left(a_{26} - \frac{5}{2}(a_{20})_y - a_{20}\right). \tag{3.30}$$

因此，我们确定了矩阵 M。注意， M 可以写成单位矩阵加上一个小扰动：

$$M = I + M_R := I + \begin{pmatrix} 0 & \ell_1|D_y|^{-5/2} \\ 0 & v_1\mathcal{H}|D_y|^{-1} + v_2|D_y|^{-2} \end{pmatrix},$$

注意， ℓ_1、 v_1 和 v_2 在以下意义下是小的：

$$\|\ell_1\|_{C([0,T];H^s)} + \|v_1\|_{C([0,T];H^s)} + \|v_2\|_{C([0,T];H^s)} \lesssim \|(\eta,\psi)\|_{C([0,T];\mathcal{H}^{s+2})} \ll 1.$$

因此，矩阵 M可逆，其逆矩阵为 $M^{-1} = I + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k M_R^k$。我们得到估计

$$C_1\|\mathbf{f}\|_{C([0,T];H^s\times H^s)} \le \|M^{\pm 1}\mathbf{f}\|_{C([0,T];H^s\times H^s)} \le C_2\|\mathbf{f}\|_{C([0,T];H^s\times H^s)}, \tag{3.31}$$

对某些常数 $C_2 > C_1 > 0$。

此外，我们有如下共轭变换

$$M^{-1}(\mathcal{L}_4 + \mathcal{R}_4)M = \mathcal{L}_5 + \mathcal{R}_5, \quad \mathcal{R}_5 := M^{-1}\mathcal{R}_4 M + (M^{-1}\mathcal{L}_4 M - \mathcal{L}_5). \tag{3.32}$$

$\mathcal{R}_5$ 是一个平滑矩阵，可吸收所有阶小于 0 的余项。对于 $s \ge s_0$，它满足以下界，

$$\|\mathcal{R}_5\mathbf{f}\|_{C([0,T];H^s\times H^s)} \lesssim \|\eta\|^{\theta}_{C([0,T];H^{s+4})}\|\mathbf{f}\|_{C([0,T];H^s\times H^s)}.$$

4. Reduction of the linearized operator at lower orders

在本节中，我们进一步约化并简化1阶与1 2阶的线性化算子。首先，我们利用空间变量的平移 $z = y + p(\tau)$，以消去 $\mathcal{L}_5$中输运项的系数 $a_{18}(\tau, y)$的空间平均。然后，我们构造一个傅里叶积分算子，以消去1阶与1 2 项。

4.1. 平移　空间变量的变换。 我们考虑算子 $\mathcal{T}$及其逆矩阵:

$$\mathcal{T}h(\tau,y):=h(\tau,y+p(\tau)),\quad \mathcal{T}^{-1}h(\tau,z):=h(\tau,z-p(\tau)). \tag{4.1}$$

$\mathcal{T}$和 $\mathcal{T}^{-1}$ 在以下意义下保持索伯列夫范数不变:

$$\|\mathcal{T}h\|_{C([0,T];H^s)}=\|\mathcal{T}^{-1}h\|_{C([0,T];H^s)}=\|h\|_{C([0,T];H^s)},\quad \forall h\in C([0,T];H^s). \tag{4.2}$$

可以验证， $\mathcal{T}^{-1}T(D_y)\mathcal{T}=T(D_z)$， $\mathcal{T}^{-1}\partial_y\mathcal{T}=\partial_z$且 $\mathcal{T}^{-1}\partial_\tau\mathcal{T}=\partial_\tau+p'(\tau)\partial_z$。因此，我们有

$$\mathcal{L}_6:=\mathcal{T}^{-1}\mathcal{L}_5\mathcal{T}=\begin{pmatrix}\partial_\tau+a_{31}\partial_z+a_{32} & -T-a_{33}|D_z|^{1/2}\\ T+a_{33}|D_z|^{1/2} & \partial_\tau+a_{31}\partial_z+a_{32}\end{pmatrix},$$

其中

$$a_{31}(\tau,z)=\mathcal{T}^{-1}a_{18}(\tau,z)+p'(\tau),\quad a_{32}(\tau,z)=\mathcal{T}^{-1}a_{28}(\tau,z),\quad a_{33}(\tau,z)=\mathcal{T}^{-1}a_{30}(\tau,z).$$

取

$$p(\tau)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\tau\int_0^{2\pi}a_{18}(s,y)\,dyds,$$

则输运系数 a_{31} 的空间平均为零:

$$\int_0^{2\pi}a_{31}(\tau,z)\,dz=0.$$

因此，我们得到

$$\mathcal{T}^{-1}(\mathcal{L}_5+\mathcal{R}_5)\mathcal{T}=\mathcal{L}_6+\mathcal{R}_6,\quad \mathcal{R}_6:=\mathcal{T}^{-1}\mathcal{R}_5\mathcal{T}. \tag{4.3}$$

我们进一步选取酉矩阵 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{O}^{-1}$

$$\mathcal{O}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix},\quad \mathcal{O}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

那么，我们进行共轭变换

$$\mathcal{L}_7:=\mathcal{O}^{-1}\mathcal{L}_6\mathcal{O}=\begin{pmatrix}\partial_\tau+iT+a_{31}\partial_z+ia_{33}|D_z|^{\frac{1}{2}}+a_{32} & 0\\ 0 & \partial_\tau-iT+a_{31}\partial_z-ia_{33}|D_z|^{\frac{1}{2}}+a_{32}\end{pmatrix}.$$

$\mathcal{L}_7$ 是一个对角矩阵。我们还定义余项矩阵 $\mathcal{R}_7=\mathcal{O}^{-1}\mathcal{R}_6\mathcal{O}$。

4.2. 低阶约化。 现在，我们使用傅里叶积分算子 A 消去系数 a_{31} 和 a_{33}。给定一个空间周期函数 $h(\tau,z)$，我们将傅里叶积分算子 $A^{(1)}$ 定义为

$$h(\tau,z)=\sum_{j\in\mathbb{Z}} h_j(\tau)\,e^{ijz} \quad\mapsto\quad A^{(1)}h(\tau,z)=\sum_{j\in\mathbb{Z}} h_j(\tau)\,p(\tau,z,j)\,e^{i\phi(\tau,z,j)}, \tag{4.5}$$

其中振幅 $p(\tau,z,j)$ 是一个零阶空间周期符号，相位函数$\phi(\tau,z,j)$ 的形式为

$$\phi(\tau,z,j)=jz+|j|^{1/2}\gamma(\tau,z), \tag{4.6}$$

且 $\gamma(\tau,z)$ 是一个空间周期函数，其中 $|\gamma_z(\tau,z)|<1/2$。我们考虑算子

$$\mathcal{D}_+:=\partial_\tau+iT,\quad \mathcal{L}_7^{(1)}:=\partial_\tau+iT+a_{31}\partial_z+ia_{33}|D_z|^{\frac12}+a_{32}. \tag{4.7}$$

接下来，我们将证明存在函数 $p(\tau,z,j)$ 和 $\gamma(\tau,z)$，使得$\mathcal{L}_7^{(1)}A^{(1)}-A^{(1)}\mathcal{D}_+=O(|D_z|^{-\frac12})$。令 $\mathfrak{t}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为一个满足以下条件的 C^∞ 函数

$$\mathfrak{t}(\xi)=\{m|\xi|(1+\sigma\xi^4)\}^{1/2},\quad \forall|\xi|\ge 2/3;\qquad \mathfrak{t}(\xi)=0,\quad \forall|\xi|\le 1/3, \tag{4.8}$$

从而 $\mathrm{Op}(\mathfrak{t})=T$ 作用于周期函数上。利用引理 A.4，我们将交换子$[T,A^{(1)}]$ 改写为

$$[T,A^{(1)}]=\sum_{n=1}^{4}\frac{1}{n!}\mathrm{Op}(\partial_z^n a)\circ\mathrm{Op}(i^{-n}\partial_\xi^n\mathfrak{t})+\mathcal{R}_{A1},\quad \mathcal{R}_{A1}=O(1),$$

其中 a 是符号

$$a(\tau,z,j)=p(\tau,z,j)\,e^{i|j|^{1/2}\gamma(\tau,z)},$$

且 $\mathcal{R}_{A1}$ 是交换子的低阶余项。我们计算

$$\begin{aligned}
\mathrm{Op}(i^{-1}\partial_\xi\mathfrak{t}) =&\frac52\sqrt{m\sigma}|D_z|^{\frac32}\mathcal{H}+O(|D_z|^{-\frac52}),\\
\mathrm{Op}(i^{-2}\partial_\xi^2\mathfrak{t}) =&-\frac{15}{4}\sqrt{m\sigma}|D_z|^{\frac12}+O(|D_z|^{-\frac72}),\\
\mathrm{Op}(i^{-3}\partial_\xi^3\mathfrak{t}) =&-\frac{15}{8}\sqrt{m\sigma}|D_z|^{-\frac12}\mathcal{H}+O(|D_z|^{-\frac92}),\\
\mathrm{Op}(i^{-4}\partial_\xi^4\mathfrak{t}) =&-\frac{15}{16}\sqrt{m\sigma}|D_z|^{-\frac32}+O(|D_z|^{-\frac{11}{2}}),\\
\partial_z a =&\{i|j|^{\frac12}p\gamma_z+p_z\}e^{i|j|^{\frac12}\gamma},\\
\partial_z^2 a =&\{-i|j|p\gamma_z^2+i|j|^{\frac12}(2p_z\gamma_z+p\gamma_{zz})+p_{zz}\}e^{i|j|^{\frac12}\gamma},\\
\partial_z^3 a =&\{-i|j|^{\frac32}p\gamma_z^3-3|j|\beta_z(p_z\gamma_z+p\gamma_{zz})+r_1\}e^{i|j|^{\frac12}\gamma},\\
\partial_z^4 a =&|j|^2p\gamma_z^4e^{i|j|^{\frac12}\gamma}+r_2,
\end{aligned}$$

其中 r_1 和 r_2 是满足

$$\|r_k(\cdot,\cdot,j)\|_{H^s} \le (1+|j|)^{k-\frac{1}{2}} \left(\|\gamma\|_{H^{s+2}} + \|p-1\|_{H^{s+2}}\right), \quad \forall s \ge 1, \quad k=1,2, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

我们还有

$$\partial_z A^{(1)} h = \sum_{j\in\mathbb{Z}} h_j (ijp + i|j|^{\frac{1}{2}}\gamma_z p + p_z) e^{i\phi(\tau,z,j)}.$$

由 [6], 的引理 12.10 可得

$$|D_z|^{\frac{1}{2}} A^{(1)} h = \sum_{j\neq 0} h_j |j|^{\frac{1}{2}} p(\tau,z,j) e^{i\phi(\tau,z,j)} + R_{A2} h, \quad R_{A2} = O(1).$$

交换子 $[\partial_\tau, A^{(1)}] = \partial_\tau A^{(1)} - A^{(1)}\partial_\tau$为

$$[\partial_\tau, A^{(1)}] h = \sum_{j\in\mathbb{Z}} h_j \left(p_\tau(\tau,z,j) + i|j|^{\frac{1}{2}}\gamma_\tau(\tau,z) p(\tau,z,j)\right).$$

利用上述展开式，我们有

$$\mathcal{L}_7^{(1)} A^{(1)} - A^{(1)} \mathcal{D}_+ = E + \mathcal{R}_{A3}, \quad \mathcal{R}_{A3} := i\mathcal{R}_{A1} + i a_{33} \mathcal{R}_{A2},$$

并且 E 是算子

$$Eh = \sum_{j\in\mathbb{Z}} h_j(t) c(\tau,z,j) e^{i\phi(\tau,z,j)},$$

with

$$\begin{aligned} c(\tau,z,j) &= i\frac{5}{2}\sqrt{m\sigma}\,\mathrm{sign}(j)\gamma_z p|j|^2 + \left(-\frac{15}{8}\sqrt{m\sigma}\gamma_z^2 p + \frac{5}{2}\sqrt{m\sigma}\,\mathrm{sign}(j) p_z\right)|j|^{\frac{3}{2}} \\ &+ \left(i\frac{15}{48}\sqrt{m\sigma}\,\mathrm{sign}(j)\gamma_z^3 p - i\frac{15}{4}\sqrt{m\sigma}\gamma_z p_z - i\frac{15}{8}\sqrt{m\sigma}\gamma_{zz} p + i a_{31}\,\mathrm{sign}(j) p\right)|j| \\ &+ \left(-i\frac{15}{8}\sqrt{m\sigma}p_{zz} + \frac{15}{16}\sqrt{m\sigma}\,\mathrm{sign}(j)\gamma_z(p_z\gamma_z + p\gamma_{zz}) - \frac{5}{2^7}p\gamma_z^4 + i\gamma_\tau p + i a_{33} p + i a_{31}\gamma_z p\right)|j|^{\frac{1}{2}} \\ &+ r(\tau,z,j), \end{aligned}$$

其中 $r(\tau,\ z,\ j)$ 是阶小于或等于零的余项。现在我们需要选择 γ 和 p，使得 $c(\tau,\ z,\ j)$ 是阶小于或等于零的符号。

对于 $c(\tau,\ z,\ j)$ 中的 2 阶项，我们需要满足 $\gamma_z p = 0$。由于无法满足 $p=0$，结果表明 $\gamma_z = 0$，并且

$$\gamma(\tau,z) = \gamma_0(\tau),$$

对于某个仅依赖于 τ、待后续确定的函数 $\gamma_0(\tau)$。我们进一步将符号 $p(\tau,\ z,\ j)$ 展开为

$$p(\tau,z,j) = \sum_{-2\le m\le 0} |j|^{m/2} p^{(m)}(\tau,z,j), \quad p^{(m)} \text{ is bounded in } j.$$

