二进局部域上的相对整数旋量范数群

Constantin N. Beli

2026年3月3日

arXiv:2603.01671v1 [math.NT] 2 Mar 2026

摘要

当基域为二进域时，我们给出相对旋量范数群的显式公式。

1 BONG 理论的引言与背景

若 M，N 是特征为零的非阿基米德域上的两个二次格，且 $N \subseteq M$，则相对整数旋转的集合 $X(M/N)$ 定义如下:

$$X(M/N) = \{\sigma \in O^+(FM) \mid N \subseteq \sigma(M)\},$$

Schulze-Pillot [SP] 和 Hsia [H2] 引入了这一概念，将其作为二次格通常（绝对）旋转群 L, $O^+(L)$ 的推广。计算 $O^+(L)$ 和 $X(M/N)$ 的自旋范数是旋量属理论的重要组成部分。更具体地说， $\theta(O^+(L))$ 用于分类，而 $\theta(X(M/N))$ 用于表示。

$\theta(X(M/N))$ 是一个群这一事实已在 [HSX] 中得到证明。同一篇论文还给出了非二进情形下 $\theta(X(M/N))$ 的显式公式。2进情形（ $\mathbb{Q}_2$ 的非分歧有限扩张）则留待另行讨论，并提到“仅仅陈述由此得到的计算结果就需要好几页”。Shao 的博士论文 [S], 给出了 2进情形下 $\theta(X(M/N)$ 的公式，但无论是陈述还是证明都极为复杂。

处理 $\theta(X(M/N))$ 时所采用的通用步骤，既出现在[HSX], 中，用于证明 $\theta(X(M/N))$ 是一个群，也出现在 [X4, §2], 中，由两种约化步骤组成。第一种适用于 M和 N 的范数与尺度不相同的情形，即存在严格包含关系 $\mathfrak{n}M \supset \mathfrak{n}N$ 和/或 $\mathfrak{s}M \supset \mathfrak{s}N$。此时证明 $\theta(X(M/N)) = F$，或者存在一个格 $M', N \subseteq M' \subset M$，满足 $\mathfrak{n}M' \subset \mathfrak{n}M$和/或 $\mathfrak{s}M' \subset \mathfrak{s}M$，使得 $X(M/N) = X(M'/N)O^+(M)$。这样便能降低 M的范数和/或尺度。反复应用此步骤后，可将问题归结为 $\mathfrak{n}M = \mathfrak{n}N$ 和/或 $\mathfrak{s}M = \mathfrak{s}N$的情形。接着应用第二种约化，此时 M 和 N 的秩会降低。具体而言，证明要么 $\theta(X(M/N)) = F$，要么对于某些格 M^*，有 $X(M/N) = X(M^*/N^*)O^+(M)$，以及

N^*秩更小。在大多数情况下， $M = K \perp M^*$和 $N = K \perp N^*$成立，其中 K是秩为 ≤ 2的模的，且满足 $\mathfrak{n}K = \mathfrak{n}M = \mathfrak{n}N$ 和 $\mathfrak{s}K = \mathfrak{s}M = \mathfrak{s}N$。唯一的例外出现在 [HSX 定理 2,1], 的证明中的情形 (ii)，此时 $\mathfrak{n}N = \mathfrak{n}M = \mathfrak{s}N \subset \mathfrak{s}M$。在这种情况下， $N = \mathcal{O}x \perp N^*$，其中 $x \in N$满足 $Q(x)\mathcal{O} = \mathfrak{n}N$，但不存在类似的分解 $M = \mathcal{O}x \perp M^*$。相反， M^*由 $M^* = x^\perp \cap M$定义。

我们采用的方法类似，但我们使用良好 BONG，而非 Jordan 分解。第一类约化适用于 $\mathfrak{n}M \supset \mathfrak{n}N$，涉及减小 M的范数。也就是说，若 $M' = \{x \in M \mid Q(x) \in \mathfrak{p}\mathfrak{n}M\}$且 M'是一个格，则 $N \subseteq M' \subset M$和$\mathfrak{n}M' \subset M$，并且我们有 $X(M/N) = X(M'/N)$。若 M'不是一个格，则 $\theta(X(M/N))$. $= F$。第二类约化适用于 $\mathfrak{n}M = \mathfrak{n}N$。于是我们证明，要么$\theta(X(M/N)) = F$，要么域 F 的任意良好 BONG 的首元素也是域 F 的某个良好 BONG 的首元素，并且对于域 F 的良好 BONG 的每个首元素 x，我们都有$X(M/N) = X(M^*/N^*)O^+(M)$，其中 $M^* = pr_{X^\perp}M$和 $N^* = pr_{X^\perp}N$。

我们现在简要总结所使用的记号与结果，其中包括对 BONG 理论的回顾。

本文通篇主要采用 [OM] 中的记号。我们有一个二进域 F，并用 $\mathcal{O}$ 表示整数环，用 $\mathfrak{p}$ 表示素理想，用 π 表示 $\mathfrak{p}$ 的一个生成元，用赋值 : $F \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ 表示赋值映射，并用 e 表示分歧指数 $e(F/\mathbb{Q}_2)$，即 $e =$ 赋值 2。

我们用 $(\cdot,\cdot)_\mathfrak{p}$: $\dot{F}/\dot{F}^2 \times \dot{F}/\dot{F}^2 \to \{\pm 1\}$ 表示希尔伯特符号。若 $c \in \dot{F}$，我们用 N(c) 表示 $\dot{}$ 的范数群 $N(F(\sqrt{c})/F) = \{x \in F \mid (x,c)_\mathfrak{p} = 1\}$。 $^-$

元素 $a \in F$ 的二次亏格是理想 $\mathfrak{d}(a) = \bigcap_{x \in F}(a - x^2)\mathcal{O}$。我们用 $\Delta = 1 - 4\rho$（连同 $\rho \in \mathcal{O}^\times$）表示一个二次亏格为 $4\mathcal{O}$ 的单位。

1.1 我们将相对二次缺陷的阶定义为映射

$$d : \dot{F}/\dot{F}^2 : \mathbb{Z} \cup \{\infty\}, \qquad d(a) = \operatorname{ord} a^{-1}\mathfrak{d}(a).$$

它具有以下性质:

(1) Im $d = \{0, 1, 3, 5, \ldots, 2e-1, 2e, \infty\}$. (2) $d(a) = \infty$ 当且仅当 $a = 1$. $d(a) = 2e$ 当且仅当 $a = \Delta$. $d(a) = 0$ 当且仅当 ord a 为奇数。 (3) d 满足支配原理 $d(ab) \geq \min\{d(a)\ d(b)\}\ \forall a, b \in F$. (4) 若 $d(a) + d(b) > 2e$，则 $(a,b)_\mathfrak{p} = 1$. (5) 若 $d(a) < \infty$，则存在 $b \in F$，使得 $d(b) = 2e - d(a)$，且 $(a,b)_\mathfrak{p} = -1$. (6) $d(-1) \geq e$.（我们有 $\mathfrak{d}(-1) \subseteq (-1-1^2)\mathcal{O} = 2\mathcal{O}$，所以 $d(-1) =$ ord $\mathfrak{d}(-1) \geq$ ord $2 = e$。）

如果 k 是正整数，则 $(1+\mathfrak{p}^k)\ \dot{F}^2 = \{a \in \dot{F} \mid d(a) \geq k\}$。按照约定，对每个 $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$，我们设 $(1+\mathfrak{p}^\alpha)\ \dot{F}^2 = \{a \in \dot{F} \mid d(a) \geq \alpha\}$。于是 $(1+\mathfrak{p}^\alpha)\ \dot{F}^2 = (1+\mathfrak{p}^k)\ \dot{F}^2$，其中 k 是 Im d 中的最小元素（也可能是 $k = \infty$），使得 $k \geq \alpha$。此外 $(1+\mathfrak{p}^\alpha)\ \dot{F}^2 = (1+\mathfrak{p}^{\lceil\alpha\rceil})\ \dot{F}^2\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$。

特别地，$(1+\mathfrak{p}^\alpha)\ \dot{F}^2 = \dot{F}$若 $\alpha \leq 0$，$(1+\mathfrak{p}^1)\ \dot{F}^2 = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，$(1+\mathfrak{p}^{2e})\ \dot{F}^2 = \langle\Delta\rangle \dot{F}^2$且 $(1+\mathfrak{p}^\alpha)\ \dot{F}^2 = \dot{F}^2$ 若 $\alpha > 2e$。

引理 1.2 设 a、$c \in F$ 且设 $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$。

(i) 我们有 $(1+\mathfrak{p}^{\alpha})\dot{F}^2 \cap \mathrm{N}(a) \subseteq \mathrm{N}(c)$ 当且仅当 $\alpha + d(c) > 2e$。 *(ii)* 我们有 $(1+\mathfrak{p}^{\alpha})\dot{F}^2 \cap \mathrm{N}(a) \subseteq \mathrm{N}(c)$ 当且仅当 $\alpha + \max\{d(ac),\ d(c)\} > 2e$。

Proof. (i) 只是 [B2, 引理 1.2(iii)]。

(ii) 根据 [B2, 引理 1.3(i)], $(1+\mathfrak{p}^{\alpha})\dot{F}^2 \cap \mathrm{N}(a) \subseteq \mathrm{N}(c)$ 当且仅当 $(1+\mathfrak{p}^{\alpha})\dot{F}^2 \subseteq \mathrm{N}(ac)$ 或 $(1+\mathfrak{p}^{\alpha})\dot{F}^2 \subseteq \mathrm{N}(c)$，而根据 (i)，这等价于 $\alpha + d(ac) > 2e$ 或 $\alpha + d(c) > 2e$，即等价于 $\alpha + \max\{d(ac),\ d(c)\} > 2e$。 □

若 V 是一个二次空间，其对应的二次型和由此得到的双线性型分别记为 Q 和 B。若 $x_1, \ldots, x_n$ 是 V 的一组正交基，且 $Q(x_i) = a_i$，则称 $V \cong [a_1, \ldots, a_n]$ 是相对于基 $x_1, \ldots, x_n$ 的。

若 L 是一个二次格，我们分别用 $\mathfrak{s}L$、$\mathfrak{n}L$ 和 $\mathfrak{v}L$ 表示其尺度、范数和体积。

为方便起见，若 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 是一个序列，当 $i \le j$ 时，我们将 $c_{i,j} := c_i c_{i+1} \cdots c_j$ 记为；并且也令 $c_{i,i-1} := 1$。

二次格 L 中的元素 x 若满足 $Q(x)\mathcal{O} = \mathfrak{n}L$，则称其为范数生成元。接着递归地将 L 的范数生成元基（BONG）定义为序列 $x_1, \ldots, x_n$，其中 x_1 是 L 的范数生成元，且 $x_2, \ldots, x_n$ 是 $pr_{x_1^{\perp}}L$ 的 BONG。格由 BONG 唯一确定，因此若 $x_1, \ldots, x_n$ 是 L 的 BONG，我们将 $L = \prec x_1, \ldots, x_n \succ$ 记为。进一步地，若 $Q(x_i) = a_i$，则称 $L \cong \prec a_1, \ldots, a_n \succ$ 是相对于 BONG $x_1, \ldots, x_n$ 的。

引理 1.3 若 $L \cong \prec a_1, \ldots, a_n \succ$ 相对于某个 *BONG*，且赋值 $a_i = R_i$，则 *(i)* 在 $\dot{F}/\mathcal{O}^{\times 2}$ 中我们有 $\det L = a_{1,n}$ *(ii)* 赋值 $\mathfrak{v}L = R_1 + \cdots + R_n$。

Proof. (i) 不过是 [B2，引理 2.1]。而对于 (ii)，我们在关系 $\mathfrak{v}L = (\det L)\mathcal{O} = a_{1,n}\mathcal{O}$ 中取阶。 □

若 L 是二元的，我们由 $a(L) = a^{-2}\det L$ 定义 $a(L) \in \dot{F}/\mathcal{O}^{\times 2}$，其中 $a \in \dot{F}$ 与 $a\mathcal{O} = \mathfrak{n}L$，并由 $R(L) =$ 赋值 $a(L) =$ 赋值 $(\mathfrak{n}L)^{-2}\mathfrak{v}L$ 定义 $R(L) \in \mathbb{Z}$。若 $L \cong \prec a_1, a_2 \succ$，且赋值 $a_i = R_i$，则 $a(L) = a_2/a_1$ 且 $R(L) = R_2 - R_1$。不变量 $a(L)$ 在相差缩放的意义下唯一确定 L 的等价类。

二元格 L 的 $a(L)$ 的所有可能值的集合记为 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_F$。我们有 $\mathcal{A} = \{a \in F/\mathcal{O}^{\times} \mid 4a \in \mathcal{O},\ \mathfrak{d}(-a) \in \mathcal{O}\}$。如果 $R =$ 赋值 a，则 $a \in \mathcal{A}$ 当且仅当 $R + 2e \ge 0$ 且 $R + d(-a) \ge 0$。等式 $R + 2e = 0$ 成立当且仅当 $a = -1/4$ 或 $-\Delta/4$（在 $\dot{F}/\mathcal{O}^{\times 2}$ 中）。等式 $R + d(-a) \ge 0$ 成立当且仅当 $a = -\Delta/4$。此外，R 不可能为奇负数。（参见 [B2，引理 3.5]。）

如 [B2，第 3], 节所见，我们有两个映射 $g: \mathcal{A} \to Sgp(\mathcal{O}^{\times}/\mathcal{O}^{\times 2})$ 和 $G: \mathcal{A} \to Sgp(\dot{F}/\dot{F}^2)$，使得对于每个二元格 L，都有 $\theta(O^+(L)) = G(a(L))$（参见 [B2，引理 3,7]）；如果 $\eta \in \mathcal{O}^{\times}$，则 $L \cong L^{\eta}$ 当且仅当 $\eta \in g(a(L))$（参见 [B2，引理 3.11 和 3.12]）。如果 $L \cong \prec a_1, a_2 \succ$，则这些可写为 $\theta(O^+(L)) = G(a_2/a_1)$，且 $L \cong \prec \eta a_1,\ \eta a_2 \succ$ 当且仅当 $\eta \in g(a_2/a_1)$。

这里，$Sgp(\mathcal{O}^{\times}/\mathcal{O}^{\times 2})$ 和 $Sgp(\dot{F}/\dot{F}^2)$ 分别表示 $\mathcal{O}^{\times}/\mathcal{O}^{\times 2}$ 和 $\dot{F}/\dot{F}^2$ 的所有子群的集合。它们可分别视为包含 $\mathcal{O}^{\times 2}$ 的 $\mathcal{O}^{\times}$ 的子群，以及包含 $\dot{F}^2$ 的 $\dot{F}$ 的子群。

注意，二元情形下 $\theta(O^+(L))$ 的公式，即由$\theta(O^+(L)) = G(a_2/a_1)$ 表示的公式，是在 L 为模的情形下由 Hsia 和徐得到的（参见[H1，命题 B、C 和 D]以及 [X1]）；而在 L 非模的情形下，则由徐得到（参见 [X2，定理 2.1、2.2 和 2.3]）。

若格 L 的 BONG x_1，……，x_n 满足对 $1 \leq i \leq n-2$ 有 ord $Q(x_i) \leq$ ord $Q(x_{i+2})$，则称其为良好的。根据 [B2、引理 4.3(ii)、3.6 和 3.5]，，我们得到以下引理，它给出了二次空间的正交基成为某个格的良好 BONG 的充要条件。

引理 1.4 若 $x_1, \ldots, x_n$ 是二次空间 V 上的正交基，$Q(x_i) = a_i$ 且 赋值 $a_i = R_i$，则存在相对于良好 *BONG* $x_1, \ldots, x_n$ 的格 $L \cong \prec a_1, \ldots, a_n \succ$，当且仅当对 $1 \leq i \leq n-2$ 有 $R_i \leq R_{i+2}$，且对 $1 \leq i \leq n-1$ 有 $a_{i+1}/a_i \in \mathcal{A}$。

第二个条件等价地写作

$$R_{i+1} - R_i + 2e \geq 0 \text{ and } R_{i+1} - R_i + d(-a_{i,i+1}) \geq 0, \forall 1 \leq i \leq n-1.$$

此外，$R_{i+1} - R_i + 2e = 0$ 当且仅当 $a_{i+1}/a_i = -1/4$ 或 $-\Delta/4$ 属于 $\dot{F}/\mathcal{O}^{\times 2}$，并且我们有 $R_{i+1} - R_i + d(-a_{i,i+1}) = 0$ 当且仅当 $a_{i+1}/a_i = -\Delta/4$ 属于 $\dot{F}/\mathcal{O}^{\times 2}$。并且我们有 $a_{i+1}/a_i = -1/4$或 $-\Delta/4$当且仅当 $\prec a_i, a_{i+1} \succ \cong \frac{1}{2}\pi^{R_1} A(0, 0)$ 或 $\frac{1}{2}\pi^{R_1} A(2, 2\rho)$，分别如此。

此外，$R_{i+1} - R_i$ 不能既是奇数又为负数。

如果相对于某个良好 BONG，$L \cong \prec a_1, \ldots, a_n \succ$，那么 $a_1, \ldots, a_n$的阶与良好 BONG 的选择无关。因此，对于 $1 \leq i \leq n$，我们有不变量 $R_i(L)$,$R_i(L) =$ 赋值 a_i。

本节余下部分中，$L \cong \prec a_1, \ldots, a_n \succ$ 相对于良好 BONG $x_1, \ldots, x_n$，$R_i(L) = R_i$ 和 $a_i = \pi^{R_i}\varepsilon_i$，其中 $\varepsilon_i \in \mathcal{O}^\times$。

引理 1.5 *(i)* $\mathfrak{n}L = \mathfrak{p}^{R_1}$ 和 $\mathfrak{s}L = \mathfrak{p}^{(R_1+R_2)/2}$。

对于任意 $1 \leq i \leq n-1$，我们有 $L = \prec x_1, \ldots, x_i \succ \perp \prec x_{i+1}, \ldots, x_\succ$ 当且仅当 $R_i \leq R_{i+1}$.

(ii) 域 F 反过来，若 $x_1, \ldots, x_i$ 和 $x_{i+1}, \ldots, x_n$ 是某些格 L' 和L'' 的良好 *BONG*，则 $x_1, \ldots, x_n$ 是 $L := L' \perp L''$ 的良好 *BONG*，当且仅当 $R_i \leq R_{i+1}$, $R_{i-1} \leq R_{i+1}$ （若$i \geq 2$）且 $R_i \leq R_{i+2}$ （若 $i \leq n-2$）。

(iii) 相对于良好 *BONG* $x_n^\#, \ldots, x_1^\#$ 的 $L^\# \cong \prec a_n^{-1}, \ldots, a_1^{-1} \succ$，其中 $x^\# := Q(x)^{-1}x$。因此，$R_i(L^\#) =$ 赋值 $a_{n+1-i}^{-1} = -R_{n+1-i}$。

(iv) 若 $1 \leq i \leq j \leq n$ 和 $\prec x_i, \ldots, x_j \succ \cong \prec b_i, \ldots, b_j \succ$ 相对于良好 *BONG*$y_i, \ldots, y_j$，则 $L \cong \prec a_1, \ldots, a_{i-1}, b_i, \ldots, b_j, a_{j+1}, \ldots, a_n \succ$ 相对于良好 *BONG*$x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, \ldots, y_j, x_{j+1}, \ldots, x_n$。特别地，若 $1 \leq i \leq n-1$ 和 $\eta \in g(a_{i+1}/a_i)$，则 $L \cong \prec a_1, \ldots, a_{i-1}, \eta a_i, \eta_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n \succ$ 相对于良好 *BONG*。

(v) $O(\prec x_i, \ldots, x_j \succ) \subseteq O(L)$ 对每个 $1 \leq i \leq j \leq n$ 均成立。因此，$\tau_{x_i} \in O^-(L)$，所以对所有 $1 \leq i \leq n$，$a_i \in \theta(O^-(L))$，且对所有 $1 \leq i \leq n-1$，$G(a_{i+1}/a_i) \subseteq \theta(O^+(L))$。

Proof. (i)-(v) 的主要结论是 [B2、推论 4.4(iv)、(i) 和 (v)、引理 4.8、引理 4.9(ii) 和 (i)]。(iv) 的第二个结论可由在第一个结论中取 $j = i+1$ 得出，同时注意到 $\prec a_i, a_{i+1} \succ \cong \prec \eta a_i, \eta a_{i+1} \succ$ 对所有 $\eta \in g(a_{i+1}/a_i)$ 均成立。对于 (v) 的第二和第三个结论，我们注意到 $\tau_{x_i} \in O^-(\prec x_i \succ) \subseteq O^-(L)$, 因此 $a_i = \theta(\tau_{x_i}) \in \theta(O^-(L))$ 且 $G(a_{i+1}/a_i) = \theta(O^+(\prec x_i, \ x_{i+1} \succ)) \subseteq \theta(O^+(L))$。 □

若 L 对 $1 \le i \le n-2$ 满足 $R_i < R_{i+2}$，则称其具有性质 A。若 L 具有性质 A，则当 $1 \le i \le n-1$ 时，若以下两种情形之一成立，称其具有性质 B。

$$R_{i+1} - R_i \text{ is odd and } \le 2e+1,$$

$$R_{i+1} - R_i \text{ is even and } d(-a_{i,i+1}) \le e - (R_{i+1} - R_i)/2$$

我们有 $R_i - R_{i-1} > 2e$ （若 $i \ge 2$）以及 $R_{i+2} - R_{i+1} > 2e$ （若 $i \le n-2$）。

命题 1.6 *(i)* 若 L 具有性质 *A*，则 L 的每个 *BONG* 都是良好的。

(ii) 若 L 具有性质 *A*，但不具有性质 *B*，则 $\theta(O^+(L)) = F$

(iii) 若 L 不具有性质 *A*，则 $\theta(O^+(L)) \supseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，即 $\theta(O^+(L)) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$ 或 F。

Proof. 关于 (i)，见 [B2，推论 4.2(i)]。关于 (ii)，见 [B2，引理 4.11]。

遗憾的是，在 [B2 的§7], 开头所陈述的 (iii) 的证明在 [B2]中缺失。尽管可以用类似于 [B2 的§5], 中包含关系 $(1+\mathfrak{p}^{[(R_{i+2}-R_i)/2]})\,\dot{F}^2 \subseteq \theta(O^+(L))$ 之证明的方式来证明 (iii)，但为方便起见，我们将临时给出一个利用第4节和第6节中若干结果的简短证明。我们首先考虑情形 $n=3$。条件 A 不成立这一事实意味着 $R_1 = R_3$。由引理 4.4，存在格 $M \cong \prec \pi^{-2}a_1, a_2, a_3 \succ$ 使得 $M' = L$。由引理 6.2，这蕴含 $O^+(M) \subseteq O^+(L)$。若 $R_i(M) = S_i$，则 $S_1 =$ 赋值 $\pi^{-2}a_1 = R_1 - 2$，$S_2 = R_2$ 且 $S_3 = R_3 = R_1$。于是 $S_1 < S_3$，故 M 具有性质 A。由 [B2 的定理 1] （即下文定理 1.7），我们得到 $\theta(O^+(L)) \supseteq \theta(O^+(M)) \supseteq (1+\mathfrak{p}^{[(S_3-S_1)/2]})\,\dot{F}^2 = (1+\mathfrak{p}^1)\,\dot{F}^2 = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。

对于一般情形，若 L 不具有性质 A，则对某个 i，有 $R_i = R_{i+2}$。因此，若 $K \cong \prec a_i, a_{i+1}, a_{i+2} \succ$，那么根据情形 $n=3$ 和引理 1.5(v)，我们有 $\mathcal{O}^\times \dot{F}^2 \subseteq \theta(O^+(K)) \subseteq \theta(O^+(L))$。 □

注记。在 [B2 中，定义 7], 性质 A 是通过 Jordan 分解来给出的。根据 [B2，引理 4.3(i)], 对所有 $1 \le i \le n-2$，条件 $R_i < R_{i+2}$ 只是一个等价表述。采用原始定义的性质 A 出现在 [HSX，定理 2.1]的证明中。那里证明了一个较弱的结论，即若性质 A 不成立，则 $[F: \theta(O^+(L))] \le 2$。在 [B1] 中，通过类似论证得到了更强的结论，即 $\theta(O^+(L)) \supseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。具体而言，我们证明，若 L 不具有性质 A，则要么 L 分解出一个形如 $H \cong \pi^r A(0,0)$ 的格，此时 $\mathcal{O}^\times \dot{F}^2 = \theta(O^+(H)) \subseteq \theta(O^+(L))$；要么 $\theta(O^+(L)) = \dot{F}$。证明用到了 Hsia 和徐在 [H1]和 [X3], 中的一些结果，包括徐的最小范数分裂。（参见 [B1，第 I.1 节。4]）

现在我们陈述环 A 的主要结果，并给出 $\theta(O^+(L))$ 的公式。对于 L 具有性质 A 的情形，我们有 [B2，定理 1]:

定理 1.7 如果 L 具有性质 A，那么

$$\theta(O^+(L) = G(a_2/a_1)\cdots G(a_n/a_{n-1})(1+\mathfrak{p}^\alpha)\dot{F}^2,$$

其中 $\alpha =$ 最小值$\{[(R_{i+2} - R_i)/2] \mid 1 \le i \le n-2\}$。

1.8 注意，$(1+\mathfrak{p}^{\alpha})\,\dot{F}^{2}$ 是群 $(1+\mathfrak{p}^{[(R_{i+2}-R_{i})/2]})\,\dot{F}^{2}$ 的乘积，其中 $1\leq i\leq n-2$。根据 [B2 第 §5], 节末尾的注记，如果 $R_{i+2}-R_{i}$ 为奇数，则 $(1+\mathfrak{p}^{[(R_{i+2}-R_{i})/2]})\,\dot{F}^{2}\subseteq G(a_{i+1}/a_{i})G(a_{i+2}/a_{i+1})$，因此可以从 $\theta(O^{+}(L))$ 的公式中删除因子 $(1+\mathfrak{p}^{[(R_{i+2}-R_{i})/2]})$。所以在定理 1.7 α 中可替换为α'：$=$最小值{$(R_{i+2}-R_{i})/2 \mid R_{i+2}-R_{i}$ 为偶数}，如 [B2 第 §5] 节所述。

事实上，我们有一个更精确的结果，若 $\mathfrak{p}^{\alpha}$ 出现在某个指标 i 处，且 $R_{i+2}-R_{i}$ 为奇数，那么 $(1+\mathfrak{p}^{\alpha})\,\dot{F}^{2}=(1+\mathfrak{p}^{[(R_{i+2}-R_{i})/2]})\,\dot{F}^{2}\subseteq G(a_{i+1}/a_{i})G(a_{i+2}/a_{i+1})$，因此可以从 $\theta(O^{+}(L))$ 的公式中去掉因子 $(1+\mathfrak{p}^{\alpha})\,\dot{F}^{2}$。

若 L 不具有性质 A，那么根据命题 1.6(iii)，$\theta(O^{+}(L))$ 只能是 $F^{\times}\dot{F}^{2}$ 或 $\mathcal{O}^{\times}\dot{F}^{2}$。下一个结果，即 [B2，定理 3], ，将判定这两种可能性中的哪一种成立。

定理 1.9 当且仅当对于所有 $1\leq i\leq n-1$，都有 $\theta(O^{+}(L))\subseteq\mathcal{O}^{\times}\dot{F}^{2}$，且对于所有满足 $R_{i}=R_{i+2}$ 的 $1\leq i\leq n-2$，$\subseteq\mathcal{O}^{\times}\dot{F}^{2}$ 都成立，并且$(R_{i+1}-R_{i})/2+e$ 为偶数。

注记。根据 [B2，引理 7.2], ，条件 $G(a_{i+1}/a_{i})\subseteq\mathcal{O}^{\times}\dot{F}^{2}$ 意味着 $R_{i+1}-R_{i}=$赋值 a_{i+1}/a_{i} 为偶数。因此，如果 $\theta(O^{+}(L))\subseteq\mathcal{O}^{\times}\dot{F}^{2}$，那么 $R_{1}\equiv\cdots\equiv R_{n}$(模 2)

证明定理 1.7 和 1.9 时，我们在 [环 A2]中使用了以下关键引理；这里也需要用到它们。参见 [B2，引理 6.6 和 7.3]。

引理 1.10 如果 L 具有性质 *B*，那么对于每个满足 $Q(x)=Q(x_{1})=a_{1}$ 的 $x\in L$，存在某个满足 $\sigma(x_{1})=x$的 $\sigma\in O^{+}(L)$。

引理 1.11 如果 $R_{i}=R_{i+2}$和 $G(a_{i+1}/a_{i})\,G(a_{i+2}/a_{i+1})\subseteq\mathcal{O}^{\times}\dot{F}^{2}$，那么 $\prec x_{1}$、x_{2}、$x_{3}\succ=H\perp\mathcal{O}v$，其中 $H\cong\pi^{(R_{i}+R_{i+1})/2}A(0,0)$ 且 $Q(v)=-\pi^{R_{i}}\varepsilon_{1,3}$。此外，$M=H\perp K$，其中 $K\cong\prec a_{1}\ldots$、a_{i-1}、$-\pi^{R_{i}}\varepsilon_{i,i+2}$、$a_{i+3}$、$\ldots a_{n}\succ$均相对于良好 *BONG*$x_{1}\ldots$、$x_{i-1}$、$v$、$x_{i+3}\ldots x_{n}$。

现在我们以 BONG 的形式陈述二进二次格分类定理的主要结果。

对于 $1\leq i\leq n-1$，不变量 $\alpha_{i}(L)$ 定义为

$$\alpha_{i}(L)=\min(\{(R_{i+1}-R_{i})/2+e\}\cup\{R_{i+1}-R_{j}+d(-a_{j,j+1})\mid 1\leq j\leq i\}\\ \cup\{R_{j+1}-R_{i}+d(-a_{j,j+1})\mid i\leq j\leq n-1\}).$$

定理 1.12 设 $L\cong\prec a_{1},\ldots,a_{n}\succ$ 和 $K\cong\prec b_{1},\ldots,b_{n}\succ$ 分别相对于良好 *BONG*，且满足 $FL\cong FK$。设 $R_{i}=R(L)$、$S_{i}=R(K)$、$\alpha_{i}=\alpha_{i}(L)$ 和 $\beta_{i}=\alpha_{i}(K)$。那么，$L\cong K$ 当且仅当以下条件成立。

(i) 对于 $1\leq i\leq n$，$R_{i}=S_{i}$。*(ii)* 对于 $1\leq i\leq n-1$，$\alpha_{i}=\beta_{i}$。*(iii)* $d(a_{1,i}b_{1,i})$ 对于 $1\leq i\leq n-1$，$\geq\alpha_{i}$。*(iv)* 对每个满足 $\alpha_{i-1}+\alpha_{i}>2e$ 的 $1<i<n$，$[b_{1},\ldots,b_{i-1}]\rightarrowtail[a_{1},\ldots,a_{i}]$。

推论 1.13 若 $L\cong K$ 且 $R_{i+1}-R_{i}>2e$ 对某个 $1\leq i\leq n-1$成立，则 $[a_{1},\ldots,a_{i}]\cong[b_{1},\ldots,b_{i}]$。特别地，$a_{1,i}=b_{1,i}$。

当 $i=0$ 或 n 时，也会发生同样的情况。

Proof. 1 12 [4, 2 8], $d\ a_{1\,i}b_{1\,i} \geq$由定理的条件 (iii) 和 $\alpha_i > 2e$ $d\ a_{1\,i}b_{1\,i} = \infty$ $a_{1\,i}b_{1\,i} = 1$ $a_{1\,i} = b_{1\,i}$ $\dot{F}/\dot{F}^2$ $i = 1$ 推论 B 的条件 (ii)，我们有 („)。这意味着 („)，即 „，所以 „在 中。若，这意味着 $a_1 = b_1$，因此 $[a_1] \cong [b_1]$ 显然成立。若 $i > 1$，由于还有 $\alpha_{i-1} \geq 0$，我们得到$\alpha_{i-1} + \alpha_i > 2e$。由定理 1.12 的条件 (iv)，可得 $[b_1, \ldots, b_{i-1}] \rightarrowtail [a_1, \ldots, a_i]$；根据 [OM, 63:21],，这等价于 $[a_1, \ldots, a_i] \cong [b_1, \ldots, b_{i-1}, a_{1,i}b_{1,i-1}]$。但在 $\dot{F}/\dot{F}^2$中，我们有 $a_{1,i}b_{1,i} = 1$，因此 $a_{1,i}b_{1,i-1} = b_i$。故 $[a_1, \ldots, a_i] \cong [b_1, \ldots, b_i]$。

如果 $i = 0$，那么 $[a_1, \ldots, a_0]$ 和 $[b_1, \ldots, b_0]$ 都是平凡零空间，并且我们有$a_{1,\ 0} = b_{1,\ 0} = 1$。而如果 $i = n$，那么 $[a_1, \ldots, a_n] \cong [b_1, \ldots, b_n] \cong FL$ 和 $a_{1n} = b_{1,\ n}$ =的行列式为 FL。 □

我们还有在 [B3，定理 4.5] 中宣布、并在 [B5] 中证明的表示定理。然而，由于这些结果尚未发表，我们在此不会使用它们。在附录中，我们将说明如果假设 [B5] 中的结果，如何改进定理 7.3。

2 重新审视映射 g 和 G

在 [B2 的定义 4 和 6] 中，我们引入了映射 $g: \mathcal{A} \to Sgp(\mathcal{O}^\times/\mathcal{O}^{\times 2})$ 和$G: \dot{F}/\mathcal{O}^{\times 2} \to Sgp(\dot{F}/\dot{F}^2)$。这里，$Sgp(\mathcal{O}^\times/\mathcal{O}^{\times 2})$ 和 $Sgp(\dot{F}/\dot{F}^2)$ 分别表示 $\mathcal{O}^\times/\mathcal{O}^{\times 2}$和 $\dot{F}/\dot{F}^2$ 的所有子群的集合；我们将它们分别视为包含$\mathcal{O}^{\times 2}$ 的 $\mathcal{O}^\times$ 的子群，以及包含 $\dot{F}^2$ 的 $\dot{F}$ 的子群。

由于 $\mathcal{O}^\times \cap \dot{F}^2 = \mathcal{O}^{\times 2}$，我们有一个同构 $\mathcal{O}^\times\dot{F}^2/\dot{F}^2 \cong \mathcal{O}^\times/\mathcal{O}^{\times 2}$，它诱导出一个双射 $Sgp(\mathcal{O}^\times\dot{F}^2/\dot{F}^2) \to Sgp(\mathcal{O}^\times/\mathcal{O}^{\times 2})$，由 $H \mapsto H \cap \mathcal{O}^\times$ 给出。其逆由 $H \mapsto H\dot{F}^2$ 给出。

¯本节中，我们定义一些相关函数，$\bar{g}$ 和 G，它们有助于我们以更方便的方式表述主要结果，而且通常也更便于使用。首先注意到，我们有一个单射 $\dot{F}/\mathcal{O}^{\times 2} \to \dot{F}/\dot{F}^2 \times \mathbb{R}$，由 $a \mapsto$(a, 赋值 a) 给出。元素 (a, R) $\in \dot{F}/\dot{F}^2 \times \mathbb{R}$属于此映射的像，当且仅当 $R \in \mathbb{Z}$ 且赋值 $a \equiv R$（模 2）。我们将 g和 G的定义扩展到整个 $\dot{F}/\dot{F}^2 \times \mathbb{R}$ 上。

定义 1 我们定义

$$\bar{\mathcal{A}} = \{(a, R) \in \dot{F}/\dot{F}^2 \times \mathbb{R} \mid R + 2e \geq 0,\ R + d(-a) > 0\} \cup \{(-\Delta, -2e)\}.$$

2.1 注记。如果 $a \neq -1$，那么 $d(-a) < \infty$，即 $d(-a) \leq 2e$，因此 $R + d(-a) > 0$ 蕴含¯ $R + 2e \geq 0$。因此，$\mathcal{A}$ 定义中的条件 $R + 2e \geq 0$ 是多余的。¯所以，如果 $d(-a) < 2e$，那么 (a, R) $\in \mathcal{A}$ 当且仅当 $R + d(-a) > 0$。如果 $d(-a) = 2e$，即如果 $a = -\Delta$，那么¯(a, R) $\in \mathcal{A}$ 当且仅当 $R + d(-a) = R + 2e > 0$ 或 $R = -2e$（情形 (a, R) =(−Δ, −2e)）。¯因此 (−Δ, R) $\in \mathcal{A}$ 当且仅当 $R + 2e \geq 0$。而且，如果 $d(-a) = \infty$，即如果 $a = -1$，条件¯$R + d(-a) > 0$ 是多余的，因此 (a, R) $\in \mathcal{A}$ 当且仅当 $R + 2e > 0$。总之：

$$\bar{\mathcal{A}} = \{(a, R) \in \dot{F}/\dot{F}^2 \times \mathbb{R} \mid d(-a) < 2e,\ R + d(-a) > 0\} \cup \{(a, R) \in \dot{F}/\dot{F}^2 \times \mathbb{R} \mid d(-a) \geq 2e,\ R + 2e \geq 0\}.$$

还要注意，如果 $R+d(-a) > 0$ 且 $a \neq -1$，那么 $d(-a) \leq 2e$，因此 $R+2e \geq R+d(-a) > 0$。于是 $\{(a,\ R) \in \dot{F}/\dot{F}^2 \times \mathbb{R} \mid R+2e \geq 0,\ R+d(-a) > 0\} = \{(a,\ R) \in \dot{F}/\dot{F}^2 \times \mathbb{R} \mid R+2e > 0,\ R+d(-a) > 0\} \cup \{(-1,\ -2e)\}$，这给出了对 $\mathcal{A}$ 的另一种描述，

$$\bar{\mathcal{A}} = \{(a,R) \in \dot{F}/\dot{F}^2 \times \mathbb{R} \mid R+2e > 0,\ R+d(-a) > 0\} \cup \{(-1,-2e), (-\Delta,-2e)\}.$$

Lemma 2.2 $\bar{\mathcal{A}}$ 在嵌入 $\dot{F}/\mathcal{O}^{\times 2} \to \dot{F}/\dot{F}^2 \times \mathbb{R}$ 下的原像是 $\mathcal{A}$。

Proof. 设 $a \in \dot{F}/\mathcal{O}^{\times 2}$，其赋值为 $a = R$。它在嵌入 $\dot{F}/\mathcal{O}^{\times 2} \to \dot{F}/\dot{F}^2 \times \mathbb{R}$ 下的像为 (a,R)。若 $a \in \mathcal{A}$，则 $R+2e \geq 0$ 且 $R+d(-a) \geq 0$。此外，不等式 $R+d(-a) \geq 0$ 是严格的，除非 $a = -\Delta/4$。因此，要么 $R+2e \geq 0$ 且 $R+d(-a) > 0$，要么 $a = -\Delta/4$。在第一种情形下，$(a,R) \in \mathcal{A}$，由定义可知。在第二种情形下，$a = -\Delta$ 属于 $\dot{F}/\dot{F}^2$ 且 $R =$ 赋值 $a = -2e$，故 $(a,R) = (-\Delta,-2e) \in \bar{\mathcal{A}}$。

反之，若 $(a,R) \in \mathcal{A}$，则或者 $R+2e \geq 0$ 且 $R+d(-a) > 0$，或者 $(a,R) = (-\Delta,-2e)$。这两种情况下，我们都有 $R+2e \geq 0$ 且 $R+d(-a) \geq 0$，因此根据定义，$a \in \mathcal{A}$。 □

定义 2 我们定义 $\hat{g},\ \bar{g}\colon \dot{F}/\dot{F}^2 \times \mathbb{R} \to Sgp(\dot{F}/\dot{F}^2)$ 如下：

$$\hat{g}(a,R) = (1+\mathfrak{p}^{\alpha(a,R)})\dot{F}^2 \cap \mathrm{N}(-a),\ \ where\ \alpha(a,R) = \min\{R/2+e, R+d(-a)\},$$

$\bar{g}(a,R) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$ 若 $(a,R) = (-1,-2e)$ 且 $\bar{g}(a,R) = \hat{g}(a,R)$ 则取上述情形，否则取后一种情形。

注意，$\bar{g}(-1,-2e) = (1+\mathfrak{p})\dot{F}^2 \supseteq \hat{g}(0,R) = \mathrm{N}(1)$ 对所有 (a,R) 都成立，且当 $(a,R) \neq (-1,-2e)$ 时取等号。

引理 2.3 *(i)* 我们有 $\bar{g}(a,R) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$ 当且仅当 $(a,R) \in \bar{\mathcal{A}}$ 或 $a = -\Delta$。等价地，$\bar{g}(a,R) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$ 当且仅当 $a = -\Delta$ 或 $R+2e \geq 0$ 且 $R+d(-a) > 0$。

(ii) 若 $(a,R) \notin \mathcal{A}$，则 $\bar{g}(a,R) = \mathrm{N}(-a)$。

Proof. 令 $(a,R) \in \dot{F}/\dot{F}^2 \times \mathbb{R}$。我们采用 2 中 $\mathcal{A}$ 的第二个表达式。 1.