利用 $\gamma_z = 0$ 这一事实，我们将 $c(\tau, z, j)$ 改写为

$$c(\tau,z,j) = \left(\frac{5}{2}\sqrt{m\sigma}\mathrm{sign}(j)p_z^{(0)}\right)|j|^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{5}{2}\sqrt{m\sigma}\mathrm{sign}(j)p_z^{(-1)} + ia_{31}\mathrm{sign}(j)p^{(0)}\right)|j|$$
$$+\left(\frac{5}{2}\sqrt{m\sigma}\mathrm{sign}(j)p_z^{(-2)} + ia_{31}\mathrm{sign}(j)p^{(-1)} - i\frac{15}{8}\sqrt{m\sigma}p_{zz}^{(0)} + i\gamma_\tau p^{(0)} + ia_{33}p^{(0)}\right)|j|^{\frac{1}{2}} + \tilde{r}(\tau,z,j),$$

其中 $\tilde{r}(\tau, z, j)$ 是阶小于或等于零的余项。

对于 $c(\tau, z, j)$ 中的 $\frac{3}{2}$ 阶项，我们需要有 $\frac{5}{2}\sqrt{m\sigma}\mathrm{sign}(j)p_z^{(0)} = 0$。为简单起见，我们取 $p^{(0)} = 1$。对于 $c(\tau, z, j)$ 中的 1 阶项，我们有

$$\frac{5}{2}\sqrt{m\sigma}\mathrm{sign}(j)p_z^{(-1)} + ia_{31}\mathrm{sign}(j)p^{(0)} = 0.$$

为此，我们取 $p^{(-1)} = -i\frac{2}{5\sqrt{m\sigma}}\partial_z^{-1}a_{31}$。注意，我们已选取 a_{31}，使其不含零频率分量。因此，$\partial_z^{-1}a_{31}$ 是良定义的。对于 $c(\tau, z, j)$ 中的 $\frac{1}{2}$ 阶项，我们应当有

$$\frac{5}{2}\sqrt{m\sigma}\mathrm{sign}(j)p_z^{(-2)} + \frac{2}{5\sqrt{m\sigma}}a_{31}\mathrm{sign}(j)\partial_z^{-1}a_{31} + i(\gamma_\tau + a_{33}) = 0.$$

上述方程有解当且仅当

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{2}{5\sqrt{m\sigma}}a_{31}\mathrm{sign}(j)\partial_z^{-1}a_{31} + i(\partial_\tau\gamma_0 + a_{33})\right)dz = 0.$$

我们选取

$$\gamma_0(\tau) = \frac{i}{2\pi}\int_0^\tau\int_0^{2\pi}\left(\frac{2}{5\sqrt{m\sigma}}a_{31}\mathrm{sign}(j)\partial_z^{-1}a_{31} + ia_{33}\right)dzds,$$

以使上述条件得到满足。然后，我们得到 $p^{(-2)}$ 的表达式：

$$p^{(-2)} = -\frac{2}{5\sqrt{m\sigma}}\partial_z^{-1}\left(\frac{2}{5\sqrt{m\sigma}}a_{31}\mathrm{sign}(j)\partial_z^{-1}a_{31} + i(\gamma_\tau + a_{33})\right).$$

Hence，我们构造了算子 $A^{(1)}$。特别地，对于每个 $\tau \in [0, T]$，

$$\|\gamma(\tau,\cdot)\|_{H^s} + \sup_{j\in\mathbb{Z}}\|(p-1)(\tau,\cdot,j)\|_{H^s} \lesssim \|(\eta,\psi)\|_{\mathcal{H}^s} \tag{4.9}$$

因此，利用引理A.5，算子 $A^{(1)}$ 是可逆的。此外，

$$(A^{(1)})^{-1}\mathcal{L}_7^{(1)}A^{(1)} = \mathcal{D}_+ + R_8^+,$$

其中余项 R_8^+ 满足

$$\|R_8^+ f\|_{H^s} \lesssim \|(\eta,\psi)\|_{\mathcal{H}^2}\|f\|_{H^s} + \|(\eta,\psi)\|_{\mathcal{H}^s}\|f\|_{H^2}. \tag{4.10}$$

类似地，也可以构造一个可逆算子 $A^{(2)}$，使得对于

$$\mathcal{D}_- = \partial_\tau - iT, \quad \mathcal{L}_7^{(2)} = \partial_\tau - iT + a_{31}\partial_z - ia_{33}|D_z|^{\frac{1}{2}} + a_{32},$$

我们有共轭性质

$$(A^{(2)})^{-1}\mathcal{L}_7^{(2)}A^{(2)} = \mathcal{D}_- + R_8^-,$$

其中余项 R_8^- 满足与(4.10)相同的估计。令矩阵算子

$$\mathcal{U}=\begin{pmatrix} A^{(1)} & 0 \\ 0 & A^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}^{-1}=\begin{pmatrix} (A^{(1)})^{-1} & 0 \\ 0 & (A^{(2)})^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_8=\begin{pmatrix} \mathcal{D}_+ & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_- \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

于是我们得到共轭变换

$$\mathcal{L}_8+\mathcal{R}_8=\mathcal{U}^{-1}(\mathcal{L}_7+\mathcal{R}_7)\mathcal{U}, \quad \mathcal{R}_8:=\mathcal{U}^{-1}\mathcal{R}_7\mathcal{U}+(\mathcal{U}^{-1}\mathcal{L}_7\mathcal{U}-\mathcal{L}_8). \tag{4.12}$$

余项矩阵 $\mathcal{R}_8$ 对 $s\geq s_0$满足,

$$\|\mathcal{R}_8\mathbf{f}\|_{C([0,T];H^s\times H^s)}\lesssim \|(\eta,\psi)\|^{\theta}_{C([0,T];\mathcal{H}^{s+\frac{5}{2}})}\|\mathbf{f}\|_{C([0,T];H^s\times H^s)}. \tag{4.13}$$

5. Well-posedness of the linear system

在本节中，我们证明线性系统的适定性

$$\mathbf{P}'(\mathbf{u})[\tilde{\mathbf{u}}]=\tilde{\mathbf{f}}, \quad \tilde{\mathbf{u}}|_{t=0}=(\tilde{\eta}_{in},\tilde{\psi}_{in})^T, \tag{5.1}$$

其中$\mathbf{P}'(\mathbf{u})[\tilde{}\mathbf{u}]$ 的定义见（2.5）。我们假设

$$\|(\eta,\psi)\|_{C([0,T];\mathcal{H}^{s+\frac{5}{2}})}+\|\tilde{\mathbf{f}}\|_{C([0,T];\mathcal{H}^s)}<\delta,$$

对某个小常数 δ。虽然可以直接证明该线性系统的适定性，但我们将利用前两节中对$\mathbf{P}'(\mathbf{u})[\tilde{}\mathbf{u}]$ 所作化简的结果。

我们从线性系统出发

$$(\mathcal{L}_8+\mathcal{R}_8)\mathbf{h}=\mathbf{f}_8, \quad \mathbf{h}|_{\tau=0}=\mathbf{h}_{in}. \tag{5.2}$$

By (4.13)，我们得到余项矩阵算子 $\mathcal{R}_8$ 的一个界。对于 $s\geq s_0$ ，

$$\|\mathcal{R}_8\mathbf{f}\|_{C([0,T];H^s\times H^s)}\lesssim \delta^{\theta}\|\mathbf{f}\|_{C([0,T];H^s\times H^s)}.$$

我们证明系统 (5.2) 的以下适定性结果。

引理 5.1。 设 $T>0$，且 $s_1\geq 0$。假设 $\mathbf{h}_{in}\in H^{s_1}(\mathbb{T})\times H^{s_1}(\mathbb{T})$，$\mathbf{f}_8\in C([0,T];\ H^{s_1}(\mathbb{T})\times H^{s_1}(\mathbb{T}))$。存在一个依赖于 T 的 $\varepsilon_8>0$，使得如果

$$\|\mathcal{R}_8\mathbf{f}\|_{C([0,T];H^{s_1}\times H^{s_1})}\lesssim \varepsilon_8\|\mathbf{f}\|_{C([0,T];H^{s_1}\times H^{s_1})},$$

存在唯一的解 $\mathbf{h}\in C([0,T];\ H^{s_1}\times H^{s_1})$ 满足估计的柯西问题 (5.2)，对于 $s\in[0,s_1]$,

$$\|\mathbf{h}\|_{C([0,T];H^s\times H^s)}\lesssim_s e^{CT}\left(\|\mathbf{h}_{in}\|_{H^s\times H^s}+\|\mathbf{f}_8\|_{C([0,T];H^s\times H^s)}\right), \tag{5.3}$$

其中常数 C 取决于 ε_8。

证明。 我们将 $\mathbf{h} = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2$, 分解，其中

$$\text{(5.4)} \qquad \begin{cases} \mathcal{L}_8 \mathbf{h}_1 = \mathbf{f}_8 \\ \mathbf{h}_1|_{\tau=0} = \mathbf{h}_{in}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{L}_8 \mathbf{h}_2 = -\mathcal{R}_8 \mathbf{h}_1 - \mathcal{R}_8 \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{h}_2|_{\tau=0} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

(5.4中的第一个系统是一个可以显式求解的线性系统。存在唯一的解 $\mathbf{h}_1 \in C([0,T]; H^s \times H^s)$，使得

$$\text{(5.5)} \qquad \|\mathbf{h}_1\|_{C([0,T];H^s\times H^s)} \lesssim \|\mathbf{h}_{in}\|_{H^s\times H^s} + T\|\mathbf{f}_8\|_{C([0,T];H^s\times H^s)}.$$

我们引入算子 $\mathfrak{T}$，表示（5.4）中第一个系统的解映射:

$$\mathbf{h}_1 := \mathfrak{T}(\mathbf{f}_8, \mathbf{h}_{in}).$$

因此，要解（5.4）中的第二个系统，我们需要证明以下算子 $\mathfrak{T}_1$有一个不动点:

$$\mathbf{w} = \mathfrak{T}_1(\mathbf{w}) := -\mathfrak{T}(\mathcal{R}_8 \mathbf{h}_1 + \mathcal{R}_8 \mathbf{w}, \mathbf{0}).$$

由（5.5），可得一致有界

$$\begin{aligned} &\|\mathfrak{T}_1(\mathbf{w})\|_{C([0,T];H^s\times H^s)} \lesssim T\|\mathcal{R}_8(\mathbf{h}_1 + \mathbf{w})\|_{C([0,T];H^s\times H^s)} \\ \lesssim &T\|\mathcal{R}_8\|_{C([0,T];\mathcal{L}(H^s\times H^s))} \left(\|\mathbf{h}_{in}\|_{H^s\times H^s} + T\|\mathbf{f}_8\|_{C([0,T];H^s\times H^s)} + \|\mathbf{w}\|_{C([0,T];H^s\times H^s)}\right), \end{aligned}$$

以及压缩估计

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{T}_1(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)\|_{C([0,T];H^s\times H^s)} &\lesssim T\|\mathcal{R}_8(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)\|_{C([0,T];H^s\times H^s)} \\ &\lesssim T\|\mathcal{R}_8\|_{C([0,T];\mathcal{L}(H^s\times H^s))}\|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|_{C([0,T];H^s\times H^s)}. \end{aligned}$$

根据上述估计，若选择 ε_8 使得 $\varepsilon_8 T < \frac{1}{2}$，则可知 $\mathfrak{T}_1$ 是压缩映射。由压缩映射原理，我们得到以下估计:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{h}\|_{C([0,T];H^s\times H^s)} \lesssim_s &(1 + T\|\mathcal{R}_8\|_{C([0,T];\mathcal{L}(H^s\times H^s))})\|\mathbf{h}_{in}\|_{H^s\times H^s} + T\|\mathbf{f}_8\|_{C([0,T];H^s\times H^s)} \\ &+ T^2\|\mathcal{R}_8\|_{C([0,T];\mathcal{L}(H^s\times H^s))}\|\mathbf{f}_8\|_{C([0,T];H^s\times H^s)}. \end{aligned}$$

由此得到能量估计（5.3）。 □

回到线性系统

$$\text{(5.6)} \qquad (\mathcal{L}_7 + \mathcal{R}_7)\mathbf{h} = \mathbf{f}_7, \quad \mathbf{h}|_{\tau=0} = \mathbf{h}_{in}.$$

利用共轭变换（4.12），可将其写成

$$(\mathcal{L}_8 + \mathcal{R}_8)(\mathcal{U}^{-1}\mathbf{h}) = \mathcal{U}^{-1}\mathbf{f}_7, \quad \mathcal{U}^{-1}\mathbf{h}|_{\tau=0} = \mathcal{U}^{-1}\mathbf{h}_{in}.$$

然后我们利用引理A.5 估计 $A^{(1)}$ 和 $A^{(2)}$的逆矩阵。由（4.9），我们得到如下适定性结果。

引理 5.2。 设 $T>0$，且 $s_1\geq 0$。假设 $\mathbf{h}_{in}\in H^{s_1}(\mathbb{T})\times H^{s_1}(\mathbb{T})$，$\mathbf{f}_7\in C([0,T];\ H^{s_1}(\mathbb{T})\times H^{s_1}(\mathbb{T}))$。存在一个依赖于 T 的 $\varepsilon_7>0$，使得如果

$$\|\mathcal{R}_7\mathbf{f}\|_{C([0,T];H^{s_1}\times H^{s_1})}\lesssim \varepsilon_7\|\mathbf{f}\|_{C([0,T];H^{s_1}\times H^{s_1})},$$

存在唯一的解 $\mathbf{h}\in C([0,T];\ H^{s_1}\times H^{s_1})$ 满足柯西问题 (5.6) 的估计：对于 $s\in[0,s_1]$,

$$\|\mathbf{h}\|_{C([0,T];H^s\times H^s)}\lesssim_s e^{CT}\left(\|\mathbf{h}_{in}\|_{H^s\times H^s}+\|\mathbf{f}_7\|_{C([0,T];H^s\times H^s)}\right), \tag{5.7}$$

其中常数 C 取决于 ε_7。

$\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{U}^{-1}$ 是常系数酉矩阵。因此，该系统

$$(\mathcal{L}_6+\mathcal{R}_6)\mathbf{h}=\mathbf{f}_6,\quad \mathbf{h}|_{\tau=0}=\mathbf{h}_{in}.$$

与系统 (5.6) 具有相同的存在性结果和能量估计。

对于线性系统

$$(\mathcal{L}_5+\mathcal{R}_5)\mathbf{h}=\mathbf{f}_5,\quad \mathbf{h}|_{\tau=0}=\mathbf{h}_{in},$$