若 $a = -\Delta$，则 $\bar{g}(a,R) \subseteq \mathrm{N}(-a) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，因此结论成立。现在假设 $(a,R) \in \mathcal{A}$。若 $(a,R) = (-1,-2e)$，则根据定义，$\bar{g}(a,R) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$；若 $(a,R) = (-\Delta,-2e)$，则属于已处理过的情形 $a = -\Delta$。因此只需考虑 $R+2e > 2e$ 的情形，于是 $R/2+e > 0$，且 $R+d(-a) > 0$。于是 $\alpha(a,R) > 0$，这意味着 $\bar{g}(a,R) \subseteq (1+\mathfrak{p}^{\alpha(a,R)})\dot{F}^2 \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。因此，(i) 的“若”部分得证。

若 $(a,R) \notin \mathcal{A}$，则 $(a,R) \neq (-1,-2e)$，因此 $\bar{g}(a,R) = \hat{g}(a,R)$。由 2.1 可知，$(a,R) \notin \{(a,R) \in \dot{F}/\dot{F}^2 \times \mathbb{R} \mid R+2e > 0,\ R+d(-a) > 0\}$。于是，要么 $R+2e \leq 0$，故 $R/2+e \leq 0$；要么 $R+d(-a) \leq 0$。这两种情况下，$\alpha(a,R) \leq 0$，因此 $\bar{g}(a,R) = (1+\mathfrak{p}^{\alpha(a,R)})\dot{F}^2 \cap \mathrm{N}(-a) = F^\times \cap \mathrm{N}(-a) = \mathrm{N}(-a)$，从而得到 (ii)。

最后，如果 $a \neq -\Delta$ 且 $(a,\ R) \notin \mathcal{A}$，那么根据 (ii)，我们有 $\bar{g}(a,\ R) = \mathrm{N}(-a)$。但是 $-a \neq \Delta$，所以 $\mathrm{N}(-a) \not\subseteq \mathrm{N}(\Delta) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。由此得到 (i) 的“仅当”部分。□

引理 2.4 我们有

$$\hat{g}(a,R) = \begin{cases} (1+\mathfrak{p}^{R/2+e})\dot{F}^2 & if\ d(-a) > e - R/2 \\ (1+\mathfrak{p}^{R+d(-a)})\dot{F}^2 \cap \mathrm{N}(-a) & if\ d(-a) \leq e - R/2 \end{cases}.$$

若 $d(-a) \leq e - R/2$，则 $\bar{g}(a,\ R) = \hat{g}(a,\ R)$ 且 $[(1+\mathfrak{p}^{R+d(-a)})\dot{F}^2 :\ \bar{g}(a,\ R)] = 2$。

Proof. 若 $d(-a) >$ 或 $\leq e - R/2$，则 $R + d(-a) >$ 或 $\leq R/2 + e$，因此 $\alpha(a, R) = R/2 + e$ 或 $R + d(-a)$，相应地。

若 $d(-a) > e - R/2$，则得到 $\hat{}g(a, R) = (1 + \mathfrak{p}^{R/2+e})\dot{F}^2 \cap \mathrm{N}(-a)$。但我们还有 $\hat{}d(-a) + (R/2 + e) > 2e$，因此由引理 1.2(i)，$R/2 + e \subseteq \mathrm{N}(-a)$。故 $\hat{}g(a, R) = (1 + \mathfrak{p}^{R/2+e})\dot{F}^2$。

若 $d(-a) \leq e - R/2$，则 $\hat{}g(a, R) = (1 + \mathfrak{p}^{R+d(-a)})\dot{F}^2 \cap \mathrm{N}(-a)$。但 $d(-a) + (R + d(-a)) \leq 2e$，故 $\mathrm{N}(-a) \not\subseteq R + d(-a)$。因此我们有严格包含 $\hat{}g(a, R) \subset (1+\mathfrak{p}^{R+d(-a)})\dot{F}^2$。于是 $(1 + \mathfrak{p}^{R+d(-a)})\dot{F}^2 \hat{}g(a, R)$ 是一个嵌入到 $\dot{F}\mathrm{N}(-a) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 中的非平凡群。由此可得 $[(1 + \mathfrak{p}^{R+d(-a)})\dot{F}^2 : \hat{}g(a, R)] = 2$。此外，由 $d(-a) \leq e - R/2 < \infty$可得 $a \neq -1$，故 $\bar{g}(a, R) = \hat{}g(a, R)$。 □

命题 2.5 如果 $a \in \mathcal{A}$ 且 赋值 $a = R$，那么 $g(a) = \hat{}g(a, R) \cap \mathcal{O}^\times = \bar{g}(a, R) \cap \mathcal{O}^\times$

Proof. 根据 [B2，定义 6], 可得 $g(a) = \mathcal{O}^{\times 2}$ 当 $R > 2e$ 且

$$g(a) = \begin{cases} (1 + \mathfrak{p}^{R/2+e})\mathcal{O}^{\times 2} & \text{if } d(-a) > e - R/2 \\ (1 + \mathfrak{p}^{R+d(-a)})\mathcal{O}^{\times 2} \cap \mathrm{N}(-a) & \text{if } d(-a) \leq e - R/2 \end{cases}$$

若 $R \leq 2e$。但情形 $R \leq 2e$ 下的公式也适用于情形 $R > 2e$。事实上，若 $R > 2e$，则 $d(-a) \geq 0 > e - R/2$，因此公式 $g(a) = (1 + \mathfrak{p}^{R/2+e})\mathcal{O}^{\times 2}$ 适用。但 $R/2 + e > 2e$，所以 $(1 + \mathfrak{p}^{R/2+e})\mathcal{O}^{\times 2} = \mathcal{O}^{\times 2}$。于是，由引理 . 以及 $(1 + \mathfrak{p}^{\alpha})\mathcal{O}^{\times 2} = (1 + \mathfrak{p}^{\alpha})\dot{F}^2 \cap \mathcal{O}^\times$这一事实，可得 $g(a) = \hat{}g(a, R) \cap \mathcal{O}^\times$。

若 $(a, R) \neq (-1, -2e)$，则 $\hat{}g(a, R) \cap \mathcal{O}^\times = \bar{g}(a, R) \cap \mathcal{O}^\times$ 可由 $\hat{}g(a, R) = \bar{g}(a, R)$ 得出。若 $(a, R) = (-1, -2e)$，则 $\hat{}g(a, R) = \dot{F}$ 且 $\bar{g}(a, R) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，因此 $\hat{}g(a, R) \cap \mathcal{O}^\times = \bar{g}(a, R) \cap \mathcal{O}^\times = \mathcal{O}^\times$。 □

引理 2.6 *(i)* 对每个 $a \in \dot{F}/\dot{F}^2$，映射 $\bar{g}(a, \cdot)$ 都是递减的，即若 $R \leq S$，则$\bar{g}(a, R) \supseteq \bar{g}(a, S)$。

(ii) 如果 $d(-a) \leq -R$，则 $\bar{g}(a, R) = \mathrm{N}(-a)$。*(iii)* 如果 $R \leq 0$，则 $a \in \bar{g}(a, R)$。*(iv)* $\bar{g}(a, R) \subseteq (1 + \mathfrak{p}^R)\dot{F}^2$。特别地，如果 $R > 2e$，则 $\bar{g}(a, R) = \dot{F}^2$。

Proof. (i) 如果 $R \leq S$，则 $\alpha(a, R) \leq \alpha(a, S)$，因此 $(1+\mathfrak{p}^{\alpha(a,R)})\dot{F}^2 \cap \mathrm{N}(-a) \supseteq (1+\mathfrak{p}^{\alpha(a,S)})\dot{F}^2 \cap \mathrm{N}(-a)$。即 $\hat{}g(a, R) \supseteq \hat{}g(a, S)$。因此 $\hat{}g(a, \cdot)$ 是递减的。

由于 $\bar{g}$ 和 $\hat{}g$ 除了 $(-1, -2e)$ 外处处重合，这意味着对于 $a \neq -1$，$\bar{g}(a, \cdot) = \hat{}g(a, \cdot)$ 是递减的；对于 $a = -1$，我们只需证明：当 $R < -2e$ 时，$\bar{g}(-1, R) \supseteq \bar{g}(-1, -2e)$；当 $S > -2e$ 时，$\bar{g}(-1, -2e) \supseteq \bar{g}(-1, S)$。我们有 $\bar{g}(-1, -2e) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。如果 $R < -2e$，则 $(-1, R) \notin \mathcal{A}$，因此根据引理 2.3(ii)，$\bar{g}(-1, R) = \mathrm{N}(1) = \dot{F} \supset \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。如果 $S > -2e$，则 $(-1, S) \in \mathcal{A}$，因此根据引理 2.3(i)，$\bar{g}(-1, S) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。证明完毕。

(ii) 若 $d(-a) \leq -R$，则 $\alpha\alpha(a, R) \leq R + d(-a) \leq 0$，因此 $\hat{}g(a, R) = (1 + \mathfrak{p}^{\alpha(a,R)})\dot{F}^2 \cap \mathrm{N}(-a) = F \cap \mathrm{N}(-a) = \mathrm{N}(-a)$。由于 $d(-a) \leq -R < \infty$，我们有 $a \neq -1$，所以 $\bar{g}(a, R) = \hat{}g(a, R)$。

若 $R > 2e$，则 $R/2 + e > 2e$ 且 $R + d(-a) > 2e$，因此 $\alpha(a, R) > 2e$。由此可得$\bar{g}(a, R) = \hat{g}(a, R) \subseteq (1 + \mathfrak{p}^{\alpha}) \dot{F}^2 = \dot{F}^2$。因此 $\bar{g}(a, R) = \dot{F}^2$。

(iii) 我们有 $-1 \in \mathcal{O}^{\times} \dot{F}^2 = \bar{g}(-1, -2e)$。假设 $(a, R) \neq (-1, -2e)$。由于$R \leq 0$，我们有 $d(-1) \geq e \geq R/2 + e \geq \alpha(a, R)$，且 $d(-a) \geq R + d(-a) \geq \alpha(a, R)$，因此根据支配原理，$d(a) \geq \alpha(a, R)$，即 $a \in (1 + \mathfrak{p}^{\alpha(a,R)}) \dot{F}^2$。我们还有 $(a, -a)_{\mathfrak{p}} = 1$，所以 $a \in \mathrm{N}(-a)$。于是 $a \in (1 + \mathfrak{p}^{\alpha(a,R)}) \dot{F}^2 \cap \mathrm{N}(-a) = \hat{g}(a, R) = \bar{g}(a, R)$。

(iv) 若 $R > 2e$，则 $(1+\mathfrak{p}^R) \dot{F}^2 = \dot{F}^2$，但同时 $R/2+e > 2e$ and $R+d(-a) \geq R > 2e$，所以 $\alpha(a, R) > 2e$，这意味着 $\bar{g}(a, R) \subseteq (1 + \mathfrak{p}^{\alpha(a,R)}) \dot{F}^2 = \dot{F}^2$，即 $\bar{g}(a, R) = \dot{F}^2$。

若 $R \leq 2e$，则 $R/2 + e \geq R$ 和 $R + d(-a) \geq R$，因此 $\alpha(a, R) \geq R$。由此可得$\bar{g}(a, R) \subseteq (1 + \mathfrak{p}^{\alpha(a,R)}) \dot{F}^2 \subseteq (1 + \mathfrak{p}^R) \dot{F}^2$。 □

引理 2.7 若 $a, b \in \dot{F}/\dot{F}^2$ 和 $x \in \mathbb{R}$，则以下条件等价。*(i)* 最小$\{x, d(ab)\}$ + 最大$\{d(a)\ d(b)\} > 2x$。*(ii)* $d(a) + d(b) > 2x$。

Proof. 不妨设，比如说，$d(a) \leq d(b)$。那么 (i) 可写为 $\min\{x, d(ab)\} + d(b) > 2x$，这等价于 $x + d(b) > 2x$，即 $d(b) > x$，且 $d(ab) + d(b) > 2x$。

首先，假设 $d(b) \leq x$。那么 (i) 不成立，并且 $d(a) + d(b) \leq 2d(b) \leq 2x$，因此 (ii) 也不成立。故 (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) 成立。

现在假设 $d(b) > x$。那么 (i) 等价于 $d(ab) + d(b) > 2x$，也就是等价于$d(ab) > 2x - d(b)$；而 (ii) 等价于 $d(a) > 2x - d(b)$。但是 $2d(b) > 2x$，所以$d(b) > 2x - d(b)$。由此可得 $d(ab) > 2x - d(b) \Longleftrightarrow d(a) > 2x - d(b)$，证明完毕。（由支配原理可知，$d(ab) \geq \min\{d(a)\ d(b)\}$ and$d(a) \geq \min\{d(ab)\ d(b)\}$。） □

引理 *2.8* 若 $a, c \in \dot{F}/\dot{F}^2$ 和 $R \in \mathbb{R}$，则 $\hat{g}(a, R) \subseteq N(c)$ 当且仅当 $R + d(-ac) + d(c) > 2e$，并且 $\bar{g}(a, R) \subseteq N(c)$ 当且仅当 $R + d(-ac) + d(c) > 2e$，或者 $(a, R) = (-1, -2e)$ 且 $c = \Delta$。

Proof. 由引理 1.2(ii)，可得 $\hat{g}(a, R) = (1+\mathfrak{p}^{\alpha(a,R)}) \dot{F}^2 \cap \mathrm{N}(-a) \subseteq \mathrm{N}(c)$ 当且仅当 $\alpha(a, R) + \max\{d(-ac)\ d(c)\} > 2e$。由于 $\alpha(a, R) = \min\{R/2 + e, R + d(-a)\} = R + \min\{e - R/2, d(-a)\}$，这等价地可写为 $\min\{e - R/2, d(-a)\} + \max\{d(-ac)\ d(c)\} > 2e - R = 2(e - R/2)$。由于在 $\dot{F}/\dot{F}^2$ 中有 $(-ac) \cdot c = -a$，由引理 2.7（取 a, b, x 分别为 $-ac, c, e - R/2$），这等价于 $d(-ac) + d(c) > 2(e - R/2) = 2e - R$，也就是说，等价于 $R + d(-ac) + d(c) > 2e$。因此，第一个结论成立。

若 $R + d(-ac) + d(c) > 2e$，则 $\bar{g}(a, R) \subseteq \hat{g}(a, R) \subseteq \mathrm{N}(c)$。若 $(a, R) \neq (-1, -2e)$，则 $\bar{g}(a, R) = \hat{g}(a, R)$，所以反向命题也成立。若 $(a, R) = (-1, -2e)$，则 $\bar{g}(a, R) = \mathcal{O}^{\times} \dot{F}^2 \subseteq \mathrm{N}(c)$ 当且仅当 $c = 1$ 或 Δ。若 $c = 1$，则 $R + d(-ac) + d(c) = \infty > 2e$；而若$c = \Delta$，则 $R + d(-ac) + d(c) = -2e + d(\Delta) + d(\Delta) = 2e$。因此，唯一的例外是 $(a, R) = (-1, -2e)$ 且 $c = \Delta$。 □

引理 2.9 如果 a、$b \in \dot{F}/\dot{F}^2$ 和 $R \in \mathbb{R}$，那么

$$\hat{g}(a, R)\hat{g}(b, R) = (1 + \mathfrak{p}^{R+d(ab)})\dot{F}^2 \hat{g}(a, R) = (1 + \mathfrak{p}^{R+d(ab)})\dot{F}^2 \hat{g}(b, R).$$

除非 $R = -2e$ 且 $\{a, b\} = \{-1, -\Delta\}$，对 $\bar{g}$同样成立。

Proof. (i) 我们有两种情形：

1. $d(-a)\ d(-b) > e - R/2$。由命题 2.5，$\hat{}g(a,R) = \hat{}g(b,R) = (1+\mathfrak{p}^{R/2+e})\dot{F}^2$。我们还有 $d(ab) \geq \min\{d(-a)\ d(-b)\} > e - R/2$，因此 $R + d(ab) > R/2 + e$，从而 $(1+\mathfrak{p}^{R+d(ab)})\dot{F}^2 \subseteq (1+\mathfrak{p}^{R/2+e})\dot{F}^2$。因此，我们要证明的关系的所有边都等于 $(1+\mathfrak{p}^{R/2+e})\dot{F}^2$。

2. $d(-a)$ 或 $d(-b) \leq e - R/2$。我们可以假设，比如说，$d(-b) \leq d(-a)$。于是$d(-b) \leq e - R/2$。然后，由引理 2.4，$\hat{}g(b,R) \subset (1+\mathfrak{p}^{R+d(-b)})\dot{F}^2$ 且 $[(1+\mathfrak{p}^{R+d(-b)})\dot{F}^2 : \hat{}g(b,R)] = 2$，因此在 $\hat{}g(b,R)$ 与 $(1+\mathfrak{p}^{R+d(-b)})\dot{F}^2$ 之间不存在中间子群。于是，对于 $(1+\mathfrak{p}^{R+d(-b)})\dot{F}^2$ 的每一个子群 H，我们有 $\hat{}g(b,R) \subseteq H\hat{}g(b,R) \subseteq (1+\mathfrak{p}^{R+d(-b)})\dot{F}^2$，这意味着 $H\hat{}g(b,R) = \hat{}g(b,R)$ 或 $(1+\mathfrak{p}^{R+d(-b)})\dot{F}^2$。我们有 $H\hat{}g(b,R) = \hat{}g(b,R)$ 当且仅当 $H \subseteq \hat{}g(b,R) = (1+\mathfrak{p}^{R+d(-b)})\dot{F}^2 \cap \mathrm{N}(-b)$。但 $H \subseteq (1+\mathfrak{p}^{R+d(-b)})\dot{F}^2$，因此这等价于 $H \subseteq \mathrm{N}(-b)$。总之，若 $H \subseteq \mathrm{N}(-b)$，则 $H\hat{}g(b,R) = \hat{}g(b,R)$，否则 $= (1+\mathfrak{p}^{R+d(-b)})\dot{F}^2$。

我们将上述观察应用于 $H = \hat{}g(a,R)$ 或 $(1+\mathfrak{p}^{R+d(ab)})\dot{F}^2$。首先我们验证这些是 $(1+\mathfrak{p}^{R+d(-b)})\dot{F}^2$ 的子群。将 R 加到不等式$d(-b) \leq e - R/2, d(-a)$ 上，我们得到 $R + d(-b) \leq \min\{R/2 + e, R + d(-a)\} = \alpha(a,R)$，因此 $\hat{}g(a,R) \subseteq (1+\mathfrak{p}^{\alpha(a,R)})\dot{F}^2 \subseteq (1+\mathfrak{p}^{R+d(-b)})\dot{F}^2$。我们还有 $d(ab) \geq \min\{d(-a)\ d(-b)\} = d(-b)$，因此 $R + d(ab) \geq R + d(-b)$，从而 $(1+\mathfrak{p}^{R+d(ab)})\dot{F}^2 \subseteq (1+\mathfrak{p}^{R+d(-b)})\dot{F}^2$。然后，由引理 2.8 和 1.2(i)，$\hat{}g(a,R) \subseteq \mathrm{N}(-b)$ 与 $(1+\mathfrak{p}^{R+d(ab)})\dot{F}^2 \subseteq \mathrm{N}(-b)$ 均等价于 $R + d(ab) + d(-b) > 2e$。由此可得

$$\hat{g}(a,R)\hat{g}(b,R) = (1+\mathfrak{p}^{R+d(ab)})\dot{F}^2\hat{g}(b,R)$$
$$= \begin{cases} (1+\mathfrak{p}^{R+d(-b)})\dot{F}^2 \cap \mathrm{N}(-b) & \text{if } R + d(ab) + d(-b) > 2e \\ (1+\mathfrak{p}^{R+d(-b)})\dot{F}^2 & \text{if } R + d(ab) + d(-b) \leq 2e \end{cases}.$$

若 $d(-a) = d(-b)$，则特别地，$d(-b) \geq d(-a)$，因此通过交换 a 与 b 的角色，我们得到 $\hat{}g(a,R)\hat{}g(b,R) = (1+\mathfrak{p}^{R+d(ab)})\dot{F}^2\bar{g}(a,R)$，从而得证。

若 $d(-a) > d(-b)$，则由支配原理，$d(ab) = d(-b) \leq e - R/2$。因此 $R + d(ab) + d(-b) = R + 2d(-b) \leq 2e$，故 $\hat{}g(a,R)\hat{}g(b,R) = (1+\mathfrak{p}^{R+d(-b)})\dot{F}^2 = (1+\mathfrak{p}^{R+d(ab)})\dot{F}^2$。又因 $\hat{}g(a,R) \subseteq (1+\mathfrak{p}^{R+d(-b)})\dot{F}^2 = (1+\mathfrak{p}^{R+d(ab)})\dot{F}^2$，我们亦有 $(1+\mathfrak{p}^{R+d(ab)})\dot{F}^2\hat{}g(a,R) = (1+\mathfrak{p}^{R+d(ab)})\dot{F}^2$，从而得证。

若 $(R,a),(R,b) \neq (-1,-2e)$，则 $\bar{g}(a,R) = \hat{}g(a,R)$，且 $\bar{g}(b,R) = \hat{}g(b,R)$，所以将 $\hat{}g$ 替换为 $\bar{g}$ 不会改变我们的陈述。

现在假设 $a \neq -1$。于是 $ab \neq 1$，故 $d(ab) \leq 2e = -R$，进而 $R + d(ab) \leq 0$。由此可得 $(1+\mathfrak{p}^{R+d(ab)})\dot{F}^2 = \dot{F}$，因此 $(1+\mathfrak{p}^{R+d(ab)})\dot{F}^2\bar{g}(a,R) = (1+\mathfrak{p}^{R+d(ab)})\dot{F}^2\bar{g}(b,R) = \dot{F}$。另一方面，$a \neq -1$，故 $d(-a) \leq 2e = -R$，进而 $R + d(-a) \leq 2e$。根据引理 2.6(ii)，$\bar{g}(a,R) = \mathrm{N}(-a)$。若$a \neq -\Delta$，则 $\mathrm{N}(-a) \not\subseteq \mathcal{O}^\times\dot{F}^2$，因此 $\bar{g}(a,R)\bar{g}(b,R) = \mathrm{N}(-a)\mathcal{O}^\times\dot{F}^2 = \dot{F}$，证毕。

~~现在假设 $a \neq -1$，例如，$a \neq -\Delta$。则 $\bar{g}(a,R) = \hat{}g(a,R)$。那么 $(1+\mathfrak{p}^{R+d(ab)})\dot{F}^2 = (1+\mathfrak{p}^{\infty})\dot{F}^2 = \dot{F}^2$，因此我们要证明的关系两边都等于 $\mathcal{O}^\times\dot{F}^2$。~~

同样，若 $(a,R) = (-1,-2e)$，则 $\bar{g}(a,R)\bar{g}(b,R) = (1+\mathfrak{p}^{R+d(ab)})\dot{F}^2\bar{g}(a,R) = (1+\mathfrak{p}^{R+d(ab)})\dot{F}^2\bar{g}(b,R)$，除非 $b = -\Delta$。证明至此结束。 □

推论 2.10 若 $a, b \in \dot{F}/\dot{F}^2$ 且 $R \geq S$，则

$$\hat{g}(a,R)\hat{g}(b,S) = (1+\mathfrak{p}^{R+d(ab)})\dot{F}^2\hat{g}(b,S).$$

对 $\bar{g}$ 同样成立，除非 $R=-2e$ 且 $(a,b)=(-1,-\Delta)$ 或 $R=S=-2e$ 且 $(a,b)=(-\Delta,-1)$。

Proof. 由引理 2.6(i)，$\hat{}g(b,R) \subseteq \hat{}g(b,S)$，故 $\hat{}g(b,R) = \hat{}g(b,R)\hat{}g(b,S)$。然后，将引理 2.9 中的关系 $\hat{}g(a,R)\hat{}g(b,R) = (1+\mathfrak{p}^{R+d(ab)})\dot{F}^{2\hat{}}g(b,R)$ 乘以 $\hat{}g(b,S)$，我们得到 $\hat{}g(a,R)\hat{}g(b,S) = (1+\mathfrak{p}^{R+d(ab)})\dot{F}^{2\hat{}}g(b,S)$。

该证明对 $\bar{g}$ 同样成立，例外情形是当 $R=-2e$ 且 $\{a,b\}=\{-1,-\Delta\}$ 时，此时 $\hat{}g(a,R)\hat{}g(b,R) = (1+\mathfrak{p}^{R+d(ab)})\dot{F}^{2\hat{}}g(b,R)$ 不再成立。然而，若 $(a,b)=(-\Delta,-1)$ 且 $S<R=-2e$，则 $R+d(ab) = -2e+d(\Delta) = 0$，故 $(1+\mathfrak{p}^{R+d(ab)})\dot{F}^2 = \dot{F}$。并且，由于 $S<-2e$，我们有 $(b,S) \notin \mathcal{A}$，因此由引理 2.6(ii)，$\bar{g}(b,S) = \mathrm{N}(-b) = \mathrm{N}(1) = \dot{F}$。由此可得 $\hat{}g(a,R)\hat{}g(b,R) = (1+\mathfrak{p}^{R+d(ab)})\dot{F}^{2\hat{}}g(b,S) = \dot{F}$。因此，对于 $(a,b)=(-\Delta,-1)$，我们仅有一个例外，即当 $R=S=-2e$ 时。 □

定义3 我们定义 $G:\ \dot{F}/\dot{F}^2 \times \mathbb{R} \to Sgp(\dot{F}/\dot{F}^2)$ 为

$$\bar{G}(a,R) = \langle a\rangle \bar{g}(a,f(R)),\ where\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \min\{R/2-e, R-2e\}.$$

2.11 注意 f 是严格递增且连续的，且 $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$，因此 f 是双射。我们有 $x/2-e \geq$ 或 $\leq x-2e$ 当且仅当 $x \leq 2e$。因此 $f(x) = x/2-e$ 对于 $x \leq 2e$，且 $f(x) = x-2e$ 对于 $x \geq 2e$。

对于反函数，注意 $f(2e)=0$。假设 $f(x)=y$。由于 f 是严格递增的，若 $y \leq 0$，则 $x \leq 2e$，从而 $y = f(x) = x/2-e$，因此 $x = 2y+2e$。而若 $y \geq 0$，则 $x \geq 2e$，从而 $y = f(x) = x-2e$，因此 $x = y+2e$。故 $f^{-1}(y) = 2y+2e$ 对于 $y \leq 0$，且 $f^{-1}(y) = y+2e$ 对于 $y \geq 0$。简言之，$f^{-1}(y) = \min\{2y+2e, y+2e\}$

另请注意，$f(-2e) = -2e$，因此 $f(x) = -2e$ 当且仅当 $x = -2e$。

引理 2.12 *(i)* 对每个 $a \in \dot{F}/\dot{F}^2$，映射 $\bar{G}(a,\cdot)$ 都是递减的。

(ii) 若 $R \leq 2e$，则在关于 $G(a,R)$ 的公式中，可以省略因子 $\langle a\rangle$。也就是说，我们有

$$\bar{G}(a,R) = \begin{cases} \bar{g}(a,R/2-e) & if\ R \leq 2e \\ \langle a\rangle \bar{g}(a,R-2e) & if\ R > 2e \end{cases}.$$

(iii) 我们有 $\bar{G}(-1,-2e) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，并且在关于 $_G(a,R)$ 的公式中，对于 $(a,R) \neq (-1,-2e)$，我们可以将 $\bar{g}$ 替换为带帽的 g。

(iv) $\bar{g}(a,R) \subseteq \bar{G}(a,R) \subseteq \mathrm{N}(-a)$。

Proof. (i) 根据引理 2.6(i)，映射 $\bar{g}(a,\cdot)$ 是递减的，因此 $\langle a\rangle\bar{g}(a,\cdot)$ 也是递减的。由于 $_G(a,\cdot)$ 是递减映射 $\langle a\rangle\bar{g}(a,\cdot)$ 与递增映射 f 的复合，因此它是递减的。

(ii) 由 2.11，我们有 $G(a,R) = \langle a\rangle\bar{g}(a,f(R)) = \langle a\rangle\bar{g}(a,R/2-e)$，若 $R \leq 2e$，以及 $= \langle a\rangle\bar{g}(a,R-2e)$，若 $R > 2e$。但若 $R \leq 2e$，则 $R/2-e \leq 0$，因此由引理 2.6(iii)，$a \in \bar{g}(a, R/2-e)$。故在此情形下 $\langle a\rangle\bar{g}(a,R/2-e) = \bar{g}(a,R/2-e)$。

(iii) 由定义， $\bar{g}(a,f(R)) = \hat{g}(a,f(R))$ 对 $(a,f(R)) \neq (-1,-2e)$ 成立。但由 2.11，$f(R) = -2e$ 当且仅当 $R = -2e$，故 $(a,f(R)) = (-1,-2e)$ 当且仅当 $(a,R) = (-1,-2e)$。因此 $\bar{g}(a,f(R)) = \hat{g}(a,f(R))$ 对 $(a,R) \neq (-1,-2e)$ 成立。

在例外情形下，由 (ii) 可得 $\bar{G}(-1, -2e) = \bar{g}(-1, -2e) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$.

(iv) 对于 $\bar{g}(a,R) \subseteq G(a,R)$，只需证明 $\bar{g}(a,R) \subseteq \bar{g}(a,f(R))$。若 $R \geq -2e$，则 $R \geq R/2 - e$。又由于 $R > R - 2e$，我们有 $R \geq f(R)$，因此由引理 2.6(i)，$\bar{g}(a,R) \subseteq \bar{g}(a,f(R))$。现在假设 $R < -2e$。那么 $f(R) < f(-2e) = -2e$。由此可得 (a,R)、$(a,f(R)) \notin \mathcal{A}$，因此由引理 2.3(ii)，$\bar{g}(a,R) = \bar{g}(a,f(R)) = \mathrm{N}(-a)$。

根据 $\bar{g}$ 的定义，我们有 $\bar{g}(a,f(R)) \subseteq \mathrm{N}(-a)$。又因为 $(a,-a)_\mathfrak{p} = 1$，所以 $a \in \mathrm{N}(-a)$。因此 $G(a,R) = \langle a \rangle \bar{g}(a,f(R)) \subseteq \mathrm{N}(-a)$。 □

推论 2.13 我们有 $\bar{G}(-1,-2e) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，并且如果 $(a,R) \neq (-1,-2e)$，那么：*(i)* 若 $R \leq 2e$，则 $\bar{G}(a,R) = (1+\mathfrak{p}^{\min\{R/4+e/2, R/2+d(-a)-e\}})\dot{F}^2 \cap \mathrm{N}(-a)$。或者，

$$\bar{G}(a,R) = \begin{cases} (1+\mathfrak{p}^{R/4+e/2})\dot{F}^2 & \text{if } d(-a) > 3e/2 - R/4 \\ (1+\mathfrak{p}^{R/2+d(-a)-e})\dot{F}^2 \cap \mathrm{N}(-a) & \text{if } d(-a) \leq 3e/2 - R/4 \end{cases}$$

(ii) 若 $R > 2e$，则 $\bar{G}(a,R) = \langle a \rangle (1+\mathfrak{p}^{\min\{R/2, R+d(-a)-2e\}})\dot{F}^2 \cap \mathrm{N}(-a)$。或者 y,

$$\bar{G}(a,R) = \begin{cases} \langle a \rangle (1+\mathfrak{p}^{R/2})\dot{F}^2 & \text{if } d(-a) > 2e - R/2 \\ \langle a \rangle (1+\mathfrak{p}^{R+d(-a)-2e})\dot{F}^2 \cap \mathrm{N}(-a) & \text{if } d(-a) \leq 2e - R/2 \end{cases}$$

(iii) 若 $d(-a) \leq e - R/2$ 或 $(a,R) \notin \mathcal{A}$（例如当 $R < -2e$ 时），则 $G(a,R) = \mathrm{N}(-a)$。当 赋值 a 为奇数且 $R \leq 2e+2$ 时，也同样成立。

若 $d(-a) > e - R/2$ 且 $(a,R) \neq (-1,-2e)$，则 $(1+\mathfrak{p}^{R/2+e})\dot{F}^2 \subseteq \bar{G}(a,R)$.

(iv) $\bar{G}(a,R) \subseteq \langle a \rangle (1+\mathfrak{p}^{R-2e})\dot{F}^2$。特别地，若 $R > 4e$，则 $\bar{G}(a,R) = \langle a \rangle \dot{F}^2$。

Proof. 由引理 2.12(iii)，$\bar{G}(-1,-2e) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，且若 $(a,R) \neq (-1,-2e)$，则 $G(a,R) = \langle a \rangle \bar{g}(a,f(R)) = \langle a \rangle \hat{g}(a,f(R))$；若 $R \leq 2e$，则可省略因子 $\langle a \rangle$。根据定义，$\hat{g}(a,f(R)) = (1+\mathfrak{p}^{\alpha(a,f(R))})\dot{F}^2 \cap \mathrm{N}(-a)$，其中 $\alpha(a,f(R)) = \min\{f(R)/2 + e,\ f(R) + d(-a)\}$，并且由引理 2.4，

$$\hat{g}(a,f(R)) = \begin{cases} (1+\mathfrak{p}^{f(R)/2+e})\dot{F}^2 & \text{if } d(-a) > e - f(R)/2 \\ (1+\mathfrak{p}^{f(R)+d(-a)})\dot{F}^2 \cap \mathrm{N}(-a) & \text{if } d(-a) \leq e - f(R)/2 \end{cases}.$$

若 $R \leq 2e$，则 $f(R) = R/2 - e$，所以 $f(R)/2 + e = R/4 + e/2$，$f(R) + d(-a) = R/2 + d(-a) - e$ 且 $e - f(R)/2 = 3e/2 - R/4$，因此得到 (i)。若 $R \geq 2e$，则 $f(R) = R - 2e$，所以 $f(R)/2 + e = R/2$，$f(R) + d(-a) = R + d(-a) - 2e$ 且 $e - f(R)/2 = 2e - R/2$，因此得到 (ii)。

(iii) 若 $d(-a) \leq e - R/2$，则 $0 \leq e - R/2$，所以 $R \leq 2e$，且 $d(-a) \leq -(R/2 - e)$，那么，根据引理 2.12(ii) 和 2.6(ii)，$G(a,R) = \bar{g}(a, R/2 - e) = \mathrm{N}(-a)$。若 $(a,R) \notin \mathcal{A}$，则根据引理 2.3(ii)，$\bar{g}(a,R) = \mathrm{N}(-a)$；由引理 2.12(iv)，这意味着 $\bar{g}(a,R) = G(a,R) = \mathrm{N}(-a)$。若 $\mathrm{ord}\, a$ 为奇数且 $R = 2e+2$，则 $d(-a) = 0$，所以 $\min\{R - 2e, R/2 + d(-a) - e\} = 1$。于是，根据(i)，我们有 $\bar{G}(a, 2e+2) = \langle a \rangle (1+\mathfrak{p}^1)\dot{F}^2 \cap \mathrm{N}(-a) = \langle a \rangle \mathcal{O}^\times \dot{F}^2 \cap \mathrm{N}(-a) =$

N$(-a)$。（由于 ord a 为奇数，我们有 $\langle a\rangle\mathcal{O}^\times\dot{F}^2=\dot{F}$。）若 $R\le 2e+2$，则根据引理 2.12 (i) 和 (iv)，我们有 N$(a,\ R)=G(a,\ 2e+2)\subseteq G(a,\ R)\subseteq$N$(a,\ R)$

若 $d(-a)>e-R/2$ 且 $(a,R)\neq(-1,-2e)$，则由引理 2.4 与引理 2.12(iv)，我们有 $(1+\mathfrak{p}^{R/2+e})\dot{F}^2=\hat{g}(a,R)=\bar{g}(a,R)\subseteq\bar{G}(a,R)$。

(iv) 若 $R\le 2e$，则 $(1+\mathfrak{p}^{R-2e})\quad\dot{F}^2=$

F 因此该命题是平凡的。又若 $R>2e$，由引理 2.12(ii)，$G(a,R)=\langle a\rangle\bar{g}(a,R-2e)$。但由引理 2.6(iv)，$\bar{g}(a,R-2e)\subseteq(1+\mathfrak{p}^{R-2e})\dot{F}^2$ 且若 $R>4e$，即若 $R-2e>2e$，则 $\bar{G}(a,R-2e)=\dot{F}^2$。由此得结论。□

命题2.14 若 $a\in\dot{F}/\mathcal{O}^{\times 2}$ 且赋值 $a=R$ 则 $G(a)=\bar{G}(a,R)$。

Proof. 注意，$(a,R)=(-1,-2e)$ 在 $\dot{F}/\dot{F}^2\times\mathbb{R}$ 中当且仅当 $a\in-\dot{F}^2$ 且赋值 $a=R=-2e$，这等价于 $a=-\frac{1}{4}$ 在 $\dot{F}/\mathcal{O}^{\times 2}$ 中。因此，例外 $a=-\frac{1}{4}$（见 [B2，定义 4]）对应于推论 2.13 的例外 $(a,R)=(-1,-2e)$。在此情形下，我们有$G(a)=\bar{G}(a,R)=\mathcal{O}^\times\dot{F}^2$。

在所有其他情形中，我们看到来自 [B2、定义 4] 的公式与推论 2.13 中的公式一致。唯一不显然的情形是当 $d(-a)>3e/2-R/4$ 处于情形 (III) 时。这里我们必须证明 $(1+\mathfrak{p}^{R/4+e/2})\dot{F}^2=(1+\mathfrak{p}^{e-[e/2-R/4]})\dot{F}^2$。这由 $(1+\mathfrak{p}^x)\dot{F}^2=(1+\mathfrak{p}^{\lceil x\rceil})\dot{F}^2$ 对 $x=R/4+e/2$ 成立而得出。我们注意到 $\lceil x\rceil=-[-x]$。因此$\lceil R/4+e/2\rceil=-[-e/2-R/4]=-(-e+[e/2-R/4])$ $=e-[e/2-R/4]$。至此证明完毕。□

推论 *2.15* 若 $R\in\mathbb{R}$ 且 $a,c\in\dot{F}/\dot{F}^2$，则 $\bar{G}(a,R)\subseteq$N(c) 当且仅当 $f(R)+d(-ac)+d(c)>2e$ 且 $(a,c)_\mathfrak{p}=1$ 或 $(a,R)=(-1,-2e)$ 且 $c=\Delta$。若 $R\le 2e$，则条件 $(a,c)_\mathfrak{p}=1$ 是多余的。明确地说：

若 $R\le 2e$，则 $G(a,R)\subseteq\mathrm{N}(c)$ 当且仅当 $R/2+d(-ac)+d(c)>3e$ 或 $(a,R)=(-1,-2e)$且 $c=\Delta$。

若 $R>2e$，则 $G(a,R)\subseteq\mathrm{N}(c)$ 当且仅当 $R+d(-ac)+d(c)>4e$ 且 $(a,c)_\mathfrak{p}=1$。

Proof. 我们有 $G(a,R)=\langle a\rangle\bar{g}(a,f(R))\subseteq$N$(c)$，当且仅当 $\bar{g}(a,f(R))\subseteq$N(c) 且 $a\in$N(c)，也就是说 $(a,c)_\mathfrak{p}=1$。由引理 2.8，第一个条件等价于 $f(R)+d(-ac)+d(c)>2e$或 $(a,f(R))=(-1,-2e)$ 且 $c=\Delta$。但是 $(a,f(R))=(-1,-2e)$ 等价于 $(a,R)=(-1,-2e)$。（由 2.11，$f(R)=-2e$ 当且仅当 $R=-2e$。）并且，根据引理 2.12(ii)，若 $R\le 2e$，则在 $G(a,R)$ 的公式中可以去掉因子 $\langle a\rangle$，所以条件 $(a,c)_\mathfrak{p}=1$是多余的。证明完毕。

若 $R\le 2e$，其中包括例外情形，且条件 $(a,c)_\mathfrak{p}=1$ 是多余的，则有 $f(R)=R/2-e$，因此 $f(R)+d(-ac)+d(c)>2e$可写作$R/2+d(-ac)+d(c)>3e$。

若 $R>2e$，则 $f(R)=R-2e$，因此 $f(R)+d(-ac)+d(c)>2e$可写为 $R+d(-ac)+d(c)>4e$。□

引理 2.16 设 $a,b\in \dot{F}/\dot{F}^2$，并设 $R,S\in\mathbb{R}$ 且 $R\geq S$。假设我们没有$R=-2e$和 $(a,b)=(-1,-\Delta)$，也没有 $R=S=-2e$ 和 $(a,b)=(-\Delta,-1)$。那么

$$\bar{G}(a,R)\bar{G}(b,S)=\langle ab\rangle(1+\mathfrak{p}^{f(R)+d(ab)})\dot{F}^2\bar{G}(b,S).$$

此外，若 $R\leq 2e$，则因子 $\langle ab\rangle$ 是多余的。具体而言：

$$\bar{G}(a,R)\bar{G}(S,R)=\begin{cases}(1+\mathfrak{p}^{R/2+d(ab)-e})\dot{F}^2\bar{G}(b,S) & if\ R\leq 2e\\ \langle ab\rangle(1+\mathfrak{p}^{R+d(ab)-2e})\dot{F}^2\bar{G}(b,S) & if\ R>2e\end{cases}.$$

此外，因子 $\langle ab\rangle$也可以用 $\langle a\rangle$替换。

Proof. 我们有 $G(a,R)=\langle a\rangle\bar{g}(a,f(R))$ 以及 $G(b,S)=\langle b\rangle\bar{g}(b,f(S))$，因此

$$\bar{G}(a,R)\bar{G}(b,S)=\langle a,b\rangle\bar{g}(a,f(R))\bar{g}(b,f(S)).$$

此外，由引理 2.12 (ii)，若 $R\leq 2e$，从而 $S\leq R\leq 2e$，则 $\langle a\rangle$ 与 $\langle b\rangle$ 因子可以去掉，$\langle a,b\rangle$ 也同样可以去掉。

对于乘积 $\bar{g}(a,f(R))\bar{g}(b,f(S))$，我们使用推论 2.10。由 2.11，$f$严格递增，且 $f(-2e)=-2e$，因此该假设蕴含 $f(R)\geq f(S)$，并且我们没有 $f(R)=-2e$以及 $(a,b)=(-1,-\Delta)$，或者 $f(R)=f(S)=-2e$以及 $(a,b)=(-\Delta,-1)$。因此，推论 2.10 的假设对 $(a,f(R))$与 $(b,f(S))$成立。此外，例外情形并不出现，故一般公式 $\bar{g}(a,f(R))\bar{g}(b,f(S))=(1+\mathfrak{p}^{f(R)+d(ab)})\dot{F}^2\bar{g}(b,f(S))$成立。由于 $\langle a、b\rangle=\langle a\rangle\langle b\rangle=\langle ab\rangle\langle b\rangle$ 以及 $\bar{G}(b,S)=\langle b\rangle\bar{g}(b,f(S))$，我们有 $\langle a、b\rangle\bar{g}(b,f(S))=\langle a\rangle G(b,S)=\langle ab\rangle G(b,S)$。因此，$G(a,R)G(b,S)=\langle a、b\rangle(1+\mathfrak{p}^{f(R)+d(ab)})\dot{F}^2\bar{g}(b,f(S))$既可写成 $\langle ab\rangle(1+\mathfrak{p}^{f(R)+d(ab)})\dot{F}^2\bar{G}(b,S)$，也可写成 $\langle a\rangle(1+\mathfrak{p}^{f(R)+d(ab)})\dot{F}^2\bar{G}(b,S)$。

若 $R\leq 2e$，则可忽略因子 $\langle a\rangle$ 和 $\langle b\rangle$，于是有 $f(R)+d(ab)=R/2+d(ab)-e$，从而得到所声称的公式 $(1+\mathfrak{p}^{R/2+d(ab)-e})\dot{F}^2\bar{G}(a,S)$。若 $R>2e$，则 $f(R)+d(ab)=R+d(ab)-2e$，从而得到公式 $\langle ab\rangle(1+\mathfrak{p}^{R+d(ab)-2e})\dot{F}^2\bar{G}(a,S)$ 和 $\langle a\rangle(1+\mathfrak{p}^{R+d(ab)-2e})\dot{F}^2\bar{G}(a,S)$。 □

引理 2.17 *(i)* 我们有 $\bar{G}(a,R)\subseteq\mathcal{O}^\times\dot{F}^2$ 当且仅当 $d(-a)=2e$，或者 赋值 a 为偶数，且 $d(-a)>e-R/2$。

特别地，如果 $R\geq 2e$，那么 $\bar{G}(a,R)\subseteq\mathcal{O}^\times\dot{F}^2$ 当且仅当 赋值 a 为偶数。

(ii) 根据 R，$\bar{G}(a,R)\subseteq\mathcal{O}^\times\dot{F}^2$ 等价于：当 $R<-2e$ 时，$d(-a)=2e$；当 $R=2e$ 时，$d(-a)\geq 2e$；当 $-2e<R\leq 2e$ 时，$d(-a)>e-R/2$；当 $R\geq 2e$ 时，$d(-a)>0$。

Proof. 先假设 $R\leq 2e$。由引理 2.12(ii)，$G(a,R)=\bar{g}(a,R/2-e)$，因此，由引理 2.3，$\bar{G}(a,R)\subseteq\mathcal{O}^\times\dot{F}^2$ 当且仅当 $a=-\Delta$ 或者 $R/2-e+2e\geq 0$ 且 $R/2-e+d(-a)>0$。也就是说，当且仅当 $d(-a)=2e$ 或者 $R\geq -2e$ 且 $d(-a)>e-R/2$。赋值 a 为偶数的条件是多余的，因为它可由 $d(-a)>e-R/2\geq 0$ 推出。

如果 $a=-\Delta$，那么 ord_a 是偶数。反之，若 ord_a 是偶数，则 $d(-a)>0=e-2e/2$。由情形 $R\leq 2e$，可得$\bar{G}(a,2e)\subseteq\mathcal{O}^\times\dot{F}^2$。由于 $R\geq 2e$，根据引理 2.12(i)，我们得到 $\bar{G}(a,R)\subseteq\bar{G}(a,2e)\subseteq\mathcal{O}^\times\dot{F}^2$。

在此情形下，条件 $d(-a) > e - R/2$ 是多余的，因为它可由 $d(-a) > 0$ 和 $R \geq 2e$ 推出。

(ii) 在 $R < -2e$ 和 $R \geq 2e$ 的情形下，结论可直接由 (i) 得出。若 $-2e \leq R \leq 2e$，则 $\bar{G}(a, R) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$ 当且仅当 $d(-a) = 2e$ 或 $d(-a) > e - R/2$。若 $R = -2e$，这意味着 $d(-a) = 2e$ 或 $d(-a) > e - (-2e)/2 = 2e$，即 $d(-a) \geq 2e$。若 $-2e < R \leq 2e$，则 $e - R/2 < e - (-2e)/2 = 2e$，因此若 $d(-a) = 2e$，则 $d(-a) > e - R/2$ 也成立。因此，$d(-a) = 2e$ 这一情形是多余的，我们只需考虑条件 $d(-a) > e - R/2$。 □

推论 2.18 如果 $\bar{G}(a_i, R_i) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$ 对 $1 \leq i \leq s$ 和 $R \in \mathbb{R}$ 成立，其中 $R \geq -2e$ 且 $R \geq R_i$ 对 $1 \leq i \leq s$ 成立，那么 $\bar{G}((-1)^{s-1} a_{1,s}, R) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。

Proof. 对每个 i，都有 $R \geq R_i$，因此由引理 2.12(i)，$\bar{G}(a_i, R) \subseteq \bar{G}(a_i, R_i) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。由引理 2.17(ii)，这意味着 $d(-a_i)$ 是 $\geq 2e$、$> e - R/2$ 或 > 0，分别对应于 $R = -2e$、$-2e < R \leq 2e$ 和 $R \geq 2e$。由支配原理，这意味着 $d(-(-1)^{s-1} a_{1,s}) = d((-1)^s a_{1,s})$ 相应地是 $\geq 2e$、$> e - R/2$ 或 > 0。然后，再由引理 2.17(ii)，$\bar{G}((-1)^{s-1} a_{1,s}, R) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。 □

引理 2.19 *(i)* 当且仅当赋值 a 为偶数且 $R \leq 2e$ 时，$\Delta \in \bar{g}(a, R)$ 成立。当且仅当赋值 a 为偶数且 $R \leq 2e$，或 $a = \Delta$ 时，$\Delta \in \bar{g}(a, R)$ 成立。

(ii) 若 $a \in \mathcal{A}$，则当且仅当赋值 a 为偶数且 $\leq 2e$ 时，$\Delta \in g(a)$ 成立。

Proof. (i) 根据引理 2.12(iv)，$\Delta \in \bar{g}(a, R)$ 和 $\Delta \in G(a, R)$ 同时成立的一个必要条件是 $\Delta \in \mathrm{N}(-a)$，这等价于 $2 \mid$ 赋值 a。（我们有 $\Delta \in \mathrm{N}(-a)$ 当且仅当 $-a \in \mathrm{N}(\Delta) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。）现在假设赋值 a 为偶数。于是 $d(-a) > 0 = e - (2e)/2$，因此根据引理 2.4，$\bar{g}(a, 2e) = (1 + \mathfrak{p}^{(2e)/2+e}) \dot{F}^2 = (1 + \mathfrak{p}^{2e}) \dot{F}^2 \ni \Delta$。接着，根据引理 2.12(ii)，我们有 $\bar{2}.12(ii)$，且有 $\bar{G}(a, 4e) = \langle a \rangle \bar{g}(a, 2e) \ni \Delta$。根据引理 2.6(i) 和引理 2.12(i)，若 $R \leq 2e$，则 $\Delta \in \bar{g}(a, 2e) \subseteq \bar{g}(a, R)$；若 $R \leq 4e$，则 $\Delta \in G(a, 4e) \subseteq \bar{g}(a, R)$。根据引理 2.6(iv)，若 $R > 2e$，则 $\bar{g}(a, R) = \dot{F}^2$，因此 $\Delta \notin \bar{g}(a, R)$。并且，根据推论 2.13(iv)，若 $R > 4e$，则 $\bar{G}(a, R) = \langle a \rangle \dot{F}^2$，因此 $\Delta \in \bar{G}(a, R)$ 当且仅当 $a = \Delta$。

(ii) 由命题 2.5，$g(a) = \bar{g}(a, \text{赋值 } a) \cap \mathcal{O}^\times$。由于 $\Delta \in \mathcal{O}^\times$，我们有 $\Delta \in g(a)$ 当且仅当 $\Delta \in \bar{g}(a, \text{赋值 } a)$，而由 (i)，这当且仅当赋值 a 为偶数且赋值 $a \leq 2e$。 □

3 预备结果

我们首先证明在 [B3 的定理 4 中所宣布的表示定理之条件 (i) 的必要性。5] 当 $i = 1,2$。

引理 3.1 设 L、K 为具有 $K \subseteq L$ 的二次格，并设 $R_i = R_i(L)$ 与 $S_i = R_i(K)$。

(i) $R_1 \leq S_1$。*(ii)* 若秩 $K \geq 2$，则要么 $R_2 \leq S_2$，要么秩 $L \geq 3$ 且 $R_2 + R_3 \leq S_1 + S_2$。

(iii) 若秩 $K \geq 2$，则 $R_1 + R_2 \leq S_1 + S_2$。

Proof. 令 $L \cong \prec a_1$，……， $a_m \succ$ 和 $K \cong \prec b_1$，……， $b_n \succ$ 分别对应于良好 BONGx_1，……，x_m 和 y_1，……， y_n。

(i) 对 $\mathfrak{n}K \subseteq \mathfrak{n}L$ 取赋值即可得出结论。

接下来注意到 (iii) 可由 (i) 和 (ii) 推出。事实上，由 (i) 可得 $R_1 \leq S_1$，因此若 $R_2 \leq S_2$，则 $R_1+R_2 \leq S_1+S_2$。若 $R_2 > S_2$，则由 (ii) 可得 $R_1+R_2 \leq R_2+R_3 \leq S_1+S_2$。所以我们只需证明 (ii)。

由 [B2、引理 2.7(iii)]，，存在一个相对于 BONG y_1，$b_2 \succ$ 的格 $J \cong \prec b_1$，y_2，且有 $J \subseteq K \subseteq L$。此外，对于 $i = 1$，2，有 $R_i(J) = R_i(K) = S_i$。

我们对 $m :=$ 的秩 L 使用归纳法。若 $m = 2$，则 $FL = FJ$，所以 $J \subseteq L$ 蕴含 $L^{\#} \subseteq K^{\#}$。由 (i) 和引理 1.5(iii) 可得 $-S_2 = R_1(K^{\#}) \leq R_1(L^{\#}) = -R_2$，因此 $R_2 \leq S_2$。

现在假设 $n \geq 3$。由引理 1.3(ii)，我们有 $S_1+S_2 =$赋值 $\mathfrak{v}J$。特别地，(iii) 可写作赋值 $\mathfrak{v}J \geq R_1+R_2$。

设 $L' = pr_{x_1^{\perp}}L$。那么，相对于良好 BONG x_2、……、x_n，$L' \cong \prec a_2$、……、$a_m \succ$ 以及序列 $R_1(L')$……、$R_{m-1}(L')$ 是 R_2、……、R_m。特别地，$\mathfrak{n}L' = \mathfrak{p}^{R_2}$。由归纳假设的 (iii) 部分，对于每个二元子格 $J' \subseteq L'$，我们有 $\mathfrak{v}J' \geq R_1(L')$ 的赋值 $+R_2(L') = R_2+R_3$。

回顾一下，若 J 的秩任意，为 k，且 v_1、……、v_k 是一组基，则 $\mathfrak{v}J$ 是由 $d_B(v_1$、……、$v_k) := \det(B(v_i, v_j))_{1\leq i,\, j\leq k}$ 生成的理想。在二元情形下，若 x、y 是 J 的一组基，则 $\mathfrak{v}J$ 是由 $d_B(x, y) = Q(x)Q(y) - B(x, y)^2$ 生成的理想。

设 $z, t \in pr_{x_1^{\perp}}L = L'$ 为 x, y 在 $x_1^{\perp}$ 上的投影。则对某些 $\alpha, \beta \in F$ 与 $z, t \in L'$，有 $x = \alpha x_1 + z$ 与 $y = \beta x_1 + t$。若 $\alpha = \beta = 0$，则 $x, y \in L'$，从而 $J \subseteq L'$，这蕴含 $S_1+S_2 =$赋值 $\mathfrak{v}J \geq R_2+R_3$，故我们已完成。因此我们可以假设，比如说，$\alpha \neq 0$，并且赋值 $\alpha \leq$ 赋值 β。由此可得 $\alpha^{-1}\beta \in \mathcal{O}$，从而我们得到 J的另一组基，x, y'，其中 $y' = y - \alpha^{-1}\beta x = t - \alpha^{-1}\beta z \in L'$。

我们有

$$\begin{aligned} d_B(x, y') &= Q(\alpha x_1 + z)Q(y') - B(\alpha x_1 + z, y')^2 \\ &= (Q(\alpha x_1) + Q(z))Q(y') - B(z, y')^2 = Q(\alpha x_1)Q(y') + d_B(z, y') \end{aligned}$$

由此可得 $S_1+S_2 =$赋值 $d_B(x, y') \geq \min\{$赋值 $Q(\alpha x_1)Q(y')$, 赋值 $d_B(x, y')\}$。

现在 $Q(x) = Q(\alpha x_1) + Q(z)$，且我们有 $x \in J$和 $z \in L'$，因此 ord $Q(x) \geq$ ord $\mathfrak{n}J = S_1$ 且 ord $Q(z) \geq$ ord $\mathfrak{n}L' = R_2$。于是 ord $Q(\alpha x_1) \geq \min\{$ord $Q(x)$，ord $Q(z)\} \geq \min\{S_1, R_2\}$。另一方面，$y'$ 同时属于 J和 L'，因此 ord $Q(y')$ 同时为 $\geq$ ord $\mathfrak{n}J = S_1$ 和 $\geq$ ord $\mathfrak{n}L' = R_2$，所以 ord $Q(y') \geq \max\{S_1, R_2\}$。由此可得

$$\operatorname{ord} Q(\alpha x_1)Q(y') = \operatorname{ord} Q(\alpha x_1) + \operatorname{ord} Q(y') \geq \min\{S_1, R_2\} + \max\{S_1, R_2\} = S_1 + R_2.$$

我们还有 $J' := \mathcal{O}z + \mathcal{O}y' \subseteq L'$，因此 ord $d_B(z,\ y') =$ ord $\mathfrak{v}(L') \geq R_2+R_3$，如果 J'是二元且非退化的；否则为 $d_B(z,\ y') = 0$。两种情况下，ord $d_B(z,\ y') \geq R_2+R_3$。总之，

$$S_1 + S_2 \geq \min\{S_1 + R_2, R_2 + R_3\},$$

因此，要么是 $S_1+S_2 \geq S_1+R_2$，即 $S_2 \geq R_2$，要么是 $S_1+S_2 \geq R_2+R_3$。证明至此结束。 □

推论 3.2 若秩 $L \geq 2$ 且 $R_i(L) = R_i$，则 $R_1 + R_2 =$最小值{赋值 $\mathfrak{v}J \mid J \subseteq L$， J 二元}。

Proof. 若 $J \subseteq L$ 是二元的且 $R_i(J) = S_i$，则由引理 3.1(iii)，赋值 $\mathfrak{v}J = S_1 + S_2 \geq R_1 + R_2$。若 $x_1, \ldots, x_n$ 是 L 的一个良好 BONG，则由 [B2 、引理 2.7(iii)]，，我们有 $J := \prec x_1, x_2 \succ \subseteq L$。我们有 $R_i(J) =$赋值 $Q(x_i) = R_i$，对于 $i = 1, 2$，故赋值 $\mathfrak{v}J = R_1 + R_2$。因此结论成立。 □

引理 3.3 设 L 是一个具有秩 $L \geq 2$ 的格，并设 $R_i(L) = R_i$。假设 K 连同 $R_i(K) = S_i$，在 L 的所有满足 $FK = FL$ 且 $R_1 + R_2 < S_1 + S_2$ 的子格中是极大的。则 $S_1 + S_2 \leq R_1 + R_2 + 2$。

Proof. 由于 $S_1 + S_2 \neq R_1 + R_2$，我们有 $K \neq L$，因此包含关系 $K \subseteq L$ 是严格的。我们考虑一个满足 $[K' : K] = \mathfrak{p}$ 的中间格 $K \subset K' \subseteq L$。若 $R_i(K') = S_i'$，则由引理 3.1(iii)，我们有 $R_1 + R_2 \leq S_1' + S_2'$；又由 K 的极大性可知，$R_1 + R_2 < S_1' + S_2'$ 不可能成立。因此 $S_1' + S_2' = R_1 + R_2$。由推论 3.2，存在一个二元格 $J' \subseteq K'$，使得赋值 $\mathfrak{v}J' = S_1' + S_2' = R_1 + R_2$。

若 $J = J' \cap K$，则存在一个单射 $J'/J \to K'/K$，因此我们有 $[J' : J]\,[K' : K] = \mathfrak{p}$。于是 $[J' : J] = \mathcal{O}$ 或 $\mathfrak{p}$。由此可得 $\mathfrak{v}J = [J' : J]^2 \mathfrak{v}J' = \mathfrak{v}J'$ 或 $\mathfrak{p}^2 \mathfrak{v}J'$。我们有赋值 $\mathfrak{v}J' = R_1 + R_2$，因此取阶可得赋值 $\mathfrak{v}J = R_1 + R_2$ 或 $R_1 + R_2 + 2$。但是 $J \subseteq K$ 且 $R_i(K) = S_i$，所以由推论 3.2，$S_1 + S_2 \leq$赋值 $\mathfrak{v}J$。若赋值 $\mathfrak{v}J = R_1 + R_2$，则得到 $S_1 + S_2 \leq R_1 + R_2$，这与假设矛盾。因此 $S_1 + S_2 \leq$赋值 $\mathfrak{v}J = R_1 + R_2 + 2$。 □

推论 3.4 设 L 和 J 是秩分别为 $m \geq 2$ 和 n 的二次格，且 $J \subseteq L$。设 $R_i(L) = R_i$ 和 $R_i(J) = T_i$。若秩 $J \leq 1$ 或秩 $J \geq 2$ 且 $R_1 + R_2 < T_1 + T_2$，则存在某个格 K，使得 $J \subseteq K \subseteq L$、$FK = FL$ 且 $R_1 + R_2 < S_1 + S_2 \leq R_1 + R_2 + 2$。

Proof. 我们首先将问题归结为 $m = n$ 的情形，即 $FJ = FL$ 的情形。若 $m > n$，则设 J' 是 FL 中 FJ 的正交补上的一个格，使得 $FJ \perp FJ' = FL$。相对于某些良好 BONG，设 $J \cong \prec b_1$、……、$b_n \succ$ 以及 $J' \cong \prec b_{n+1}$、……、$b_m \succ$。设 $s \gg 0$。那么，相对于某个良好 BONG，有 $\mathfrak{p}^s J' \cong \prec \pi^{2s} b_{n+1}$、……、$\pi^{2s} b_m \succ$，并且我们有 $T_i :=$赋值 $\pi^{2s} b_i = 2s +$赋值 $b_i \gg 0$，其中 $n + 1 \leq i \leq m$。于是 $T_{n-1} \leq T_{n+1}$（若 $n \geq 2$），$T_n \leq T_{n+1}$（若 $n \geq 1$），以及 $T_n \leq T_{n+2}$（若 $n \geq 1$ 且 $m \geq n + 2$）。由引理 1.5(ii)，我们有 $\bar{J} := J \perp \mathfrak{p}^s J' \cong \prec b_1$、……、$b_n$、$\pi^{2s} b_{n+1}$、……、$\pi^{2s} b_m \succ$，相对于某个良好 BONG，因此 $R_i(J) = T_i \; \forall i$。若 $n \geq 2$，则由假设可得 $R_1 + R_2 < T_1 + T_2$。若 $n = 1$，则由 $T_2 \gg 0$ 可得；而对于 $n = 0$，则由 T_1、$T_2 \gg 0$ 可得。

¯我们不可能有一个无限的格序列 $J = K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset L$，因为这样就会有一个无限的理想序列 $\mathfrak{v}K_1 \subset \mathfrak{v}K_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{v}L$。因此，¯存在某个格 K，满足 $J \subseteq J \subseteq K \subset L$，且它在满足性质 $R_1(K) + R_2(K) > R_1 + R_2$ 的格中是极大的。如果 $R_i(K) = S_i$，那么 $R_1 + R_2 < S_1 + S_2$，根据 K 的极大性，由引理 3.3 可得 $S_1 + S_2 \leq R_1 + R_2 + 2$。 □

引理 3.5 如果 $L \cong \prec a_1, \ldots\ldots, a_n \succ$ 相对于一个（可能是坏的）*BONG*，且赋值 $a_i = R_i$，特别是，如果 $R_i = R_i(L)$，那么：

(i) 对任意 $1 \leq j \leq n-1$，$R_{j+1} - R_j$ 都不能既为奇数又为负。*(ii)* 若对某个 $1 \leq j \leq n-2$ 有 $R_j = R_{j+2}$，则 $R_j \equiv R_{j+1}$（模 2）。

Proof. (i) 由 [B2、引理 2.7(i)]，对每个 $1 \leq i \leq n-1$，格 $J = \prec x_j,\ x_{j+1} \succ$存在。于是，由引理 1.4，$R_{j+1} - R_j$ 不能既为奇数又为负。

(ii) 我们有（$R_{j+1} - R_j$）+（$R_{j+2} - R_{j+1}$）$= R_{j+2} - R_j = 0$，因此若 $R_j \not\equiv R_{j+1}$（模 2），则 $R_{j+1} - R_j$ 与 $R_{j+2} - R_{j+1}$ 之一既为奇数又为负。但这与(i)矛盾。故 $R_j \equiv R_{j+1}$（模 2）。 □

引理 3.6 设 x_1, x_2, x_3 是三元二次格 L 的一个坏 *BONG*，且 R_i =赋值 $Q(x_i)$。则 $R_2 \equiv R_3$(模 2) 且 $R_i(L) = S_i$，其中 $(S_1, S_2, S_3) = (R_1, R_2 + R_3 - R_1, R_1)$。

Proof. 我们有 $S_1 = R_1(L)$ =赋值 $\mathfrak{n}L$ =赋值 $Q(x_1) = R_1$。由于 L 有一个坏 BONG，由命题 1.6(i) 可知它不可能具有性质 A，也就是说，$S_1 < S_3$ 不成立。因此$S_3 = S_1 = R_1$。为求 S_2 的值，我们考虑 L 的体积。由引理 1.3(ii) 可知，赋值 $\mathfrak{v}L = R_1 + R_2 + R_3$ 和赋值 $\mathfrak{v}L = S_1 + S_2 + S_3$。因此 $R_1 + R_2 + R_3 = S_1 + S_2 + S_3 = R_1 + S_2 + R_1$，这就推出了 $S_2 = R_2 + R_3 - R_1$，证毕。

由引理 3.5(ii)，由于 $S_1 = S_3$，我们有 $S_1 \equiv S_2$ (模 2)，即 $R_1 \equiv R_2 + R_3 - R_1$(模 2)。因此 $R_2 \equiv R_3$ (模 2)。 □

引理 3.7 *(i)* 设 L 是秩为 $n \geq 2$ 的二次格，且 $R_i(L) = R_i$。设 $x \in L$ 为范数生成元。则赋值 $\mathfrak{n}pr_{x^\perp}L \geq R_2$，等号成立当且仅当 x 是 L 的良好 *BONG* 中的首元素。

(ii) 若 $n \geq 3$ 且 $R_2 - R_1 \geq 2e$，则 L 的每个范数生成元都是 L 的良好 *BONG* 中的首元素。

Proof. (i) 若 x 是 L 的良好 BONG $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的首元素，则 ord $Q(x_i)$ $= R_i$。那么 x_2 是 $pr_{x^\perp}L = \prec x_2, \ldots, x_n \succ$ 的范数生成元，因此 ord $\mathfrak{n}pr_{x^\perp}L =$ ord $Q(x_2)$ $= R_2$，证毕。

现在假设 $x \in L$ 是一个范数生成元，因此 ord $Q(x) =$ ord $\mathfrak{n}L = R_1$，但它不是范数生成元的首元素。令 $y_2, \ldots, y_n$ 为 $L' := pr_{x_1^\perp}L$的一组良好 BONG。那么 $x = y_1, y_2, \ldots, y_n$ 是 L的一组 BONG。令 $S_i =$ ord $Q(y_i)$。特别地，$S_1 =$ ord $Q(x) = R_1$且 $S_2 =$ ord $\mathfrak{n}\prec y_2, \ldots, y_n \succ =$ ord $\mathfrak{n}pr_{x^\perp}L$。由于 $x = y_1$ 不是良好 BONG 中的首元素，BONG $y_1, \ldots, y_n$ 是坏的，所以对某个 i，有 $S_i > S_{i+2}$。但 BONG $y_2, \ldots, y_n$ 是良好的，所以对 $2 \leq i \leq n-2$，有 $S_i \leq S_{i+2}$。因此必有 $S_1 > S_3$。由 [B2、引理 2.7(iii)]，格 $M = \prec y_1, y_2, y_3 \succ$ 存在，且 $M \subseteq L$。若 $R_i(M) = T_i$，则由引理 3.1(iii)，$R_1 + R_2 \leq T_1 + T_2$。由于 $S_1 > S_3$，M 的 BONG y_1, y_2, y_3 是坏的。因此由引理 3.6，我们有 $(T_1, T_2, T_3) = (S_1, S_2 + S_3 - S_1, S_1)$。于是 $R_1 + R_2 \leq T_1 + T_2 = S_2 + S_3$。结合 $R_1 = S_1 > S_3$，可得 $R_2 < S_2 =$ ord $\mathfrak{n}pr_{x^\perp}L$，从而完成 (i) 的证明。

(ii) 假设 $R_2 - R_1 \geq 2e$，且存在一个范数生成元 $x \in L$，但它不是良好 BONG 中的首元素。使用 (i) 的证明中的记号，我们有$R_2 < S_2$ 和 $R_1 > S_3$，由此可得 $S_2 - S_3 > R_2 - R_1 \geq 2e$。但这是不可能的，因为 $y_2, \ldots, y_n$是一组良好 BONG，所以由引理 1.4，$S_3 - S_2' \geq -2e$。 □

引理 3.8 设 L 是一个秩为 $n \geq 3$的二次格，且 $R_i(L) = R_i$。

若 $R_1 < R_3$ 或 $R_3 - R_2 = -2e$，则 L 的每个范数生成元都是某个良好 *BONG* 的首元素。

Proof. 若 $R_3 - R_2 = -2e$，则 $R_1 - R_2 \leq R_3 - R_2 = 2e$，因此 $R_2 - R_1 \geq 2e$，于是引理 3.7(ii)适用。所以剩下的情形是 $R_1 < R_3$。

设 $x_1, \ldots, x_n$是 L的一个良好 BONG，并设 $L = L_1 \perp \cdots \perp L_t$是一个 Jordan 分解。根据 [OM，第 91 页，9]、t、L_i的秩以及 $\mathfrak{s}L_i$的赋值都是 L的不变量，也就是说，它们不依赖于 Jordan 分解的选取。

设 $x \in L$ 为一个范数生成元，并设 $K = pr_{x^\perp}L$。由引理 3.7(i)，赋值 $\mathfrak{n}K \geq R_2$，且等号成立当且仅当 x 是良好 BONG 中的首元素。因此只需证明赋值 $\mathfrak{n}K \leq R_2$。

分两种情况：

(1) $R_1 < R_2$。由引理 1.5(ii)，有 $L = \prec x_1 \succ \perp L' = \mathcal{O}x_1 \perp L'$，其中$L' = \prec x_2, \ldots\ldots, x_n \succ$。由引理 1.5(i)，有 $\mathfrak{n}L = \mathfrak{p}^{R_2}$ 和 $\mathfrak{s}L = \mathfrak{p}^r$，其中 $r = \min\{R_2, (R_2+R_3)/2\}$。由于 $R_2, R_3 > R_1$，我们有 $2R_2 > R_1 + R_2$ 和 $R_2 + R_3 > R_1 + R_2$。因此$2r = \min\{2R_2, R_2 + R_3\} > R_1 + R_2 > 2R_1$，从而 $r > R_1$。于是 $\mathfrak{s}\mathcal{O}x = \mathfrak{p}^{R_1} \supset \mathfrak{p}^r = \mathfrak{s}L'$。由此可得一个 Jordan 分解 $L = L_1 \perp \cdots \perp L_t$，其中 $L_1 = \mathcal{O}x_1$ 且 $L_2 \perp \cdots \perp L_t = L'$。另外，$r_1 = R_1$和 $r_2 = r$ 以及 L_1是一元的。我们有$L^{\mathfrak{p}^{r_2}} = \mathfrak{p}^{r_2 - r_1}L_1 \perp L'$，即 $L^{\mathfrak{p}^r} = \mathfrak{p}^{r-R_1}x_1 \perp L'$。由于 $\mathfrak{n}\mathfrak{p}^{r-R_1}x_1 = \mathfrak{p}^{2(r-R_1)}Q(x_1) = \mathfrak{p}^{2r-R_1}$，且 $\mathfrak{n}L' = \mathfrak{p}^{R_2}$ 和$2r > R_1 + R_2$，因此 $R_2 < 2r - R_1$，我们有 $\mathfrak{n}L = \mathfrak{p}^{R_2}$。