利用共轭变换(4.3)，以及估计(3.1)，它与系统 (5.6) 具有相同的存在性结果和能量估计。

接下来，我们考虑线性系统

$$(\mathcal{L}_4+\mathcal{R}_4)\mathbf{h}=\mathbf{f}_4,\quad \mathbf{h}|_{\tau=0}=\mathbf{h}_{in}. \tag{5.8}$$

利用共轭变换（3.32），可将其写为

$$(\mathcal{L}_5+\mathcal{R}_5)(M^{-1}\mathbf{h})=M^{-1}\mathbf{f}_5,\quad M^{-1}\mathbf{h}|_{\tau=0}=M^{-1}\mathbf{h}_{in}.$$

根据界（3.31），我们得到以下适定性结果。

引理 5.3。 令 $T>0$，且令 $s_1\geq 0$。设 $\mathbf{h}_{in}\in H^{s_1}(\mathbb{T})\times H^{s_1}(\mathbb{T})$，$\mathbf{f}_4\in C([0,T];\ H^{s_1}(\mathbb{T})\times H^{s_1}(\mathbb{T}))$。存在 $\varepsilon_4>0$，其取决于 T，使得若

$$\|\mathcal{R}_4\mathbf{f}\|_{C([0,T];H^{s_1}\times H^{s_1})}\lesssim \varepsilon_4\|\mathbf{f}\|_{C([0,T];H^{s_1}\times H^{s_1})},$$

存在唯一的解 $\mathbf{h}\in C([0,T];\ H^{s_1}\times H^{s_1})$ 满足柯西问题 (5.8) 并满足以下估计：对于 $s\in[0,s_1]$,

$$\|\mathbf{h}\|_{C([0,T];H^s\times H^s)}\lesssim_s e^{CT}\left(\|\mathbf{h}_{in}\|_{H^s\times H^s}+\|\mathbf{f}_4\|_{C([0,T];H^s\times H^s)}\right), \tag{5.9}$$

其中常数 C 取决于 ε_4。

接下来，我们考虑线性系统

$$\mathcal{L}_3\mathbf{h}=\mathbf{f}_3,\quad \mathbf{h}|_{\tau=0}=\mathbf{h}_{in}. \tag{5.10}$$

利用共轭变换（3.20），可将其写为

$$(\mathcal{L}_4+\mathcal{R}_4)(S^{-1}\mathbf{h})=S^{-1}\mathbf{f}_4,\quad S^{-1}\mathbf{h}|_{\tau=0}=S^{-1}\mathbf{h}_{in}.$$

由此可得（5.10）的适定性结果。

引理 5.4。 设 $T>0$，且 $s_1 \geq s_0$。假设 $\mathbf{h}_{in} \in \mathcal{H}^{s_1}(\mathbb{T})$，$\mathbf{f}_3 \in C([0,T];\ \mathcal{H}^{s_1}(\mathbb{T}))$。存在一个仅依赖于 T 的 $\varepsilon_3>0$，使得如果

$$\|(\eta,\psi)\|_{C([0,T];\mathcal{H}^{s_1+\frac{5}{2}})} \lesssim \varepsilon_3,$$

存在唯一的解 $\mathbf{h} \in C([0,T];\ \mathcal{H}^{s_1})$ 满足以下估计的柯西问题 (5.10)：对于 $s \in [0,s_1]$,

$$\|\mathbf{h}\|_{C([0,T];\mathcal{H}^s)} \lesssim_s e^{CT}\left(\|\mathbf{h}_{in}\|_{\mathcal{H}^s} + \|\mathbf{f}_3\|_{C([0,T];\mathcal{H}^s)}\right), \tag{5.11}$$

其中常数 C 依赖于 ε_3。

对于线性系统

$$\mathcal{L}_2\mathbf{h} = \mathbf{f}_2, \quad \mathbf{h}|_{\tau=0} = \mathbf{h}_{in}, \tag{5.12}$$

应用（3.15），可将其写为

$$\mathcal{L}_3(Q^{-1}\mathbf{h}) = P^{-1}\mathbf{f}_2, \quad Q^{-1}\mathbf{h}|_{\tau=0} = Q^{-1}\mathbf{h}_{in}.$$

利用界（3.16）和引理5.4，我们得到以下适定性结果。

引理 5.5。 设 $T>0$，且 $s_1 \geq s_0$。假设 $\mathbf{h}_{in} \in \mathcal{H}^{s_1}(\mathbb{T})$，$\mathbf{f}_2 \in C([0,T];\ \mathcal{H}^{s_1}(\mathbb{T})$。存在一个依赖于 T 的 $\varepsilon_2>0$，使得若

$$\|(\eta,\psi)\|_{C([0,T];\mathcal{H}^{s_1+\frac{5}{2}})} \lesssim \varepsilon_2,$$

存在唯一的解 $\mathbf{h} \in C([0,T];\ \mathcal{H}^{s_1})$，它满足柯西问题 (5.12) 并满足以下估计：对于 $s \in [0,s_1]$,

$$\|\mathbf{h}\|_{C([0,T];\mathcal{H}^s)} \lesssim_s e^{CT}\left(\|\mathbf{h}_{in}\|_{\mathcal{H}^s} + \|\mathbf{f}_2\|_{C([0,T];\mathcal{H}^s)}\right), \tag{5.13}$$

其中常数 C 依赖于 ε_2。

对于线性系统

$$\mathcal{L}_1\mathbf{h} = \mathbf{f}_1, \quad \mathbf{h}|_{t=0} = \mathbf{h}_{in}, \tag{5.14}$$

根据（3.7），它可写为

$$\mathcal{L}_2(\mathcal{A}^{-1}\mathbf{h}) = \mathcal{A}^{-1}\mathbf{f}_1, \quad \mathcal{A}^{-1}\mathbf{h}|_{\tau=0} = \mathcal{A}^{-1}\mathbf{h}_{in}.$$

利用界（3.8）和引理5.5，我们得到以下适定性结果。

引理 5.6。 设 $T>0$，且 $s_1 \geq s_0$。假设 $\mathbf{h}_{in} \in \mathcal{H}^{s_1}(\mathbb{T})$、$\mathbf{f}_1 \in C([0,T];\ \mathcal{H}^{s_1}(\mathbb{T}))$。存在一个依赖于 T 的 $\varepsilon_1>0$，使得如果

$$\|(\eta,\psi)\|_{C([0,T];\mathcal{H}^{s_1+\frac{5}{2}})} \lesssim \varepsilon_1,$$

存在唯一的解 $\mathbf{h} \in C([0,T];\ \mathcal{H}^{s_1})$ 满足柯西问题 (5.14) 并满足以下估计：对于 $s \in [0, s_1]$,

$$\|\mathbf{h}\|_{C([0,T];\mathcal{H}^s)} \lesssim_s e^{CT}\left(\|\mathbf{h}_{in}\|_{\mathcal{H}^s} + \|\mathbf{f}_1\|_{C([0,T];\mathcal{H}^s)}\right), \tag{5.15}$$

其中常数 C 依赖于 ε_1。

对于线性系统

$$\mathcal{L}_0\mathbf{h} = \mathbf{f}_0, \quad \mathbf{h}|_{t=0} = \mathbf{h}_{in}, \tag{5.16}$$

鉴于共轭变换（3.3），它可以写成

$$\mathcal{L}_1(\mathcal{B}^{-1}\mathbf{h}) = \mathcal{B}^{-1}\mathbf{f}_0, \quad \mathcal{B}^{-1}\mathbf{h}|_{t=0} = \mathcal{B}^{-1}\mathbf{h}_{in}.$$

利用界（3.4）和引理5.6，我们得到如下适定性结果。

引理 5.7. 设 $T > 0$，且 $s_1 \geq s_0$。假设 $\mathbf{h}_{in} \in \mathcal{H}^{s_1}(\mathbb{T})$，$\mathbf{f}_0 \in C([0,T];\ \mathcal{H}^{s_1}(\mathbb{T}))$。存在依赖于 T 的 $\varepsilon_0 > 0$，使得若

$$\|(\eta,\psi)\|_{C([0,T];\mathcal{H}^{s_1+\frac{5}{2}})} \lesssim \varepsilon_0,$$

存在唯一解 $\mathbf{h} \in C([0,T];\mathcal{H}^{s_1})$，即柯西问题 (5.14) 的解，并满足估计：对 $s \in [0, s_1]$,

$$\|\mathbf{h}\|_{C([0,T];\mathcal{H}^s)} \lesssim_s e^{CT}\left(\|\mathbf{h}_{in}\|_{\mathcal{H}^s} + \|\mathbf{f}_0\|_{C([0,T];\mathcal{H}^s)}\right), \tag{5.17}$$

其中常数 C 依赖于 ε_0。

最后，对于系统（5.1），利用共轭变换（2.6），它可以写成

$$\mathcal{L}_0\mathcal{Z}^{-1}\tilde{\mathbf{u}} = \mathcal{Z}^{-1}\tilde{\mathbf{f}}, \quad \mathcal{Z}^{-1}\tilde{\mathbf{u}}|_{t=0} = \mathcal{Z}^{-1}\tilde{\mathbf{u}}_{in}.$$

利用界（2.9）和引理 5.7，我们得到如下适定性结果。

引理 5.8. 设 $T > 0$，且 $s_1 \geq s_0$。假设 $\tilde{\mathbf{u}}_{in} \in \mathcal{H}^{s_1}(\mathbb{T})$，$\mathbf{f} \in C([0,T];\ \mathcal{H}^{s_1}(\mathbb{T}))$。存在依赖于 T 的 $\delta > 0$，使得若

$$\|(\eta,\psi)\|_{C([0,T];\mathcal{H}^{s_1+\frac{5}{2}})} < \delta,$$

存在唯一解 $\tilde{\mathbf{u}} \in C([0,T];\ \mathcal{H}^{s_1})$ 为柯西问题 (5.1) 的解，并满足估计：对 $s \in [0, s_1]$,

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{C([0,T];\mathcal{H}^s)} \lesssim_s e^{CT}\left(\|\tilde{\mathbf{u}}_{in}\|_{\mathcal{H}^s} + \|\tilde{\mathbf{f}}\|_{C([0,T];\mathcal{H}^s)}\right), \tag{5.18}$$

其中，常数 C 取决于 ε_0。

对于算子 $\mathcal{M}$，我们将其关于时空内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{(t,x)}=\int_0^T\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathcal{H}^0}dt$ 的伴随算子记为 $\mathcal{M}^*$。例如，我们记

$$\mathcal{L}_0^*:=\begin{pmatrix}-\partial_t-V\partial_x & -|D|+\mathcal{R}_G^*\\ a+\sigma\sum_{\alpha=1}^4(-1)^{5-\alpha}\partial_x^{5-\alpha}\left(E_{5-\alpha}(\eta)\cdot\right) & -\partial_t-V\partial_x-V_x\end{pmatrix}$$

$\mathcal{L}_0$的伴随算子，其中 $\mathcal{R}_G^*$ 是 $\mathcal{R}_G$ 的伴随算子。伴随算子 $[\mathrm{P}'(\mathrm{u})]^*$、$\mathcal{L}_i^*(i=1,\dots,8)$ 和 $\mathcal{R}_i^*(i=4,\dots,8)$ 可以类似地定义。可以验证，当算子 $\mathcal{L}_i(i=0,\dots,3)$、$\mathcal{L}_i+\mathcal{R}_i(i=4,\cdots,8)$ 和 $\mathrm{P}'(\mathrm{u})$ 分别替换为 $\mathcal{L}_i^*(i=0,\dots,3)$、$\mathcal{L}_i^*+\mathcal{R}_i^*(i=4,\cdots,8)$ 和 $[\mathrm{P}'(\mathrm{u})]^*$ 时，引理 5.1– 引理 5.7 仍然成立。此外，对于反向伴随柯西问题，同样的估计也成立；在这类问题中，伴随线性化系统从 $t=T$ 出发并随时间向后演化。

6. Observability of the linearized system

在本节中，我们证明线性化系统（2.5）的可观测性。同样，我们将利用第3 节和第4 节中的约化结果，并以反向方式获得线性化系统的可观测性。

首先, 我们考虑 $\mathcal{L}_8+\mathcal{R}_8$ 的可观测性，并证明以下结果 .

引理 6.1. 设 $T>0$ 和 $\omega\subset\mathbb{T}$ 为一个开集。设 $\boldsymbol{h}_T\in H^{\frac{3}{2}}\times H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{T})$, 以及 $\boldsymbol{h}\in C([0,T];H^{\frac{3}{2}}\times H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{T}))$ 为后向柯西问题的解

$$(\mathcal{L}_8+\mathcal{R}_8)\mathbf{h}=\mathbf{0},\quad \mathbf{h}|_{\tau=T}=\mathbf{h}_T. \tag{6.1}$$

存在一个常数 $C_8=C_8(T,\omega)$，使得若 $\|\mathcal{R}_8\|_{C([0,T];\mathcal{L}(H^{\frac{3}{2}}\times H^{\frac{3}{2}}))}<r_8$，其中某个常数 r_8 足够小，则有如下不等式

$$\int_0^T\int_\omega|\Lambda\mathbf{h}(\tau,z)|^2dzd\tau\geq C_8\|\Lambda\mathbf{h}_T\|^2_{L^2\times L^2}, \tag{6.2}$$

其中 Λ 是傅里叶乘子，其符号定义于 （3.17）。

证明。 我们将 $\mathbf{h}=\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2$, 分解，其中

$$\begin{cases}\mathcal{L}_8\mathbf{h}_1=\mathbf{0}\\ \mathbf{h}_1|_{\tau=T}=\mathbf{h}_T,\end{cases}\qquad\begin{cases}(\mathcal{L}_8+\mathcal{R}_8)\mathbf{h}_2=-\mathcal{R}_8\mathbf{h}_1\\ \mathbf{h}_2|_{\tau=T}=\mathbf{0}.\end{cases} \tag{6.3}$$

我们首先证明t 该 $L^2\times L^2$ 可观测性结论，即不含 Λ 的不等式（6.2).