由于 $\operatorname{ord} Q(x) = R_1 = r_1$，且 L_1 是一元的，因此存在另一个 Jordan 分解$L = K_1 \perp \cdots \perp K_t$，满足 $K_1 = \mathcal{O}x$。于是 $K = pr_{x^\perp}L = K_2 \perp \cdots \perp K_t$，且$\mathfrak{s}K = \mathfrak{p}^{r_2} = \mathfrak{p}^r$。与之前一样，我们有 $L^{\mathfrak{p}^{r_2}} = \mathfrak{p}^{r_2 - r_1}K_1 \perp K$，即$L^{\mathfrak{p}^r} = \mathfrak{p}^{r-R_1}x \perp K$，因此$\mathfrak{n}L^{\mathfrak{p}^r} = \mathfrak{n}\mathfrak{p}^{r-R_1}x + \mathfrak{n}K$。但是$\mathfrak{n}L^{\mathfrak{p}^r} = \mathfrak{p}^{R_2}$ 且 $\mathfrak{n}\mathfrak{p}^{r-R_1}x = \mathfrak{p}^{2(r-R_1)}Q(x) = \mathfrak{p}^{2r-R_1}$，我们得到$\mathfrak{p}^{R_2} = \mathfrak{p}^{2r-R_1} + \mathfrak{n}K$。由于 $R_2 < 2r - R_1$，这意味着 $\mathfrak{n}K = \mathfrak{p}^{R_2}$，所以证明完毕。

(2) $R_1 \geq R_2$。根据 [B2，推论3.4(iii)]，$J := \prec x_1, x_2 \succ$ 是 $\mathfrak{p}^r$-模的，且 $r = (R_1 + R_2)/2$。由于 $R_3 > R_1 \geq R_2$，根据引理 1.5(ii)，$L = J \perp L'$，其中 $L' = \prec x_3, \ldots, x_n \succ$。根据引理 1.5(i)，$\mathfrak{n}L' = \mathfrak{p}^{R_3}$和 $\mathfrak{s}L = \mathfrak{p}^s$，且 $s = \min\{R_3, (R_3 + R_4)/2\}$，若 $n = 3$，则忽略 $(R_3+R_4)/2$。我们有 $R_3 > R_1 \geq R_2$，所以 $2R_3 > R_1+R_2$；又有 $R_3 > R_1$和 $R_4 > R_2$，所以 $R_3 + R_4 > R_1 + R_2$。因此 $2s = \min\{2R_3, R_3 + R_4\} > R_1 + R_2 = 2r$，从而 $s > r$。接着有一个 Jordan 分解 $L = L_1 \perp \cdots \perp L_t$，其中 $L_1 = J$和 $L_2 \perp \cdots \perp L_t = L'$。此外 $r_1 = r$且 $r_2 =$ 赋值$\mathfrak{s}L' = s$。我们有两种子情况：

(a) $R_1 = R_2$。于是 $r_1 = r = (R_1 + R_2)/2 = R_1$。由于 $x \in L$且 $\operatorname{ord} Q(x) = R_1 = r_1 = \operatorname{ord}\mathfrak{s}L$，因此 $\mathcal{O}x$ 分裂 L。由于 $pr_{x^\perp}L = K$，这意味着 $L = \mathcal{O}x \perp K$。由于 L 的 Jordan 分解的首项是 L_1，其尺度为 $\mathfrak{p}^{r_1} = \mathfrak{p}^{R_1}$、秩为 2，而 $\mathcal{O}x$ 是秩为 1 的 $\mathfrak{p}^{R_1}$-模的，因此 K 的 Jordan 分解的首项是秩为 1 的 $\mathfrak{p}^{R_1}$-模的。因此 K 可写为 $K = \mathcal{O}y \perp K'$，其中 $\operatorname{ord} Q(y) = R_1$。由此可得 $\operatorname{ord}\ \mathfrak{n}K \leq \operatorname{ord} Q(y) = R_1 = R_2$，证毕。

(b) $R_1 > R_2$。于是 $R_1 > (R_1+R_2)/2 = r$，所以 $\mathfrak{n}L = \mathfrak{p}^{R_1} \subset \mathfrak{p}^r = \mathfrak{s}L$。现在 J 是 $\mathfrak{p}^r$-模的，并且由于 $s > r$，我们有 $\mathfrak{s}L' = \mathfrak{p}^s \subseteq \mathfrak{p}^{r+1}$。由此可得 $L^{\mathfrak{p}^{r+1}} = (J \perp L')^{\mathfrak{p}^{r+1}} = \mathfrak{p}J \perp L'$。由于 ord $\mathfrak{n}\mathfrak{p}J =$ ord $\mathfrak{n}J + 2 = R_1 + 2 > R_1$ 且 ord $\mathfrak{n}L' = R_3 > R_1$，因此 ord $\mathfrak{n}L^{\mathfrak{p}^{r+1}} > R_1$。

我们有 $B(x,L) \subseteq \mathfrak{s}L = \mathfrak{p}^r$。若 $B(x,L) \subseteq \mathfrak{p}^{r+1}$，则 $x \in L^{\mathfrak{p}^{r+1}}$ 因此 $R_1 =$ 赋值 $Q(x) \geq$ 赋值 $\mathfrak{n}L^{\mathfrak{p}^{r+1}} > R_1$。矛盾。因此 $B(x,L) = \mathfrak{p}^r$。令 $y \in L$ 满足 $B(x,y)\mathcal{O} = \mathfrak{p}^r = \mathfrak{s}L$。由于 $\mathfrak{n}L \subset \mathfrak{s}L$，格 $J' := \mathcal{O}x + \mathcal{O}y$ 是二元的且为 $\mathfrak{s}L = \mathfrak{p}^r$-模的（参见 [OM，第 91C 节]）。我们有 $x \in J' \subseteq L$，并且 x 是 L 的范数生成元，因此它也是 J' 的范数生成元。于是 $J' = \prec x, x' \succ$，其中 $x' \in FJ'$。我们有 Q的赋值 $x = R_1$，所以若 Q的赋值 $x' = R_2'$，则 $\mathfrak{p}^{(R_1+R_2')/2} = \mathfrak{s}J = \mathfrak{s}L = \mathfrak{p}^{(R_1+R_2)/2}$ 因此 $R_2' = R_2$。由于 $x' \in pr_{x^\perp}J \subseteq pr_{x^\perp}L = K$，我们得到 $\mathfrak{n}K \leq$ 赋值$(Q'(x')) = R_2$。 □

推论 3.9 设 M 和 N 为二次格，满足 $N \subseteq M$、 $\mathfrak{n}M = \mathfrak{n}N$、秩 $M = m \geq 3$、秩 $N = n$, $R_i(M) = R_i$ 以及 $R_i(N) = S_i$。那么，在以下各情形中， N 的良好 *BONG* 中的每个元素也都是 M 的良好 *BONG* 中的元素。

$$(a)\ \ R_1 < R_3, \quad (b)\ \ R_3 - R_2 = -2e, \quad (c)\ \ n \geq 2 \ and\ R_2 = S_2.$$

Proof. 由于 $\mathfrak{n}N = \mathfrak{n}M$ N 的每个范数生成元，尤其是 N 的良好 BONG 的每个首元素，也都是 M 的范数生成元。在情形 (a) 和 (b) 中，根据引理 3.8， M 的每个范数生成元都是良好 BONG 的首元素，因此结论成立。

若 $R_2 = S_2$，则根据引理 3.7(i)，对于 N 的良好 BONG 的首元素 x，有赋值 $\mathfrak{n}pr_{x^\perp}N = S_2 = R_2$。由于 x 是 M 的范数生成元，我们也有赋值 $\mathfrak{n}pr_{x^\perp}M \geq R_2$。但是 $N \subseteq M$，所以 $\mathfrak{n}pr_{x^\perp}N \subseteq \mathfrak{n}pr_{x^\perp}M$，进而 $R_2 =$ 赋值 $\mathfrak{n}pr_{x^\perp}N \geq$ 赋值 $\mathfrak{n}pr_{x^\perp}M \geq R_2$。因此赋值 $\mathfrak{n}pr_{x^\perp}M = R_2$，故根据引理 3.7(i)， x 是 M 的良好 BONG 的首元素。 □

4 格的所有非范数生成元的集合

本节中，对每个二次格 L，我们记

$$L' = \{x \in L \mid x \text{ not a norm generator}\} = \{x \in L \mid Q(x) \in \mathfrak{p}\mathfrak{n}L\}.$$

我们固定一个矩阵 $L \cong \prec a_1, \ldots, a_n \succ$，相对于某个良好 BONG $x_1, \ldots, x_n$，并用 $R_i(L) = R_i$ 表示。

引理 4.1 若 x、x' 是二次格的元素，且 赋值 $Q(x+x') = R <$赋值 $Q(x)$，赋值 $Q(x')$，则 $\mathcal{O}x + \mathcal{O}x' \cong \frac{1}{2}A(0,\ 0)$。 –

Proof. 这是 [B2，引理 3.19]。

引理 4.2 若 V 是各向异性二次空间，且 $\mathfrak{a}$ 是分式理想，则$L := \{x \in V \mid Q(x) \in \mathfrak{a}\}$ 是 V上的唯一 $\mathfrak{a}$-极大格。

我们还有 $O(L) = O(V)$。

Proof. 第一条陈述就是 [OM，定理 91.1]。对于第二条，我们注意到，若 $\sigma \in O(V)$，则 $\sigma(L) \cong L$ 因此，与 L 相同， $\sigma(L)$ 是 $\mathfrak{a}$- 极大的。根据 V 上 $\mathfrak{a}$- 极大格的唯一性，我们有 $L = \sigma(L)$, 因此 $\sigma \in O(L)$。于是 $O(L) = O(V)$。 □

Lemma 4.3 *(i)* 若 $L = J \perp K$，且 $\mathfrak{n}L = \mathfrak{n}J \supset \mathfrak{n}K$，则 $L' = J' \perp K$。*(ii)* $L' = L' + \mathfrak{p}L$。特别地， $\mathfrak{p}L \subseteq L'$。*(iii)* L' 不是格，当且仅当 $\mathfrak{n}L = 2\mathfrak{s}L$ ，且 L 分裂出一个尺度为 $\mathfrak{s}L$ 的双曲格，。*(iv)* 若 $\mathfrak{n}L \supset 2\mathfrak{s}L$ ，则 $L/L' \cong \mathcal{O}/\mathfrak{p}$。

Proof. 令 $R =$赋值 $\mathfrak{n}L$，则 $x \in L'$ 当且仅当 $x \in L$，且 $Q(x) > R$。

(i) 我们有 $R =$赋值 $\mathfrak{n}L =$赋值 $\mathfrak{n}J <$赋值 $\mathfrak{n}L$。若 $x \in L$，则 $x = y + z$，其中 $y \in J$, $z \in K$。于是 $x \in L'$ 当且仅当赋值 $Q(x) > R$。由于 $Q(x) = Q(y) + Q(z)$，且赋值 $Q(z) \geq$ 赋值 $\mathfrak{n}K > R$，这等价于赋值 $Q(y) > R =$赋值 $\mathfrak{n}J$，即 $y \in J'$。因此$L' = J' \perp K$。

(ii) 我们必须证明：对每一个 $x + \alpha y \in L'$，若 $x \in L'$、 $y \in L$ 且 $\alpha \in \mathfrak{p}$。我们有$Q(x + \alpha y) = Q(x) + \alpha^2 Q(y) + 2\alpha B(x, y)R$。由于 $Q(y) \in \mathfrak{n}L$、 $2B(x, y) \in 2\mathfrak{s}L \subseteq \mathfrak{n}L$ 且$\alpha \in \mathfrak{p}$，我们有 $\alpha^2 Q(y) + 2\alpha B(x, y) \in \mathfrak{p}\mathfrak{n}L = \mathfrak{p}^{R+1}$，因此赋值$(\alpha^2 Q(y) + 2\alpha B(x, y)) > R$。又由于 $x \in L'$，故赋值 $Q(x) > R$，我们得到赋值 $Q(x + \alpha y) > R$。从而 $x + \alpha y \in L'$。

(iii) 若 $x \in L'$、 $\alpha \in \mathcal{O}$，则赋值 $Q(\alpha x) \geq$赋值 $Q(x) > R$，故 $\alpha x \in L'$。因此 L' 在与来自 $\mathcal{O}$的标量相乘下封闭。它是一个格当且仅当它在加法下也封闭。假设相反，即存在 x、 $y \in L'$ 使得 $x + y \notin L'$，即赋值 $Q(x)$、赋值 $Q(y) > R$，但赋值 $Q(x + y) = R$。由引理 4.1，这蕴含 $H := \mathcal{O}x + \mathcal{O}y \cong \frac{1}{2}\pi^R A(0, 0)$。我们有 $H \subseteq L$，故 $\frac{1}{2}\mathfrak{p}^R = \mathfrak{s}J \subseteq \bar{\mathfrak{s}}L \subseteq \frac{1}{2}\mathfrak{n}L = \frac{1}{2}\mathfrak{p}^R$，故$\mathfrak{s}L = \mathfrak{s}H = \frac{1}{2}\mathfrak{n}\bar{L}$，从而 H分裂 L。反之，若 $\mathfrak{p}^R = \mathfrak{n}L = 2\bar{\mathfrak{s}}L$且 L分裂一个双曲格 H，其中 $\underline{\mathfrak{s}}H = \mathfrak{s}L$，即相对于某个基 x、 y有 $H \cong \frac{1}{2}\pi^R A(0, 0)$，则$Q(x) = Q(y) = 0$，故 x、 $y \in L'$，但 $Q(x + y) = 2B(x, y) = \pi^R$，故赋值 $Q(x + y) = R$，从而$x + y \notin L'$。因此 L' 不是格。

(iv) 由于 $2\mathfrak{s}L \subset \mathfrak{n}L$，由 (iii)， L' 是一个格。设 $x \in L$ 为一个范数生成元。我们证明 $L = \mathcal{O}x + L'$。设 $x' \in L$。若 $x' \in L'$，则 $x' \in \mathcal{O}x + L'$ 显然成立。若$x' \in L \setminus L'$，则赋值 $Q(x') =$赋值$Q(x) = R$，故 $Q(x') = \eta Q(x)$，其中 $\eta \in \mathcal{O}^\times$。如在 [OM1 的 §63], 开头所见，我们有 $-\eta \equiv \delta^2 \pmod{\mathfrak{p}}$，故对某个 $\delta \in \mathcal{O}^\times$有 $\eta + \delta^2 \in \mathfrak{p}$。若 $y = x' - \delta x$，则 $Q(y) = Q(x') + \delta^2 Q(x) - 2\delta B(x, x') =(\eta + \delta^2)Q(x) - 2\delta B(x, x')$。我们有 $\eta + \delta^2 \in \mathfrak{p}$，故赋值$(\eta + \delta^2)Q(x) >$赋值$Q(x) = R$，且 $2\delta B(x, x') \in 2\mathfrak{s}L \subset \mathfrak{n}L = \mathfrak{p}^R$，故赋值 $2\delta B(x, x') > R$。因此赋值 $Q(y) > R$，故 $y \in L'$。由此可得 $x' = \delta x + y \in \mathcal{O}x + L'$。

因此， $L/L' = (\mathcal{O}x + L')/L' \cong \mathcal{O}x/(\mathcal{O}x \cap L') = \mathcal{O}x/\mathfrak{p}x \cong \mathcal{O}/\mathfrak{p}$。（若 $\alpha \in \mathcal{O}$，则我们有 $\alpha x \in L'$当且仅当赋值$Q(\alpha x) > R =$赋值 $Q(x)$，这等价于 $\alpha \in \mathfrak{p}$。因此$\mathcal{O}x \cap L' = \mathfrak{p}x$。） □

引理 4.4 若 $M = \mathfrak{p}^{-1}x_1 + L$，则 $M \cong \prec \pi^{-2}a_1, \ldots, a_n \succ$相对于 *BONG*$\pi^{-1}x_1, \ldots, x_n$与 $M' = L$。

Proof. 令 $R =$赋值 $a_1 =$赋值 $\mathfrak{n}L$。我们有 $\mathfrak{p}^{-1}x_1 \subseteq \mathfrak{p}^{-1}L$且 $L \subseteq \mathfrak{p}^{-1}L$，因此 $M \subseteq \mathfrak{p}^{-1}M$。由此可得 $\mathfrak{n}M \subseteq \mathfrak{p}^{-2}\mathfrak{n}L = \mathfrak{p}^{R-2}$。但 $\pi^{-1}x_1 \in M$且赋值 $Q(\pi^{-1}x_1) =$赋值 $\pi^{-2}a_1 = R -$

2，因此 $\mathfrak{n}M = \mathfrak{p}^{R-2}$ 且 $\pi^{-1}x_1$ 是 M的范数生成元。由于 $pr_{\pi^{-1}x_1^{\perp}}M = pr_{x_1^{\perp}}(\mathfrak{p}^{-1}x_1 + L)$ $= pr_{x_1^{\perp}}L = \prec x_2, \ \ldots, \ x_n \succ$，我们有 $M = \prec \pi^{-1}x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n \succ$，如所述。

为证明 $M' = L$，我们首先注意到 $\mathfrak{n}L \subset \mathfrak{n}M$，因此 $L \subseteq M'$。反过来，设$x \in M$、 $x = \alpha x_1 + y$，且 $\alpha \in \mathfrak{p}^{-1}$和 $y \in K$。我们必须证明，若 $x \in M'$，即若 ord $Q(x) >$ ord $\mathfrak{n}M = R - 2$，则 $x \in L$。我们有 $\alpha \in \mathfrak{p}^{-1}$，所以 ord $\alpha \geq -1$。假设 ord $\alpha = -1$。那么 ord $\alpha^2 Q(x_1) = R - 2$, $y \in K$，因此 ord $Q(y)$ $\geq$ ord $\mathfrak{n}K = R$，且$2B(x_1, y) \in 2\mathfrak{s}L \subseteq \mathfrak{n}L = \mathfrak{p}^R$，所以 ord $2\alpha B(x_1, y) = -1 +$ ord $B(x_1, y) \geq R - 1$。根据支配原理，我们有 ord $Q(x) =$ ord$(\alpha^2 Q(x_1) + Q(y) + 2\alpha B(x_1, y)) = R - 2$。矛盾。因此 ord $\alpha \geq 0$，即 $\alpha \in \mathcal{O}$。由于 $x_1, y \in L$，我们得到 $x = \alpha x_1 + y \in L$。 □

将 L、 M 和 x_1 分别替换为 K、 L 和 πx_1 ，并注意到 $\mathfrak{p}^{-1}\pi x_1 = \mathcal{O}x_1$，即可得到以下等价陈述。

推论 4.5 若存在一个关于 *BONG* $\pi x_1, \ldots, x_n$ 的格 $K \cong \prec \pi^2 a_1, \ldots, a_n \succ$ ，则 $L = \mathcal{O}x_1 + K$ 和 $L' = K$。

注。 引理 4.4 和推论 4.5 中的 BONG 不必是良好的。

在接下来的三个引理中， L 是二元的。

引理 4.6 L 不是 $\mathfrak{n}L$-极大，当且仅当 $\pi^{-2}a_2/a_1 \in \mathcal{A}$；或者等价地，当且仅当 $R_2 - R_1 \geq 2 - 2e$ 且 $R_2 - R_1 \geq 2 - d(-a_1a_2)$。

Proof. 首先注意，ord $\pi^{-2}a_2/a_1 = R_2 - R_1 - 2$ 且 $d(-\pi^{-2}a_2/a_1) = d(-a_2/a_1)$，因此 $\pi^{-2}a_2/a_1 \in \mathcal{A}$ 当且仅当 $R_2 - R_1 - 2 \geq -2e$ 且 $R_2 - R_1 - 2 \geq -d(-a_1a_2)$，如所声称的。

对于“若”部分，我们注意到 $Q(\pi^{-1}x_2)/Q(x_1) = \pi^{-2}a_2/a_1 \in \mathcal{A}$ ，因此格$M = \prec x_1, \pi^{-1}x_2 \succ$ 存在。由于 x_1 是 M和 L 的范数生成元，且 $pr_{x_1^{\perp}}M = \mathcal{O}\pi^{-1}x_2 \supset \mathcal{O}x_2 = pr_{x_1^{\perp}}L$，根据 [B2，引理 2.2], ，我们有 $M \supset L$。由于 $\mathfrak{n}M = \mathfrak{n}L$ 且$M \supset L$， L 不是 $\mathfrak{n}L$-极大。

对于“仅若”部分，若 L 不是 $\mathfrak{n}L$-极大，则存在一个格 M，满足 $FM = FL =: V$、 $M \supset L$ 和 $\mathfrak{n}M = \mathfrak{n}L$。由于 $x_1 \in L \subset M$ 且 $\mathfrak{n}L = Q(x_1)\mathcal{O}$， x_1 也是 M的范数生成元。我们有 $pr_{x_1^{\perp}}M \subset pr_{x_1^{\perp}}V = Fx_2$，因此对于某个$k \in \mathbb{Z}$， $pr_{x_1^{\perp}}M = \mathfrak{p}^k x_2$。于是 $M = \prec x_1, \ \pi^k x_2 \succ$，所以 $\pi^{2k}a_2/a_1 = Q(\pi^k x_2)/Q(x_1) \in \mathcal{A}$。我们不能有$k \geq 0$，因为这将推出 $pr_{x_1^{\perp}}M \subseteq \mathcal{O}x_2 = pr_{x_1^{\perp}}L$，故 $M \subseteq L$。因此 $k \leq -1$。于是，根据 [B2，引理 3.8]， $\pi^{2k}a_2/a_1 \in \mathcal{A}$ 推出 $\pi^{-2}a_2/a_1 \in \mathcal{A}$。 □

推论 4.7 格 L 是 $\mathfrak{n}L$-极大的，当且仅当以下情形之一成立 .

(1) $R_2 - R_1 = -2e$。

(2) $2 - 2e \leq R_2 - R_1 \leq 1$和 $d(-a_1a_2) = R_1 - R_2 + 1$。等价地， $R_2 - R_1 = 1$或 $R_2 - R_1$ 为偶数， $2 - 2e \leq R_2 - R_1 \leq 0$ 和 $d(-a_1a_2) = R_1 - R_2 + 1$。

Proof. 由于 $L \cong \prec a_1, \ a_2 \succ$，我们有 $a_2/a_1 \in \mathcal{A}$，因此 $R_2 - R_1 \geq -2e$ 且 $R_2 - R_1 \geq -d(-a_1a_2)$。根据引理 4.6， L 为极大的条件等价于 $\pi^{-2}a_2/a_1 \notin \mathcal{A}$，这意味着 $R_2 - R_1 \geq 2 - 2e$ 或 $R_1 - R_2 \geq 2 - d(-a_1a_2)$不成立。

若 $R_2 - R_1 \geq 2 - 2e$ 不成立，则 $-2e \leq R_2 - R_1 \leq 1 - 2e$。但是，根据引理 3.5(i), $R_2 - R_1$ 不可能为奇数且为负，因此 $R_2 - R_1 = -2e$。

若 $R_2 - R_1 \geq 2 - 2e$ 成立，但 $R_1 - R_2 \geq 2 - d(-a_1a_2)$不成立，则 $-d(-a_1a_2) \leq R_2 - R_1 \leq 1 - d(-a_1a_2)$。然而，由于 $R_2 - R_1 \neq -2e$，因此 $a_2/a_2 \neq -\Delta/4$；根据引理 1.4, 不等式 $R_2 - R_1 \geq -d(-a_1a_2)$ 必须是严格的。因此 $R_2 - R_1 = 1 - d(-a_1a_2)$，即 $d(-a_1a_2) = R_1 - R_2 + 1$。由于 $d(-a_1a_2) < \infty$，我们有 $0 \leq d(-a_1a_2) \leq 2e$，这意味着 $1 - 2e \leq R_2 - R_1 \leq 1$。但 $R_2 - R_1$ 不可能是奇数且为负，因此 $2 - 2e \leq R_2 - R_1 \leq 1$；若 $2 - 2e \leq R_2 - R_1 \leq 0$，则 $R_2 - R_1$ 为偶数。若$R_2 - R_1 = 1$，则 $\mathrm{ord}\, a_1a_2 = R_1 + R_2$为奇数，因此 $d(-a_1a_2) = 0$，于是条件 $d(-a_1a_2) = R_1 - R_2 + 1$ 是多余的。 □

回顾一下， $R_2 - R_1 = -2e$当且仅当 $a_2/a_1 \in -\frac{1}{4}\mathcal{O}^{\times 2}$或 $-\frac{\Delta}{4}\mathcal{O}^{\times 2}$，在这种情况下， L 在相似意义下同构于 $A(0,0)$或 $A(2, 2\rho)$。当 L 是双曲的时（这是引理 4.3(iii)处理的情形）， L' 不是格。对于其余情形，我们有：

引理 4.8 假设 L 是极大且非双曲的。设 $V = FL$。

(i) $g(a_2/a_1) = \mathcal{O}^{\times 2} \cap \mathrm{N}(-a_1a_2)$。

(ii) $O(L) = O(V)$，因此 $G(a_2/a_1) = \theta(O^+(L)) = \theta(O^+(V)) = \mathrm{N}(-a_1a_2)$。

(iii) 若 $R_2 - R_1 = -2e$，即若 $a_2/a_1 \in -\frac{\Delta}{4}\mathcal{O}^{\times 2}$，则 $L' = \mathfrak{p}L \cong \prec \pi^2 a_1, \pi^2 a_2 \succ$相对于 *BONG* $\pi x_1, \pi x_2$。

(iv) 若 $2 - 2e \leq R_2 - R_1 \leq 1$ 且 $d(-a_1a_2) = R_1 - R_2 + 1$，则存在 $\eta \in \mathcal{O}^\times$ 使得 $(\pi\eta, -a_1a_2)_{\mathfrak{p}} = 1$，并且对每个这样的 η，都有 $L' \cong L^{\pi\eta} \cong \prec \pi\eta a_1, \pi\eta a_2 \succ$。

Proof. 注意到 $\det V \neq -1$，因此 V是各向异性的，我们可以应用引理 4.2。

(i) 若 $\eta \in \mathcal{O}^\times$，则 $\eta \in g(a_2/a_1)$ 当且仅当 $L \cong \prec \eta a_1, \eta a_2 \succ \cong L^\eta$。一个必要条件是 $FL \cong FL^\eta$，即 $[a_1, a_2] \cong [\eta a_1, \eta a_2]$，这等价于 $\eta \in \mathrm{N}(-a_1a_2)$。因此 $g(a_2/a_1) \subseteq \mathcal{O}^{\times 2} \cap \mathrm{N}(-a_1a_2)$。反过来，若 $\eta \in \mathcal{O}^\times \cap \mathrm{N}(-a_1a_2)$，则 $FL \cong FL^\eta$，所以$V = FL$ 包含一个格 $M \cong L^\eta$。由于 L 是极大的，且 $\eta \in \mathcal{O}^\times$， L^η 也具有相同范数并且是极大的。但根据引理 4.2，在 V 上只有一个 $\mathfrak{n}L$-极大格，因此 $L = M \cong L^\eta$。于是 $[a_1, a_2] \cong [\eta a_1, \eta a_2]$，从而 $\eta \in g(a_2/a_1)$。

(ii) 根据引理 4.2，我们有 $O(L) = O(V)$。于是 $O^+(L) = O^+(V)$，因此 $\theta(O^+(L)) = \theta(O^+(V)) = \mathrm{N}(-\det V) = \mathrm{N}(-a_1a_2)$。

对于 (iii) 和 (iv)，注意到由于 L is $\mathfrak{n}L$-极大，根据引理 4.2，我们有 $L = \{x \in V \mid Q(x) \in \mathfrak{n}L\}$。由此可得 $L' = \{x \in V \mid Q(x) \in \mathfrak{p}\mathfrak{n}L\}$，因此 L' 是 V 上唯一的$\mathfrak{p}\mathfrak{n}L$-极大格。

(iii) 由于 $a_2/a_1 \in -\Delta F$，我们有 $V \cong [a_1, a_2] \cong [a_1, -\Delta a_1]$。由此可得 $\dot{V}$仅表示满足 $\mathrm{ord}\, b \equiv \mathrm{ord}\, a_1 = \mathrm{ord}\ \mathfrak{n}L \pmod 2$ 的元素。特别地， V不表示与 $\mathfrak{p}\mathfrak{n}L$赋值相同的元素。因此 $L' = \{x \in V \mid Q(x) \in \mathfrak{p}\mathfrak{n}L\} = \{x \in V \mid Q(x) \in \mathfrak{p}^2\mathfrak{n}L\}$，所以 L' 是 V 上唯一的 $\mathfrak{p}^2\mathfrak{n}L$-极大格。但 L 是$\mathfrak{n}L$-极大的，因此 $\mathfrak{p}L$ 是 $\mathfrak{p}^2\mathfrak{n}L$-极大的。故 $L' = \mathfrak{p}L$。

(iv) 由于 $R_2 - R_1 \geq 2 - 2e$，我们有 $d(-a_1a_2) = R_1 - R_2 + 1 < 2e = d(\Delta)$，因此 $-a_1a_2 \neq \Delta$属于 $\dot{F}/\dot{F}^2$。由此可知 $\mathrm{N}(-a_1a_2) \not\subseteq \mathrm{N}(\Delta) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，所以 $\mathrm{N}(-a_1a_2)$ 包含奇数阶元素。令 $\eta \in \mathcal{O}^\times$ 使得 $\pi\eta \in \mathrm{N}(-a_1a_2)$，即使得 $(\pi\eta, -a_1a_2)_{\mathfrak{p}} = 1$。由此可知 $[a_1, a_2] \cong [\pi\eta a_1, \pi\eta a_2]$，因此，由于 $L^{\pi\eta} \cong \prec \pi\eta a_1, \pi\eta a_2 \succ$,

我们有 $V = FL \cong FL^{\pi\eta}$。令 $M \cong L^{\pi\eta}$ 为域 V 上的一个格。由于 L 是 $\mathfrak{n}L$-极大的，M 是 $\mathfrak{p}\mathfrak{n}L$-极大的，因此 $L' = M \cong L^{\pi\eta}$。□

注意，若 L' 是一个格，则除 $\mathfrak{n}L = 2\mathfrak{s}L$ 的情形外，引理 4.3(iv) 描述了所有情形下的 L'；但 L 不会分裂尺度为 $\mathfrak{s}L$ 的双曲格。现在我们来处理这一剩余情形。

引理 4.9 $\mathfrak{n}L = 2\mathfrak{s}L$ 当且仅当 $R_2 - R_1 = -2e$。

Proof. 条件 $\mathfrak{n}L = 2\mathfrak{s}L$ 可写为 $\operatorname{ord}\mathfrak{n}L = \operatorname{ord}\mathfrak{s}L + e$。由于根据引理 1.5(i)，$\operatorname{ord}\mathfrak{n}L = R_1$ 和 $\operatorname{ord}\mathfrak{s}L = \min\{R_1, (R_1+R_2)/2\}$，因此这等价于 $R_1 = (R_1+R_2)/2 + e$，也就是 $R_2 - R_1 = -2e$。□

引理 4.10 假设 $\mathfrak{n}L = \mathfrak{p}^R$，即 $R_1 = R$。则下列条件等价。

(1) $\mathfrak{n}L = 2\mathfrak{s}L$ 和 L 不分裂尺度为 $\mathfrak{s}L$ 的任何双曲格。*(2)* $L = J \perp K$，其中 $J \cong \frac{1}{2}\pi^R A(2, 2\rho)$ 和 $\mathfrak{n}K \subset \mathfrak{n}L$（若秩 $L \doteq 2$，则为 $K = 0$）。*(3)* $R_2 - R_1 = -2e$, $R_1 < R_3$（或 $n = 2$）和 $d(-a_1a_2) = 2e$，即 $a_1a_2 \in -\Delta F$。

此外，若 *(1)-(3)* 成立，则 $L' = \mathfrak{p}J \perp K$ 和 $L/L' \cong \mathcal{O}/\mathfrak{p} \oplus \mathcal{O}/\mathfrak{p}$。我们还可以取 $J \cong \prec a_1, a_2 \succ$ 和 $K \cong \prec a_3, \ldots, a_n \succ$。

Proof. 假设 (2) 成立。则 $\mathfrak{n}L = \mathfrak{n}J$ 且 $\mathfrak{s}L \supseteq \mathfrak{s}J = \frac{1}{2}\mathfrak{n}J = \frac{1}{2}\mathfrak{n}L$。由此可得 $\mathfrak{s}L = \frac{1}{2}\mathfrak{n}L$，即 $\mathfrak{n}L = 2\mathfrak{s}L$。

由引理 4.3(i) 与 4.8(iii)，$L' = J' \perp K = \mathfrak{p}J \perp K$。于是，由于 L' 是一个格，由引理 4.3(iii)，L 不能分解一个尺度为 $\mathfrak{s}L$ 的双曲格，故 (1) 成立。因此我们证明了 (2)⇒(1)。

假设 (3) 成立。我们有 $R =$ 赋值 $\mathfrak{n}L = R_1$。由于 $R_2 - R_1 = -2e$，由引理 4.9，我们有 $\mathfrak{n}L = 2\mathfrak{s}L$。若 $n \geq 3$，则 $R_3 > R_1 > R_2$，且若 $n \geq 4$，则 $R_4 - R_3 \geq -2e$，故 $R_4 \geq R_3 - 2e > R_1 - 2e = R_2$。于是，由引理 1.5(ii)，我们有一个分解 $L = J \perp K$，其中 $J \cong \prec a_1, a_2 \succ$ 且 $K \cong \prec a_3, \ldots, a_n \succ$。由于 $R_2 - R_1 = -2e$ 且 $a_1a_2 \in -\Delta\dot{F}^2$，我们有 $a_2/a_1 \in -\frac{\Delta}{4}\mathcal{O}^{\times 2}$，故由引理 1.4，我们有 $J \cong \frac{1}{2}\pi^{R_1}A(2, 2\rho) = \frac{1}{2}\pi^R A(2, 2\rho)$。我们还有赋值 $\mathfrak{n}K = R_3 > R_1 =$ 赋值 $\mathfrak{n}L$，故 (2) 成立。因此 (3)⇒(2)。

现在假设 (1) 成立。由于 $\mathfrak{s}L = \frac{1}{2}\mathfrak{n}L = \frac{1}{2}\mathfrak{p}^R$ 和 L 不能分解 $\frac{1}{2}\mathfrak{p}^R A(0, 0)$，$L$ 不能表示 $\frac{1}{2}\mathfrak{p}^R A(0, 0)$。由引理 4.9，条件 $\mathfrak{n}L = 2\mathfrak{s}L$ 等价于 $R_2 - R_1 = -2e$。这意味着 $\prec a_1$、$a_2 \succ \cong \frac{1}{2}\pi^R A(0, 0)$ 或 $\frac{1}{2}\pi^R A(2, 2\rho)$，分别对应于 $a_1a_2 \in -\dot{F}^2$ 或 $-\Delta\dot{F}^2$。（回忆一下，$R = R_1$。）但 L 不能表示 $\frac{1}{2}\pi^R A(0, 0)$，所以后一种情况成立。假设 $n \geq 3$ 且 $R_1 = R_3$。由于 $\operatorname{ord} a_3/a_2 = R_3 - R_2 = 2e$，由引理 2.19(ii)，$\Delta \in g(a_3/a_2)$；由引理 1.5(iv)，这意味着 $L \cong \prec a_1$、Δa_2、Δa_3、a_4、……、$a_n \succ$ 相对于某个良好 BONG。由此可知，L 表示 $\prec a_1$、$\Delta a_2 \succ$。但 $R_2 - R_1 = -2e$ 且 $a_1a_2 \in -\Delta\dot{F}^2$，所以 $a_1\Delta a_2 \in -\dot{F}^2$，因此 $\prec a_1$、$\Delta a_2 \succ \cong \frac{1}{2}\pi^R A(0, 0)$。这与假设 L 不能表示 $\frac{1}{2}\pi^R A(0, 0)$ 相矛盾。因此必有 $R_1 < R_3$（或 $n = 2$），于是 (3) 成立。因此 (1)⇒(3)。□

现在，我们针对 L' 在且 $\theta(O^+(L)) \neq F$ 的情形，给出用良好 BONG 对其进行的显式描述。在 [B2] 中，我们定义了二次格的性质 A 和性质 B。

根据命题 1.6(ii) 和 (iii)，若二次格 L 不具有性质 A，则$\mathcal{O}^\times \dot{F}^2 \subseteq \theta(O^+(L))$；若 L具有性质 A 但不具有性质 B，则 $\theta(O^+(L)) = \dot{F}$。因此，若 $\theta(O^+(L)) \neq \dot{F}$，则 L具有性质 B，或者 $\theta(O^+(L)) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。（我们有 $|\dot{F}/\mathcal{O}^\times \dot{F}^2| = 2$，因此 $\mathcal{O}^\times \dot{F}^2$和 $\dot{F}$之间不存在中间群。）

引理 4.11 假设 $R_k = R_l =: R$ 对于某个 $1 \le k < l \le n$成立，且 $k \equiv l$ (模 2)。*(i)* $R_k = R_{k+2} = \cdots = R_l = R$ $R_k \equiv R_{k+1} \equiv \cdots \equiv R_l = R$ 2 $a_{k\,l} \in$,(模) 以及 ,。$\pi^R \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$

(ii) 若 $G(a_{i+1}/a_i) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$ 对于 $k \le i \le l-1$ 和 $\varepsilon \in \mathcal{O}^\times$成立，使得 $a_{k,l} \in (-1)^{(l-k)/2}\pi^R \varepsilon \dot{F}^2$，则 $L = H_1 \perp \cdots \perp H_{(l-k)/2} \perp K$，其中 $H_t \cong \pi^{(R+R_{k+2t-1})/2}A(0,\ 0)$以及 $K \cong \prec a_1,\ \ldots\ldots,\ a_{k-1},\ \pi^R\varepsilon,\ a_{l+1},\ \ldots\ldots,\ a_n \succ$。

Proof. (i) 我们有 $R = R_k \le R_{k+2} \le \cdots \le R_l = R$，故 $R_k = R_{k+2} = \cdots = R_l = R$。特别地，对 $k \le i \le l$有 $R_i \equiv R$（模 2），$i \equiv k$（模 2）。若 $k < i < l$、$i \equiv k+1$（模 2），则 $R_{i-1} = R_{i+1} = R$，因此由引理 3.5(ii)，$R_i \equiv R_{i-1} = R$（模 2）。