对于（6.3）中的第一个系统，由于这是一个向量方程，只需考虑其第一个分量，即标量方程

$$\mathcal{D}_+h_1=0,\quad h_1|_{\tau=T}=h_{T,1}. \tag{6.4}$$

设 $h_{T,1}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}w_ne^{inz}$，从而 $\|h_{T,1}\|_{L^2}^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|w_n|^2$。于是我们可以写

e

$$h_1(\tau,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}w_ne^{inz}e^{-it(n)(\tau-T)}=\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n(z)e^{-it(n)\tau},$$

其中 $u_n(z)$ 由下式给出

$$u_n(z)=\begin{cases} e^{it(n)T}(w_n e^{inz}+w_{-n}e^{-inz}), & \text{for } n\geq 1\\ w_0, & \text{for } n=0. \end{cases}$$

由Ingham不等式引理 1.1，我们有

$$\int_0^T\int_\omega |h_1(\tau,z)|^2dzd\tau \geq C(T)\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{\omega_0}|u_n(z)|^2dz, \tag{6.5}$$

其中选取 $\omega_0=(a,b)\subset\omega$ 使得对 $n\geq 1$,

$$\left|\frac{\sin(n(b-a))}{n}\right|\leq \sin(b-a).$$

当 $n=0$ 时,

$$\int_{\omega_0}|u_0(z)|^2dz=|\omega_0|^2(b-a).$$

当 $n\geq 1$ 时，我们计算

$$\begin{aligned}\int_{\omega_0}|u_n(z)|^2dz=&\int_{\omega_0}\left(|w_n|^2+|w_{-n}|^2+w_n\bar{w}_ne^{2inz}+\bar{w}_n\bar{w}_ne^{-2inz}\right)dz\\ \geq&(b-a)(|w_n|^2+|w_{-n}|^2)-|w_n||w_{-n}|\left(\left|\int_{\omega_0}e^{2inz}dz\right|+\left|\int_{\omega_0}e^{-2inz}dz\right|\right)\\ =&(b-a)(|w_n|^2+|w_{-n}|^2)-2|w_n||w_{-n}|\left|\frac{\sin(n(b-a))}{n}\right|\\ \geq&\left\{b-a-\left|\frac{\sin(n(b-a))}{n}\right|\right\}(|w_n|^2+|w_{-n}|^2).\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\int_{\omega_0}|u_n(z)|^2dz\geq(b-a-\sin(b-a))\,(|w_n|^2+|w_{-n}|^2).$$

对 $n\in\mathbb{N}$ 将上述不等式求和，我们得到

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{\omega_0}|u_n(z)|^2dz\geq C(\omega_0)\sum_{n\in\mathbb{Z}}|w_n|^2.$$

将此估计与（6.5）结合，得到如下估计

$$\int_0^T\int_\omega|h_1(\tau,z)|^2dzd\tau\geq C(T)C(\omega_0)\|h_{T,1}\|^2_{L^2}.$$

对于系统（6.3）中第一个系统的第二个分量，我们有相同的估计，因此将两个分量的不等式合在一起,

$$\int_0^T\int_\omega|\mathbf{h}_1(\tau,z)|^2dzd\tau\geq C(T)C(\omega_0)\|\mathbf{h}_T\|^2_{L^2\times L^2}.$$

对于（6.3）中的第二个系统，我们将能量估计（5.3）用于柯西问题（5.2）两次，

$$\|\mathbf{h}_2\|_{C([0,T];L^2\times L^2)} \le Ce^{CT}r_8\|\mathbf{h}_1\|_{C([0,T];L^2\times L^2)} \le C^2e^{2CT}r_8\|\mathbf{h}_T\|_{L^2\times L^2}.$$

因此，如果 r_8取得足够小，使得 $2C^2e^{2CT}\sqrt{T}r_8 < C(\overline{T})C(\omega_0)$，那么利用不等式 $(a+b)^2 \ge \frac{1}{2}a^2 - b^2$，

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\omega |\mathbf{h}(\tau,z)|^2dxdt &\ge \frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega |\mathbf{h}_1(\tau,z)|^2dzd\tau - \int_0^T\int_\omega |\mathbf{h}_2(\tau,z)|^2dzd\tau\\ &\ge \frac{1}{2}C(T)C(\omega_0)\|\mathbf{h}_T\|^2_{L^2\times L^2} - C^4e^{4CT}Tr_8^2\|\mathbf{h}_T\|^2_{L^2\times L^2} \ge \frac{1}{4}C(T)C(\omega_0)\|\mathbf{h}_T\|^2_{L^2\times L^2}.\end{aligned}$$

因此，我们得到了 $L^2\times L^2$ 可观测性结论。

现在，我们将 Λ 应用于（6.3）中的系统。由于 Λ 与 ∂_τ可交换，我们得到 et

$$\text{(6.6)}\qquad \begin{cases}\mathcal{L}_8\Lambda\mathbf{h}_1 = \mathbf{0}\\ \Lambda\mathbf{h}_1|_{\tau=T} = \Lambda\mathbf{h}_T,\end{cases}\qquad \begin{cases}(\mathcal{L}_8 + \Lambda\mathcal{R}_8\Lambda^{-1})\Lambda\mathbf{h}_2 = -\Lambda\mathcal{R}_8\mathbf{h}_1\\ \Lambda\mathbf{h}_2|_{\tau=T} = \mathbf{0}.\end{cases}$$

对（6.6）应用上述相同的分析，并令$C_8 = \frac{1}{4}C$（T）C（ω_0），我们得到不等式（6.2）。□

接下来考虑反向线性系统

$$\text{(6.7)}\qquad (\mathcal{L}_7 + \mathcal{R}_7)\mathbf{h} = \mathbf{0},\quad \mathbf{h}|_{\tau=T} = \mathbf{h}_T.$$

回想一下，我们进行了共轭变换

$$(\mathcal{L}_8 + \mathcal{R}_8)(\mathcal{U}^{-1}\mathbf{h}) = \mathbf{0},\quad \mathcal{U}^{-1}\mathbf{h}|_{\tau=T} = \mathcal{U}^{-1}\mathbf{h}_T.$$

利用 A.5中关于 $A^{(1)}$ 和 $A^{(2)}$的逆算子引理，由（4.9）可得以下可观测性结论。

引理 6.2. 设 $T > 0$，且 $\omega \subset \mathbb{T}$ 为一个开集。设 $\boldsymbol{h}_T \in H^{\frac{3}{2}}\times H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{T})$ 和 $\boldsymbol{h}\in C([0,T];H^{\frac{3}{2}}\times H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{T}))$ 是后向柯西问题 (6.7)的解。存在常数 $C_7 = C_7(T,\omega)$，使得若 $\|\mathcal{R}_7\|_{C([0,T];\mathcal{L}(H^{\frac{3}{2}}\times H^{\frac{3}{2}}))} < r_7$，对于某个充分小的常数 r_7，则有不等式

$$\text{(6.8)}\qquad \int_0^T\int_\omega |\Lambda\mathbf{h}(\tau,z)|^2dzd\tau \ge C_7\|\Lambda\mathbf{h}_T\|^2_{L^2\times L^2}.$$

Sin若 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{U}^{-1}$ 是常系数酉矩阵，则该系统

$$(\mathcal{L}_6 + \mathcal{R}_6)\mathbf{h} = \mathbf{0},\quad \mathbf{h}|_{\tau=T} = \mathbf{h}_T.$$

具有与（6.7）相同的可观测性结论。

对于反向线性系统

$$(\mathcal{L}_5 + \mathcal{R}_5)\mathbf{h} = \mathbf{0},\quad \mathbf{h}|_{\tau=T} = \mathbf{h}_T,$$

应用共轭变换（4.3）和界（3.1，其具有与反向线性系统（6.7）相同的可观测性结论。

接下来，我们考虑反向线性系统

$$(\mathcal{L}_4+\mathcal{R}_4)\mathbf{h}=\mathbf{0},\quad \mathbf{h}|_{\tau=T}=\mathbf{h}_T. \tag{6.9}$$

利用共轭变换（3.32），可将其写为

$$(\mathcal{L}_5+\mathcal{R}_5)(M^{-1}\mathbf{h})=\mathbf{0},\quad M^{-1}\mathbf{h}|_{\tau=T}=M^{-1}\mathbf{h}_T.$$

利用界（3.31），我们得到以下可观测性结论。

引理 6.3。设 $T>0$ 和 $\omega\subset\mathbb{T}$ 为一个开集。设 $\boldsymbol{h}_T\in H^{\frac{3}{2}}\times H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{T})$，以及 $\boldsymbol{h}\in C([0,T];H^{\frac{3}{2}}\times H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{T})$ 为后向柯西问题 (6.9)的解。存在一个常数 $C_4=C_4(T,\omega)$，使得若 $\|\mathcal{R}_4\|_{C([0,T];\mathcal{L}(H^{\frac{3}{2}}\times H^{\frac{3}{2}}))}<r_4$，对于某个足够小的常数 r_4，则有不等式

$$\int_0^T\int_\omega|\Lambda\mathbf{h}(\tau,y)|^2dyd\tau\geq C_4\|\Lambda\mathbf{h}_T\|^2_{L^2\times L^2}. \tag{6.10}$$

至于线性系统

$$\mathcal{L}_3\mathbf{h}=\mathbf{0},\quad \mathbf{h}|_{\tau=T}=\mathbf{h}_T, \tag{6.11}$$

利用共轭变换（3.20），可将其写为

$$(\mathcal{L}_4+\mathcal{R}_4)(S^{-1}\mathbf{h})=\mathbf{0},\quad S^{-1}\mathbf{h}|_{\tau=T}=S^{-1}\mathbf{h}_T.$$

于是我们得到关于（6.11）的可观测性结论。

引理 6.4. 设 $T>0$，且 $\omega\subset\mathbb{T}$ 为一开集。设 $\boldsymbol{h}_T\in\mathcal{H}^0(\mathbb{T})$ 与 $\boldsymbol{h}\in C([0,T];\mathcal{H}^0(\mathbb{T}))$ 为后向柯西问题 (6.11) 的解。存在常数 $C_3=C_3(T,\omega)$，使得若 $\|(\eta,\psi)\|_{C([0,T];\mathcal{H}^{s_0+\frac{5}{2}})}<r_3$，对某个足够小的常数 r_3，则有不等式

$$\int_0^T\int_\omega|\Lambda S^{-1}\mathbf{h}(\tau,y)|^2dyd\tau\geq C_4\|\Lambda S^{-1}\mathbf{h}_T\|^2_{L^2\times L^2},$$

这等价于

$$\int_0^T\|\mathbf{h}(\tau,y)\|^2_{\mathcal{H}^0_y(\omega)}d\tau\geq C_3\|\mathbf{h}_T\|^2_{\mathcal{H}^0}. \tag{6.12}$$

对于反向线性系统

$$\mathcal{L}_2\mathbf{h}=\mathbf{0},\quad \mathbf{h}|_{t=T}=\mathbf{h}_T, \tag{6.13}$$

鉴于（3.15），它可以写成

$$\mathcal{L}_3(Q^{-1}\mathbf{h})=\mathbf{0},\quad Q^{-1}\mathbf{h}|_{\tau=T}=Q^{-1}\mathbf{h}_T.$$

利用估计式（3.8）和引理5.5，我们得到以下可观测性结论。

引理 6.5. 设 $T>0$，且 $\omega\subset\mathbb{T}$ 为一个开集。设 $\boldsymbol{h}_T\in\mathcal{H}^0(\mathbb{T})$，且 $\boldsymbol{h}\in C([0,T];\mathcal{H}^0(\mathbb{T}))$为后向柯西问题 (6.13)的解。存在常数 $C_2=C_2(T,\omega)$，使得若 $\|(\eta,\psi)\|_{C([0,T];\mathcal{H}^{s_0+\frac{5}{2}})}<r_2$，则对于某个充分小的常数 r_2，有如下不等式

$$\int_0^T\|\mathbf{h}(t,y)\|^2_{\mathcal{H}^0_y(\omega)}dt\geq C_2\|\mathbf{h}_T\|^2_{\mathcal{H}^0}. \tag{6.14}$$

对于倒向线性系统 $\mathcal{L}_1\mathbf{h}=\mathbf{0}$，其中 $\mathbf{h}|_{t=T}=\mathbf{h}_T$，且

$$\mathcal{L}_0\mathbf{h}=\mathbf{0},\quad \mathbf{h}|_{t=T}=\mathbf{h}_T, \tag{6.15}$$

与引理的证明5.6 和引理 5.7中的论证类似，我们可以得到（6.15）的可观测性结论。

引理 6.6。 设 $T>0$，且 $\omega\subset\mathbb{T}$ 为一个开集。设 $\boldsymbol{h}_T\in\mathcal{H}^0(\mathbb{T})$和 $\boldsymbol{h}\in C([0,T];\mathcal{H}^0(\mathbb{T}))$为后向柯西问题 (6.15)的解。存在常数 $C_0=C_0(T,\omega)$，使得若 $\|(\eta,\psi)\|_{C([0,T];\mathcal{H}^{s_0+\frac{5}{2}})}<r_0$，对于某个充分小的常数 r_0，则有如下不等式

$$\int_0^T\|\mathbf{h}(t,x)\|^2_{\mathcal{H}^0_x(\omega)}dt\geq C_0\|\mathbf{h}_T\|^2_{\mathcal{H}^0}. \tag{6.16}$$

最后，对于倒向线性系统

$$\mathbf{P}'(\mathbf{u})[\tilde{\mathbf{u}}]=\mathbf{0},\quad \tilde{\mathbf{u}}|_{t=T}=\tilde{\mathbf{u}}_T=(\tilde{\eta}_{end},\tilde{\psi}_{end})^T, \tag{6.17}$$

根据共轭变换（2.6），可将其写为

$$\mathcal{L}_0\mathcal{Z}^{-1}\tilde{\mathbf{u}}=\mathbf{0},\quad \mathcal{Z}^{-1}\tilde{\mathbf{u}}|_{t=T}=\mathcal{Z}^{-1}\tilde{\mathbf{u}}_T.$$

利用估计（2.9）和引理 5.8，我们得到线性化水弹性波的如下可观测性结论。

引理 6.7. 设 $T>0$，且 $\omega\subset\mathbb{T}$ 是一个开集。设 $\tilde{}\mathbf{u}_T\in\mathcal{H}^0(\mathbb{T})$ 和 $\tilde{}\mathbf{u}\in C([0,T];\mathcal{H}^0(\mathbb{T}))$ 是后向柯西问题 (6.17) 的解。存在一个常数 $C=C(T,\omega)$，使得若 $\|(\eta,\psi)\|_{C([0,T];\mathcal{H}^{s_0+\frac{5}{2}})}<\delta$ 对某个充分小的常数 δ 成立，则有不等式

$$\int_0^T\|\tilde{\mathbf{u}}(t,x)\|^2_{\mathcal{H}^0_x(\omega)}dt\geq C\|\tilde{\mathbf{u}}_T\|^2_{\mathcal{H}^0}. \tag{6.18}$$

7. Controllability of the linearized system

在本节中，我们证明 $\mathcal{H}^s$ 线性化系统（2.5）的可控性。在讨论这一结果之前，我们先证明（ $\mathcal{H}^0$ 2.5）的可控性结果。

引理 7.1. 设 $T>0$ 和 $\omega\subset\mathbb{T}$ 为一个开集。设 $[P'(u)]^*$ 为 $P'(u)$ 的伴随算子。存在足够小的 $\delta_0\in(0,1)$，使得如果 $\|(\eta,\psi)\|_{C([0,T];\mathcal{H}^{s_0+\frac{5}{2}})}<\delta_0$，那么对于任意实值 h_{in}、$h_{end}\in\mathcal{H}^0(\mathbb{T})$ 和 $q\in C([0,T];\mathcal{H}^0(\mathbb{T}))$，都存在唯一的实值函数 $f\in C([0,T];\mathcal{H}^0(\mathbb{T}))$，使其满足 $[P'(u)]^*f=0$，从而柯西问题的唯一解 $h\in C([0,T];\mathcal{H}^0(\mathbb{T}))$

$$\mathbf{P}'(\mathbf{u})\mathbf{h}=diag\{0,\chi_\omega\}\mathbf{f}+\mathbf{q},\quad \mathbf{h}|_{t=0}=\mathbf{h}_{in} \tag{7.1}$$

满足 $es\ \mathbf{h}|_{t=T}=\mathbf{h}_{end}$。此外，函数 $\mathbf{f}$ 满足控制估计 te

$$\|\mathbf{f}\|_{C([0,T];\mathcal{H}^0)}\lesssim\|\mathbf{h}_{in}\|_{\mathcal{H}^0}+\|\mathbf{h}_{end}\|_{\mathcal{H}^0}+\|\mathbf{q}\|_{C([0,T];\mathcal{H}^0)}.$$

我们注意到，导出线性化控制问题的控制函数并不唯一。我们构造的函数 $\mathbf{f}$ 在如下意义下是唯一的：它是下文（7.2）中第一个系统的唯一解。

证明。 我们首先证明实值函数$\mathbf{f}\in C([0,T];\mathcal{H}^0(\mathbb{T}))$的存在性。对于任意$\mathbf{f}_1,\mathbf{g}_1\in\mathcal{H}^0(\mathbb{T})$，我们将实值$\mathbf{f},\mathbf{g}\in C([0,T];\mathcal{H}^0(\mathbb{T}))$视为反向伴随柯西问题的唯一解

$$\begin{cases}[\mathbf{P}'(\mathbf{u})]^*\mathbf{f}=\mathbf{0}\\ \mathbf{f}|_{t=T}=\mathbf{f}_1,\end{cases}\qquad\begin{cases}[\mathbf{P}'(\mathbf{u})]^*\mathbf{g}=\mathbf{0}\\ \mathbf{g}|_{t=T}=\mathbf{g}_1,\end{cases} \tag{7.2}$$

并定义双线性形式

$$\mathfrak{B}(\mathbf{f}_1,\mathbf{g}_1):=\int_0^T\langle\mathrm{diag}\{0,\chi_\omega\}\mathbf{f},\mathbf{g}\rangle_{\mathcal{H}_x^0}\,dt,$$

以及线性形式

$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{g}_1):=\langle\mathbf{h}_{end},\mathbf{g}_1\rangle_{\mathcal{H}_x^0}-\langle\mathbf{h}_{in},\mathbf{g}(0,\cdot)\rangle_{\mathcal{H}_x^0}-\int_0^T\langle\mathbf{q}(t,\cdot),\mathbf{g}(t,\cdot)\rangle_{\mathcal{H}_x^0}\,dt,$$

其中，标量积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_x^0}$ 定义为

$$\langle(u_1,u_2),(v_1,v_2)\rangle_{\mathcal{H}_x^0}:=\int_{\mathbb{T}}|D|^{\frac{3}{2}}u_1(x)|D|^{\frac{3}{2}}\bar{v}_1(x)+u_2(x)\bar{v}_2(x)\,dx.$$

利用反向伴随问题的能量估计 (5.17)，我们得到

$$|\mathfrak{B}(\mathbf{f}_1,\mathbf{g}_1)|\lesssim\|\mathbf{f}_1\|_{\mathcal{H}^0}\|\mathbf{g}_1\|_{\mathcal{H}^0},\quad|\mathbf{\Lambda}(\mathbf{g}_1)|\lesssim\left(\|\mathbf{h}_{in}\|_{\mathcal{H}^0}+\|\mathbf{h}_{end}\|_{\mathcal{H}^0}+\|\mathbf{q}\|_{C([0,T];\mathcal{H}^0)}\right)\|\mathbf{g}_1\|_{\mathcal{H}^0}.$$

此外，可观测性不等式 (6.18) 表明双线性形式 $\mathfrak{B}$ 具有强制性。因此，根据 Lax-Milgram 定理，存在唯一的实值 $\mathbf{f}_1\in\mathcal{H}^0(\mathbb{T})$，使得

$$\mathfrak{B}(\mathbf{f}_1,\mathbf{g}_1)=\mathbf{\Lambda}(\mathbf{g}_1),\quad\forall\mathbf{g}_1\in\mathcal{H}^0(\mathbb{T}). \tag{7.3}$$

此外，$\mathbf{f}_1$ 满足以下估计

$$\|\mathbf{f}_1\|_{\mathcal{H}^0}\lesssim\|\mathbf{h}_{in}\|_{\mathcal{H}^0}+\|\mathbf{h}_{end}\|_{\mathcal{H}^0}+\|\mathbf{q}\|_{C([0,T];\mathcal{H}^0)}.$$

对于函数$\mathbf{f}\in C([0,T];\ \mathcal{H}^0(\mathbb{T}))$，它是式（7.2）中第一个系统的解。令 $\mathbf{h}$为柯西问题（7.1）的解，其存在性由引理6.7给出。根据定义，

$$
\begin{aligned}
&0=\mathfrak{B}(\mathbf{f}_1,\mathbf{g}_1)-\mathbf{\Lambda}(\mathbf{g}_1)\\
=&\int_0^T\langle \mathrm{diag}\{0,\chi_\omega\}\mathbf{f},\mathbf{g}\rangle_{\mathcal{H}^0}\,dt-\langle \mathbf{h}_{end},\mathbf{g}_1\rangle_{\mathcal{H}^0}+\langle \mathbf{h}_{in},\mathbf{g}(0,\cdot)\rangle_{\mathcal{H}^0}+\int_0^T\langle \mathbf{q}(t,\cdot),\mathbf{g}(t,\cdot)\rangle_{\mathcal{H}^0}\,dt\\
=&\int_0^T\langle \mathbf{P}'(\mathbf{u})\mathbf{h},\mathbf{g}\rangle_{\mathcal{H}^0}\,dt-\langle \mathbf{h}_{end},\mathbf{g}_1\rangle_{\mathcal{H}^0}+\langle \mathbf{h}_{in},\mathbf{g}(0,\cdot)\rangle_{\mathcal{H}^0}\\
=&\int_0^T\langle \mathbf{h},[\mathbf{P}'(\mathbf{u})]^*\mathbf{g}\rangle_{\mathcal{H}^0}\,dt+\langle \mathbf{h}|_{t=T},\mathbf{g}_1\rangle_{\mathcal{H}^0}-\langle \mathbf{h}|_{t=0},\mathbf{g}_1\rangle_{\mathcal{H}^0}-\langle \mathbf{h}_{end},\mathbf{g}_1\rangle_{\mathcal{H}^0}+\langle \mathbf{h}_{in},\mathbf{g}(0,\cdot)\rangle_{\mathcal{H}^0}\\
=&\langle \mathbf{h}|_{t=T}-\mathbf{h}_{end},\mathbf{g}_1\rangle_{\mathcal{H}^0}.
\end{aligned}
$$

由于该关系对任意$\mathbf{g}_1\in\mathcal{H}^0$都成立，因此我们得出$\mathbf{h}|_{t=T}=\mathbf{h}_{end}$ 几乎处处成立。至此，便完成了此类控制存在性的证明。

接下来证明控制的唯一性。假设还存在另一个 $\tilde{\mathbf{f}}\in C([0,T];\ \mathcal{H}^0(\mathbb{T}))$，它满足 $[\mathbf{P}'(\mathbf{u})]^*\tilde{\mathbf{f}}=\mathbf{0}$，且柯西问题 (7.1) 的唯一解 $\tilde{\mathbf{h}}$ 满足$\tilde{\mathbf{h}}|_{t=T}=\mathbf{h}_{end}$。令 $\mathbf{f}|_{t=T}=\mathbf{f}_1$。$\mathbf{f}_1$ 满足 (7.3)。因此，$\mathbf{f}_1$ 是唯一的，因为满足 (7.3) 的函数$\tilde{\mathbf{f}}_1$ 是唯一的。我们必有 $\mathbf{f}_1=\mathbf{f}$。$\mathbf{f}$ 是唯一的，因为它是 (7.2) 中第一个向后伴随系统的唯一解。

若$\mathbf{h}_{in}$、$\mathbf{h}_{end}\in\mathcal{H}^0(\mathbb{T})$、以及$\mathbf{q}\in C([0,T];\ \mathcal{H}^0(\mathbb{T}))$ 均为实值函数，则将$\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathcal{H}^0_x}$ 替换为实内积

$$\langle(u_1,u_2),(v_1,v_2)\rangle_{\mathcal{H}^0_x}:=\int_{\mathbb{T}}|D|^{\frac{3}{2}}u_1(x)|D|^{\frac{3}{2}}v_1(x)+u_2(x)v_2(x)\,dx.$$

于是我们可以得到实值解$\mathbf{f}$。 □

接下来我们考虑 $\mathcal{H}^s$ 线性化系统（2.5）的可控性。

引理 *7.2.* 设 $T>0$ 和 $\omega\subset\mathbb{T}$ 为一个开集。存在足够小的 $\delta_s\in(0,1)$ 和一个正的普适常数 s_1，使得如果 $\|(\eta,\psi)\|_{C([0,T];\mathcal{H}^{s+\frac{5}{2}})\cap C^1([0,T];\mathcal{H}^s)\cap C^2([0,T];\mathcal{H}^{s-\frac{5}{2}})}<\delta_s$ 对于 $s\geq s_1$ 成立，那么对于任意实值 h_{in}，$h_{end}\in\mathcal{H}^s(\mathbb{T})$，以及 $q\in C([0,T];\ \mathcal{H}^s(\mathbb{T}))$，引理 *7.1* 中构造的控制函数 f 属于 $C([0,T];\ \mathcal{H}^s(\mathbb{T}))$。此外，$f$ 和 h 满足如下估计

$$\|(\mathbf{f},\mathbf{h})\|_{C([0,T];\mathcal{H}^s)}\lesssim\|\mathbf{h}_{in}\|_{\mathcal{H}^s}+\|\mathbf{h}_{end}\|_{\mathcal{H}^s}+\|\mathbf{q}\|_{C([0,T];\mathcal{H}^s)}.$$

若$\mathbf{h}_{in}$，$\mathbf{h}_{end}\in\mathcal{H}^{s+5}$，$\mathbf{q}\in C([0,T];\ \mathcal{H}^{s+5})\cap C^1([0,T];\ \mathcal{H}^{s+\frac{5}{2}})$，则$\mathbf{h}$，$\mathbf{f}\in C([0,T];\ \mathcal{H}^{s+5})\cap C^1([0,T];\ \mathcal{H}^{s+\frac{5}{2}})\cap C^2([0,T];\ \mathcal{H}^s)$，并且

$$
\begin{aligned}
&\|(\mathbf{f},\mathbf{h})\|_{C([0,T];\mathcal{H}^{s+5})}+\|\partial_t(\mathbf{f},\mathbf{h})\|_{C([0,T];\mathcal{H}^{s+\frac{5}{2}})}+\|\partial_{tt}(\mathbf{f},\mathbf{h})\|_{C([0,T];\mathcal{H}^s)}\\
\lesssim&\|\mathbf{h}_{in}\|_{\mathcal{H}^{s+5}}+\|\mathbf{h}_{end}\|_{\mathcal{H}^{s+5}}+\|\mathbf{q}\|_{C([0,T];\mathcal{H}^{s+5})}+\|\partial_t\mathbf{q}\|_{C([0,T];\mathcal{H}^{s+\frac{5}{2}})}.
\end{aligned}
$$

证明。令$\mathbf{f}$，$\mathbf{h}\in C([0,T];\ \mathcal{H}^0)$ 为引理7.1中构造的控制问题的解。回忆一下，根据第3 节和第4节中的计算，算子$\mathbf{P}'(\mathbf{u})$ 可化为 $\mathcal{L}_8+\mathcal{R}_8$ 通过

$$\mathbf{P}'(\mathbf{u})=\mathcal{Z}\mathcal{B}\mathcal{A}PSM\mathcal{T}\mathcal{O}\mathcal{U}(\mathcal{L}_8+\mathcal{R}_8)\mathcal{U}^{-1}\mathcal{O}^{-1}\mathcal{T}^{-1}M^{-1}S^{-1}Q^{-1}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}^{-1}\mathcal{Z}^{-1}.$$