我们记 $a_i = \pi^{R_i}\varepsilon_i$，其中 $\varepsilon_i \in \mathcal{O}^\times$。于是 $a_{k,\,l} = \pi^{R_k+\cdots+R_l}\varepsilon_{k,\,l}$。但 $R_k + \cdots + R_l$是奇数个均为 $\equiv R$（模 2）的整数之和，故 $R_k + \cdots + R_l \equiv R$（模 2）。因此在 $\dot{F}/\dot{F}^2$中我们有 $a_{k,\,l} = \pi^R\varepsilon_{k,\,l} \in \pi^R\mathcal{O}^\times\dot{F}^2$。

(ii) 在 $\dot{F}/\dot{F}^2$中，我们有$a_{k,\,l} = \pi^R\varepsilon_{k,\,l}$，因此$a_{k,\,l} =$(−1)$^{(l-k)/2}\pi^R\varepsilon$当且仅当 $\varepsilon =$(−1)$^{(l-k)/2}\varepsilon_{k,\,l}$属于$\mathcal{O}^\times/\mathcal{O}^{\times 2}$。

我们对 $l-k$使用归纳法证明结论。当 $l-k=2$ 时，这正是 [B2，引理 7.3]。（在此情形下 $\varepsilon = -\varepsilon_{k,\,k+2}$且 $H_1 \cong \pi^{(R+R_{k+1})/2}A$(0，0) $= \pi^{(R_k+R_{k+1})/2}A$(0，0)。

现在假设 $l-k \ge 4$。由 $l-k=2$ 的情形可得 $L = H_1 \perp M$，其中$H_1 \cong \pi^{(R+R_{k+1})/2}A$(0, 0)且 $M \cong \prec a_1, \ldots, a_{k-1}, a'_{k+2}, a_{k+3}, \ldots, a_n \succ$，其中 $a'_{k+2} =\pi^R\xi = -a_k$,$_{k+2}$属于 $\dot{F}/\dot{F}^2$，即$\xi = -\varepsilon_k$,$_{k+2}$属于 $\mathcal{O}^\times/\mathcal{O}^{\times 2}$。我们有 $k+2 < l$, $k+2 \equiv l$(模 2)，赋值 $a'_{k+2} = R = R_{k+2} = R_l$以及 $G(a_{i+1}/a_i) \subseteq \mathcal{O}^\times\dot{F}^2$，对 $k+3 \le i \le l-1$成立。为了使用归纳假设，我们还需证明 $G(a_{k+3}/a'_{k+2}) \subseteq \mathcal{O}^\times\dot{F}^2$。由于在 $\dot{F}/\mathcal{O}^{\times 2}$ 中有 $a_{k+3} = \pi^{R_{k+3}}\varepsilon_{k+3}$ 且$a'_{k+2} = -\pi^R\varepsilon_k$,$_{k+2}$，这等价于$G$(−$\pi^{R_{k+3}-R}\varepsilon_k$, =) $\subseteq \mathcal{O}^\times\dot{F}^2$。根据 [B2，引理 7.2(ii)],，这可由 $G(a_{k+1}/a_k)$ (,) , ( ) (,) ,$R = R_{k+3} - R_k \ge R_{k+1} - R_k$ 以及 $R_{k+3} - R = R_{k+3} - R_{k+2}$推出。

$G\ \pi^{R_{k+1}-R_k}\varepsilon_{k\,k+1}\ _{k+3} \subset \mathcal{O}^\times\dot{F}^2\ G\ a_{k+3}/a_{k+2} = G\ \pi^{R_{k+3}-R_{k+2}}\varepsilon_{k+2\,k+3} \subset \mathcal{O}^\times\dot{F}^2\ R_{k+3} -$

根据归纳假设，$M = H_2 \perp \cdots H_{(l-k)/2} \perp K$。这里 H_2，.....，$H_{(l-k)/2}$是尺度的阶分别为 $(R+R_{k+3})/2$、$(R+R_{k+5})/2$、.....、$(R+R_{l-1})/2$ 的双曲格，即对 $2 \le t \le (l-k)/2$ 以及 $K \cong \prec a_1,\ \ldots\ldots,\ a_{k-1},\ \pi^R\varepsilon,\ a_{j+1},\ \ldots\ldots,\ a_n \succ$，有 $H_t \cong \pi^{(R+R_{k+2t-1})/2}A$(0, 0)，其中 $\varepsilon \in \mathcal{O}^\times$ 使得在 $\dot{F}/\dot{F}^2$ 中我们有 $\pi^R\varepsilon =$ (−1)$^{(l-(k+2))/2}a'_{k+2}a_{k+3}\cdots a_l$。但在 $\dot{F}/\dot{F}^2$ 中我们也有 $a'_{k+2} = -a_k$, $_{k+2}$，因此 $\pi^R\varepsilon =$(−1)$^{(k-l)/2}a_l$, $_k$，正如所断言的。于是我们得到所需的关系 $L = H_1 \perp M = H_1 \perp \cdots \perp H_{(k-l)/2} \perp K$。 □

推论 4.12 *(i)* 设 $1 \le k < l \le n$，其中 $k \equiv l$ (模 2)，并设 $\varepsilon \in \mathcal{O}^\times$。假设相对于某个良好 *BONG*，$K \cong \prec a_1, \ldots, a_{k-1}, \pi^R\varepsilon, a_{l+1}, \ldots, a_n \succ$，且 赋值 $a_i = R_i$。设 $R_k, \ldots, R_l \in \mathbb{Z}$，其中 $R_k = R_{k+2} = \cdots = R_l = R$, $R_k \equiv R_{k+1} \equiv \cdots \equiv R_l \equiv R$(模 2)、$R - 2e \le R_{k+1} \le R_{k+3} \le \cdots \le R_{l-1} \le R + 2e$, $R_{k-1} \le R_{k+1}$(若 $k > 1$)，以及$R_{l-1} \le R_{l+1}$ (若 $l < n$)。

若 $L = H_1 \perp \cdots \perp H_t \perp K$，其中 $H_t \cong \pi^{(R+R_{k+2t-1})/2}A(0、0)$ 对 $1 \le t \le (l-k)/2$ 成立，则 $L \cong \prec a_1, \ldots, a_{k-1}, \pi^{R_k}\varepsilon, -\pi^{R_{k+1}}\varepsilon, \pi^{R_{k+2}}\varepsilon, \ldots, -\pi^{R_{l-1}}\varepsilon, \pi^{R_l}\varepsilon, a_{l+1}, \ldots, a_n \succ$。*(ii)* 若 L 是引理 *4.11(ii)* 中的格，则$L \cong \prec a_1, \ldots, a_{k-1}, \pi^{R_k}\varepsilon, -\pi^{R_{k+1}}\varepsilon, \pi^{R_{k+2}}\varepsilon, \ldots, -\pi^{R_{l-1}}\varepsilon, \pi^{R_l}\varepsilon, a_{l+1}, \ldots, a_n \succ$。

Proof. (i) 我们利用引理 1.4 证明存在一个格 $L \cong \prec a_1, \ldots, a_n \succ$，其中 $a_i = (-1)^{t-i}\pi^{R_i}\varepsilon$ 对于 $k \le t \le l$ 成立；然后利用引理 4.11 证明$L \cong H_1 \perp \cdots \perp H_{(l-k)/2} \perp K$。

对每个 $1 \le i \le n$，ord $a_i = R_i$ 都成立，因此我们必须验证 $R_i \le R_{i+2}$ 对$1 \le i \le n-2$ 成立，且 $a_{i+1}/a_i \in \mathcal{A}$ 对 $1 \le i \le n-1$ 成立。由 K 对应的条件可知， $R_i \le R_{i+2}$ 对 $1 \le i \le k-3$ 和 $l+1 \le i \le n-2$ 成立；此外，我们还有 $R_{k-2} \le R = R_k$ （若 $k \ge 3$）以及 $R_l = R \le R_{l+2}$ （若 $l \le n-2$）。接下来只需证明当 $k-1 \le i \le l-1$ 时 $R_i \le R_{i+2}$ 成立。但这可由假设 $R_{k-1} \le R_{k+1} \le R_{k+3} \le \cdots \le R_{l-1} \le R_{l+1}$ 和 $R_k = R_{k+2} = \cdots = R_l$ 推出。根据 K 的条件，对于 $1 \le i \le k-2$，我们有 $a_{i+1}/a_i \in \mathcal{A}$；对于 也有。从 K 对应的条件可得， $a_{i+1}/a_i \in \mathcal{A}$ 对 $1 \le i \le k-2$ 和 $l+1 \le i \le n-1$ 成立；此外，我们还有 $a_k/a_{k-1} = \pi^R\varepsilon/a_{k-1} \in \mathcal{A}$ 和 $a_{l+1}/a_l = a_{l+1}/\pi^R\varepsilon \in \mathcal{A}$。因此接下来只需证明 $a_{i+1}/a_i \in \mathcal{A}$ 对 $k \le i \le l-1$ 成立。在这些指标处，我们有 $a_{i+1}/a_i = -\pi^{R_{i+1}-R_i}$。此外， $R_{i+1} - R_i$ 是偶数，所以 $\pi^{R_{i+1}-R_i} \in \dot{F}^2$，进而 $R_{i+1} - R_i + d($ $\pi^{R_{i+1}-R_i}) = \infty > 0$。我们还需要证明 $R_{i+1} - R_i \ge -2e$。根据假设，对于每个 $k \le j \le k$，若 $j \equiv k$ （模 2），则有$R_j = R$；若 $j \equiv k+1$ （模 2），则有 $R - 2e \le R_j \le R + 2e$。因此，若 $i \equiv k$ （模 2），则有$R_{i+1} - R_i = R_{i+1} - R \ge -2e$；若 $i \equiv k+1$（模 2），则有 $R_{i+1} - R_i = R - R_i \ge -2e$。证明至此完成。

因此格 $L \cong \prec a_1, \ldots, a_n \succ$ 存在。我们有 $k < l$, $R_k = R_l = R$，并且对于$k \le i \le l-1$，有 $R_{i+1} - R_i$ 是偶数且 d(1) $= \infty > e -$($R_{i+1} - R_i$)/2，所以根据[B2、引理 7.2(i)]，，我们有 G(a_{i+1}/a_i) $= G(-\pi^{R_{i+1}-R_i}) \subseteq \mathcal{O}^\times\dot{F}^2$。若 $k \le i \le l$，则 $R_i \equiv R$(mod 2)，所以在 $\dot{F}/\dot{F}^2$ 中我们有 $a_i =$(−1) $^{i-k}\pi^{R_i}\varepsilon_i$，其中 $\varepsilon_i =$(−1)$^{i-k}\varepsilon$。与引理 4.11 的证明相同，我们有 $R_k + \cdots + R_l \equiv R$(mod 2)，因此 $a_{k,l} = \pi^R\varepsilon_{k,l}$属于 $\dot{F}/]\dot{F}^2$。由于序列 $\varepsilon_k, \ldots, \varepsilon_l$是 $\varepsilon, -\varepsilon, \ldots, -\varepsilon, \varepsilon$，其中有 $(k-l)/2+1$ 个 ε副本和 $(k-l)/2$ 个 $-\varepsilon$副本，在 $\dot{F}/\dot{F}^2$中我们有 $\varepsilon_{k,l} =$(−1)$^{(l-k)/2}\varepsilon$，所以 $a_{k,l} =$(−1)$^{(l-k)/2}\pi^R\varepsilon$。于是，根据引理 4.11(ii)，我们有 $L \cong H_1 \perp \cdots \perp H_{(l-k)/2} \perp K$。

(ii) 若 L 如引理 4.11(ii) 中所述，则我们有一个分解 $L = H_1 \perp \cdots \perp H_{(l-k)/2} \perp K$，其中 K 和 H_t 如 (i) 中所述。为证明所述结果，我们必须验证 R_k、.....、 R_l满足 (i) 的条件。由引理 4.11(i) 可得条件 $R_k = R_{k+2} = \cdots = R_l = R$ 和 $R_k \equiv R_{k+1} \equiv \cdots \equiv R_l = R$(mod 2)。由于 $R_i = R_i(L)$，我们有 $R_{k-1} \le R_{k+1} \le R_{k+3} \le \cdots \le R_{l-1} \le R_{l+1}$；又由于 $R_{k+1} - R_k \ge -2e$ 和$R_l - R_{l-1} \ge -2e$，我们也有 $R - 2e = R_k - 2e \le R_{k+1}$ 和 $R_{l-1} \le R_l + 2e = R + 2e$。因此，(i) 的所有条件均已满足。 □

Lemma 4.13 假设 $n \ge 2$ 和 L 具有性质 *B*，或者 $\theta(O^+(L)) = \mathcal{O}^\times\dot{F}^2$。

(i) 若 $1 \le i \le n-2$ 且 $R_i < R_{i+2}$，则 $R_{i+2} - R_i \ge 2$。

(ii) 若 $1 \le i \le n-1$、 $R_{i+1} - R_i > -2e$ 和 $\prec a_i$、 $a_{i+1} \succ$ 是极大的，则 $\theta(O^+(L)) \not\subseteq \mathcal{O}^\times\dot{F}^2$，因此 L 具有性质 *B*。

Proof. (i) 若 L 具有性质 B，这只是 [B2，注记 4.12]。若 $\theta(O^+(L)) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，则这由 R_1，……，R_n 具有相同奇偶性这一事实得出。（参见定理 1.9 后的注记。）

由推论 4.7，$2-2e \le R_{i+1}-R_i \le 1$ 与 $d(-a_ia_{i+1}) = R_i - R_{i+1}+1 \le 2e-1$，并且由引理 4.8(ii)，$\theta(O^+(L)) \supseteq \theta(O^+(\prec a_i, a_{i+1} \succ)) = \mathrm{N}(-a_ia_{i+1})$。由于 $d(-a_ia_{i+1}) < 2e = d(\Delta)$，我们有 $-a_ia_{i+1} \neq \Delta$ 属于 $\dot{F}/\dot{F}^2$，因此 $\mathrm{N}(-a_ia_{i+1}) \not\subseteq \mathrm{N}(\Delta) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。从而 $\theta(O^+(L)) \not\subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。由假设，这表明 L 具有性质 B。 □

引理 4.14 设 L 如引理 *4.13* 中所述。

若 e 则 (ii) 若 $a_1a_2 \in -\Delta\dot{F}^2$ 且 $R_1 < R_3$（或 $n=2$），则 $L' \cong \prec \pi^2a_1, \pi^2a_2, a_3, \ldots, a_n \succ$。*(ii)* 若 $a_1a_2 \in -\dot{F}^2$ 或 $R_1 = R_3$，则 L' 不是格。

若 $R_2 - R_1 > -2e$ 或 $n = 1$，则：

(iii) 若 $\prec a_1$，$a_2 \succ$ 不是极大格，且 $R_1 < R_3$（或 $n=2$），则 $L' \cong \prec \pi^2a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \succ$。若 $n = 1$，结论也成立。

(iv) 若 $\prec a_1$，$a_2 \succ$ 是极大格，则存在 $\eta \in \mathcal{O}^\times$，使得 $(\pi\eta, -a_1a_2)_p = 1$，并且对每个这样的 η，都有 $L' \cong \prec \pi\eta a_1, \pi\eta a_2, a_3, \ldots, a_n \succ$。

(v) 若 $R_1 = R_3$ 且 $1 \le k \le \frac{n-1}{2}$ 关于性质 $R_1 = R_{2k+1}$是极大的，则$a_{1,\,2k+1} \in (-1)^k \varepsilon \pi^{R_1} \dot{F}^2$ 对某个 $\varepsilon \in \mathcal{O}^\times$ 成立，并且我们有

$$L \cong \prec \pi^{R_1}\varepsilon, -\pi^{R_2}\varepsilon, \pi^{R_3}\varepsilon, \ldots, -\pi^{R_{2k}}\varepsilon, \pi^{R_{2k+1}}\varepsilon, a_{2k+2}, \ldots, a_n \succ$$

and

$$L' \cong \prec \pi^{R_1+2}\varepsilon, -\pi^{R_2-2}\varepsilon, \pi^{R_3+2}\varepsilon, \ldots, -\pi^{R_{2k}-2}\varepsilon, \pi^{R_{2k+1}+2}\varepsilon, a_{2k+2}, \ldots, a_n \succ.$$

Proof. (i) 由引理 4.10，我们有 $L' = \mathfrak{p}J \perp K$，其中 $J \cong \prec a_1$，$a_2 \succ$ 以及 $K \cong \prec a_3$，……，$a_n \succ$。我们有 $\mathfrak{p}J \cong \prec \pi^2a_1$，$\pi^2a_2 \succ$。因此，为证明 $L' = \mathfrak{p}J \perp K \cong \prec \pi^2a_1$，$\pi^2a_2$，$a_3$，……，$a_n \succ$，由引理 1.5(ii)，我们必须证明赋值 $\pi^2a_1 \le$赋值 a_3、赋值 $\pi^2a_2 \le$赋值 a_3（若 $n \ge 3$）以及赋值 $\pi^2a_2 \le$赋值 a_4（若 $n \ge 4$），即 $R_1+2 \le R_3$、$R_2+2 \le R_3$与 $R_2+2 \le R_4$。由引理 4.13(i)，$R_1 < R_3$ 蕴含 $R_3 - R_1 \ge 2$，即 $R_1 + 2 \le R_3$。由于 $R_2 < R_1$，我们还有 $R_2 + 2 < R_3$。又由于 $R_4 - R_3 \ge -2e = R_2 - R_1$，我们有$R_4 - R_2 \ge R_3 - R_1 \ge 2$，故 $R_2 + 2 \le R_4$。

(ii) 由引理 4.3(iii)、4.9 和 4.10 得出。

(iii) 根据推论 4.5，只需证明存在一个格 $K \cong \prec \pi^2a_1$，a_2，……，$a_n \succ$。引理 1.4 的大部分条件都由相对于良好 BONG 的 $L \cong \prec a_1$，a_2，……，$a_n \succ$ 这一事实推出。其余条件 $a_2/(\pi^2a_1) = \pi^{-2}a_2/a_1 \in \mathcal{A}$ 和 $\mathrm{ord}\ \pi^2a_1 = R_1 + 2 \le R_3 = \mathrm{ord}\, a_3$，则由引理 4.6 和引理 4.13(i) 得出。（我们有$R_1 < R_3$，所以 $R_3 - R_1 \ge 2$。）

(iv) 由引理 4.13(ii)，L 必须具有性质 B，因此 $R_1 + 2 \le R_3$ 和 $R_2 + 2 \le R_4$。由推论 4.7，$R_2 - R_1 \le 1$，因此 $R_2 + 1 \le R_1 + 2 \le R_3$。由引理 1.5(ii)，由于$R_2 < R_3$，我们有 $L = J \perp K$，其中 $J \cong \prec a_1$，$a_2 \succ$且 $K \cong \prec a_3$，…，$a_n \succ$。我们有$\mathfrak{n}K = \mathfrak{p}^{R_3} \subset \mathfrak{p}^{R_1} = \mathfrak{n}L$，因此由引理 4.3(i)，可得 $L' = J' \perp K$。由引理 4.8(iv)，$J' \cong \prec \pi\eta a_1$，$\pi\eta a_2 \succ$。接着由引理可得 $L' = J' \perp K \cong \prec \pi\eta a_1$，$\pi\eta a_2$，…，$a_n \succ$

1.5(ii)，由 赋值 $\pi\eta a_1 = R_1 + 1 < R_3$ =赋值 a_3、赋值 $\pi\eta a_2 = R_2 + 1 \le R_3$ =赋值 a_3 以及 赋值 $\pi\eta a_2 = R_2 + 1 < R_4$ =赋值 a_4。

(v) 当对 (k,l) 为 $(1, 2k+1)$ 时，我们将应用引理 4.11 和推论 4.12。由于 $R_1 = R_3$, L 不具有性质 B，因此我们有 $\theta(O^+(L)) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。由定理 1.9， $G(a_{i+1}/a_i) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$ 对于 $1 \le i \le n-1$ 成立。此外，由于 $R_1 = R_3$，我们有 $(R_2 - R_1)/2 \equiv e$（模 2），即 $R_2 - R_1 \equiv 2e$（模 4）。因此， $R_2 - R_1 > -2e$ 蕴含 $R_2 - R_1 \ge 4 - 2e$。

由引理 4.11，由于 $R_1 = R_{2k+1} =:$ 对于 $1 \le i \le 2k$， R 且 $G(a_{i+1}/a_i) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，我们有 $L = H_1 \perp \cdots \perp H_k \perp K$，其中 $H_t = \pi^{(R+R_{2t})/2} A(0,0)$，且 $K \cong \prec \pi^R \varepsilon, a_{2k+2}, \ldots, a_n \succ$，其中 $\varepsilon \in \mathcal{O}^\times$ 满足 $a_{1,2k+1} \in (-1)^k \pi^R \varepsilon \dot{F}^2$。此外，由推论 4.12(ii)，我们得到关于 L 的所述公式。

我们有 $\theta(O^+(K)) \subseteq \theta(O^+(L)) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。由于 $\theta(O^+(K)) \ne \dot{F}$， K具有性质 B，或者 $\theta(O^+(K)) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。若 $n \ge 2k+2$，则 $R_{2k+2} - R \ge R_2 - R = R_2 - R_1 > -2e$，即 $\mathrm{ord}\, a_{2k+2} - \mathrm{ord}\, \pi^R \varepsilon > -2e$，因此 K不属于引理中的情形 (i) 和 (ii)。由 k的极大性可知，若 $2k+3 \le n$，则 $R_{2k+3} > R_1 = R$，即 $\mathrm{ord}\, a_{2k+3} > \mathrm{ord}\, \pi^R \varepsilon$，因此 K不属于情形 (v)。最后，由于 $\mathrm{ord}\, a_{2k+2} - \mathrm{ord}\, \pi^R \varepsilon > -2e$ 且 $\theta(O^+(K)) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，根据引理 4.13(ii)， $\prec \pi^R \varepsilon$， $a_{2k+2} \succ$ 不能是极大的。因此 K 属于引理中的情形 (iii)，并且我们有 $K' \cong \prec \pi^{R'} \varepsilon$， a_{2k+2}，…， $a_n \succ$，其中 $R' = R + 2$。

我们将 $R'_1 = R'_3 = \cdots = R'_{2k+1} = R' = R + 2$ 记为 $R'_{2t} = R_{2t} - 2$，并将 $1 \le t \le k$ 记为 $1 \le t \le k$。我们使用推论 4.12(i) 来证明 $L' = H_1 \perp \cdots \perp H_k \perp K' \cong \prec a'_1$，……，$a'_{2k+1}$， $a_{2k+3} \ldots$， $a_n \succ$，其中对于 $1 \le i \le 2k+1$，有 $a'_i = (-1)^{i-1} \pi^{R'_i} \varepsilon$。根据定义，我们有 $R'_1 = R'_3 = \cdots = R'_{2k+1} = R'$。条件 $R'_1 \equiv R'_2 \equiv \cdots \equiv R'_{2k+1} \equiv R'$(模 2) 和 $R'_2 \le R'_4 \le \cdots \le R'_{2k}$ 由 $R_1 \equiv R_2 \equiv \cdots \equiv R_{2k+1} \equiv R$(模 2) 和 $R_2 \le R_4 \le \cdots \le R_{2k}$ 推出。剩下要证明的是 $R'_2 \ge R' - 2e$、 $R'_{2k} \le R' + 2e$，以及当 $n \ge 2k+2$ 时的 $R'_{2k} \le R_{2k+2}$。由于 $R_2 - R_1 \ge 4 - 2e$，我们有 $R'_2 = R_2 - 2 \ge R_1 + 2 - 2e = R' - 2e$。我们有 $R - R_{2k} = R_{2k+1} - R_{2k} \ge -2e$，因此 $R_{2k} \le R + 2e$，并且还有 $R_{2k} \le R_{2k+2}$。由于 $R'_{2k} = R_{2k} - 2 < R_{2k}$ 和 $R = R' - 2 < R'$，可推出 $R'_{2k} < R' + 2e$ 和 $R'_{2k} < R_{2k+2}$。

因此，根据推论 4.12(i)，存在一个格 $M \cong \prec a'_1$、……、a'_{2k+1}， $a_{2k+2} \ldots$， $a_n \succ$，并且有 $M \cong \bar{H}_1 \perp \cdots \perp \bar{H}_k \perp K'$，其中 $\bar{H}_t = \pi^{(R'+R'_{2t})/2} A(0,\ 0)$。但是对于 $1 \le t \le k$，我们有 $R' + R'_{2t} = (R+2) + (R_{2t} - 2) = R + R_{2t}$，所以 $\bar{H}_t = \pi^{(R+R_{2t})/2} A(0,\ 0) \cong H_t$。因此 $M \cong H_1 \perp \cdots \perp H_t \perp K' \cong L'$，如所声称的。 □

5 个满足 $\theta(O^+(L)) \ne F$ 的格的 BONG

在本节中， $L \cong \prec a_1, \ldots, a_n \succ$ 相对于一个良好 BONG $x_1, \ldots, x_n$ 以及$R_i(L) = R_i$。我们将假设 L 具有性质 B（相对于 BONG$x_1, \ldots, x_n$），或者 $\theta(O^+(L)) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。根据命题 1.6，如果 L 不具有这两种性质中的任何一种，那么 $\theta(O^+(L)) = F$。

引理 5.1 设 $a \in \mathcal{A}$ 使得 赋值 $a = R \le 2e$。*(i)* 若 $G(a) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，则 $g(a) = (1 + \mathfrak{p}^{R/2+e}) \mathcal{O}^{\times 2}$。*(ii)* 若 $G(a) \not\subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，则 $g(a) = (1 + \mathfrak{p}^{R+d(-a)}) \mathcal{O}^{\times 2} \cap \mathrm{N}(-a)$。

Proof. 由 [B2，引理 7.2], 我们有 $G(a) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$ 当且仅当 $d(-a) > e - R/2$ 或 $a = -\Delta/4$（在 $\dot{F}/\mathcal{O}^{\times 2}$ 中）。因此，除情形 $a = -\Delta/4$ 外，(i) 与 (ii) 均由 g 的定义得出（[B2，定义 6]）。在例外情形中，我们有 $R = -2e$，故 $(1 + \mathfrak{p}^{R/2+e})\mathcal{O}^{\times 2} = (1 + \mathfrak{p}^0)\mathcal{O}^{\times 2} = \mathcal{O}^\times$，但 $d(-a) = d(\Delta) = 2e = e - R/2$，故由定义，$g(a) = (1+\mathfrak{p}^{R+d(-a)})\mathcal{O}^{\times 2} \cap \mathrm{N}(-a) = (1+\mathfrak{p}^0)\mathcal{O}^{\times 2} \cap \mathrm{N}(\Delta) = \mathcal{O}^\times \cap \mathrm{N}(\Delta) = \mathcal{O}^\times$。至此证明完毕。 □

引理 5.2 *(i)* 对每一个 $1 \le i \le n-1$，我们有

$$\alpha_i = \alpha_1(\prec a_i, a_{i+1} \succ) = \begin{cases} (R_{i+1} - R_i)/2 + e & \text{if } d(-a_{i,i+1}) > e - (R_{i+1} - R_i)/2 \\ R_{i+1} - R_i + d(-a_{i,i+1}) & \text{if } d(-a_{i,i+1}) \le e - (R_{i+1} - R_i)/2 \end{cases}.$$

(ii) 若 $\theta(O^+(L)) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，则 $\alpha_i = (R_{i+1} - R_i)/2 + e \ \forall 1 \le i \le n-1$。

(iii) 对每一个满足 $\alpha_i < (R_{i+1} - R_i)/2 + e$ 的 $1 \le i \le n-1$，我们有 $R_i - R_{i-1} > 2e$（若 $i > 1$）以及 $R_{i+2} - R_{i+1} > 2e$（若 $i < n-1$）。

Proof. (i) 我们有 $\alpha_1(\prec a_i, a_{i+1} \succ) = \min\{(R_{i+1} - R_i)/2 + e, R_{i+1} - R_i + d(-a_{i,i+1})\}$，它相应地等于 $(R_{i+1} - R_i)/2 + e$ 或 $R_{i+1} - R_i + d(-a_{i,i+1})$，当 $d(-a_{i,i+1}) \ge (R_{i+1} - R_i)/2$ 或 $d(-a_{i,i+1}) \le (R_{i+1} - R_i)/2$ 时。

注意到 $(R_{i+1} - R_i)/2 + e$ 和 $R_{i+1} - R_i + d(-a_{i,\ i+1})$ 都属于其最小值为 α_i 的集合，因此只需证明该集合中的所有其他元素都是 $\ge (R_{i+1} - R_i)/2 + e$。

首先，我们取 $t = R_{i+1} - R_j + d(-a_{j,j+1})$ 类型且满足 $j < i$ 的元素。由于 $j+1 \le i$，我们有 $R_j + R_{j+1} \le R_{j+1} + R_{j+2} \le R_i + R_{i+1}$。如果 $d(-a_{j,j+1}) \ge e - (R_{j+1} - R_j)/2$，那么 $t \ge R_{i+1} - (R_j + R_{j+1})/2 + e \ge R_{i+1} - (R_i + R_{i+1})/2 + e = (R_{i+1} - R_i)/2 + e$。如果 $d(-a_{j,j+1}) < e - (R_{j+1} - R_j)/2$，那么根据 [B2、引理 7.2(i)]，我们有 $G(a_{j+1}/a_j) \not\subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，所以 $\theta(O^+(L)) \not\subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。因此，$L$ 必须具有性质 B，所以 $d(-a_{j,j+1}) < e - (R_{j+1} - R_j)/2$ 意味着 $R_{j+2} - R_{j+1} > 2e$。结合 $R_{j+1} - R_j + d(-a_{j,j+1}) \ge 0$ 和 $R_{j+1} + R_{j+2} \le R_i + R_{i+1}$，这意味着 $t \ge R_{i+1} - R_{j+1} > R_{i+1} - (R_{j+1} + R_{j+2})/2 + e \ge R_{i+1} - (R_i + R_{i+1})/2 + e = (R_{i+1} - R_i)/2 + e$。

现在设 $t = R_{j+1} - R_i + d(-a_{j,j+1})$，其中 $j > i$。由于 $j - 1 \ge i$，我们有 $R_j + R_{j+1} \ge R_{j-1} + R_j \ge R_i + R_{i+1}$。若 $d(-a_{j,j+1}) \ge e - (R_{j+1} - R_j)/2$，则 $t \ge (R_j + R_{j+1})/2 - R_i + e \ge (R_i + R_{i+1})/2 - R_i + e = (R_{i+1} - R_i)/2 + e$。若 $d(-a_{j,j+1}) < e - (R_{j+1} - R_j)/2$，与前一情形相同，$L$ 具有性质 B，故 $d(-a_{j,j+1}) < e - (R_{j+1} - R_j)/2$ 蕴含 $R_j - R_{j-1} > 2e$。结合 $R_{j+1} - R_j + d(-a_{j,j+1}) \ge 0$ 与 $R_{j-1} + R_j \ge R_i + R_{i+1}$，这蕴含 $t \ge R_j - R_i > (R_{j-1} + R_j)/2 - R_i + e \ge (R_i + R_{i+1})/2 - R_i + e = (R_{i+1} - R_i)/2 + e$。

(ii) 若 $\theta(O^+(L)) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，则由 [B2，引理 7.2(i)]，$d(-a_{i,\ i+1}) \ge e - (R_{i+1} - R_i)/2$ 因此，由 (i) 可得 $\alpha_i = (R_{i+1} - R_i)/2 + e$。

(iii) 若 $\alpha_i < (R_{i+1} - R_i)/2 + e$，则由 (ii)，$\theta(O^+(L)) \not\subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，因此 L 必具有性质 B。由 (i)，可得 $d(-a_{i,\ i+1}) < e - (R_{i+1} - R_i)/2$，因此性质 B 蕴含 $R_i - R_{i-1} > 2e$ 和 $R_{i+2} - R_{i+1} > 2e$。 □

引理 5.3 *(i)* 性质 *B* 与 *BONG* 的选取无关。

(ii) 对于 $1 \le i \le n-1$群 $g(a_{i+1}/a_i)$与 *BONG* 的选取无关。

(iii) 若 $L \cong \prec b_1, \ldots\ldots, b_n \succ$ 相对于另一组良好 *BONG*，则对于所有 $1 \le i \le n-1$，$b_{1,i}/a_{1,i} \in g(a_{i+1}/a_i)$。

Proof. 假设 $L \cong \prec b_1, \ldots\ldots, b_n \succ$ 相对于另一组良好 BONG，$y_1, \ldots\ldots, y_n$。

(i) 我们必须证明，若 L 相对于 BONG $x_1, \ldots\ldots, x_n$ 具有性质 B，则它相对于 BONG $y_1, \ldots\ldots, y_n$ 也具有性质 B。由于数 R_i 是不变量，只需证明对于每个满足条件 $d(-b_{i,i+1}) \le e-(R_{i+1}-R_i)/2$ 的 $1 \le i \le n-1$，都有 $d(-a_{i,i+1}) \le e-(R_{i+1}-R_i)/2$。

首先注意，若 $d(-b_{i,i+1}) \le e-(R_{i+1}-R_i)/2$，则 $0 \le e-(R_{i+1}-R_i)/2$，因此 $R_{i+1}-R_i \le 2e$。由引理 5.2(iii)，这意味着 $\alpha_{i-1} = (R_i - R_{i-1})/2 + e > e-(R_{i+1}-R_i)/2$(若 $i > 1$)，且 $\alpha_{i+1} = (R_{i+2}-R_{i+1})/2 + e > e-(R_{i+1}-R_i)/2$ (若 $i < n-1$)。（由于 L具有性质 B，因此它具有性质 A，故 $R_{i-1} < R_{i+1}$ 和 $R_i < R_{i+2}$。）接着，由定理 1.12(iii)，$d(a_{1,i-1}b_{1,i-1}) \ge \alpha_{i-1} > e-(R_{i+1}-R_i)/2$，且 $d(a_{1,i+1}b_{1,i+1}) \ge \alpha_{i+1} > e-(R_{i+1}-R_i)/2$。（当 $i=1$ 和 $i=n-1$ 时，这两个不等式也成立。我们有$a_{1,0} = b_{1,0} = 1$和 $a_{1,n} = b_{1,n} =$det FL在 $\dot{F}/\dot{F}^2$中，因此 $d(a_{1,0}b_{1,0}) = d(a_{1,n}b_{1,n}) = \infty$。）由于 $d(a_{1,i-1}b_{1,i-1})$ $d(a_{1,i+1}b_{1,i+1}) > e-(R_{i+1}-R_i)/2 \ge d(-b_{i,i+1})$，由支配原理可得 $d(-a_{i,i+1}) = d(-b_{i,i+1}) \le e-(R_{i+1}-R_i)/2$。

(ii) 和 (iii) 我们必须证明，对于所有 $1 \le i \le n-1$，$g(a_{i+1}/a_i) = g(b_{i+1}/b_i)$ 且$b_{1,i}/a_{1,i} \in g(a_{i+1}/a_i)$。首先注意到，根据定理 1.12(iii)，$d(b_{1,i}/a_{1,i}) =d(a_{1,i}b_{1,i}) \ge \alpha_i$。此外，赋值 $a_{1,i}$ = 赋值 $b_{1,i} = R_1 + \cdots + R_i$，因此 $b_{1,i}/a_{1,i} \in \mathcal{O}^\times$。由此可得$b_{1,i}/a_{1,i} \in (1+\mathfrak{p}^{\alpha_i})\mathcal{O}^{\times 2}$。

若 $R_{i+1}-R_i > 2e$，则无论 BONG 如何，$g(a_{i+1}/a_i) = \mathcal{O}^{\times 2}$，因此得到 (ii)。由 [B4、推论 2.8(ii)]，$\alpha_i > 2e$，故 $b_{1,i}/a_{1,i} \in (1+\mathfrak{p}^{\alpha_i})\mathcal{O}^{\times 2} = \mathcal{O}^{\times 2} = g(a_{i+1}/a_i)$，因此得到 (iii)。从现在起，我们假设 $R_{i+1}-R_i \le 2e$。

如果 $\theta(O^+(L)) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，那么 $G(a_{i+1}/a_i) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$因此，根据引理 5.1(i)，无论 BONG 如何，$g(a_{i+1}/a_i) = (1+\mathfrak{p}^{(R_{i+1}-R_i)/2+e})\mathcal{O}^{\times 2}$。这就证明了 (ii)。此外，根据引理 5.1(ii)，$\alpha_i = (R_{i+1}-R_i)/2+e$，所以 $b_{1,i}/a_{1,i} \in (1+\mathfrak{p}^{\alpha_i})\mathcal{O}^{\times 2} = (1+\mathfrak{p}^{(R_{i+1}-R_i)/2+e})\mathcal{O}^{\times 2} = g(a_{i+1}/a_i)$。因此得到 (iii)。

剩下的情况是 L 具有性质 B；根据 (i)，这与 BONG 无关。根据 (i) 的证明，$d(-a_{i,i+1}) \le e-(R_{i+1}-R_i)/2$当且仅当 $d(-b_{i,i+1}) \le e-(R_{i+1}-R_i)/2$。因此有两种情况。

(a) $d(-a_{i,i+1})$ $d(-b_{i,i+1}) > e-(R_{i+1}-R_i)/2$。我们有 $g(a_{i+1}/a_i) = g(b_{i+1}/b_i) = (1+\mathfrak{p}^{(R_{i+1}-R_i)/2+e})\mathcal{O}^{\times 2}$，因此 (ii) 成立。由引理 5.2(i)，$\alpha_i = (R_{i+1}-R_i)/2+e$，因此 $b_{1,i}/a_{1,i} \in (1+\mathfrak{p}^{\alpha_i})\mathcal{O}^{\times 2} = g(a_{i+1}/a_i)$，故 (iii) 成立。