记

$$\begin{aligned}
&\Phi:=\mathcal{Z}\mathcal{B}\mathcal{A}PSM\mathcal{T}\mathcal{O}\mathcal{U},\quad \Psi:=(\mathcal{Z}\mathcal{B}\mathcal{A}QSM\mathcal{T}\mathcal{O}\mathcal{U})^{-1},\quad \widetilde{\mathbf{h}}:=|D|^{\frac{3}{2}}\Psi\mathbf{h},\\
&\widetilde{\mathbf{h}}_{in}:=|D|^{\frac{3}{2}}\Psi|_{t=0}\mathbf{h}_{in},\quad \widetilde{\mathbf{h}}_{end}:=|D|^{\frac{3}{2}}\Psi|_{t=T}\mathbf{h}_{end},\quad \widetilde{\mathbf{q}}:=|D|^{\frac{3}{2}}\Phi^{-1}\mathbf{q},\\
&\widetilde{\mathbf{f}}:=|D|^{\frac{3}{2}}S^{-2}\Phi^{*}\mathbf{f},\quad K=|D|^{\frac{3}{2}}\Phi^{-1}\mathrm{diag}\{0,\chi_\omega\}(\Phi^{*})^{-1}S^2|D|^{-\frac{3}{2}},
\end{aligned}$$

其中，Φ_* 是 Φ 关于时空内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(t,x)}=\int_0^T\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2_x\times L^2_x}dt$的伴随算子。我们计算

$$\mathcal{B}^*=\mathcal{B}^{-1},\quad \mathcal{A}^*=\mathcal{A}^{-1},\quad P^*=P,\quad S^*=S,\quad \mathcal{T}=\mathcal{T}^{-1},\quad \mathcal{O}^*=\mathcal{O}^{-1},\quad \mathcal{Z}^*=\mathcal{Z}^T,$$

$$\mathcal{U}^*=\begin{pmatrix}(A^{(1)})^* & 0\\ 0 & (A^{(2)})^*\end{pmatrix},\quad M^*=I+\begin{pmatrix}0 & 0\\ |D_y|^{-5/2}(\ell_1\cdot) & \mathcal{H}|D_y|^{-1}(v_1\cdot)+|D_y|^{-2}(v_2\cdot)\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
K=&|D|^{\frac{3}{2}}\mathcal{U}^{-1}\mathcal{O}^{-1}\mathcal{T}^{-1}M^{-1}S^{-1}P^{-1}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}^{-1}\mathcal{Z}^{-1}\chi_\omega(\mathcal{U}^*\mathcal{O}^*\mathcal{T}^*M^*S^*P^*\mathcal{A}^*\mathcal{B}^*\mathcal{Z}^*)^{-1}S^2|D|^{-\frac{3}{2}}\\
=&|D|^{\frac{3}{2}}\mathcal{U}^{-1}\mathcal{O}^{-1}\mathcal{T}^{-1}M^{-1}S^{-1}P^{-1}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}^{-1}\mathcal{Z}^{-1}\chi_\omega(\mathcal{Z}^*)^{-1}\mathcal{B}\mathcal{A}P^{-1}S^{-1}(M^*)^{-1}\mathcal{T}\mathcal{O}(\mathcal{U}^*)^{-1}S^2|D|^{-\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

那么，K 是一个 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$零阶算子。根据构造，可以验证 $\mathbf{h}$和$\mathbf{f}$ 满足

$$\begin{cases}(\mathcal{L}_8+|D|^{\frac{3}{2}}\mathcal{R}_8|D|^{-\frac{3}{2}})\widetilde{\mathbf{h}}=K\widetilde{\mathbf{f}}+\widetilde{\mathbf{q}}\\ \widetilde{\mathbf{h}}(0,\cdot)=\widetilde{\mathbf{h}}_{in}\\ \widetilde{\mathbf{h}}(T,\cdot)=\widetilde{\mathbf{h}}_{end},\end{cases}\qquad (\mathcal{L}_8+|D|^{\frac{3}{2}}\mathcal{R}_8^*|D|^{\frac{3}{2}})\widetilde{\mathbf{f}}=\mathbf{0}.$$

与 [15], 中一样，我们采用 Dehman-Lebeau [21]所用的论证。由于可以通过引入辅助函数$\mathbf{h}_{end}$ 和$\mathbf{q}$ 来去除它们为零函数这一假设，该辅助函数$\mathbf{w}$是后向柯西问题的解

$$\mathbf{P}'(\mathbf{u})\mathbf{w}=\mathbf{q},\quad \mathbf{w}(T,\cdot)=\mathbf{h}_{end},\tag{7.4}$$

因此，在下文中我们假设$\mathbf{h}_{end}=\mathbf{q}\ =\mathbf{0}$ 。

定义映射

$$S_1:L^2\times L^2\to L^2\times L^2,\quad S_1\widetilde{\mathbf{f}}_1=\tilde{\mathbf{h}}(0,\cdot),$$

$\widetilde{\ }$ $\tilde{\ }$其中，$\mathbf{f}$ 和$\mathbf{h}$ 分别是以下柯西问题的解

$$\begin{cases}(\mathcal{L}_8+|D|^{\frac{3}{2}}\mathcal{R}_8^*|D|^{-\frac{3}{2}})\widetilde{\mathbf{f}}=\mathbf{0}\\ \widetilde{\mathbf{f}}(T,\cdot)=\widetilde{\mathbf{f}}_1,\end{cases}\qquad \begin{cases}(\mathcal{L}_8+|D|^{\frac{3}{2}}\mathcal{R}_8|D|^{-\frac{3}{2}})\widetilde{\mathbf{h}}=K\widetilde{\mathbf{f}}\\ \widetilde{\mathbf{h}}(T,\cdot)=\mathbf{0}.\end{cases}\tag{7.5}$$

根据引理7.1中的存在性与唯一性结果，可知 S_1 是一个线性同构。我们还考虑

$$(7.6)\qquad \begin{cases}(\mathcal{L}_8+|D|^{\frac{3}{2}}\mathcal{R}_8^*|D|^{-\frac{3}{2}})\widetilde{\underline{\mathbf{f}}}=\mathbf{0}\\ \widetilde{\underline{\mathbf{f}}}(T,\cdot)=|D|^s\widetilde{\mathbf{f}}_1,\end{cases}\qquad \begin{cases}(\mathcal{L}_8+|D|^{\frac{3}{2}}\mathcal{R}_8|D|^{-\frac{3}{2}})\widetilde{\underline{\mathbf{h}}}=K\widetilde{\underline{\mathbf{f}}}\\ \widetilde{\underline{\mathbf{h}}}(T,\cdot)=\mathbf{0}.\end{cases}$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$差值 $|D|^s\mathbf{f}-\underline{\mathbf{f}}$ 满足

$$\begin{cases}(\mathcal{L}_8+|D|^{\frac{3}{2}}\mathcal{R}_8^*|D|^{-\frac{3}{2}})(|D|^s\widetilde{\mathbf{f}}-\widetilde{\underline{\mathbf{f}}})=[|D|^{\frac{3}{2}}\mathcal{R}_8^*|D|^{-\frac{3}{2}},|D|^s]\widetilde{\mathbf{f}}\\ (|D|^s\widetilde{\mathbf{f}}-\widetilde{\underline{\mathbf{f}}})(T,\cdot)=\mathbf{0}.\end{cases}$$

根据引理 5.1，并利用 $\mathcal{R}_8^*$ 是一个零阶算子这一事实，

$$\||D|^s\widetilde{\underline{\mathbf{f}}}-\widetilde{\mathbf{f}}\|_{C([0,T];L^2\times L^2)}\lesssim_s e^{CT}\|[|D|^{\frac{3}{2}}\mathcal{R}_8^*|D|^{-\frac{3}{2}},|D|^s]\widetilde{\mathbf{f}}\|_{C([0,T];L^2\times L^2)}\lesssim_s e^{CT}\|\widetilde{\mathbf{f}}\|_{C([0,T];H^{s-1}\times H^{s-1})}.$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$差值 $|D|^s\mathbf{h}-\underline{\mathbf{h}}$ 满足

$$\begin{cases}(\mathcal{L}_8+|D|^{\frac{3}{2}}\mathcal{R}_8^*|D|^{-\frac{3}{2}})(|D|^s\widetilde{\mathbf{h}}-\widetilde{\underline{\mathbf{h}}})=K(|D|^s\widetilde{\mathbf{f}}-\widetilde{\underline{\mathbf{f}}})+[|D|^{\frac{3}{2}}\mathcal{R}_8^*|D|^{-\frac{3}{2}},|D|^s]\widetilde{\mathbf{h}}+[|D|^s,K]\widetilde{\mathbf{f}}\\ (|D|^s\widetilde{\mathbf{h}}-\widetilde{\underline{\mathbf{h}}})(T,\cdot)=\mathbf{0}.\end{cases}$$

再次利用引理 5.1，以及算子 K 是零阶的这一事实，可得

$$\begin{aligned}\||D|^s\widetilde{\mathbf{h}}-\widetilde{\underline{\mathbf{h}}}\|_{C([0,T];L^2\times L^2)}\lesssim_s& e^{CT}\Big(\|K(|D|^s\widetilde{\mathbf{f}}-\widetilde{\underline{\mathbf{f}}})\|_{C([0,T];L^2\times L^2)}\\ &+\|[|D|^{\frac{3}{2}}\mathcal{R}_8^*|D|^{-\frac{3}{2}},|D|^s]\widetilde{\mathbf{h}}\|_{C([0,T];L^2\times L^2)}+\|[|D|^s,K]\widetilde{\mathbf{f}}\|_{C([0,T];L^2\times L^2)}\Big)\\ \lesssim_s& e^{CT}\left(\|\widetilde{\mathbf{h}}\|_{H^{s-1}\times H^{s-1}}+\|\widetilde{\mathbf{f}}\|_{C([0,T];H^{s-1}\times H^{s-1})}\right).\end{aligned}$$

对 (7.5) 应用引理 5.1 ，可得

$$(7.7)\qquad \begin{aligned}&\|\widetilde{\mathbf{f}}\|_{C([0,T];H^s\times H^s)}\lesssim_s e^{CT}\|\widetilde{\mathbf{f}}_1\|_{C([0,T];H^s\times H^s)},\\ &\|\widetilde{\mathbf{h}}\|_{C([0,T];H^s\times H^s)}\lesssim_s e^{CT}\|\widetilde{\mathbf{f}}\|_{C([0,T];H^s\times H^s)}\lesssim_s e^{CT}\|\widetilde{\mathbf{f}}_1\|_{C([0,T];H^s\times H^s)}.\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\||D|^s\widetilde{\mathbf{f}}-\widetilde{\underline{\mathbf{f}}}\|_{C([0,T];L^2\times L^2)},\||D|^s\widetilde{\mathbf{h}}-\widetilde{\underline{\mathbf{h}}}\|_{C([0,T];L^2\times L^2)}\lesssim_s e^{CT}\|\widetilde{\mathbf{f}}_1\|_{C([0,T];H^{s-1}\times H^{s-1})}.$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$根据映射 S_1 的定义，我们有 $\mathbf{h}(\mathbf{0},\cdot)=S_1|D|^s\mathbf{f}_1$ ，且 $S_1\mathbf{f}_1=\mathbf{h}_{in}$，于是根据上述估计

$$\begin{aligned}\|S_1|D|^s\widetilde{\mathbf{f}}_1\|_{L^2\times L^2}\lesssim&\||D|^s\widetilde{\mathbf{h}}(0,\cdot)\|_{L^2\times L^2}+\||D|^s\widetilde{\mathbf{h}}(0,\cdot)-\underline{\mathbf{h}}(0,\cdot)\|_{L^2\times L^2}\\ \lesssim&\|\widetilde{\mathbf{h}}_{in}\|_{H^s\times H^s}+\||D|^s\widetilde{\mathbf{h}}-\underline{\mathbf{h}}\|_{C([0,T];L^2\times L^2)}\\ \lesssim_s&\|\widetilde{\mathbf{h}}_{in}\|_{H^s\times H^s}+e^{CT}\|\widetilde{\mathbf{f}}_1\|_{C([0,T];H^{s-1}\times H^{s-1})}.\end{aligned}$$

由于 S_1 是线性同构，因此我们有

$$\|\widetilde{\mathbf{f}}_1\|_{C([0,T];H^s\times H^s)}\lesssim_s\|\widetilde{\mathbf{h}}_{in}\|_{H^s\times H^s}+e^{CT}\|\widetilde{\mathbf{f}}_1\|_{C([0,T];H^{s-1}\times H^{s-1})}.$$

~ ~注意到 $\|\mathbf{f}_1\|_{L^2\times L^2} \lesssim \|\mathbf{h}_{in}\|_{L^2\times L^2}$，对 s使用归纳法可得

$$\|\widetilde{\mathbf{f}}_1\|_{C([0,T];H^s\times H^s)} \lesssim_s \|\widetilde{\mathbf{h}}_{in}\|_{H^s\times H^s}.$$

由（7.7），于是得到

$$\|\widetilde{\mathbf{f}}\|_{C([0,T];H^s\times H^s)} + \|\widetilde{\mathbf{h}}\|_{C([0,T];H^s\times H^s)} \lesssim_s \|\widetilde{\mathbf{h}}_{in}\|_{H^s\times H^s}.$$

最后，利用第5节中的估计，我们得到

$$\|\mathbf{f}\|_{C([0,T];\mathcal{H}^s)} + \|\mathbf{h}\|_{C([0,T];\mathcal{H}^s)} \lesssim_s \|\mathbf{h}_{in}\|_{\mathcal{H}^s}.$$

加上由（**7.4**）定义的辅助函数 $\mathbf{w}$，我们得到

$$\|\mathbf{f}\|_{C([0,T];\mathcal{H}^s)} + \|\mathbf{h}\|_{C([0,T];\mathcal{H}^s)} \lesssim \|\mathbf{h}_{in}\|_{\mathcal{H}^s} + \|\mathbf{h}_{end}\|_{\mathcal{H}^s} + \|\mathbf{q}\|_{C([0,T];\mathcal{H}^s)}.$$

引理 7.2 中的估计由以下事实推出： $\mathbf{f}$、$\mathbf{h}$ 满足系统 $\mathbf{P}'(\mathbf{u})\mathbf{h} = \mathrm{diag}\{0,\chi_\omega\}\mathbf{f} + \mathbf{q}$，以及 $[\mathbf{P}'(\mathbf{u})]^*\mathbf{f} = \mathbf{0}$。 □