(b) $d(-a_{i,i+1})$ $d(-b_{i,i+1}) \le e-(R_{i+1}-R_i)/2$。我们有 $g(a_{i+1}/a_i) = (1+\mathfrak{p}^{R_{i+1}-R_i+d(-a_i,^{i+1})})\mathcal{O}^{\times 2} \cap \mathsf{N}(-a_{i,i+1})$。此外，根据引理 5.2(i)，$\alpha_i = R_{i+1}-R_i+d(-a_{i,i+1})$，因此 $b_{1,i}/a_{1,i} \in (1+_{\mathfrak{p}}{}^{R_{i+1}-R_i+d(-a_i,^{i+1})})\mathcal{O}^{\times 2}$。为了完成 (iii) 的证明，我们需要证明 $b_{1,i}/a_{1,i} \in \mathsf{N}(-a_{i,i+1})$。由于 $d(-a_{i,i+1}) \le e-(R_{i+1}-R_i)/2$，性质 B 蕴含 $R_i - R_{i-1} > 2e$（或 $i=1$）以及 $R_{i+2}-R_{i+1} > 2e$（或 $i=n-1$）。于是，根据推论 1.13，我们有 $[a_1,\ldots,a_{i-1}] \cong [b_1,\ldots,b_{i-1}]$和 $[a_1,\ldots,a_{i+1}] \cong [b_1,\ldots,b_{i+1}]$，这意味着$[a_i,a_{i+1}] \cong [b_i,b_{i+1}]$，并且 $a_{1,i-1}b_{1,i-1} = 1$属于 $\dot{F}/\dot{F}^2$。由 $[a_i,a_{i+1}] \cong [b_i,b_{i+1}]$可得 $a_{i+1}/a_i = b_{i+1}/b_i$属于 $\dot{F}/\dot{F}^2$。但 ord $a_{i+1}/a_i =$ ord $b_{i+1}/b_i = R_{i+1}-R_i$，所以实际上$a_{i+1}/a_i = b_{i+1}/b_i$ 属于 $\dot{F}/\mathcal{O}^{\times 2}$，这意味着 $g(a_{i+1}/a_i) = g(b_{i+1}/b_i)$，因此 (ii) 成立。我们还有 $b_i \nrightarrow [a_i,a_{i+1}]$，这意味着 $(a_ib_i,-a_{i,i+1})_{\mathfrak{p}} = 1$，即 $a_ib_i \in \mathsf{N}(-a_{i,i+1})$。

但是在 $\dot{F}\dot{F}^2$ 中，我们有 $a_{1,i-1}b_{1,i-1} = 1$，因此 $b_{1,i}/a_{1,i} = a_ib_i$。所以 $b_{1,i}/a_{1,i} \in \mathrm{N}(-a_{i,i+1})$，这就完成了 (iii) 的证明。 □

5.4 设 $\mathcal{S}_L := \{(a_1, \dots, a_n) \in (\dot{F}/\mathcal{O}^{\times 2})^n \mid L \cong \prec a_1, \dots, a_n \succ$ 相对于一个良好 BONG$\}$。

由于 $g(a_{i+1}/a_i)$ 是格 L 的不变量，我们可以将 $g_i(L)$ 记为 $= g(a_{i+1}/a_i)$。若$\eta \in g_i(L) = g(a_{i+1}/a_i)$，则由引理 1.5(iv) $L \cong \prec a_1, \dots, a_{i-1}, \eta a_i, \eta a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n \succ$，从而 $(a_1, \dots, \eta a_i, \eta a_{i+1}, \dots, a_n) \in \mathcal{S}_L$。因此，对每个 $\eta \in g_i(L)$，我们有一个映射 $t_i(\eta)\colon \mathcal{S}_L \to \mathcal{S}_L$，由 $(a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_1, \dots, \eta a_i, \eta a_{i+1}, \dots, a_n)$ 给出。

显然，任意两个这样的映射 $t_i(\eta)$ 和 $t_j(\eta')$ 都可交换。此外，我们有$t_i(\eta)t_i(\eta') = t_i(\eta\eta')$。

引理 5.5 *(i)* 映射 $t_i(\eta)$ 将乘积 $a_{1,i}$ 变为 $\eta a_{1,i}$，并保持所有与 $j \neq i$ 的乘积 $a_{1,j}$ 不变（在 $\dot{F}/\mathcal{O}^{\times 2}$ 中）。

(ii) 若 $1 \le i \le n-1$ 且 $(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{S}_L$，我们用 $l_i(a_1, \dots, a_n)$ 表示 $\prec a_1, \dots, a_i \succ$ 的等价类，并用 $r_i(a_1, \dots, a_n)$ 表示 $\prec a_{i+1}, \dots, a_n \succ$ 的等价类。则对任意 $j \neq i$ 和 $\eta \in g_j(L)$，我们有 $l_it_j(\eta) = l_i$ 和 $r_it_j(\eta) = r_i$。

Proof. (i) 若 $(a'_1, \dots, a'_n) = t_i(\eta)(a_1, \dots, a_n)$，则 $a'_i = \eta a_i$, $a'_{i+1} = \eta a_{i+1}$和 $a'_j = a_j$对 $j \neq i, i+1$成立。于是对于 $j < i$，我们有 $a'_{1,j} = a_{1,j}$, $a'_{1,i} = \eta a_{1,i}$；而对于 $j > i$，我们在 $\dot{F}/\mathcal{O}^{\times 2}$ 中有$a'_{1,j} = \eta^2 a_{1,j} = a_{1,j}$。

(ii) 设 $a = (a_1, \dots, a_n)$。若 $j < i$，则 $r_it_j(\eta)(a) = \prec a_{i+1}, \dots a_n \succ = r_i(a)$ 且$l_it_j(\eta)(a) = \prec a_1, \dots, \eta a_j, \eta a_{j+1}, \dots, a_i \succ$。但是 $\eta \in g_j(L) = g(a_{j+1}/a_j)$，因此由引理 1.5(iv)可得 $\prec a_1, \dots, \eta a_j, \eta a_{j+1}, \dots, a_i \succ = \prec a_1, \dots, a_i \succ = l_i(a)$。类似地，若 $j > i$，则 $l_it_j(\eta)(a) = \prec a_1, \dots a_i \succ = l_i(a)$ 且 $r_it_j(\eta)(a) = \prec a_{i+1}, \dots, \eta a_j, \eta a_{j+1}, \dots a_n \succ$。于是，再次由引理 1.5(iv)，我们得到 $\prec a_{i+1}, \dots, \eta a_j, \eta a_{j+1}, \dots a_n \succ = \prec a_{i+1}, \dots a_n \succ = r_i(a)$。 □

引理 5.6 *(i)* 若 $L \cong \prec a_1, \dots, a_n \succ \cong \prec b_1, \dots, b_n \succ$ 相对于某些良好 *BONG*，则存在某个 $\eta_i \in g_i(L)$，使得 $(b_1, \dots, b_n) = t_1(\eta_1) \cdots t_{n-1}(\eta_{n-1})(a_1, \dots, a_n)$。也就是说，$\eta_i = b_{1,i}/a_{1,i}$。

(ii) 若对于某个 $1 < i < n$，$a_{1,i} = b_{1,i}$，则 $\prec a_1, \dots, a_i \succ \cong \prec b_1, \dots, b_i \succ$ 和 $\prec a_{i+1}, \dots, a_n \succ \cong \prec b_{i+1}, \dots, b_n \succ$。

Proof. (i) 根据引理 5.3(iii)，$\eta_i := b_{1,i}/a_{1,i} \in g(a_{i+1}/a_i) = g_i(L)$。令 $t_1(\eta_1) \cdots t_{n-1}(\eta_{n-1})(a_1, \dots, a_n) = (c_1, \dots, c_n)$。根据引理 5.5(i)，对于 $1 \le i \le n-1$，当我们应用 $t_i(\eta_i)$ 时，乘积 $a_{1,i}$ 会乘以 η_i；而对于 $j \neq i$，应用 $t_j(\eta_j)$ 后它保持不变。因此，对于 $1 \le i \le n-1$，$c_{1,i} = \eta_i a_{1,i} = b_{1,i}$。$i = n$ 也会发生同样的情况，因为 $a_{1,n} = b_{1,n} = \det L$。由此可得，对于 $1 \le i \le n$，$c_i = b_i$。

(ii) 设 $a = (a_1、\dots\dots、a_n)$ 和 $b = (b_1、\dots\dots、b_n)$。由于 $l_i(a)$、$l_i(b)$、$r_i(a)$ 和 $r_i(b)$ 分别是 $\prec a_1、\dots\dots、a_i \succ$、$\prec b_1、\dots\dots、b_i \succ$、$\prec a_{i+1}、\dots\dots、a_n \succ$ 和 $\prec b_{i+1}、\dots\dots、b_i \succ$的等价类，我们必须证明 $l_i(a) = l_i(b)$ 以及 $r_i(a) = r_i(b)$。

由 (i) 可得 $b = t(a)$，其中 $t = t_1(\eta_1) \cdots t_{n-1}(\eta_{n-1})$。但是 $\eta_i = b_{1,i}/a_{1,i} = 1$，因此 $t_i(\eta_i) = t_i(1) = 1$。于是 $t = t_1(\eta_1) \cdots t_i(\eta_i) \cdots t_{n-1}(\eta_{n-1})$。由于 $l_it_j(\eta_j) = l_i$ 并且

$r_i t_j(\eta_j)$ 对每个 $j \neq i$ 都成立，因此有 $l_i t = l_i$ 并且 $r_i t = r_i$。我们得出 $l_i(b) = l_i t(a) = l_i(a)$，并且 $r_i(b) = r_i t(a) = r_i(a)$。 □

推论 5.7 若 x 与 y 分别是 L 与 Q的良好 *BONG* 中的首元素$(x) = Q(y)$，则对某个 $\sigma \in O^+(L)$，有 $y = \sigma(x)$ 。

Proof. 我们有 $L \cong \prec a_1, \ldots\ldots, a_n \succ$以及 $L \cong \prec b_1, \ldots\ldots, b_n \succ$，它们相对于某些良好 BONG $x = x_1, \ldots\ldots, x_n$以及 $y = y_1, \ldots\ldots, y_n$。由于 $Q(x) = Q(y)$，即$a_1 = b_1$，由引理 5.6(ii)，我们有 $\prec y_2, \ldots\ldots, y_n \succ \cong \prec b_2, \ldots\ldots, b_n \succ \cong \prec a_2, \ldots\ldots, a_n \succ$相对于另一个良好 BONG $z_2, \ldots\ldots, z_n$。然后，由引理 1.5(iv)， $L \cong \prec b_1, a_2, \ldots\ldots, a_n \succ = \prec a_1, \ldots\ldots, a_n \succ$相对于 BONG $y_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$。于是，由$x_1 \mapsto y_1, x_2 \mapsto z_2, \ldots\ldots, x_n \mapsto z_n$给出的线性映射 σ是一个将 $x_1 = x$ 映到 $y_1 = y$的等距变换。若 $\sigma \in O^+(L)$，则得证。若 $\sigma \in O^-(L)$，则由引理 1.5(v)，我们还有 $\tau_{x_2} \in O^-(L)$，故$\sigma' := \sigma\tau_{x_2} \in O^+(L)$。由于 $x = x_1$ 与 x_2 相互正交，我们有 $\tau_{x_2} x = x$，故$\sigma'(x) = \sigma(x) = y$，从而 σ' 具有所需性质。 □

6 两个约化步骤

在本节中，若 $M \cong \prec a_1, \ldots, a_m \succ$ 和 $N \cong \prec b_1, \ldots, b_n \succ$ 相对于某些良好 BONG $x_1, \ldots, x_m$ 和 $y_1, \ldots, y_n$，且 $N \subseteq M$ 和 M 具有性质 B，或 $\theta(O^+(M)) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。对于 $1 \leq i \leq m$，我们记作 $R_i = R_i(M)$；对于 $1 \leq i \leq n$，我们记作 $S_i = R_i(N)$。

当 $\mathfrak{n}M \supset \mathfrak{n}N$ 时，可以应用第一约化步骤，其内容是降低 M 的范数。

与第4节相同，我们用 $M' = \{x \in M \mid x$ 表示非范数生成元 $\}$。

Lem引理 6.1 若 $\theta(X(M/N)) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，则 $R_1 \equiv \cdots \equiv R_m \equiv S_1 \equiv \cdots \equiv S_n$(模 2).

Proof. 由于 $\theta(O^+(M))\ \theta O^+(N)) \subseteq \theta(X(M/N) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，由定理 1.9 后的注记可知，$R_1 \equiv \cdots \equiv R_m$(mod 2) 且 $S_1 \equiv \cdots \equiv S_n$(mod 2)。为完成证明，我们将证明 $R_1 \equiv S_1$(mod 2)，也就是说 $R_1 + S_1$ 是偶数。由引理 1.5(v)，有 $a_1 \in \theta(O^-(M))$ 和 $b_1 \in \theta(O^-(N))$。由于 $O^-(N)O^-(M) \subseteq X(M/N)$，这意味着 $b_1 a_1 \in \theta(X(M/N)) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，因此 $R_1 + S_1 =$的赋值 $a_1 b_1$是偶数。 □

引理 6.2 若 $N \subset M$且 $\mathfrak{n}N \subset \mathfrak{n}M$，则当 M'是格时， $X(M/N) = X(M'/N)$；否则， $\theta(X(M/N)) = F$。

特别地，当 $N = M'$时，我们得到 $O^+(M) \subseteq X(M/M') = X(M'/M') = O^+(M')$。

Proof. 由于 $Q(N) \subseteq \mathfrak{n}N \subset \mathfrak{n}M$，因此我们有 $N \subseteq M'$。

若 M'是格，则对于每个 $\sigma \in X(M/N)$，我们有 $\sigma^{-1}N \subseteq M$且 $\mathfrak{n}\sigma^{-1}N = \mathfrak{n}N \subset \mathfrak{n}M$，因此 $\sigma^{-1}N \subseteq M'$，从而 $\sigma \in X(M'/N)$。于是 $X(M/N) = X(M'/N)$。

若 M'不是格，则根据引理4.3(ii)， $M = H \perp K$，其中 $H \cong {}_2^1\pi^{R_1} A$ 相对于某个基 x, y 为 (0,0)。我们有 $Q(x) = Q(y) = 0$。此外， $\mathcal{O}^\times \dot{F}^2 = \theta(O^+(H)) \subseteq \theta(O^+(M)) \subseteq \theta(X(M/N))$, 因此 $\theta(X(M/N)) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$或 $\dot{F}$。

由于对于每个中间格 $N \subseteq N \subseteq M$，我们都有 $X(M/N) \subseteq X(M/N)$，因此只需证明：当 N 是 M 的极大子格，且满足性质 $N \subseteq M'$，即 $\mathfrak{n}N \subset \mathfrak{n}M$，从而 $S_1 > R_1$时， $X(M/N) = F$。我们证明 $S_1 = R_1 + 1$。于是，根据引理 6.2，由于 $R_1 \not\equiv S_1 \pmod 2$，不可能有 $\theta(X(M/N)) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，因此 $\theta(X(M/N)) = F$。

由引理4.3(ii)， $\mathfrak{p}M + N \subseteq \mathfrak{p}M + M' = M'$，故由 N的极大性，必有 $\mathfrak{p}M + N = N$，即 $\mathfrak{p}M \subseteq N$。由于 $\mathfrak{n}H = \mathfrak{n}M \supset \mathfrak{n}N$，不能有 $H \subseteq N$，故x或 $y \notin N$。不妨设 $x \notin N$。由于 $N \subset \mathcal{O}x + N$，由 N的极大性，不能有$\mathcal{O}x + N \subseteq M'$。从而 $\mathfrak{n}(\mathcal{O}x + N) = \mathfrak{n}M$。于是存在 $\alpha \in \mathcal{O}$与 $z \in N$，使得赋值 $Q(\alpha x + z)$ =赋值 $\mathfrak{n}M = R_1$，即赋值$(Q(z) + 2\alpha B(x, z)) = R_1$。此外，由于 $z \in N$，我们有赋值 $Q(z) \geq$赋值 $\mathfrak{n}N = S_1 > R_1$。由此可得赋值 $2\alpha B(x, z) = R_1$。若 $z' = \pi\alpha x + z$，则 $z' \in \mathfrak{p}M + N = N$，且有 $Q(z') = Q(z) + 2\pi\alpha B(x, z)$。由于 z、 $z' \in N$，我们有$2\pi\alpha B(x, z) = Q(z') - Q(z) \in \mathfrak{n}N = \mathfrak{p}^{S_1}$。于是 $R_1 < S_1$ =赋值 $\mathfrak{n}N \leq$赋值 $2\pi\alpha B(x, z) =$ 赋值$2\alpha B(x, z) + 1 = R_1 + 1$ ，从而 $S_1 = R_1 + 1$，如所断言。 □

当 $\mathfrak{n}M = \mathfrak{n}N$ 时，第二个约化步骤适用，其做法是降低两个格的秩。

引理 6.3 假设 $R_1 = S_1$。令 $M^* = pr_{y_1^\perp} M$ 和 $N^* = pr_{y_1^\perp} N$。那么在以下每种情形中：

$$(a)\ R_1 < R_3\ (if\ m \geq 3),\ (b)\ R_3 - R_2 = -2e,\ (c)\ R_2 = S_2$$

我们有：

(i) y_1 是域 M 的良好 *BONG* 中的首元素， $b_1 = \eta a_1$ 满足某个 $\eta \in g(a_2/a_1)$, $M^* \cong \prec \eta a_2, a_3, \ldots, a_m \succ$ 和 $N^* \cong \prec b_2, \ldots, b_n \succ$，且相对于良好 *BONG*。

(ii) $X(M/N) = X(M^*/N^*)O^+(M)$， $O^+(M^*) \subseteq O^+(M)$ 和 $O^+(N^*) \subseteq O^+(N)$。

Proof. (i) 根据推论 3.9，在情形 (a)、(b) 和 (c) 中，我们都有 y_1 是 M 的一个 BONG 中的首元素。于是，由引理 5.3(iii) 的情形 $i = 1$ ，我们有$\eta := b_1/a_1 \in g(a_2/a_1)$。由引理 1.5(iv)，相对于某个 BONG $x_1', x_2', x_3, \ldots, x_m$，我们有 $M \cong \prec \eta a_1, \eta a_2, a_3, \ldots . a_m \succ$。由于 $Q(x_1') = \eta a_1 = b_1 = Q(y_1)$，根据推论 5.7，存在 $\sigma \in O(M)$ 使得 $\sigma x_1' = y_1$。因此，相对于良好 BONG $y_1 = \sigma x_1', \sigma x_2', \sigma x_3, \ldots, \sigma x_m$，有 $M = \sigma(M) \cong \prec \eta a_1, \eta a_2, a_3, \ldots . a_m \succ$。于是，相对于 BONG $\sigma x_2', \sigma x_3, \ldots, \sigma x_m$，有 $M^* \cong \prec \eta a_2, a_3, \ldots . a_m \succ$。我们还有相对于 BONG $y_2, \ldots, y_n$ 的 $N^* \cong \prec b_2, \ldots, b_n \succ$。

(ii) 如 (i) 的证明中所见，我们有 $M \cong \prec b_1, \eta a_2, a_3, \ldots, a_m \succ$，它们相对于 BONG $y_1, z_2, \ldots, z_m$。由 [B2, 2.5]，我们有嵌入 $X(M^*/N^*) \subseteq X(M/N)$。因此 $X(M^*/N^*)O^+(M) \subseteq X(M/N)O^+(M) = X(M/N)$。反过来，假设 $\sigma \in X(M/N)$。我们有 $\sigma^{-1}N \subseteq M$，且 $\sigma^{-1}y_1$ 是域 $\sigma^{-1}N$ 的良好 BONG 中的首元素。对 M 和 $\sigma^{-1}N \cong N$ 应用推论 3.9，可知 $\sigma^{-1}y_1$ 是域 M 的良好 BONG 中的首元素。由于 $Q(\sigma^{-1}y_1) = Q(y_1)$，由推论 5.7，存在某个 $\tau \in O^+(M)$，使得 $\tau y_1 = \sigma^{-1}y_1$。因此 $y_1 = \psi y_1$，其中 $\psi := \sigma\tau \in X(M/N)O^+(M) = X(M/N)$。由[B2, 2.3],，这意味着 $\psi \in X(M^*/N^*)$，所以 $\sigma = \psi\tau^{-1} \in X(M^*/N^*)O^+(M)$。

特别地，若取 $N = M$，此时有 $R_1 = S_1$ 和 $R_2 = S_2$，因此条件 (c) 成立，于是得到 $X(M/M) = X(M^*/M^*)O^+(M)$，即 $O^+(M) = O^+(M^*)O^+(M)$，所以$O^+(M^*) \subseteq O^+(M)$。类似地， $O^+(N^*) \subseteq O^+(N)$。 □

引理 6.4 若 $R_1 = S_1$ 且引理 *6.3* 的条件 *(a)*、*(b)* 或 *(c)* 均不满足，则 $\theta(X(M/N)) = F$。

Proof. 我们对 m 使用归纳法。若 $m = 2$，则 (a) 默认成立，因此无需证明。现在假设 $m \geq 3$。我们有 $R_1 = R_3$、$R_3 - R_2 > -2e$ 和 $S_2 \neq R_2$。但是，根据引理 3.1(iii)，$R_1 + R_2 \leq S_1 + S_2 = R_1 + S_2$，所以 $S_2 \geq R_2$。因此，$S_2 > R_2$（或 $n = 1$）。

假设 $\theta(X(M/N)) \neq F$。由于 $R_1 = R_3$，因此 M 不具有性质 A。根据命题 1.6(iii)，我们有 $\mathcal{O}^\times \dot{F}^2 \subseteq \theta(O^+(M)) \subseteq \theta(X(M/N))$。因此必有 $\theta(O^+(M)) = \theta(X(M/N)) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。根据定理 1.9，$R_1 = R_3$ 蕴含 $(R_2 - R_1)/2 \equiv e \pmod 2$。我们还有 $R_1 \equiv \cdots \equiv R_m \pmod 2$

首先，我们将问题化归到 $S_2 = R_2 + 2$ 的情形。我们有 $n = 1$ 或 $S_1 + S_2 = R_1 + S_2 > R_1 + R_2$，因此由推论 3.4，存在 K，满足 $N \subseteq K \subset M$ 且 $FK = FM$，使得 $R_1 + R_2 < T_1 + T_2 \leq R_1 + R_2 + 2$，其中 $T_i = R_i(K)$。对 $\mathfrak{n}N \subseteq \mathfrak{n}K \subseteq \mathfrak{n}M$ 取阶，得到 $S_1 \geq T_1 \geq R_1 = S_1$，所以 $R_1 = T_1$。于是我们有$R_1 < T_1 \leq R_1 + 2$。但是 $\theta(X(M/K)) \subseteq \theta(X(M/N)) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，因此由引理 6.1，$R_2 \equiv T_2 \pmod 2$。故 $T_2 = R_2 + 2$。我们有 $R_1 = T_1$、$R_2 < T_2$；若能证明 $\theta(X(M/K)) = F$，那么 $\theta(X(M/N)) = F$ 也成立，结论便得证。因此，将 N 替换为K后，我们将问题化归到 $S_2 = R_2 + 2$ 的情形。

注意，若 $S_1 = S_3$，则由定理 1.9，我们有 $(R_2+2-R_1)/2 = (S_2-S_1)/2 \equiv e \pmod 2$。但这与 $(R_2 - R_1)/2 \equiv e \pmod 2$ 矛盾。因此 $S_3 > S_1 = R_1$。

接下来，我们化归到 $x_1 = y_1$ 的情形。为此，我们必须证明 N 包含 M 的某个良好 BONG 中的一个首元素。

由于 $R_1 = R_3$，由引理 4.11(ii)，我们有 $M = H \perp K$，其中 $H \cong \pi^{(R_1+R_2)/2} A(0,0)$ 是相对于某个基 x, y 以及 $K \cong \prec \pi^{R_1}\varepsilon, a_4, \ldots, a_m \succ$ 而言的，其中 $\varepsilon \in \mathcal{O}^\times$。我们不可能有 $N \subseteq \mathfrak{p}H \perp K$，因为这将蕴含 $X(M/N) \supseteq X(H \perp K/\mathfrak{p}H \perp K) \supseteq X(H/\mathfrak{p}H)$。但是，由于 H' 不是格且 $\mathfrak{n}\mathfrak{p}H \subset \mathfrak{n}H$，由引理 6.2 我们有 $\theta(X(H/\mathfrak{p}H)) = \dot{F}$，从而得到 $\theta(X(M/N)) = F$。

因此，N 包含元素 $v = z + t$，其中 $z \in K$ 且 $t \in H \setminus \mathfrak{p}H$。我们声称存在这样的范数生成元。我们有 $N = H \perp K$的两个元素$v' = z' + t'$ 和 $v'' = z'' + t''$，其中 z'、$z'' \in K$ 且 t、$t' \in H$，使得 $t' \notin \mathfrak{p}H$ 且 v'' 是范数生成元。（关于 v'，见上文；关于 v''，我们可以取 $v'' = y_1$。）如果 v' 是范数生成元，或者 $t'' \notin \mathfrak{p}H$，那么 $v = v'$ 或 $v = v''$分别具有所需性质。因此，我们可以假设 v' 不是范数生成元且 $t'' \in \mathfrak{p}H$。接着我们声称$v = v'' - v'$ 具有所需性质。我们有 $v = z + t$，其中 $z = z'' - z' \in K$ 且$t = t'' - t' \in H$。但是 $t' \in H \setminus \mathfrak{p}H$ 且 $t'' \in \mathfrak{p}H$，所以 $t \in H \setminus \mathfrak{p}H$。我们必须证明 v 也是 N的范数生成元。反设不然。那么 v、$v' \in N$都不是范数生成元，但 $v'' = v + v'$ 是。因此，$N' = \{u \in N \mid x$ 不是范数生成元，$\}$ 不是格。由引理 4.3(iii)和4.9可知，这意味着 $S_2 - S_1 = -2e$。由于 $R_1 = S_1$且 $R_2 < S_2$，我们得到 $R_2 - R_1 < S_2 - S_1 = -2e$，这不可能。因此，$v$ 是 N的范数生成元。

由于 $N \subseteq M$和 $\mathfrak{n}M = \mathfrak{n}N = \mathfrak{p}^{R_1}$, v 也是 M的一个范数生成元，且 ord $Q(v) = R_1$。我们断言，v 是 M的一个良好 BONG 的首元素。由引理 3.7(i)，只需证明 $pr_{v^\perp} M$ 含有一个元素 u，使得 ord $Q(u) = R_2$。我们将 $t \in H$ 按基 x, y展开为 $t = \alpha x + \beta y$，其中 $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$。由于 $t \notin \mathfrak{p}H$，我们可以假设

不妨设 $\alpha \in \mathcal{O}^\times$。我们证明 $u := pr_{v^\perp} y$ 满足 $\mathrm{ord}\, Q(u) = R_2$。我们有 $Q(u) = (Q(v)Q(y) - B(v,y)^2)Q(v)^{-1}$。然而 $Q(x) = Q(y) = 0, B(x,y) = \pi^{(R_1+R_2)/2}$ 且 $z \in K$，故 $B(z,x) = B(y,z) = 0$。因此 $B(v,y) = B(z+\alpha x+\beta y, y) = \pi^{(R_1+R_2)/2}\alpha$。由此可得 $Q(v)Q(y) - B(v,y)^2 = 0 - (\pi^{(R_1+R_2)/2}\alpha)^2 = -\pi^{R_1+R_2}\alpha^2$，于是 $Q(u) = -\pi^{R_1+R_2}\alpha^2 Q(v)^{-1}$。由于 $\alpha \in \mathcal{O}^\times$ 且 $\mathrm{ord}\, Q(v) = R_1$，我们有 $\mathrm{ord}\, Q(u) = R_2$，证毕。因此 v 是 M的一个良好 BONG 的首元素。由于 v 是 N 和 $S_1 < S_3$ 的一个范数生成元，由引理 3.8，v 是 N的一个良好 BONG 的首元素。接着，用以 v开头的良好 BONG 替换 M和 N的良好 BONG $x_1, \ldots, x_m$及 $y_1, \ldots, y_n$后，我们可以假设 $x_1 = y_1 = v$。

若 $M^* = pr_{v^\perp} M$且 $N^* = pr_{v^\perp} N$，则 $M^* \cong \prec a_2, \ldots\ldots, a_m \succ$且 $N^* \cong \prec b_2, \ldots\ldots, b_n \succ$，相对于良好 BONG $x_2, \ldots\ldots, x_m$和 $y_2, \ldots\ldots, y_n$。我们有 $N^* \subseteq M^*$，并且根据[B2、推论 2.4]，$X(M^*/N^*) \subseteq X(M/N)$。于是 $\theta(O^+(M^*)) \subseteq \theta(X(M^*/N^*)) \subseteq \theta(X(M/N)) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。对应于 M^*和 N^*的不变量 R_1、R_2、……分别为R_2、……、R_m和 S_2、……、S_n。由于 $S_2 > R_2$，我们有 $N^* \subseteq K \subset M^*$，其中 $K = (M^*)' = \{u \in M^* \mid u$不是范数生成元$\}$。由于 $R_3 - R_2 \neq -2e$且 $\theta(O^+(M^*)) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，所以$M^*$属于引理 4.14 的情形 (iii) 或 (v)。（根据引理 4.13(ii)，$\prec a_1$、$a_2 \succ$不可能是极大的，因此我们不属于情形 (iv)。）因此有两种情形:

a. $R_2 < R_4$或 $m = 3$。由引理 4.14 的情形 (iii)，我们有 $K = \prec \pi x_2, \ldots, x_m \succ$。于是 $N^* \subseteq K \subset M^*$可写为 $\prec y_2, \ldots, y_n \succ \subseteq \prec \pi x_2, x_3, \ldots, x_m \succ \subseteq \prec x_2, \ldots, x_m \succ$。由于 $M = \prec v, x_2, \ldots, x_m \succ$，根据 [B2、引理 2.2],，格 $L = \prec v, \pi x_2, x_3, \ldots, x_m \succ$存在，且我们有 $\prec v, y_1, \ldots, y_n \succ \subseteq \prec v, \pi x_2, x_3, \ldots, x_m \succ \subseteq \prec v, x_2, \ldots, x_m \succ$，即 $N \subseteq L \subset M$。由此可得 $\theta(O^+(L)) \subseteq \theta(X(M/L)) \subseteq \theta(X(M/N)) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。由于 K的 BONG $\pi x_2, x_3, \ldots, x_m$是良好的，且 $\mathrm{ord}\, Q(v) = R_1 = R_3 = \mathrm{ord}\, Q(x_3)$，因此 K的 BONG $v, \pi x_2, x_3, \ldots, x_m$也良好。因此，若 $T_i = R_i(L)$，则序列$T_1, \ldots, T_m$为 $R_1, R_2+2, R_3, \ldots, R_m$。由于 $\theta(O^+(L)) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$且 $T_1 = T_3$，根据定理 1.9，我们有 $(T_2 - T_1)/2 \equiv e \pmod 2$，即 $(R_2 + 2 - R_1)/2 \equiv e \pmod 2$。但这与 $(R_2 - R_1)/2 \equiv e \pmod 2$ 矛盾。

b. $R_2 = R_4$。根据引理 4.14 的情形 (v)，若 $K = (M^*)'$ 的不变量序列$R_1, R_2, \ldots$为 $T_2, \ldots, T_m$，则 $T_2 = T_4 = R_2 + 2 = S_2$ 且 $T_3 = R_3 - 2 = R_1 - 2$。由此可得 $T_4 - T_3 = R_2 - R_1 + 4 \geq -2e + 4 > -2e$，并且 $S_3 > S_1 = R_1 = R_3 > T_3$。因此，$T_2 = S_2$、$K$ 和 N^* 均不满足本引理的任何条件 (a)、(b) 或 (c)。（我们有 $T_2 = T_4$, $T_2 < S_2$ 和 $T_4 - T_3 > -2e$。）根据归纳假设，$\theta(X(K/N^*)) = F$。但是 $N^* \subseteq K \subset M^*$，所以 $\theta(X(K/N^*)) \subseteq \theta(X(M^*/N^*)) \subseteq \theta(X(M/N)) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。矛盾。 □

7 主要结果

本节计算两个格 $N \subseteq M$ 的 $\theta(X(M/N))$。定理 7.3 和 7.5 给出了这一结果，它们分别是关于 $\theta(O^+(L))$ 的定理 1.7 和 1.9] 的类比。

相对于某些良好 BONG，我们记 $M \cong \prec a_1, \ldots, a_m \succ$ 和 $N \cong \prec b_1, \ldots, b_n \succ$，以及 $x_1, \ldots, x_m$ 和 $y_1, \ldots, y_n$。令 $R_i = R_i(M)$ 和 $S_i = S_i(N)$，$\alpha_i = \alpha_i(M)$ 和 $\beta_i = \alpha_i(N)$。

设 $V = FM$ 且 $W = FN$，并设 U 为 W 在V中的正交补。则 $O^+(U) \subset X(M/N)$。若 $m - n = \dim U \geq 3$，则 $\theta(O^+(U)) = F$从而

$\theta(X(M/N)) = F$。

因此，我们可以将讨论限制在 $m-n \leq 2$ 的情形。如果 $m-n$，我们约定 $S_{n+1} \gg 0$。

回顾一下，对于格 L，我们有性质 A 的概念，其含义是 $R_i < R_{i+2} \forall i$。如果 L 具有性质 A，那么由定理 1.7 可得 $\theta(O^+(L))$ 的公式。如果 L 不具有性质 A，那么 $\theta(O^+(L)) \supseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，也就是说， $\theta(O^+(L))$ 只能是 $\mathcal{O}^\times \dot{F}^2$ 或 F，而定理 1.9 决定了这两者中哪一个是 $\theta(O^+(L))$。

在计算 $\theta X(M/N)$ 时，我们也会遇到类似的情形。为此，我们将性质 A 的定义推广到格对。

定义 4 我们称格对 M, N（其中 $N \subseteq M$ 且 $m-n \leq 2$）具有性质 *A*，如果对于 $1 \leq i \leq m-2$, 有 $R_{i+2} > S_i$。

与 $\theta(O^+(L))$ 相同，我们的结果由两个定理给出。在定理 7.3 中，我们讨论性质 A 成立的情形，这与定理 1.7 类似。如果性质 A 不成立，那么 $\mathcal{O}^\times \dot{F}^2 \subseteq \theta(X(M/N))$，而定理 7.5（定理 1.9 的一个类似结果）将判定 $\theta(X(M/N)) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$ 还是 $\dot{F}$。

为方便起见，我们用 R1-R4 表示表示定理中的条件 (i)-(iv)， [B3，定理 4.5] 或 [B5，定理 2.1]。由于迄今为止这一结果尚未获准发表，我们在此不会使用这些条件。特别是，与 [B1], 不同，我们不会使用 R1 的充分性。相反，我们将证明，如果 R1 不成立，那么 $\theta(X(M/N)) = F$。

引理 7.1 若 M、N 满足 *R1*，则：

(i) 对所有 $1 \leq i < n$， $R_i + R_{i+1} \leq S_i + S_{i+1}$。*(ii)* 对每个满足 $R_{i+1} \geq S_{i-1}$ 的 $1 < i < m$，都有 $R_i \leq S_i$。

Proof. (i) 若 $R_i \leq S_i$ 且 $R_{i+1} \leq S_{i+1}$，则显然有 $R_i + R_{i+1} \leq S_i + S_{i+1}$。若 $R_i > S_i$，则 R1 蕴含 $R_i + R_{i+1} \leq S_{i-1} + S_i \leq S_i + S_{i+1}$。若 $R_{i+1} \leq S_{i+1}$，则 R1 蕴含 $R_i + R_{i+1} \leq R_{i+1} + R_{i+2} \leq S_i + S_{i+1}$。

(ii) 假设 $R_i > S_i$。则 R1 蕴含 $R_i + R_{i+1} \leq S_{i-1} + S_i$，而这与 $R_i > S_i$ 一起蕴含 $R_{i+1} < S_{i-1}$。矛盾。 □

推论 7.2 如果对 M、N 这一对具有性质 *A*，那么条件 *R1* 等价于 $R_i \leq S_i$ 对所有 $1 \leq i \leq n$成立。因此，这意味着 M 具有性质 *A*。

Proof. 如果对所有 i都有 $R_i \leq S_i$，那么根据定义，R1 成立。反过来，如果 R1 成立，那么当 $1 < i < m$ 时，由引理 7.1(ii)，可从 $R_{i+1} > S_{i-1}$推出 $R_i \leq S_i$。如果 $i = 1$ 或 m，则可直接由 R1 得出。

如果格对 M、N 具有性质 A 并满足条件 R1，那么对于 $1 \leq i \leq m-2$，我们有 $R_{i+2} > S_i \geq R_i$，因此 M 具有性质 A。 □

定理 7.3 *(i)* 如果 $N \subseteq M$、 $m-n \leq 2$以及格对 M、 N具有性质 *A* 并满足条件 *R1*，那么

$$\theta(X(M/N)) = (1+\mathfrak{p}^{\beta})\dot{F}^2 \prod_{i=1}^{m-2} \bar{G}(a_{1,i+1}b_{1,i-1}, R_{i+1}-S_i)\theta(O^+(M)),$$

其中 $\beta =$最小值$\{[(R_{i+2}-S_i)/2] \mid 1 \leq i \leq m-2\}$。

(ii) 若 $R_1+\cdots+R_i \not\equiv S_1+\cdots+S_i$(模 2)，则 *(i)* 中公式里的因子 $G(a_{1,i+1}b_{1,i-1}, R_{i+1}-S_i)$ 可以替换为 $\mathrm{N}(-a_{1,i+1}b_{1,i-1})$。

(iii) 若条件 *R1* 不满足，则 $\theta(X(M/N)) \supseteq \mathcal{O}^{\times}$。

若 $m-n=2$，按我们的约定 $S_{m-1} \gg 0$，因此 $R_m - S_{m-1} \ll 0$。然后，根据推论 *2.13(iii)*，*(i)* 中乘积的最后一个因子 $G(a_{1,m}b_{1,m-2}, R_m-S_{m-1})$ 等于$\mathrm{N}(-a_{1,m}b_{1,m-2})$。

并且，如果 $m \leq 2$，那么 β 是空集的最小值，因此我们令 $\beta=\infty$。于是，在 $\theta(X(M/N))$ 的公式中，可以忽略因子 $(1+\mathfrak{p}^{\beta})\dot{F}^2 = \dot{F}^2$。

7.4 注记。(1) 定理 7.1(i) 指出

$$\theta(X(M/N)) = \tilde{G}(M/N) := G(M/N)\theta(O^+(M)),$$

其中 $G(M/N) = (1+\mathfrak{p}^{\beta})\dot{F}^2 \prod_{i=1}^{m-1} \bar{G}(a_{1,\,i+1}b_{1,\,i-1},\ R_{i+1}-S_i)$。

由推论 7.2，由于对 M，N 具有性质 A 且满足 R1，因此对于 $1 \leq i \leq n$，我们有 $R_i \leq S_i$。接着，由于 $G(a_{i+1}/a_i) = G(a_{i,\,i+1},\ R_{i+1}-R_i)$，定理 1.7 可写为 $\theta(O^+(M)) = (1+\mathfrak{p}^{\alpha})\dot{F}^2 \prod_{i=1}^{m-1} \bar{G}(a_{i,\,i+1},\ R_{i+1}-R_i)$，其中 $\alpha = \min\{[(R_{i+2}-R_i)/2] \mid 1 \leq i \leq m-2\}$。

但对于每个 $1 \leq i \leq n-2$，我们都有 $R_i \leq S_i$，因此 $[(R_{i+2}-R_i)/2] \geq [(R_{i+2}-S_i)/2]$。取最小值后，我们得到 $\alpha \geq \beta$，于是 $(1+\mathfrak{p}^{\alpha})\dot{F}^2 \subseteq (1+\mathfrak{p}^{\beta})\dot{F}^2 \subseteq G(M/N)$。我们还有 $R_2-R_1 \geq R_2-S_1$，因此由引理 2.12(i)，$G(a_{1,\,2},\ R_2-R_1) \subseteq G(a_{1,\,2},\ R_2-R_1) \subseteq G(M/N)$。

因此，$(1+\mathfrak{p}^{\alpha})\dot{F}^2$和 $\bar{G}(a_{1,\,2},\ R_2-R_1)$ 这两个因子在 $\theta(O^+(M))$ 的乘积 $G(M/N) = G(M/N)\theta(O^+(M))$ 中都是多余的。由此可得

$$\tilde{G}(M/N) = G(M/N)\prod_{i=2}^{n-1} \bar{G}(a_{i,i+1}, R_{i+1}-R_i).$$

(2) 由于 $G(a_{1,\,i+1}b_{1,\,i-1},\ R_{i+1}-S_i) \subseteq \mathrm{N}(-a_{1,\,i+1}b_{1,\,i-1})$，(ii) 等价于对每个满足 $R_1+\cdots+R_i \not\equiv S_1+\cdots+S_i \pmod 2$ 的 i，均有 $\mathrm{N}(-a_{1,\,i+1}b_{1,\,i-1}) \subseteq \theta(X(M/N))$。

定理 7.5 假设 $N \subseteq M$、 $m-n \leq 2$ 以及格对 M、N 满足 *R1*。对于 $1 \leq i \leq m-1$，我们设 $T_i =$最大$\{R_{i+1}, S_{i-1}\} -$最小$\{S_i, R_{i+2}\}$。（若 $i=1$，则在最大$\{R_{i+1}, S_{i-1}\}$中忽略 S_{i-1}；若 $i=m-1$，则在最小$\{S_i, R_{i+2}\}$中忽略 R_{i+2}。）

然后$F^2\theta(X(M/N)) = \mathcal{O}$当且仅当以下条件成立。*(1)* $R_1 \equiv \cdots \equiv R_m \equiv S_1 \equiv \cdots \equiv S_n$(模 2)。*(2)* 若 $R_{i+2} \leq S_i$ 对某个 $1 \leq i \leq m-2$成立，则以下情况之一成立：*(a)* $R_{i+1}+R_{i+2} = S_i + S_{i+1}$ 且 $(R_{i+2}-R_i)/2 \equiv (S_{i+1}-S_i)/2 \equiv e$ (模 2)。

(b) $R_{i+2}=S_i$ 且 $-2e\in\{R_{i+2}-R_{i+1},S_{i+1}-S_i\}$。*(3)* 对于 $1\le i<m$，有 $\bar{G}(a_{1,\ i+1}b_{1,\ i-1},\ T_i)\subseteq\mathcal{O}^\times\dot{F}^2$。*(4)* $\theta(O^+(M))$ $\theta(O^+(M))\subseteq\mathcal{O}^\times\dot{F}^2$。

若 $m-n=2$，按我们的约定，$S_{m-1}\gg 0$，因此不可能有 $R_{m-1}+R_m=S_{m-2}+S_{m-1}$ 或 $S_{m-1}-S_{m-2}=-2e$。于是，$i=m-1$ 处的条件 *(2)* 表明：若 $R_m\le S_{m-2}$，则 $R_m=S_{m-2}$ 且 $R_m-R_{m-2}=-2e$。此外，在此情形下 $T_{m-1}=\max\{R_m,S_{m-2}\}-S_{m-1}\ll 0$。因此，由引理 *2.17(ii)*，$i=m-1$ 处的条件（*3*），

$\bar{G}\ a_{1\,m}b_{1\,m-2}\ T_{m-1}\ \subseteq\mathcal{O}^\times\dot{F}^2$ $\quad d\ -a_{1\,m}b_{1\,m-2}\ =2e$ $\quad(„)$，等价于 $(„)$。

7.6 注记. (1) 假设 (1) 成立且 $R_{i+1}+R_{i+2}=S_i+S_{i+1}$，我们注意到 $(R_{i+2}-R_{i+1})/2=(R_{i+1}+R_{i+2})/2-R_{i+1}$ 且 $(S_{i+1}-S_i)/2=(S_i+S_{i+1})/2-S_i$。由于 $R_{i+1}+R_{i+2}=S_i+S_{i+1}$ 且 $R_{i+1}\equiv S_i$（模 2），我们有 $(R_{i+2}-R_{i+1})/2=(S_{i+1}-S_i)/2$（模 2）。因此，来自 (2)(a) 的条件 $(R_{i+2}-R_{i+1})/2\equiv(S_{i+1}-S_i)/2\equiv e$（模 2）可用 $(R_{i+2}-R_{i+1})/2\equiv e$（模 2）或 $(S_{i+1}-S_i)/2\equiv e$（模 2）代替。

(2) (3) 的一个等价条件如下：

(3') 对每个 $1\le i\le m-1$，要么 $d(-a_{1,\ i+1}b_{1,\ i-1})=2e$，要么 $i\le n$，$T_i\ge -2e$ 且 $d(-a_{1,\ i+1}b_{1,\ i-1})>e-T_i/2$。

事实上，若 $i=n+1=m-1$，则 (3) 和 (3') 相同。而若 $i\le n$，根据引理 2.17(i)，二者等价。缺失的条件，即 $\mathrm{ord}a_{1,\ i+1}b_{1,\ i-1}$ 为偶数，根据 (1) 是多余的。我们有 $\mathrm{ord}\,a_{1,\ i+1}b_{1,\ i-1}=R_1+\cdots+R_{i+1}+S_1+\cdots+S_{i-1}$ 是若干个奇偶性相同的 $2i$ 整数之和，因此它是偶数。

由定理 7.3 和定理 7.5 可知，当 $\theta(X(M/N))\ne F$ 时，我们有 R1 的一个更强版本。

推论 7.7 若 $\theta(X(M/N))\ne F$，则对所有 $1\le i\le n$，我们有 $R_i\le S_i$ 或 $1<i<m$ 且 $R_{i+1}+R_{i+2}=S_i+S_{i+1}$。

Proof. 由于 $\theta(X(M/N))\ne F$，根据定理 7.3(iii)，对 M,N 满足 R1。若对 M,N 具有性质 A，则由推论 7.2，$R_i\le S_i$ 对所有 $1\le i\le n$ 都成立，结论得证。若对 M,N 不具有性质 A，则根据定理 7.3(iii)，我们有$\theta(X(M/N))\supseteq\mathcal{O}^\times\dot{F}^2$。因此必有 $\theta(X(M/N))=\mathcal{O}^\times\dot{F}^2$，故定理 7.5 适用。若对某个 $1\le i\le n$ 有 $R_i>S_i$，则由 R1，$R_i+R_{i+1}\le S_{i-1}+S_i$。结合 $R_i>S_i$，可得 $R_{i+1}<S_{i-1}$；根据定理 7.5 的条件 (2)，这意味着 $R_i+R_{i+1}=S_{i-1}+S_i$。 □

引理 7.8 假设对 M,N 满足定理 *7.5* 的条件 *R1* 和条件 *(2)*。

(i) 对每个 $1<i\le m-2$，$R_{i+1}+R_{i+2}\ge S_{i-1}+S_i$。

(ii) $T_i=$最大值$\{R_{i+1}-S_i,R_{i+1}-R_{i+2},S_{i-1}-S_i\}$。具体而言，$T_i=R_{i+1}-S_i$ 如果 $R_{i+1}\ge S_{i-1}$ 且 $R_{i+2}\ge S_i$，$T_i=R_{i+1}-R_{i+2}$ 如果 $R_{i+2}\le S_i$ 且 $T_i=S_{i-1}-S_i$ 如果 $R_{i+1}\le S_{i-1}$。

Proof. (i) 如果 $R_{i+1} \geq S_{i-1}$ 且 $R_{i+2} \geq S_i$，则该陈述显然成立。如果 $R_{i+1} < S_{i-1}$ 或$R_{i+2} < S_i$，那么根据定理 7.5 的条件 (2)，$R_{i+1}+R_{i+2} \geq R_i+R_{i+1} = S_{i-1}+S_i$或 $R_{i+1} + R_{i+2} = S_i + S_{i+1} \geq S_{i-1} + S_i$，分别成立。

(ii) 如果 $R_{i+1} \geq S_{i-1}$ 和 $R_{i+2} \geq S_i$，那么显然有 $T_i = R_{i+1} - S_i$。由 (i)，我们有 $R_{i+1} + R_{i+2} \geq S_{i-1} + S_i$。因此，若 $R_{i+2} \leq S_i$，则也有 $R_{i+1} \geq S_{i-1}$，从而得到 $T_i = R_{i+1} - R_{i+2}$。若 $R_{i+1} \leq S_{i-1}$，则也有 $R_{i+2} \geq S_i$，从而得到 $T_i = S_{i-1} - S_i$。

注意，$T_i = \max\{R_{i+1}, S_{i-1}\} + \max\{-S_i, -R_{i+2}\} = \max\{R_{i+1} - S_i, R_{i+1} - R_{i+2}, S_{i-1} - S_i, S_{i-1} - R_{i+2}\}$。但是可以去掉 $S_{i-1} - R_{i+2}$，因为我们已经证明T_i 是最大值中剩余的项之一。 □

引理 7.9 若 $\theta(O^+(M)) = F$，则定理 *7.3* 和定理 *7.5* 成立。

Proof. 由于 $O^+(M) \subseteq X(M/N)$，$\theta(O^+(M)) = F$蕴含 $\theta(X(M/N)) = F$。现在，定理 7.3(i) 中的乘积包含 $\theta(O^+(M)) = F$，因此它等于 F。于是定理 7.3 表明 $\theta(X(M/N)) = \dot{F}$，这成立。又由于 $\theta(O^+(M)) = \dot{F} \not\subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，定理 7.5 表明 $\theta(X(M/N)) \not\subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，这成立。 □

引理 7.10 定理 *7.5* 与 M的 *BONG* 选择无关。

Proof. 定理 7.5 的除 (3) 以外的所有条件都以不变量 R_1、.....、R_m的形式给出，因此与 BONG 无关。因此，我们只需证明：如果条件 (1)、(2) 和 (4) 得到满足，那么 (3) 与 BONG 无关。如果 $i = m - 1 = n + 1$，则 i处的 (3) 表明 $-\det FM \det FN = -a_1, {}_{i+1}b_1, {}_{i-1} \in \Delta \dot{F}^2$，这与 BONG 无关。对于其余指标，它表明 $\bar{G}(a_1, {}_{i+1}b_1, {}_{i-1}, T_i) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。设相对于另一个良好 BONG 有 $M \cong \prec a'_1 \ldots, a'_m \succ$。为方便起见，设 $a, b \in \dot{F}/\dot{F}^2$、$a = a_1, {}_{i+1}b_1, {}_{i-1}$、$b = a'_1, {}_{i+1}b_1, {}_{i-1}$。我们必须证明，如果 $\bar{G}(a, T_i) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，那么同样有$\bar{G}(b, T_i) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。如果 $i = m - 1$，则 $a = b = \det FM\, b_1, {}_{m-2}$，因此结论成立。我们假设 $i \leq m - 2$。由 (1) 可知，赋值 $a =$赋值 $b = R_1 + \cdots + R_{i+1} + S_1 + \cdots + S_{i-1}$为偶数。于是赋值 a、赋值$b > 0$，因此 $d(ab) > 0$。

如果 $T_i \geq 2e$，则证毕。因此我们假设 $T_i < 2e$。由引理 17.(ii)，$\bar{G}(a, T_i)$，$\bar{G}(T_i, b) \subseteq \mathcal{O}^\times$。

如果 $T_i = -2e$ 且 $\{a, b\} = \{-1, -\Delta\}$，则 $\bar{G}(a, T_i) = \bar{G}(b, T_i) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，从而我们即告完成。在其余情形下，由引理 2.16，我们有 $G(a, T_i)G(b, T_i) = (1 + \mathfrak{p}^{T_i/2-e+d(ab)}) \dot{F}^2 \bar{G}(a, T_i)$，故若 $\bar{G}(a, T_i) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，则 $\bar{G}(b, T_i) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$等价于 $(1 + \mathfrak{p}^{T_i/2-e+d(ab)}) \dot{F}^2 \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，亦即等价于 $T_i/2 - e + d(ab) > 0$。

如果 $T_i < -2e$，我们有 $ab = a_{1,\ i+1}a'_{1,\ i+1}$。于是，由定理 1.12(iii) 和引理 5.2(ii)，我们有 $d(ab) \geq \alpha_{i+1} = (R_{i+2} - R_{i+1})/2 + e$。又由于 $T_i \geq R_{i+1} - R_{i+2}$，我们有$T_i/2 - e + d(ab) \geq 0$。如果两个等式中有一个是严格的，那么 $T_i/2 - e + d(ab) > 0$，结论即得。因此，我们可以假设 $T_i = R_{i+1} - R_{i+2}$，且 $d(ab) = (R_{i+2} - R_{i+1})/2 + e = e - T_i/2$。

假设 $T_i \leq -2e$。于是 $d(ab) = e - T_i/2 \geq 2e$，这只有在$d(ab) = 2e$时才可能发生，因此 $T_i = -2e$。由于 $T_i = -2e$，根据引理 2.17(ii)，$\bar{G}(a,\ T_i) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$ 意味着$a \in \{1, \Delta\}$。另一方面，$d(ab) = 2e$，所以在 $\dot{F}/\dot{F}^2$ 中我们有 $ab = \Delta$，即 $b = \Delta a$。

因此我们回到了 $T_i = -2e$ 和 $\{a, b\} = \{-1, -\Delta\}$ 的情形，这已经讨论过了。所以从现在起我们假设 $-2e < T_i < 2e$。

我们有 $R_{i+1} - R_{i+2} = T_i \geq R_{i+1} - S_i$，因此 $R_{i+2} \leq S_i$，从而在 $i+1$ 处，(2) 的情形 (a) 或 (b) 之一成立。首先假设 (b) 成立，即 $R_{i+2} = S_i$ 且 $-2e \in \{R_{i+2} - R_{i+1}, S_{i+1} - S_i\}$。若 $R_{i+2} - R_{i+1} = -2e$，则 $T_i = R_{i+1} - R_{i+2} = 2e$，这与假设 $T_i < 2e$ 矛盾。若 $S_{i+1} - S_i = -2e$，注意到根据引理 7.1(ii)，$R_{i+2} = S_i$ 蕴含 $R_{i+1} \leq S_{i+1}$。于是 $T_i = R_{i+1} - R_{i+2} \leq S_{i+1} - S_i = -2e$，这与假设 $T_i > -2e$ 矛盾。

若 (a) 成立，则 $-T_i/2 = (R_{i+2} - R_{i+1})/2 \equiv e$ (模 2)，这意味着 $e - T_i/2$ 为偶数。由于 $T_i \in (-2e,\ 2e)$，我们还有 $e - T_i/2 \in (0,\ 2e)$。因此，$d(ab) = e - T_i/2$ 是区间 $(0,\ 2e)$ 内的偶整数，这是不可能的。证明至此完成。 □

引理 7.11 假设格对 M、N 满足 *R1* 以及定理 *7.5* 的条件 *(1)*。

(i) 若 $R_2 - R_1 = -2e$，则定理 *7.5* 的条件 *(2)* 在 $i = 1$ 处成立，当且仅当 $R_3 > S_1$ 或 $R_3 = S_1$ 且 $S_2 - S_1 = -2e$。

(ii) 假设对某个 $k \geq 1$有 $R_1 = R_{2k+1}$，$(R_1 - R_{2j})/2 \equiv e \pmod 2$对 $1 \leq j \leq k$成立，并且我们有 $R_1 < S_1$ 或 $R_1 - R_{2k} > -2e$。

则定理 *7.5* 的条件 *(2)* 在所有指标 $1 \leq i \leq \min\{2k, m-2\}$ 处成立，当且仅当对所有 $1 \leq j \leq k$，$S_{2j-1} + S_{2j} = R_1 + R_{2j}$ 成立。

此外，若此情形发生，则对每个 $1 \leq j \leq k$，我们有 $S_{2j} \leq R_{2j}$、$T_{2j-1} = R_{2j} - R_1$ 和 $T_{2j} = S_{2j-1} - S_{2j}$。

Proof. (i) "若"部分显然。现在假设定理 7.5 的条件 (2) 在 $i = 1$ 处成立。若 $R_3 > S_1$，则结论成立。若 $R_3 \leq S_1$，则 (2) 中的情形 (a) 和 (b) 之一成立。若 (b) 成立，则 $R_3 = S_1$ 且 $-2e \in \min\{R_3 - R_2, S_2 - S_1\}$。由于$R_3 - R_2 \geq R_1 - R_2 = 2e$，必有 $S_2 - S_1 = -2e$，故结论成立。若 (a) 成立，则$R_2 + R_3 = S_1 + S_2$，结合 $R_3 \leq S_1$ 可推出 $R_2 \geq S_2$。又由于 $R_1 \leq S_1$ $-2e \leq S_2 - S_1 \leq R_2 - R_1 = -2e$，故必有等式 $S_2 - S_1 = -2e$、$R_1 = S_1$和 $R_2 = S_2$。但由 $R_3 \leq S_1 \leq R_1 \leq R_3$ 还可得 $R_3 = S_1$，故结论成立。

(ii) 我们有 $R_1 \leq R_3 \leq \cdots \leq R_{2k+1}$，因此 $R_1 = R_{2k+1}$蕴含 $R_1 = R_3 = \cdots = R_{2k+1}$。另外，注意到 $S_{2j-1} \geq S_1 \geq R_1 = R_{2j+1}$ 对于 $1 \leq j \leq k$成立。

假设定理 7.5(2) 在 $1 \leq i \leq 2k-1$ 处成立。对于 $1 \leq j \leq k$，我们有 $S_{2j-1} \geq R_{2j+1}$，因此定理 7.5 的条件 (2) 适用于 $i = 2j-1$。若 $S_{2j-1} + S_{2j} = R_{2j} + R_{2j+1} = R_1 + R_{2j}$，则结论成立。现在假设 $S_{2j-1} = R_{2j+1} = R_1$且 $-2e \in \{R_{2j+1} - R_{2j}, S_{2j} - S_{2j-1}\}$。那么 $S_{2j-1} \geq S_1 \geq R_1$ 蕴含 $S_1 = R_1$，所以根据假设，必有 $R_1 - R_{2k} > -2e$。由于 $R_{2j+1} = R_1$ 且 $R_{2j} \leq R_{2k}$，我们有 $R_{2j+1} - R_{2j} \geq R_1 - R_{2k} > -2e$，因此只需考虑 $S_{2j} - S_{2j-1} = -2e$ 的情形。根据引理 7.1(i)，性质 R1 蕴含 $S_{2j-1} + S_{2j} \geq R_{2j-1} + R_{2j}$。我们还有 $R_{2j} - R_{2j-1} \geq -2e = S_{2j} - S_{2j-1}$。由于 $S_{2j-1} = R_1 = R_{2j-1}$，这些不等式等价于 $S_{2j} \geq R_{2j}$ 和 $R_{2j} \geq S_{2j}$。因此 $S_{2j} = R_{2j}$，从而 $S_{2j-1} + S_{2j} = R_1 + R_{2j}$。

反之，假设对于 $1 \leq j \leq k$，$S_{2j-1} + S_{2j} = R_1 + R_{2j}$。那么对于 $1 \leq j \leq k$，我们有 $S_{2j-1} + S_{2j} = R_1 + R_{2j} = R_{2j} + R_{2j+1}$，且 $(R_{2j+1} - R_{2j})/2 = (R_1 - R_{2j})/2 \equiv e$（模 2），因此定理 7.5 的条件 (2) 在 $i = 2j-1$ 处成立。（另见注释 7.6(1)。）

若 $i=2j$，其中 $1\le j\le k$，注意到 $S_{2j-1}\ge S_1\ge R_1$，因此 $R_1+S_{2j}\le S_{2j-1}+S_{2j}=R_1+R_{2j}$，从而 $S_{2j}\le R_{2j}\le R_{2j+2}$。若 $S_{2j}<R_{2j+2}$，则定理 7.5 的条件 (2) 在 $i=2j$ 处显然成立。否则 $S_{2j}=R_{2j}=R_{2j+2}$，且我们有 $S_{2j-1}+S_{2j}=R_1+R_{2j}=R_{2j+1}+R_{2j+2}$。又由于 $(R_{2j+2}-R_{2j+1})/2=(R_{2j}-R_1)/2\equiv e$（模 2），定理 7.5 的条件 (2) 在 $i=2j$ 处成立。

若 $1\le j\le k$，则由 $S_{2j-1}\ge R_1=R_{2j+1}$，根据引理 7.8(ii)，我们同时得到 $T_{2j-1}=R_{2j}-R_{2j+1}=R_{2j}-R_1$ 和 $T_{2j}=S_{2j-1}-S_{2j}$。并且由 $S_{2j-1}+S_{2j}=R_1+R_{2j}$ 和 $S_{2j-1}\ge R_1$ 得到 $S_{2j}\le R_{2j}$。 □

引理 7.12 假设对 M,N 满足条件 *R1* 以及定理 *7.5* 的条件（*1*）和（*2*）。则对每一个满足 $R_i=R_{i+2}$ 的 $1\le i\le m-2$，我们有 $(R_{i+1}-R_i)/2\equiv e$（模 2）。

Proof. 注意，$R_i=R_{i+2}$ 蕴含 $R_{i+2}-R_{i+1}=-(R_{i+1}-R_i)$，因此 $(R_{i+1}-R_i)/2\equiv e$（模 2）等价于 $(R_{i+2}-R_{i+1})/2\equiv e$（模 2）。

若 $S_i\ge R_i=R_{i+2}$，则我们处于定理 7.5 的条件 (2) 的两种情形之一。先设处于情形 (b)，即 $S_i=R_{i+2}=R_i$ and $-2e\in\{R_{i+2}-R_{i+1},S_{i+1}-S_i\}$。若 $R_{i+2}-R_{i+1}=-2e$，则 $(R_{i+2}-R_{i+1})/2=-e\equiv e\pmod 2$，结论得证。若 $S_{i+1}-S_i=-2e$，则由引理 7.1(i)，有 $R_i+R_{i+1}\le S_i+S_{i+1}$。减去 $2R_i=2S_i$ 后，得到 $R_{i+1}-R_i\le S_{i+1}-S_i=-2e$。这意味着 $R_{i+1}-R_i=-2e$，因此 $(R_{i+1}-R_i)/2=-e\equiv e\pmod 2$。若处于情形 (a)，则 $(R_{i+2}-R_{i+1})/2\equiv e\pmod 2$，结论得证。

若 $S_i<R_i$，那么由引理 7.1(ii)，$R_{i+1}<S_{i-1}$，因此指标 $i-1$ 属于条件 (2) 的情形 (a)。于是 $(R_{i+1}-R_i)/2=-e\equiv e$（模 2）。 □

现在我们开始证明。证明分为两个步骤。

步骤 1. 化归到情形 $\mathfrak{n}M=\mathfrak{n}N$。

我们假设 $\mathfrak{n}M\supset\mathfrak{n}N$，即 $R_1<S_1$。由引理 6.2，我们有 $\theta(X(M/N))=\theta(X(M'/N))$，当 M' 是格时；否则有 $\theta(X(M/N))=F$。

引理 7.13 若 M' 不是格，则定理 *7.3* 和定理 *7.5* 成立。

Proof. 由于 M' 不是格，我们有 $\theta(X(M/N))=F$，因此定理 7.3(ii) 和 (iii) 显然成立。（关于 (ii)，参见注记 7.4（2）中的等价表述。）所以我们只需证明定理 7.3(i) 和定理 7.5。

如果 M' 不是格，那么根据引理 4.14，$R_2-R_1=-2e$，并且要么 $d(-a_{1,\,2})=\infty$，要么 $R_1=R_3$。我们分两种情况讨论。

1. $R_3\ge S_1$。于是 $R_3\ge S_1>R_1$，所以我们必须有 $d(-a_{1,\,2})=\infty$，即 $a_{1,\,2}=-1$ 在 $\dot{F}/\dot{F}^2$ 中。

对于定理 7.3，注意到 (i) 中的乘积含有因子 $G(a_{1,2}=-1,\ R_2-S_1)\,G(-1,\ R_2-S_1)$。但是 $R_2-S_1<-2e$，所以 $G(-1,\ R_2-S_1)=\mathrm{N}(1)=F$。因此该乘积是 F，而定理 7.3(i) 表明 $\theta(X(M/N))=F$，这是真的。

对于定理 7.5，注意到 $T_1=R_2-\min\{S_1,R_3\}=R_2-S_1$。那么，与上文相同，$\bar{G}(a_{1,\,2},\ T_1)=\bar{G}(a_{1,\,2},\ R_2-S_1)=\dot{F}\not\subseteq\mathcal{O}^\times\dot{F}^2$。因此，定理 7.5 的条件（3）不成立，所以定理 7.5 表明 $\theta(X(M/N))\not\subseteq\mathcal{O}^\times\dot{F}^2$，这是真的。

2. $R_3 < S_1$。那么，对 M，N 不具有性质 A，因此定理 7.3(i) 是空泛成立的。假设对 M，N 满足定理 7.5 的条件 (2)。那么$R_3 < S_1$ 意味着 $R_2 + R_3 = S_1 + S_2$。结合 $R_3 < S_1$，这意味着 $R_2 > S_2$。又由于 $R_1 \le R_3 < S_1$，我们有 $-2e = R_2 - R_1 > S_2 - S_1$，这是不可能的。因此条件 (ii) 不成立，所以定理 7.5 表明 $\theta(X(M/N)) \not\subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，这是真的。□

从现在起，我们假设 M'是一个格。相对于良好 BONG，我们记 $M' \cong \prec a'_1, \dots, a'_m \succ$，且 $R_i(M') = R'_i$。由引理 6.2，得到 $\theta(X(M/N)) = \theta(X(M'/N))$。

为方便起见，我们将定理 7.3 的陈述记为 7.3(i)-(iii)，将格对 M, N满足的定理 7.5 的条件记为 7.5(1)-(4)。对于格对M', N，我们分别将它们记为 7.3(i')-(iii') 和 7.5(1')-(4')。

引理 7.14 *(i)* 格对 M, N满足 ***R1***，当且仅当格对 M', N满足 ***R1***。

(ii) 格对 M, N具有性质 ***A***，当且仅当格对 M', N具有性质 ***A***。

若对 M, N 满足条件 ***R1***，且 $\theta(O^+(M)) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，则：

(iii) 若 M' 属于引理 *4.14* 的情形 *(v)*，则引理 *7.11(ii)* 的假设对两对 M, N 和 M', N 均成立。

(iv) 7.5(1) 和 *(2)* 成立，当且仅当 *7.5(1')* 和 *(2')* 成立。

Proof. (i) 若 M 不属于引理 4.14 的情形 (v)，则 $R_i = R'_i$ 对 $i \ge 3$，因此对每个 $i \ge 3$，两对 M, N 和 M', N 的条件 R1 相同。对于 $i = 1, 2$，根据引理 3.1(i) 和 (ii)，两对 M, N 和 M', N 均满足条件 R1。若 M 属于引理的情形 (v)，则 $R_i = R'_i$ 对 $i > 2k+1$，因此对每个 $i > 2k+1$，两对 M, N 和 M', N 的条件 R1 相同。若 $1 \le i \le 2k+1$ 为奇数，则 $S_i \ge S_1 \ge R'_1 = R'_i > R_i$，所以在 i 处，两对 M, N 和 M', N 均满足条件 R1。若 $1 < i < 2k+1$ 为偶数，则 $R'_{i-1} = R'_{i+1} = R_{i-1} + 2 = R_{i+1} + 2$ 且 $R'_i = R_i - 2$，所以 $R_{i-1} + R_i = R'_{i-1} + R'_i = R_i + R_{i+1} = R'_i + R'_{i+1}$。若对 M, N 满足条件 R1，则根据引理 7.1(i)，$R'_i + R'_{i+1} = R_{i-1} + R_i \le S_{i-1} + S_i$，因此在指标 i 处，对 M', N 满足条件 R1。类似地，若对 M', N 满足条件 R1，则 $R_i + R_{i+1} = R'_{i-1} + R'_i \le S_{i-1} + S_i$，因此在指标 i 处，对 M, N 满足条件 R1。

(ii) 如果 M' 不属于引理 4.14 的情形 (v)，那么对于 $i \ge 3$，$R'_i = R_i$，因此对于 M，N的性质 A 与对于 M'，N的性质 A 相同。如果 M'属于引理 4.14 的情形 (v)，那么$S_1 > R_1 = R_3$且 $S_1 \ge R'_1 = R'_3$，因此对于 M，N和 M'，N，条件 A 均不成立。

(iii) 由于 $\theta(O^+(M)) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，$M'$不可能属于引理 4.14 的情形 (iv)。然后在其余各情形中，(i)、(iii) 和 (v) 对于 $1 \le i \le m$均具有 $R_i \equiv R'_i$ (模 2)。因此，7.5(1) 与 7.5(1') 等价。现在假设 7.5(1) 和 7.5(1') 成立。

若 M' 属于引理 4.14 的情形 (i)，则对 $i \ge 3$ 有 $R_i = R'_i$，因此对于 $i \ge 2$，7.5(2) 和 7.5(2') 相同。而在 $i = 1$ 处，由于 $R_2 - R_1 = R'_2 - R'_1 = -2e$，根据引理 7.11(i)，7.5(2) 和 7.5(2') 均等价于 $S_2 - S_1 = -2e$。

若 M' 属于引理 4.14 的情形 (iii)，则对 $i \ge 2$ 有 $R_i = R'_i$，因此 7.5(2) 和 7.5(2') 相同。

若 M' 属于引理 4.14 的情形 (v)，则对于 $i \ge 2k+2$，有 $R_i = R'_i$。因此，条件 7.5(2) 和 7.5(2') 在指标 $i \ge 2k+1$ 处相同。对于 $i \le 2k$，我们注意到$R_1 = R_{2k+1}$, $R'_1 = R'_{2k+1}$, $R_1 < S_1$ 和 $R'_1 - R'_{2k} = (R_1 + 2) - (R'_{2k} - 2) = R_{2k+1} - R_{2k} + 4 \ge$

$-2e+4>-2e$，因此引理 7.11(ii) 适用于两对 M，N和 M'，N。于是，指标 $i\le 2k$ 处的 7.5(2) 和 7.5(2') 分别等价于 $R_1+R_{2j}=S_{2j-1}+S_{2j}$ 和 $R'_1+R'_{2j}=S_{2j-1}+S_{2j}$，其中 $1\le j\le k$。但是 $R'_1+R'_{2j}=(R_1+2)+(R_{2j}-2)=R_1+R_{2j}$，所以这两个条件相同。 □

引理 7.15 若对 M,N 满足性质 *A* 和条件 *R1*，则 M 属于引理 *4.14* 的情形 *(i)*、*(iii)* 或 *(iv)*，并且有：

(i) 对每个 $1\le i\le m$，除非 M 属于引理 *4.14* 的情形 *(iv)* 且 $i=1$，我们有 $R_1+\cdots+R_i\equiv R'_1+\cdots+R'_i$（模 2），并且 $a_{1,\,i}=a'_{1,\,i}$ 属于 $\dot F/\dot F^2$。

(ii) $\tilde G(M/N)=\tilde G(M',N)$.