8. Controllability of the full hydroelastic waves

本节中，我们结合前几节的结果并应用 Nash-Moser-H¨ormander 定理 A.6，完成定理 1.2 的证明。

为使用 Nash-Moser-H¨ormander 定理，我们首先定义函数空间 E_s 和F_s。令

$$X_s := C([0,T];\mathcal{H}^{s+5}) \cap C^1([0,T];\mathcal{H}^{s+\frac{5}{2}}) \cap C^2([0,T];\mathcal{H}^s).$$

我们定义 $E_s := X_s \times X_s$，并且

$$\begin{aligned} F_s :=& \{\mathbf{z} := (\mathbf{v},\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = (v_1, v_2, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2) : \\ & \mathbf{v} \in C([0,T];\mathcal{H}^{s+5}) \cap C^1([0,T];\mathcal{H}^{s+\frac{5}{2}}), \quad \mathfrak{a},\mathfrak{b} \in \mathcal{H}^{s+5}\}. \end{aligned}$$

利用 [15], 引理 7.1 和引理 7.2 中的驯性估计，我们可以将引理7.2中的条件 $\|\mathbf{u}\|_{X_\mathfrak{c}}$ 对某个普适常数 $\mathfrak{c}$足够小，替换为 – –

命题 8.1. 设 $T > 0$ 和 $\omega \subset \mathbb{T}$ 为一个开集。存在足够小的 $\delta_* \in (0,1)$ 以及一个正的普适常数 $\mathfrak{c}$，使得若 $\|\mathbf{u}\|_{X_\mathfrak{c}} < \delta_*$，则存在 $(\mathbf{h}\ \boldsymbol{\varphi}) \in E_s$，使得

$$\mathbf{P}'(\mathbf{u})\mathbf{h} - diag\{0,\chi_\omega\}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{h}|_{t=0} = \mathfrak{a}, \quad \mathbf{h}|_{t=T} = \mathfrak{b},$$

and

$$\|(\mathbf{h},\boldsymbol{\varphi})\|_{E_s} \lesssim_s \|(\mathbf{v},\mathfrak{a},\mathfrak{b})\|_{F_s} + \|\mathbf{u}\|_{X_{s+\mathfrak{c}}}\|(\mathbf{v},\mathfrak{a},\mathfrak{b})\|_{F_0}).$$

我们将平滑算子 S_j, $j=0$, 1, 2, ... 定义为

$$S_j u(x) := \sum_{|k|\le 2^j} \hat{u}_k e^{ikx}, \quad \text{where} \quad u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}_k e^{ikx}.$$

容易验证 S_j 满足定理A.6 关于 E_s 和 F_s的假设。

由（1.5）， Φ（$\mathbf{u}$ f）在 F_s当（$\mathbf{u}0$， f）$\in E_{s+\frac{5}{2}}$时。由（2.3）和（2.4），我们有：若$\|\tilde{\mathbf{u}}_2\|_{X_2} \le \delta_0$，且 δ_0 足够小，则

$$\|P''(\mathbf{u})[\tilde{\mathbf{u}}_1, \tilde{\mathbf{u}}_2]\|_{F_s} \lesssim_s \|\tilde{\mathbf{u}}_1\|_{X_{s+4}}\|\tilde{\mathbf{u}}_2\|_{X_2} + \|\tilde{\mathbf{u}}_2\|_{X_{s+4}}\|\tilde{\mathbf{u}}_1\|_{X_2} + \|\mathbf{u}\|_{X_{s+4}}\|\tilde{\mathbf{u}}_1\|_{X_2}\|\tilde{\mathbf{u}}_2\|_{X_2}.$$

我们固定 $V = \{(\mathbf{u}\,0, f) \in E_4 \colon \|(\mathbf{u}\,0, f)\|_{E_4} \le \delta_0\}$ 为 E_4 的一个小凸邻域，并在定理 A.6 中选取 $\delta_1 = \delta_*$、 $a_0 = 2$、 $\mu = 4$、 $a_1 = \mathfrak{c}$、 $\alpha = \beta > 2\mathfrak{c}$ 。命题 8.1 中的右逆满足定理 A.6 的假设。设 $\mathbf{u}_{in}$、$\mathbf{u}_{end} \in \mathcal{H}^{\beta+5}$，且$\|\mathbf{u}_{in}\|_{\mathcal{H}^{\beta+5}} + \|\mathbf{u}_{end}\|_{\mathcal{H}^{\beta+5}}$ 足够小。令 $\mathbf{g} := (0, \mathbf{u}_{in}, \mathbf{u}_{end})$，使得 $\mathbf{g} \in F_\beta$且 $\|\mathbf{g}\|_{F_\beta} \le \delta_*$。由于 $\mathbf{g}$ 与时间无关，因此满足 (A.20)。

根据定理 A.6，系统存在一个解（$\mathbf{u}\,0, f$）

$$\Phi(\mathbf{u}, f) = \mathbf{g}, \quad \text{with } \|(\mathbf{u}, 0, f)\|_{E_\alpha} \le \|\mathbf{g}\|_{F_\alpha}.$$

函数 $\chi_\omega f$ 正是定理 $P_{ext}(t,x)$ 中所需的外部压力，定理 1.2。只需证明解 $\mathbf{u}$的唯一性。令 $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ 是（1.5）的两个解。我们计算得

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}_1) - \mathbf{P}(\mathbf{u}_2) = \int_0^1 \mathbf{P}'(\mathbf{u}_2 + \lambda(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2))d\lambda[\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2] =: \tilde{\mathbf{P}}[\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2].$$

差 $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ 满足 $\mathbf{P}[\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2] = \mathbf{0}$，$(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)(0,x) = \mathbf{0}$。由引理 5.8 中柯西问题解的唯一性可知，$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$。

Appendix A. Function spaces and estimates

A.1. 函数的定义及若干估计。 这里，我们回顾函数空间的定义以及前文各节中用到的若干估计。

对于一个周期函数 $f(x) \in L^2(\mathbb{T}; \mathbb{C})$，可以展开为傅里叶级数 s

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{f}(j) e^{ijx}, \quad \hat{f}(j) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ijx} dx.$$

本文的大部分分析都在齐次 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{T})$ 的层面上进行。其范数定义为

$$\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{T})} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{2s} |\hat{f}(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

并且我们定义 $\dot{H}^0(\mathbb{T}) = L^2(\mathbb{T})$。对于环面上不含零频模的函数，齐次 Sobolev 空间与通常的非齐次 Sobolev 空间等价：

$$\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{T})} \le \|f\|_{H^s(\mathbb{T})}, \quad \|f\|_{H^s(\mathbb{T})} \le 2^{\frac{s}{2}}\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{T})}, \quad s \ge 0.$$

设 $q : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ 为商映射。我们将环面上 f 的 Zygmund 空间定义为其在实直线 $\mathbb{R}$ 上的延拓。更精确地说，我们令

$$\|f\|_{C^s_*(\mathbb{T})} = \|q^* f\|_{C^s_*(\mathbb{R})},$$

其中 $q^* f(x) = f(q(x))$ 是 f 沿 q 的拉回。

对于 H^s 中的估计，我们有乘积型与 Moser 型估计 s.

引理 A.1. 设 $s > 0$，则 $H^s \cap L^\infty$ 是一个代数，并有估计

$$\|uv\|_{\dot{H}^s} \lesssim \|u\|_{\dot{H}^s}\|v\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^\infty}\|v\|_{\dot{H}^s}. \tag{A.1}$$

当 $s > \frac{1}{2}$ 时，由 *Sobolev* 嵌入，

$$\|uv\|_{\dot{H}^s} \lesssim \|u\|_{\dot{H}^s}\|v\|_{\dot{H}^s}. \tag{A.2}$$

此外，对任意在 0 处为零的光滑函数 F，下列 *Moser* 型估计成立：

$$\|F(u)\|_{\dot{H}^s} \lesssim_{\|u\|_{L^\infty}} \|u\|_{\dot{H}^s}. \tag{A.3}$$

我们回顾附录 B 中的 [15]结果，该结果给出了与空间微分同胚复合的 Sobolev 估计。

引理 A.2 ([15]). 存在 $\delta \in (0,1)$，使其具有以下性质。

(1) 设 $s \ge 0$和 $\alpha \in C([0,T], H^{s+2}(\mathbb{T}))$，且 $\|\alpha\|_{C([0,T];H^2)} \le \delta$。则算子 $\mathcal{B}u(t,x) := u(t, x + \alpha(t,x))$ 是线性连续算子 $C([0,T], H^s(\mathbb{T})) \to C([0,T], H^s(\mathbb{T}))$，其中

$$\|\mathcal{B}u\|_{C([0,T];H^s)} \lesssim_s \|u\|_{C([0,T];H^s)} + \|\alpha\|_{C([0,T];H^{s+2})}\|u\|_{C([0,T];L^2)}. \tag{A.4}$$

(2) 设 $s \ge 0$和 $\alpha \in C([0,T], H^{s+4}(\mathbb{T}))$，且 $\|\alpha\|_{C([0,T];H^4)} \le \delta$。则逆算子 $\mathcal{B}^{-1}$由 $\mathcal{B}^{-1}u(t,y) := u(t, y + \widetilde{\alpha}(t,y))$定义，并将 $C([0,T], H^s(\mathbb{T}))$ 映射到其自身，其中

$$\|\mathcal{B}^{-1}u\|_{C([0,T];H^s)} \lesssim_s \|u\|_{C([0,T];\ H^s)} + \|\alpha\|_{C([0,T];H^{s+4})}\ \|u\|_{C([0,T];L^2)} \qquad \forall u \in C([0,T],\ H^s(\mathbb{T}))。$$

引理 A.3 ([9])。*(1)* 令 $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$，其中 $s \geqslant 2$, $m_1, m_2 \geqslant 0$, $m = m_1 + m_2$。令$f(t,\cdot) \in H^{s+m}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$。则 $[f, \mathcal{H}]u = f\mathcal{H}u - \mathcal{H}(fu)$ 满足

$$\|\partial_x^{m_1}[f, \mathcal{H}]\partial_x^{m_2}u\|_{H^s} \leqslant C(s)\big(\|f\|_{H^{m+2}}\|u\|_{H^s} + \|f\|_{H^{m+s+2}}\|u\|_{L^2}\big). \tag{A.5}$$

(2) 令 $a : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 为一个函数，且 $Au(t,x) = u(a(t)\ x)$。则 $[A, \mathcal{H}] = 0$。

(3) 存在一个普适常数 $\delta \in (0,1)$，具有以下性质。令 $m_1, m_2 \in \mathbb{N}, s \geq 1$, $m = m_1 + m_2$, $\beta(t,\cdot) \in W^{s+m+1,\infty}(\mathbb{T},\mathbb{R})$，其中 $\|\beta\|_{W^{1,\infty}} \leqslant \delta$。令 $\mathcal{B}h(t,x) = h(t, x+\beta(t,x))$, $h \in H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T},\mathbb{C})$。则

$$\big\|\partial_x^{m_1}\big(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{H}\mathcal{B}-\mathcal{H}\big)\partial_x^{m_2}h\big\|_{\dot{H}^s} \leqslant C(s,m)\big(\|\beta\|_{W^{m+1}}\|h\|_{\dot{H}^s} + \|\beta\|_{\dot{H}^{s+m+1}}\|h\|_{L^2}\big). \tag{A.6}$$

A.2. 伪微分算子的估计。给定 $\alpha \in \mathbb{R}$，算子 $|D_x|^\alpha$是符号为 $g_\alpha(\xi)$的傅里叶乘子，其中 $g_\alpha : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个 C^∞ 函数，使得$g_\alpha(\xi) \geq 0$ 对所有 $\xi \in \mathbb{R}$均成立，$g_\alpha(\xi) = |\xi|^\alpha$ 对$|\xi| \geq \frac{2}{3}$ 成立，且 $g_\alpha(\xi) = 0$ 对 $|\xi| \leq \frac{1}{3}$ 成立。对于周期函数 $h(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} h_j e^{ijx}$，任意 $\alpha \in \mathbb{R}$均有 $|D_x|^\alpha h(x) = \sum_{j\neq 0} h_j |j|^\alpha e^{ijx}$。周期函数上的其他微分算子也类似地定义。

对于傅里叶乘子 Λ 和任意乘法算子 $h \mapsto ah$，有如下象征复合公式。

$$\Lambda(au) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{i^n n!}\,(\partial_x^n a)(x)\mathrm{Op}(\partial_\xi^n g)u, \tag{A.7}$$

其中，$\mathrm{Op}(\partial_\xi^n g)$是符号为 $\partial_\xi^n g(\xi)$的傅里叶乘子。

考虑 振幅为 a、相位函数为 ϕ的周期傅里叶积分算子 ，

$$Au(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}_k\, a(x,k)\, e^{i\phi(x,k)}, \qquad \phi(x,k) = kx + |k|^{1/2}\beta(x). \tag{A.8}$$

关于复合公式，我们有如下结果。

引理 A.4 ([6]). 设 A 为算子 (A.8)，其中 $\|\beta\|_{W^{1,\infty}} \leq 1/4$ 且 $\|\beta\|_{H^2} \leq 1/2$。设

$$r, m, s_0 \in \mathbb{R}, \quad m \geq 0, \quad s_0 > 1/2, \quad N \in \mathbb{N}, \quad N \geq 2(m+r+1) + s_0.$$

那么，我们有复合公式。

$$|D_x|^r A u = \sum_{\alpha=0}^{N-1} B_\alpha u + R_N u,$$

$$B_\alpha u(x) = \binom{r}{\alpha} \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |k|^{r-\alpha}\,(-i\,sgn\,k)^\alpha\,\hat{u}_k\, e^{ikx}\,\partial_x^\alpha\big\{a(x,k)e^{if(k)\beta(x)}\big\},$$

即

$$B_\alpha u = F_\alpha |D_x|^{r-\alpha}\mathcal{H}^\alpha u, \quad F_\alpha v(x) := \binom{r}{\alpha} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{v}_k\, e^{ikx}\,\partial_x^\alpha\big\{a(x,k)e^{if(k)\beta(x)}\big\},$$

且 $\binom{r}{\alpha} := \frac{r(r-1)\cdots\cdots(r-\alpha+1)}{\alpha!}$。对于每个 $s \geq s_0$，余项满足

$$\|R_N|D_x|^m u\|_{H^s} \leq C(s)\Big\{\mathcal{K}_{2(m+r+s_0+1)}\,\|u\|_{H^s} + \mathcal{K}_{s+N+m+2}\,\|u\|_{H^{s_0}}\Big\}, \tag{A.9}$$

其中 $\mathcal{K}_\mu := |a|_\mu + |a|_1\|\beta\|_{H^{\mu+1}}$ 对于 $\mu \geq 0$ 和 $|a|_\mu :=$ 上确界$_{k\in\mathbb{Z}}\|a(\cdot,k)\|_{H^\mu}$。此外，

$$\mathcal{H}|D_x|^r Au = \sum_{\alpha=0}^{N-1} B_\alpha \mathcal{H}u + \tilde{R}_N u,$$

其中 $\tilde{R}_N$ 满足与 (A.9) 相同的估计 R_N。

我们还假设振幅 a 在 k 中为零阶，并且是 1 的一个扰动： $a(x,k) = 1 + b(x,k)$。记 $|b|_s := \sup_{k\in\mathbb{Z}}\|b(\cdot,k)\|_{H^s}$。那么，傅里叶积分算子 A满足以下界。

引理 A.5 ([6])。存在一个普适常数 $\delta > 0$ 具有以下性质。设$\beta \in H^3(\mathbb{T})$ 和 $b(\cdot,k) \in H^3(\mathbb{T})$ 对所有 $k \in \mathbb{Z}$ 成立。若 $\|\beta\|_{H^3} + |b|_3 \leq \delta$，则 A 是从 $L^2(\mathbb{T})$ 到其自身的可逆映射，并且

$$\|Au\|_{L^2} + \|A^{-1}u\|_{L^2} + \|A^*u\|_{L^2} + \|(A^*)^{-1}u\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2},$$

其中 $C > 0$ 是一个普适常数，而 A^* 是 A的伴随算子。若进一步假设，$\alpha \geq 1$ 是整数，且对所有 $k \in \mathbb{Z}$， $\beta \in H^{\alpha+2}(\mathbb{T})$ 和 $b(\cdot,k) \in H^{\alpha+2}(\mathbb{T})$，则

$$\|Au\|_{H^\alpha} + \|A^{-1}u\|_{H^\alpha} + \|A^*u\|_{H^\alpha} + \|(A^*)^{-1}u\|_{H^\alpha} \leq C(\alpha)\Big(\|u\|_{H^\alpha} + (|b|_{\alpha+2} + \|\beta\|_{H^{\alpha+2}})\|u\|_{H^1}\Big),$$

其中 $C(\alpha) > 0$ 仅取决于 α。

A.3. 纳什-莫泽-¨霍尔曼定理。本节回顾 [14] 中证明的纳什-莫泽-¨霍尔曼定理。设 $(E_a)_{a\geq 0}$ 是一族递减的巴拿赫空间，且其间存在连续嵌入 $E_b \hookrightarrow E_a$，

$$\|u\|_a \leq \|u\|_b \quad \text{for } a \leq b. \tag{A.10}$$

在 $E_\infty = \cap_{a\geq 0}E_a$ 上赋予使嵌入 $E_\infty \hookrightarrow E_a$ 连续的最弱拓扑。假设 $S_j : E_0 \to E_\infty$ 对于 $j = 0, 1, \ldots\ldots$均为线性算子，且常数 C 有界（当 a 和 b 有界时），并且与 j 无关，

$$\|S_j u\|_a \leq C\|u\|_a \qquad \text{对于所有 } a; \tag{A.11}$$

$$\|S_j u\|_b \leq C2^{j(b-a)}\|S_j u\|_a \qquad \text{如果 } a < b; \tag{A.12}$$

$$\|u - S_j u\|_b \leq C2^{-j(a-b)}\|u - S_j u\|_a \qquad \text{如果 } a > b; \tag{A.13}$$

$$\|(S_{j+1} - S_j)u\|_b \leq C2^{j(b-a)}\|(S_{j+1} - S_j)u\|_a \qquad \text{对所有 } a, b. \tag{A.14}$$

Set

$$R_0 u := S_1 u, \qquad R_j u := (S_{j+1} - S_j)u, \quad j \geq 1. \tag{A.15}$$

因此，

$$\|R_j u\|_b \leq C2^{j(b-a)}\|R_j u\|_a \quad \text{for all } a, b. \tag{A.16}$$

我们还假设

$$\|u\|_a^2 \le C\sum_{j=0}^{\infty}\|R_j u\|_a^2 \quad \forall a \ge 0, \tag{A.17}$$

当 a 有界时， C 有界。

现在，假设我们还有另一族递减的巴拿赫空间 F_a ，其平滑算子具有与上述相同的性质。对于平滑算子，我们也使用相同的记号。

定理 A.6 ([14])。设 a_1， a_2， α， β， a_0， μ 为实数，且满足

$$0 \le a_0 \le \mu \le a_1, \qquad a_1 + \frac{\beta}{2} < \alpha < a_1 + \beta, \qquad 2\alpha < a_1 + a_2.$$

设 V 为 E_μ中的一个凸邻域。设 Φ 为从 V 到 F_0 的映射，且 Φ: $V \cap E_{a+\mu} \to F_a$ 对所有 $a \in [0, a_2 - \mu]$均为 C^2 类，满足

$$\|\Phi''(u)[v,w]\|_a \le C\big(\|v\|_{a+\mu}\|w\|_{a_0} + \|v\|_{a_0}\|w\|_{a+\mu} + \|u\|_{a+\mu}\|v\|_{a_0}\|w\|_{a_0}\big) \tag{A.18}$$

对所有 $u \in V \cap E_{a+\mu}$、 v、 $w \in E_{a+\mu}$均成立。还假设，对于属于某个球$\|v\|_{a_1} \le \delta_1$的 $v \in E_\infty \cap V$， $\Phi'(v)$有一个右逆 $\Psi(v)$，它将 F_∞ 映射到E_{a_2}，并且

$$\|\Psi(v)g\|_a \le C(\|g\|_{a+\beta-\alpha} + \|g\|_0\|v\|_{a+\beta}) \quad \forall a \in [a_1, a_2]. \tag{A.19}$$

对于所有 $A > 0$，都存在 δ、 $C_1 > 0$，使得对于每个满足以下条件的 $g \in F_\beta$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\|R_j g\|_\beta^2 \le A\|g\|_\beta^2, \quad \|g\|_\beta \le \delta, \tag{A.20}$$

存在 $u \in E_\alpha$，其中 $\|u\|_\alpha \le C_1\|g\|_\beta$ 满足 $\Phi(u) = \Phi(0) + g$。

此外，设 $c > 0$ 并假设 (A.18) 对所有 $a \in [0, a_2 + c - \mu]$， $\Psi(v)$ 映射F_∞ 到 E_{a_2+c}，且 (A.19) 对所有 $a \in [a_1, a_2 + c]$均成立。若 g 满足 (A.20)，并且，$g \in F_{\beta+c}$ 其中

$$\sum_{j=0}^{\infty}\|R_j g\|_{\beta+c}^2 \le A_c\|g\|_{\beta+c}^2 \tag{A.21}$$

对某个 A_c，则解 u 属于 $E_{\alpha+c}$，其中 $\|u\|_{\alpha+c} \le C_{1,\ c}\|g\|_{\beta+c}$。

致谢. Jiaqi Yang 获得国家自然科学基金委员会资助，项目编号：12471225。

References

[1] R. Ahmad 和 M. D. Groves. 空间动力学与孤立水弹性表面波. Water Waves, 6(1):5–47, 2024.[2] T. Alazard, N. Burq, 和 C. Zuily. 关于具有表面张力的水波方程. Duke Math. J., 158(3):413–499, 2011.[3] Thomas Alazard. 具有表面张力的水波方程的稳定化. Ann. PDE, 3(2):Paper No. 17, 41, 2017.[4] Thomas Alazard. 重力水波的边界可观测性. Ann. Inst. H. Poincar ´e C Anal. Non Lin ´eaire, 35(3):751–779, 2018.[5] Thomas Alazard. 重力水波的稳定化. J. Math. Pures Appl. (9), 114:51–84, 2018.[6] Thomas Alazard 和 Pietro Baldi. 重力-毛细力驻波. Arch. Ration. Mech. Anal., 217(3):741–830, 2015.[7] Thomas Alazard, Pietro Baldi, 和 Daniel Han-Kwan. 水波控制. J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 20(3):657–745, 2018.[8] David M. Ambrose 和 Michael Siegel. 二维水弹性波的适定性. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 147(3):529–570, 2017.[9] Pietro Baldi. Benjamin-Ono 型全非线性自治方程的周期解. Ann. Inst. H. Poincar ´e C Anal. Non Lin ´eaire, 30(1):33–77, 2013.[10] Pietro Baldi, Massimiliano Berti, 和 Riccardo Montalto. 艾里方程的拟线性与全非线性受迫扰动的 KAM 理论. Math. Ann., 359(1-2):471–536, 2014.[11] Pietro Baldi, Massimiliano Berti, 和 Riccardo Montalto. KdV 方程自治拟线性扰动的 KAM 理论. Ann. Inst. H. Poincar ´e C Anal. Non Lin ´eaire, 33(6):1589–1638, 2016.[12] Pietro Baldi, Massimiliano Berti, 和 Riccardo Montalto. mKdV 方程自治拟线性扰动的 KAM 理论. Boll. Unione Mat. Ital., 9(2):143–188, 2016.[13] Pietro Baldi, Giuseppe Floridia, 和 Emanuele Haus. KdV 方程拟线性扰动的精确可控性. Anal. PDE, 10(2):281–322, 2017.[14] Pietro Baldi 和 Emanuele Haus. 一种 Nash-Moser-H¨ormander 隐函数定理及其在偏微分方程控制与柯西问题中的应用. J. Funct. Anal., 273(12):3875–3900, 2017.[15] Pietro Baldi, Emanuele Haus, 和 Riccardo Montalto. 拟线性哈密顿非线性薛定谔方程的可控性. J. Differential Equations, 264(3):1786–1840, 2018.[16] Pietro Baldi 和 Riccardo Montalto. 三维拟周期不可压缩欧拉流. Adv. Math., 384:Paper No. 107730, 74, 2021.[17] M. Berti, R. Feola, 和 L. Franzoi. 周期性重力-毛细力水波的二次寿命. Water Waves, 3(1):85–115, 2021.[18] M. Berti, L. Franzoi, 和 A. Maspero. 具有恒定涡量的行进拟周期水波. Arch. Ration. Mech. Anal., 240(1):99–202, 2021.[19] Massimiliano Berti, Alberto Maspero, 和 Federico Murgante. 水波的哈密顿拟微分伯克霍夫正规形. Regul. Chaotic Dyn., 28(4-5):543–560, 2023.[20] Massimiliano Berti 和 Riccardo Montalto. 重力毛细水波的拟周期驻波解. Mem. Amer. Math. Soc., 263(1273):v+171, 2020.[21] B. Dehman 和 G. Lebeau. 一致时间内半线性波的 HUM 控制算子分析与精确可控性. SIAM J. Control Optim., 48(2):521–550, 2009.[22]Roberto Feola 和 Michela Procesi. 全非线性受迫可逆薛定谔方程的拟周期解. J. Differential Equations, 259(7):3389–3447, 2015.

[23] Mark D. Groves、Benedikt Hewer 和 Erik Wahl´en. 流固弹性孤立波的变分存在理论。C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 354(11):1078–1086, 2016.[24] Felice Iandoli 和 Jingrui Niu. 环面上的拟线性哈密顿薛定谔方程的可控性。J. Differential Equations, 390:125–170, 2024.[25] G. Iooss、P. I. Plotnikov 和 J. F. Toland. 重力作用下无限深理想流体中的驻波。Arch. Ration. Mech. Anal., 177(3):367–478, 2005.[26] David Lannes. 水波方程的适定性。J. Amer. Math. Soc., 18(3):605–654, 2005.[27] David Lannes. 水波问题，数学调查与专著第 188 卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，2013。数学分析与渐近分析。[28] Shunlian Liu 和 David M. Ambrose. 带质量的二维水弹性波的适定性。J. Differential Equations, 262(9):4656–4699, 2017.[29] Sorin Micu 和 Enrique Zuazua. 偏微分方程可控性导论。载于《非线性控制与应用》。CIMPA 特拉姆森大学暑期课程， 阿尔及利亚。Jean-Michel Coron 作序。第 67–150 页。巴黎：Hermann科学与艺术出版社，2005。[30] Riccardo Montalto. 受迫基尔霍夫方程的拟周期解。NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., 24(1):论文编号 9，71，2017。[31] Russell M. Reid. 不规则区域内水波的开环控制。SIAM J. Control Optim., 24(4):789–796, 1986.[32] Russell M. Reid. 水面重力-毛细波的控制时间。SIAM J. Control Optim., 33(5):1577–1586, 1995.[33] Russell M. Reid 和 David L. Russell. 线性水波的边界控制与稳定性。SIAM J. Control Optim., 23(1):111–121, 1985.[34] J. F. Toland. 稳态周期流固弹性波。Arch. Ration. Mech. Anal., 189(2):325–362, 2008.[35] LIZHE WAN 和 Jiaqi Yang. 二维水弹性波的低正则性适定性，2025。arXiv:2512.22040.[36] LIZHE WAN 和 Jiaqi Yang. 带弹性界面的二维 Muskat问题的适定性，2026。[37] Zhan Wang 和 Jiaqi Yang. 两种不可压缩流体之间三维界面流固弹性波的能量估计与局部适定性。J. Differential Equations, 269(7):6055–6087, 2020.[38] Jiaqi Yang. 二维水弹性波的三次寿命。Commun. Math. Sci., 23(1):259–277, 2025.[39] Hui Zhu. 三维水波的控制。Arch. Ration. Mech. Anal., 236(2):893–966, 2020.
Beijing International Center for Mathematical Research, Peking University电子邮箱：wanlizhe@pku.edu.cnSchool of Mathematics and Statistics,
Northwestern Polytechnical University电子邮箱：yjqmath@nwpu.edu.cn, yjqmath@163.com