Proof. 根据推论 7.2，格 M 满足性质 A，因此不可能有 $R_1=R_3$。所以我们不可能处于引理 4.14 的情形 (v)。

(i) 若 M 属于引理 4.14 的情形 (i) 或 (iii)，则对所有 $1\le i\le m$，$a_i=a'_i$ 属于 $\dot F/\dot F^2$，因此对 $1\le i\le m$，$a_{1,\,i}=a'_{1,\,i}$ 属于 $\dot F/\dot F^2$。在情形 (iv) 中，注意对 $i\ge 3$，$a'_{1,\,2}=\pi^2\eta^2a_{1,\,2}=a_{1,\,2}$属于$\dot F/\dot F^2$且 $a_i=a'_i$。因此在此情形下，对 $2\le i\le m$，$a_{1,\,i}=a'_{1,\,i}$ 属于 $\dot F/\dot F^2$ 成立。

由于 $a_{1,i}$与 $a'_{1,i}$相差一个平方因子，因此我们有 $\mathrm{ord}\,a_{1,i}\equiv\mathrm{ord}a'_{1,i}\pmod 2$，即 $R_1+\cdots+R_i\equiv R'_1+\cdots+R'_i\pmod 2$。

(ii) 对于 $i\ge 3$，我们有 $R_i=R'_i$，这意味着对于 $1\le i\le m-2$，有 $[(R_{i+2}-S_i)/2]=[(R'_{i+2}-S_i)/2]$。取最小值，得到 $\beta=\beta'$。

由 (i)，对于 $1\le i\le m-2$，我们有 $a_{1,i+1}=a'_{1,i+1}$属于 $\dot F/\dot F^2$。此外，若 $i\ge 2$或 M属于引理 4.14 的情形 (iii)，则还有 $R_{i+1}=R'_{i+1}$，于是得到 $G(a_{1,i+1}b_{1,i-1},R_{i+1}-S_i)=G(a'_{1,i+1}b_{1,i-1},R'_{i+1}-S_i)$。在其余情形中，同样的关系也成立：当 $i=1$且 M属于引理 4.14 的情形 (i) 或 (iv) 时，它写作 $G(a_{1\,2},,R_2-S_1)=G(a'_{1\,2},,R'_2-S_1)$。我们仍有 $a_{1,2}=a'_{1,2}$属于 $\dot F/\dot F^2$，但这次 $R_2<R'_2$。在这两种情形 (i) 和 (iv) 中，由引理 4.8(ii)，我们有 $G(a_1,2,R_2-R_1)=G(a_2/a_1)=\mathsf N(-a_1,2)$。于是，由引理 2.12(i) 和 (iv)，对于每个 $R_2-R_1\ge R$，我们有 $\mathsf N(-a_1,2)=G(a_1,2,R_2-R_1)\subseteq G(a_1,2,R)\subseteq\mathsf N(-a_1,2)$，因此 $G(a_1,2,R)=\mathsf N(-a_1,2)$。但在这两种情形中，我们都有$R_2-R_1=R'_2-R'_1\ge R'_2-S_1>R_2-S_1$。由此可得 $G(a_1,2,R_2-S_1)=\mathsf N(-a_1,2)$且 $G(a'_1,2,R_2-S_1)=G(a_1,2,R_2-S_1)=\mathsf N(-a_1,2)$，所以所声称的等式成立。

总之，$(1+\mathfrak p^\beta)\dot F^2\prod_{i=1}^{m-2}\bar G(a_{1,i+1}b_{1,i-1},R_{i+2}-S_i)=(1+\mathfrak p^{\beta'})\dot F^2\prod_{i=1}^{m-2}\bar G(a'_{1,i+1}b_{1,i-1},R'_{i+2}-S_i)$，即 $G(M/N)=G(M'/N)=:G$。此外，若 M属于引理 4.14 的情形 (i) 或 (iv)，则 $G\supseteq G(a_{1,2},R_2-S_1)=\mathsf N(-a_{1,2})$。

由备注 7.2(1)，我们有 $\tilde G(M/N)=G\prod_{i=2}^{m-1}\bar G(a_{i,i+1},R_{i+1}-R_i)$ 和 $G(M'/N)=G\prod_{i=2}^{m-1}\bar G(a'_{i,i+1},R'_{i+1}-R'_i)$。为了证明 $\tilde G(M/N)=\tilde G(M'/N)$，我们将证明对于 $2\le i\le m-1$，$GG(a_{i,i+1}R_{i+1}-R_i)=GG(a'_{i,i+1},R'_{i+1}-R'_i)$。如果 M 属于引理 4.14 的情形 (iii)，那么对于 $2\le i\le m$，$a_i=a'_i$，因此对于 $2\le i\le m-1$，我们有 $G(a_{i+1}/a_i)=G(a'_{i+1}/a'_i)$，即 $G(a_{i,i+1},R_{i+1}-R_i)=G(a'_{i,i+1},R'_{i+1}-R'_i)$，所以我们的结论显然成立。如果 M 属于情形 (i) 或 (iv)，那么 $a_i=a'_i$ 仅在 $i\ge 3$时成立，因此对于 $3\le i\le m-1$，$G(a_{i,i+1},R_{i+1}-R_i)=G(a'_{i,i+1},R'_{i+1}-R'_i)$ 成立。

因此，我们只需证明在引理 4.14 的情形 (i) 和 (iv) 下，$GG(a_2,3,R_3-R_2)=GG(a'_2,3,R'_3-R'_2)$。回顾，$G\supseteq\mathsf N(c)$，其中 c是$-a_1,2$ 在 $\dot F/\dot F^2$中的值。若 $G=F$，则所要证明的结论显然成立。因此，我们可以假设 $G=\mathsf N(c)$。于是，当 $G(a_2,3,R_3-R_2)\subseteq N(c)$ 时，$GG(a_2,3,R_3-R_2)=\mathsf N(c)$；否则亦然。类似地

对于 $G(a_{2,3},\ R'_3-R'_2)=G(a'_{2,3},\ R_3-R'_2)$，因此我们必须证明 $G(a_{2,3},\ R_3-R_2)\subseteq N(c)$ 当且仅当 $G(a'_{2,3},\ R_3-R'_2)\subseteq N(c)$。

若我们处于引理 4.14 的情形 (i)，则 $\mathrm{N}(c)=\mathrm{N}(\Delta)=\mathcal{O}^\times\dot{F}^2$。我们有 $R_3>S_1\geq R'_1=R'_2+2e$，故 $R_3-R_2>R_3-R'_2>2e$。于是，由引理 2.17，$\bar{G}(a_{2,3},R_3-R_2)\subseteq\mathcal{O}^\times\dot{F}^2$ 与 $\bar{G}(a'_{2,3},R_3-R'_2)\subseteq\mathcal{O}^\times\dot{F}^2$ 分别等价于 $a_{2,3}\in\mathcal{O}^\times\dot{F}^2$ 与 $a'_{2,3}\in\mathcal{O}^\times\dot{F}^2$。但 $a'_{2,3}=\pi^2a_{2,3}$，故二者等价。

若我们处于引理 4.14 的情形 (iv)，则 $R'_2-R'_1=R_2-R_1=1-d($ $-a_{1\,2}=,)\,(\,)$。我们有 $1-d\ c\qquad 1+\mathfrak{p}^\beta\ \dot{F}^2\subseteq G=\quad c\qquad 1\,2\quad \beta+d\ c>2e$ $(\,)\,\mathrm{N}(\,)$，故由引理 . (i)，$(\,)$。于是 $[(R_3-S_1)/2]\geq\beta\geq 2e+1-d(c)$，从而推出 $R_3-S_1\geq 4e+2-2d(c)$。由于$R'_2=R'_1+1-d(c)\leq S_1+1-d(c)$，我们有 $R_3-R_2>R_3-R'_2\geq R_3-S_1-1+d(c)\geq 4e+2-2d(c)-1+d(c)=4e+1-d(c)$。由此可得 $R_3-R_2-2e>R_3-R'_2-2e\geq 2e+1-d(c)$，而由引理 1.2(i)，这蕴含 $(1+\mathfrak{p}^{R_3-R_2-2e})\,\dot{F}^2\subseteq(1+\mathfrak{p}^{R_3-R'_2-2e})\,\dot{F}^2\subseteq\mathrm{N}(c)$。由推论 2.13(iv)，我们有 $a_{1,2}\in\bar{G}(a_{2,3},R_3-R_2)\subseteq\langle a_{2,3}\rangle(1+\mathfrak{p}^{R_3-R_2-2e})\,\dot{F}^2$。由于 $(1+\mathfrak{p}^{R_3-R_2-2e})\,\dot{F}^2\subseteq\mathrm{N}(c)$，这蕴含 $\bar{G}(a_{2,3},R_3-R_2)\subseteq\mathrm{N}(c)$ 当且仅当 $a_{2,3}\in\mathrm{N}(c)$。类似地，$\bar{G}(a'_{2,3},R_3-R'_2)\subseteq\mathrm{N}(c)$ 当且仅当 $a'_{2,3}\in\mathrm{N}(c)$。但利用引理 4.14(iii) 的记号，$a'_{2,3}=\pi\eta a_{2,3}$ 且 $\pi\eta\in\mathrm{N}(c)$。因此 $a_{2,3}\in\mathrm{N}(c)$ 当且仅当 $a'_{2,3}\in\mathrm{N}(c)$，从而完成证明。 □

命题 7.16 若 M' 是一个格，则定理 *7.3* 对格对M、N成立，当且仅当它对格对 M'、N成立。

Proof. 由引理 7.14(i) 与 (ii)，格对 M,N满足条件 R1 且具有性质 A，当且仅当格对 M,N 亦如此。若发生这种情况，则 7.3(i) 与 7.3(i') 分别表明$\theta(X(M/N))=G(M/N)$以及 $\theta(X(M'/N))=G(M'/N)$。由于 $X(M/N)=X(M'/N)$，并且由引理 7.15(ii)，$G(M/N)=G(M'/N)$，这两个陈述是等价的。

由注记 7.4（2），7.3(ii) 写成 $\mathrm{N}(-a_{1,i+1}b_{1,i-1})\subseteq\theta(X(M/N))$，对每一个 $1\leq i\leq\min\{n,m-1\}$，使得 $R_1+\cdots+R_i\not\equiv S_1+\cdots+S_i\pmod 2$。对 7.3(ii') 亦然。由引理 7.15(i)，除当 $i=1$ 与 M 处于引理 4.14 的情形 (iv) 这一例外之外，我们有 $R_1+\cdots+R_i\equiv R'_1+\cdots+R'_i\pmod 2$ 以及$-a_{1,i+1}b_{1,i-1}=-a'_{1,i+1}b_{1,i-1}$属于$\dot{F}/\dot{F}^2$。又由于 $X(M/N)=X(M'/N)$，7.3(ii) 与 7.3(ii') 的条件是等价的。在例外情形中，我们有 $\mathrm{N}(-a_1,2)=\mathrm{N}(a'_1,2)\subseteq\theta(X(M/N))=\theta(X(M'/N))$，无论 R_1 与 R'_1的奇偶性如何。因此在 $i=1$处，7.3(ii) 与 7.3(ii') 两者的条件均无条件成立。

对于 7.3(iii)，我们有三种情况：如果这对 $M,\ N$ 满足条件 R1 且具有性质 A，那么 7.3(iii) 是空泛的。如果它不满足条件 R1，那么 7.3(iii) 表明 $\theta(X(M/N))=F$。（这包括 R1 和性质 A 均不成立的情况，因为$\theta(X(M/N))=\dot{F}$蕴含 $\theta(X(M/N))\supseteq\mathcal{O}^\times\dot{F}^2$。）如果 R1 成立，但性质 A 不成立，则它表明 $\theta(X(M/N))\supseteq\mathcal{O}^\times\dot{F}^2$。

由引理 7.14(i) 和 (ii)，对 $M',\ N$ 与对 $M,\ N$ 同属上述三种情形之一。又因为 $\theta(X(M/N))=\theta(X(M'/N))$，条件 7.3(iii) 和 7.3(iii') 等价。 □

引理 7.17 假设 M 属于引理 *4.14* 的情形 *(v)*，格对M, N满足条件 *R1*、*7.5(i)* 和 *7.5(ii)*，且 $\theta(O^+(N)) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。那么对每个$1 \le j \le k$，都有 $\bar{G}((-1)^{j-1} b_{1,\,2j}, R'_{2j} - R'_1) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。

Proof. $1 \le h \le j$ $G\ b_{2h-1\,2h}\ S_{2h} - S_{2h-1} = G\ b_{2h}/b_{2h-1} \subseteq$对于每一个 $\theta\ O^+\ N \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$ $S_{2h-1} \ge S_1 \ge R'_1$ 7 11 $S_{2h-1} +$，我们有（,,）（）（（））。我们还有，并且由引理 . (ii)，$S_{2h} = R_1 + R_{2h} = R'_1 + R'_{2h}$。减去不等式 $2S_{2h-1} \ge 2R'_1$，我们得到$S_{2h} - S_{2h-1} \le R'_{2h} - R'_1 \le R'_{2j} - R'_1$。由于还有 $R'_{2j} - R'_1 = R'_{2j} - R'_{2j-1} \ge -2e$，根据推论 2.18，我们得到 $\bar{G}((-1)^{j-1} b_{1,2j}, R'_{2j} - R'_1) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。 □

命题 7.18 对于格对 M, N，定理 *7.5* 成立，当且仅当对于格对 M', N，定理 *7.5* 成立。

Proof. 根据引理 7.14(i)，格对 M, N 和 M', N 的条件 R1 等价。若二者均不成立，则定理 7.5 对这两个格对均为空。因此我们假设 R1 对 M, N 和 M', N 均成立。

根据引理 6.2，$O^+(M) \subseteq O^+(M')$。因此，若 $\theta(O^+(M)) \not\subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，则 $\theta(O^+(M')) \not\subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$ 也成立，于是 7.5(iv) 和 7.5(iv') 均不成立，结论得证。因此我们假设 $\theta(O^+(M)) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。我们还假设 $\theta(O^+(N)) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，因为这一条件是 7.5(iv) 和 7.5(iv') 的共同条件。因此，引理 7.14(iii) 和 7.17 适用。

由引理 7.14(iii) 可知，7.5(i) 和 (ii) 等价于 7.5(i') 和 (ii')，因此我们可以假设这些条件成立。我们必须证明，7.5(iii) 和 (iv) 成立，当且仅当 7.5(iii') 和 (iv') 成立。

由于 $\theta(O^+(M)) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$, M' 不可能属于引理 4.14 的情形 (iv)。若处于情形 (i) 或 (iii)，则对所有 $1 \le i \le m$，$a_i = a'_i$ 属于 $\dot{F}/\dot{F}^2$。通过选用引理 4.14 中给出的 BONG 作为 M 和 M' 的 BONG，在情形 (v) 下也可以作相同假设。（请记住，由引理 7.10 可知，定理 7.5 与 M 的良好 BONG 的选择无关。）因此，对于 $1 \le i \le m$，$a_{1,\,i} = a'_{1,\,i}$ 属于 $\dot{F}/\dot{F}^2$。

为证明 7.5(iii) 与 7.5(iii') 等价，我们证明对每个 $1 \le i \le m-1$，都有 $\bar{G}(a_{1,\,i+1} b_{1,\,i-1},\ T_i) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$ 当且仅当 $\bar{G}(a_{1,\,i+1} b_{1,\,i-1},\ T'_i) = \bar{G}(a'_{1,\,i+1} b_{1,\,i-1},\ T'_i) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。在大多数情况下 $T_i = T'_i$，因此结论显然成立。

若处于引理 4.14 的情形 (iii)，则对 $i \ge 2$ 有 $R_i = R'_i$，因此对 $i \ge 1$ 有 $T_i = T'_i$，结论得证。

若处于情形 (i)，则对 $i \ge 3$ 有 $R_i = R'_i$，因此对 $i \ge 2$ 有 $T_i = T'_i$。在剩下的情形 $i = 1$ 中，我们注意到 $a_{1,\,2} = -\Delta$ 属于 $\dot{F}/\dot{F}^2$，因此由引理 2.12(iv)，$\bar{G}(a_{1,\,2},\ T_1)$ 和 $\bar{G}(a_{1,\,2},\ T'_1)$ 都包含在 $\mathrm{N}(-a_{1,\,2}) = \mathrm{N}(\Delta) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$ 中。

若属于情形 (v)，则对于每个 $1 \le h \le k$，都有 $a_{2h-1} = \pi^{R_1}\varepsilon$ 和 $a_{2h} = -\pi^{R_{2h}}\varepsilon = \pi^{R_1}\varepsilon$ 属于 $\dot{F}/\dot{F}^2$。（我们有 $R_1 \equiv R_{2h}$（模 2）。）因此，对于 $1 \le \ell \le 2k$ 属于 $\dot{F}/\dot{F}^2$，有 $a_\ell = -a_{\ell+1}$，即 $a_{\ell,\,\ell+1} = -1$。于是，$a_{1,\,2j} = (-1)^j$ 对于 $1 \le j \le k$ 成立。

对于 $i \ge 2k+2$，我们有 $R_i = R'_i$，所以对于 $i \ge 2k+1$，有 $T_i = T'_i$。对于 $i = 2j$，取 $1 \le j \le k$，由引理 7.14(iii) 可得 $T_{2j} = T'_{2j} = S_{2j-1} - S_{2j}$，证毕。

因此，我们只剩下 $i = 2j-1$，且 $1 \le j \le k$ 的情形。注意，在$\dot{F}/\dot{F}^2$中，我们有 $a_{1,\,2j} b_{1,\,2j-2} = (-1)^j b_{1,\,2j-2} = (-1)^{j-2} b_{2j-2}$，并且根据引理 7.14(iii),

$T_{2j-1} > T'_{2j-1} = R'_{2j} - R'_1 \geq R'_{2j-2} - R'_1$。因此，根据引理 2.6(i) 和 7.17，我们得到 $\bar{G}((-1)^{j-2}b_{2j-2},\ T_{2j-1},\ \subseteq \bar{G}((-1)^{j-2}b_{2j-2},\ T'_{2j-1}) \subseteq \bar{G}((-1)^{j-2}b_{2j-2},\ R'_{2j-2}-R'_i)\mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。因此，7.5(3) 和 7.5 (3') 在 $i = 2j-1$ 处都无条件成立。

现在我们假设 7.5(i)-(iii) 和 7.5(i')-(iii') 成立，并证明 7.5(iv) 与 7.5(iv') 等价。回顾一下，我们假设$\theta(O^+(M))\ \theta(O^+(N)) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，即 7.5(iv) 成立。因此，我们必须证明 $\theta(O^+(M')) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，从而 7.5(iv') 也成立。由于我们假设条件 R1、7.5(i') 和 7.5(ii') 成立，根据引理 7.12，定理 1.9 中的条件 $(R'_{i+1} - R'_i)/2 \equiv e \pmod 2$ 对所有$R'_i = R'_{i+2}$ 均成立。因此，我们只需证明对于 $1 \leq i \leq m-1$，$G(a'_{i+1}/a'_i) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。由于 $\theta(O^+(M)) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，我们有 $G(a_{i+1}/a_i) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。在大多数情况下 $a'_{i+1}/a'_i = a_{i+1}/a_i$，因此 $G(a'_{i+1}/a'_i) = G(a_{i+1}/a_i) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。注意，在 $\dot{F}/\dot{F}^2$ 中，我们有 $a'_i、_{i+1} = a_i、_{i+1}$，因此 $G(a'_{i+1}/a'_i) = G(a'_{i,i+1}, R'_{i+1} - R'_i,) = G(a_{i,i+1}, R'_{i+1} - R'_i)$。

若 M' 属于引理 3,14 的情形 (iii)，则对于 $i \geq 2$，我们有 $a'_{i+1}/a'_i = a_{i+1}/a_i$，因此 $G(a'_{i+1}/a'_i) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。对于 $i = 1$，由 7.5(3')，我们有 $\bar{G}(a'_{1,2}, T'_1) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。由引理 2.6(i)，为证明 $G(a'_2/a'_1) = \bar{G}(a'_{1,2}, R'_2 - R'_1) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，只需证明 $R'_2 - R'_1 \geq T'_1 = R'_2 - \min\{S_1, R'_3\}$。但这可由 $R'_1 \leq S_1$ 和 $R'_1 \leq R'_3$ 得出，因此 $R'_1 \leq \min\{S_1, R'_3\}$。

若我们处于引理 4.14 的情形 (i)，则 $a'_{i+1}/a'_i = a_{i+1}/a_i$ 对于 $i \geq 3$成立，在 $i = 1$处也同样如此。（我们有 $a'_2/a'_1 = (\pi^2 a_2)/(\pi^2 a_1)$。）对于 $i = 2$，我们注意到$R'_3 - R'_2 \geq R'_1 - R'_2 = 2e$，并且根据 7.5(1')，赋值$a'_{2,3} = R'_2 + R'_3$ 为偶数。于是，根据引理 2.17(i)，$G(a'_3/a'_2) = \bar{G}(a'_{2,3}, R'_3 - R'_2) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。

若 M' 处于引理 4.14 的情形 (v)，则 $a'_{i+1}/a'_i = a_{i+1}/a_i$ 对于 $i \geq 2k+2$成立。对于 $i \leq 2k$，我们在 $\dot{F}/\dot{F}^2$中有 $a'_{i+1}/a'_i = -\pi^{R'_{i+1}-R'_i} = -1$。（根据 7.5(1')，$R'_{i+1} - R'_i$为偶数。）我们还有 $R'_{i+1} - R'_i \geq -2e$，因此根据引理 2.6(i)，有 $G(a'_{i+1}/a'_i) = \bar{G}(-1, R'_{i+1} - R'_i) \subseteq \bar{G}(-1, -2e) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。所以只剩下情形 $i = 2k+1$。

因此，我们只需证明 $G(a'_{2k+2}/a'_{2k+1}) = \bar{G}(a_{2k+1,2k+2}, R'_{2k+2} - R'_{2k+1}) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。在 $\dot{F}/\dot{F}^2$中我们有 $a_{2k+1,2k+2} = -ab$，其中 $a = a_{1,2k+2}b_{1,2k}$ 以及 $b = -a_{1,2k}b_{1,k}$ =($-1^{\ k-1}b_{1\ k}$ 7 5 3 $\bar{G}\ a\ T_{2k+1} \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$ 7 17 $\bar{G}\ b\ R'_{2k} -$) , 。由 . ( ) ，我 $R'_1 \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$ $R'_{2k+2} - R'_{2k+1} \geq -2e$ $s = 2$ 们有 (,)，并且由引理 . , (,) 。我们有，因此由推论 2.18 的情形，为了证明 $G(a'_{2k+2}/a'_{2k+1}) = \bar{G}(-ab, R'_{2k+2} - R'_{2k+1}) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，只需证明 $R'_{2k+2} - R'_{2k+1} = R_{2k+2} - R'_1 \geq T'_{2k+1}, R'_{2k} - R'_1$。由引理 7.11(ii)，我们有 $R_{2k+2} \geq R_{2k} > S_{2k}$，故 $R_{2k+2} = \max\{R_{2k+2}, S_{2k}\}$。我们还有 $R'_1 \leq S_1 \leq S_{2k+1}$ 以及 $R'_1 \leq R'_{2k+3} = R_{2k+3}$，故 $R'_1 \leq \min\{S_{2k+1}, R_{2k+3}\}$。由此可得 $R_{2k+2} - R'_1 \geq \max\{R_{2k+2}, S_{2k}\} - \min\{S_{2k+1}, R_{2k+3}\} = T_{2k+1}$。并且，由于$R_{2k+2} = R'_{2k+2} \geq R'_{2k}$, 我们还有 $R_{2k+2} - R'_1 \geq R'_{2k} - R'_1$。至此证明完毕。 □

步骤 2. 对 n 进行归纳。在步骤 1 中，我们将问题归结为 $R_1 = S_1$ 的情形。现在假设 $R_1 = S_1$，并使用引理 6.3 降低 M 和 N 的秩。首先证明，若不满足引理的条件，则定理 7.3 和定理 7.5 成立。

引理 7.19 若 M 和 N 不属于引理 *6.3* 中的情形 *(a)*、*(b)* 或 *(c)*，则定理 *7.3* 和定理 *7.5* 成立。

Proof. 根据引理 6.4，$\theta(X(M/N)) = F$。由于 (a) 不成立，我们有 $R_3 = R_1 = S_1$

因此，对 M，N 不具有性质 A。于是，定理 7.3 的陈述 (i) 和 (ii) 均为空。由于 $\theta(X(M/N)) = F$，陈述 (iii) 显然成立。

假设定理 7.5 的条件 (2) 在 $i = 1$ 处成立。我们有 $R_3 = S_1$。因此，(2) 的两种情形必有一种成立。若属于情形 2(a)，则 $R_2 + R_3 = S_1 + S_2$。又由于 $R_3 = S_1$，可得 $R_2 = S_2$，即属于引理 6.3 的情形 (b)，矛盾。现在假设属于情形 (2)(b)，即 $-2e \in \{R_3 - R_2, S_2 - S_1\}$。不可能有 $R_3 - R_2 = -2e$，因为这属于引理 6.3 的情形 (c)。因此只剩下 $S_2 - S_1 = -2e$ 的情形。由引理 3.1(iii)，有 $R_1 + R_2 \leq S_1 + S_2$。减去 $2R_1 = 2S_1$ 后得到 $-2e \leq R_2 - R_1 \leq S_2 - S_1 = -2e$，所以必有等号成立。因此 $R_2 - R_1 = S_2 - S_1 = S_2 - R_1$，所以 $R_2 = S_2$。再次得到矛盾。

总之，定理 7.5 的条件 (ii) 不成立，因此定理 7.5 表明 $\theta(X(M/N)) \not\subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，而这是正确的。（我们有 $\theta(X(M/N)) = \dot{F}$。） □

从现在起，我们假设对 M, N 属于引理 6.3 中的某一种情形。由引理 6.3(i)，我们有 $b_1 = \eta a_1$，对某个 $\eta \in g(a_2/a_1)$ 以及相对于以 y_1 开头的良好 BONG 的 $M \cong \prec \eta a_1, \eta a_2, a_3, \ldots, a_m \succ$。若 $M^* = pr_{y_1^\perp} M$ 且 $N^* = pr_{y_1^\perp} N$，则 $M^* \cong \prec a_2^*, \ldots, a_m^* \succ$，其中对 $i \geq 3$ 有 $a_2^* = \eta a_2$ 且 $a_i^* = a_i$，以及 $N^* \cong \prec b_2, \ldots, b_n \succ$。由引理 6.3(ii)，$\theta(X(M/N)) = \theta(X(M^*/N^*))\theta(O^+(M))$，$\theta(O^+(M^*)) \subseteq \theta(O^+(M))$ 且 $\theta(O^+(N^*)) \subseteq \theta(O^+(N))$。

我们有 $R_i(M^*) = R_{i+1}$ 和 $R_i(N^*) = S_{i+1}$，也就是说，对应于 M^* 和 N^* 的序列 R_1、……、R_m 以及 $S_1 \ldots$、S_n 的类似物分别是 R_2、……、R_m 和 $S_2 \ldots$、S_n。对于 $1 \leq i \leq m-1$，乘积 a_1、$_{i+1}b_1$、$_{i-1}$ 的类似物是 a_2^*、$_{i+1}b_2$、$_{i-1} = \eta a_2$、$_{i+1}b_1$、$_{i-1}$。（回想一下，$i \geq 3$ 的 $a_2^* = \eta a_2$ 和 $a_i^* = a_i$。）但是 $\eta = b_1/a_1$，因此在 $\dot{F}/\dot{F}^2$ 中我们有 $\eta = a_1 b_1$，从而得到 a_2^*、$_{i+1}b_2$、$_{i-1} = a_1 b_1 a_2$、$_{i+1}b_2$、$_{i-1} = a_1$、$_{i+1}b_1$、$_{i-1}$。

我们用 T_i^*（其中 $2 \leq i \leq \min\{m-1, n\}$）表示与 M^*, N^* 对应的 T_i（其中 $1 \leq i \leq \min\{m-1, n\}$）的类似物。我们有 $T_i^* = \max\{R_{i+1}, S_{i-1}\} - \min\{S_i, R_{i+2}\}$，其中若满足 $i = 2$，则忽略 S_{i-1}；若满足 $i = m-1$，则忽略 R_{i+2}。

我们首先假设 $n \geq 2$，并通过证明：如果定理 7.3 和定理 7.5 对 M^*, N^* 成立，那么它们对 M, N 也成立，来证明归纳步骤 $n - 1 \to n$。与步骤 1 的证明相同，我们用 7.3(i)-(iii) 表示定理 7.3 的陈述，用 7.5(1)-(4) 表示定理 7.5 中与格对 M, N 对应的条件。对于 M^*, N^*，我们将它们记为 7.3(i*)-(iii*) 和 7.5(1*)-(4*)。

引理 7.20 *(i)* 对 M, N 满足条件 *R1*，当且仅当对 M^*, N^* 满足该条件，或 $n = 1$。

(ii) 假设对 M, N 满足条件 *R1*，则其具有性质 *A*，当且仅当 M 和对 M^*, N^* 都具有性质 *A*。（当 $n = 1$ 时，忽略对 M^*, N^* 的条件。）

(iii) 若对 M, N 满足条件 *R1* 且具有性质 *A*，则 $\beta =$ 最小$\{\alpha, \beta^*\}$。（若 $n = 1$，则忽略 β^*，因此 $\beta = \alpha$。）

(iv) 若对 M, N 满足条件 *R1* 和 *7.5(4)*，则 *7.5(1)* 无条件成立；若 $n > 1$，则 *7.5(1*)* 也成立。并且，*7.5(2)* 等价于 *7.5(2*)* 或 $n = 1$。此外，对于 $2 \leq i \leq$ 最小$\{m-1, n\}$，$T_1 = R_2 - R_1$ 和 $T_i = T_i^*$。

Proof. (i) 若 $3 \leq i \leq n$，则对于 M，N，指标 i 处的条件 R1 与对于 M^*，N^*，指标 $i-1$ 处的条件 R1 相同，即要么 $R_i \leq S_i$，要么 $i < m$ 且 $R_i + R_{i+1} \leq S_{i-1} + S_i$。

剩下的是对于 M, N，在 $i=1$ 和 2 处的条件 R1，以及对于 M^*, N^*，在 $i=1$ 处的条件 R1。但根据引理 3.1，这些条件总是成立。

(ii) 若对 M,N 这一对，性质 A 和 $n>1$ 成立，则对 M^*,N^* 这一对也成立。（若 $R_{i+2}>S_i$ 对 $1\le i\le m-2$ 成立，则对 $2\le i\le m-2$ 也成立。）根据注释 7.6(1)，M 也具有性质 A。反过来，若 M^*,N^* 具有性质 A，则 $R_{i+2}>S_i$ 对 $2\le i\le m-2$ 成立。若 M 也具有性质 A，则 $R_{i+2}>S_i$ 在 $i=1$ 处也成立。（我们有 $R_3>R_1=S_1$。）

(iii) 我们可以假设 $m\ge 3$，否则 $\beta=\alpha=\beta^*=\infty$，我们的结论便显然成立。我们有 $\beta=\min\{[(R_{i+1}-S_i)/2]\mid 1\le i\le m-2\}$ 和 $\beta^*=\min\{[(R_{i+1}-S_i)/2]\mid 2\le i\le m-2\}$，因此 $\beta=\min\{[(R_2-S_1)/2],\beta^*\}=\min\{[(R_2-R_1)/2],\beta^*\}$。结合 $[(R_2-R_1)/2]\le\alpha\le\beta$，可得 $\beta=\min\{\alpha,\beta^*\}$。（不等式 $[(R_2-R_1)/2]\le\alpha\le\beta$ 由 α 的定义和注释 7.4(1) 得出。）

(iv) 根据定理 1.9 后的注记，由于 $\theta(O^+(M))=\theta(O^+(N))\subseteq\dot{F}^2$，我们有 $R_2\equiv S_2\pmod 2$。又因为 $R_1=S_1$，可得 7.5(1)。若 $n\ge 1$，则 7.5(1) 蕴含 $R_2\equiv\cdots\equiv R_m\equiv S_2\equiv\cdots\equiv S_n\pmod 2$，即 7.5(1*) 成立。

若 $n>1$，由于对于 $2\le i\le m$，$R_i(M)=R_{i-1}(M^*)=R_i$；而对于 $2\le i\le n$，$R_i(N)=R_{i-1}(N^*)=S_i$，因此条件 7.5(2*) 等价于指标 $2\le i\le m-2$ 处的 7.5(2)。（具体而言，指标 i 处的条件 7.5(2) 对于 $2\le i\le m-2$ 等价于指标$i-1$处的 7.5(2*)。）为完成证明，我们证明 7.5(2) 在 $i=1$ 处无条件成立。若属于引理 6.3 的情形 (a)，则 $R_3>R_1=S_1$，所以 7.5(2) 在 $i=1$ 处显然成立。假设我们不属于引理 6.3 的情形 (a)，即 $R_3=R_1=S_1$。若属于情形 (c)，即若 $R_3-R_2=-2e$，则 $i=1$ 属于 7.5(2)(b) 情形，结论得证。若属于引理 6.3 的情形 (b)，即 $R_2=S_2$，则 $R_2+R_3=S_1+S_2$。由于$\theta(O^+(M))\subseteq\mathcal{O}^\times\dot{F}^2$且 $R_1=R_3$，根据定理 1.9，我们有 $(R_2-R_1)/2\equiv 2\pmod 2$。但是 $R_2-R_1=S_2-S_1=-(R_3-R_2)$。由此可得 $(R_3-R_2)/2\equiv(S_2-S_1)/2\equiv e\pmod 2$，因此 $i=1$ 属于 7.5(2)(a) 的第二种情形。证明完毕。

我们有 $R_3\ge R_1=S_1$，因此 $T_1=R_2-\min\{S_1,R_3\}=R_2-R_1$ 且 $T_2=\max\{R_3,S_1\}-\min\{S_2,R_4\}=R_3-\min\{S_2,R_4\}=T_2^*$。并且若 $i\ge 3$，则根据定义有 $T_i=T_i^*$。□

引理 7.21 若 $n=1$ 且 $m\le 2$，则 $X(M/N)=O^+(M)$。特别地，若 $m=n=1$，则 $X(M/N)=\{1\}$，因此 $\theta(X(M/N))=\dot{F}^2$。

若 $n=1$ 且 $m=3$，则 $\theta(X(M/N))=\mathrm{N}(-a_{1,3}b_1)\theta(O^+(M))$。

Proof. 若 $m=n=1$，则 FM 是一元的，因此 $O^+(M)\subseteq X(M/N)\subseteq O^+(FM)=\{1\}$，我们的结论显然成立。

若 $m>n=1$，则由引理 6.3(ii)，$X(M/N)=O^+(FM^*)O^+(M)$。若 $m=2$，则 FM^* 是一元的，因此 $O^+(FM^*)=\{1\}$，从而 $X(M/N)=O^+(M)$。若 $m=3$，则$\theta(X(M/N))=\theta(O^+(FM^*))\theta(O^+(M))$。但是 FM^* 是行列式为 $a_{2,3}^*=a_{1,3}b_1$ 的二元形式，因此 $\theta(O^+(FM^*))=\mathrm{N}(-a_{1,3}b_1)$。故结论成立。□

命题 7.22 若定理 *7.3* 对 M^*,N^*或 $n=1$这对成立，则它对 M,N这对成立。

Proof. 若对 M, N 不满足 R1，则 7.3(i) 与 7.3(ii) 为空。由引理 7.20(i)，我们有 $n > 2$ 且该对 M^*, N^* 也不满足 R1，因此由 7.3(iii*)，. $\theta(X(M^*/N^*)) = F$。由于 $\theta(X(M^*/N^*)) \subseteq \theta(X(M/N))$，我们有 $\theta(X(M/N)) = F$，故 7.3(iii) 成立。此外，当不满足 R1 时，7.3(i) 与 (ii) 也为空，因此证毕。

现在假设对 M, N 满足 R1，但不具有性质 A。此时 7.3(i) 和 (ii) 同样是空泛的。根据引理 7.20(ii)，要么 M 不具有性质 A，要么 $n > 1$ 和对 M^*, N^* 不具有性质 A。第一种情况下，由命题 1.6(iii)，有 $\mathcal{O}^\times \dot{F}^2 \subseteq \theta(O^+(M)) \subseteq \theta(X(M/N))$；第二种情况下，由 7.3(iii*)，有 $\mathcal{O}^\times \dot{F}^2 \subseteq \theta(X(M^*/N^*)) \subseteq \theta(X(M/N))$。因此 7.3(iii) 成立。

现在假设对 M, N 满足 R1 且具有性质 A。根据引理 7.20(i) 和 (ii)，若 $n > 1$，则 M^*, N^* 也同样成立。于是，由 7.a(i*)（按注释 7.4(1) 中的写法），$\theta(X(M^*/N^*)) = G(M^*/N^*) = G(M/N)\theta(O^+(M^*))$。由于 $\theta(O^+(M^*)) \subseteq \theta(O^+(M))$，这意味着 $\theta(X(M/N)) = \theta(X(M^*/N^*))\theta(O^+(M)) = G(M^*/N^*)\theta(O^+(M))$。因此~我们必须证明 $G(M/N) = G(M^*/N^*)\theta(O^+(M))$。

根据定理 1.7，两者 $(1+\mathfrak{p}^\alpha)\ \dot{F}^2$ 与 $G(a_2/a_1) = \bar{G}(a_{1,\ 2},\ R_2 - R_1) = {}^-$ $G(a_{1,2}, R_2 - S_1)$ 包含于 $\theta(O^+(M))$。由此可得 $G(M^*/N^*)\theta(O^+(M)) = G\theta(O^+(M))$，其中 $G = (1 + \mathfrak{p}^\alpha)\ \dot{F}^2\bar{G}(a_{1,2}, R_2 - S_1)G(M^*/N^*)$。我们有

$$G(M^*/N^*) = (1+\mathfrak{p}^{\beta^*})\dot{F}^2 \prod_{i=2}^{m-1} \bar{G}(a^*_{2,i+1}b_{2,i-1}, R_{i+1}-S_i) = (1+\mathfrak{p}^{\beta^*})\dot{F}^2 \prod_{i=2}^{m-1} \bar{G}(a_{1,i+1}b_{1,i-1}, R_{i+1}-S_i).$$

但是 $(1 + \mathfrak{p}^\alpha)\ \dot{F}^2(1 + \mathfrak{p}^{\beta^*})\ \dot{F}^2 = (1 + \mathfrak{p}^\beta)\ \dot{F}^2$(由引理 7.20(iii)，$\min\{\alpha, \beta^*\} = \beta$) 且$\bar{G}(a_1,2, R_2 - S_1)$ $\prod_{i=2}^{m-1} \bar{G}(a_1,_{i+1}b_1,_{i-1}, R_{i+1} - S_i) = \prod_{i=1}^{m-1} \bar{G}(a_1,_{i+1}b_1,_{i-1}, R_{i+1} - S_i)$。由此可得 $G = (1 + \mathfrak{p}^\beta)\ \dot{F}^2 \prod_{i=1}^{m-1} \bar{G}$ $(a_1,_{i+1}b_1,_{i-1}, R_{i+1} - S_i) = G(M/N)$，从而推出 ~ $G(M^*/N^*)\theta(O^+(M)) = G(M/N)\theta(O^+(M)) = G(M/N)$，因此 7.3(i) 成立。

~现在假设 $n = 1$。我们使用引理 7.21。若 $m = 1$, $\theta(X(M/N)) = G(M/N) = \dot{F}^2$。若 $m = 2$，则 $\theta(X(M/N)) = \theta(O^+(M))$。我们还有 $\tilde{G}(M/N) = \bar{G}(a_1,2, R_2 - _ \quad _S_1)\theta(O^+(M))$。但是 $G(a_1,2, R_2 - S_1) = G(a_1,2, R_2 - R_1) = G(a_2/a_1) = \theta(O^+(M))$。~因此 $G(M/N) = \theta(O^+(M)) = \theta(X(M/N))$。并且，若 $m = 3$，则 $\theta(X(M/N) = \mathrm{N}(-a_1,_3b_1)\theta(O^+(M))$，且 $G(M/N) = (1 + \mathfrak{p}^\beta)\dot{F}^2\bar{G}(a_1,2, R_2 - S_1)\mathrm{N}(-a_1,_3b_1)$。如上所见，$\bar{G}(a_1,2, R_2 - S_1) = G(a_2/a_1)$，且由引理 7.20(iii)，$\beta = \alpha$，故$(1 + \mathfrak{p}^\beta)\dot{F}^2 = (1 + \mathfrak{p}^\alpha)\dot{F}^2$。但是，由定理 1.7，$(1 + \mathfrak{p}^\alpha)\dot{F}^2, G(a_2/a_1) \subseteq \theta(O^+(M))$，因此这两个因子在乘积 $G(M/N) = G(M/N)\theta(O^+(M))$中都是多余的。因此 $G(M/N) = \mathrm{N}(-a_1,_3b_1)\theta(O^+(M)) = \theta(X(M/N))$。

由于 $R_1 = S_1$，若对于某个 $1 \le i \le n$，有 $R_1 + \cdots + R_i \not\equiv S_1 + \cdots + S_i \pmod 2$，则 $i \ge 2$（特别地，$n \ge 2$），且 $R_2 + \cdots + R_i \not\equiv S_2 + \cdots + S_i \pmod 2$。于是，根据 7.3.(ii*)，将其写成注记 7.4（2）中的等价形式，$\mathrm{N}(-a_{1,i+1}b_{1,i-1}) = \mathrm{N}(-a^*_{2,i+1}b_{2,i-1}) \subseteq \theta(X(M^*/N^*)) \subseteq \theta(X(M/N))$。因此 7.3(ii) 成立。 □

命题 7.23 若对于对 M^*, N^* 或 $n = 1$，定理 *7.5* 成立，则对于对 M, N，定理 *7.5* 也成立。

Proof. 如果 7.5(4) 不成立，那么定理 7.5 表明 $\theta(X(M/N)) \not\subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，这确实成立：否则 $\theta(O^+(M))\ \theta(O^+(N)) \subseteq \theta(X(M/N)) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，因此 7.5(4) 成立。

因此我们可以假设 7.5(4) 成立。特别地，$\theta(O^+(M)) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。根据引理 7.20 4 $T_1 = R_2 - R_1$ 1 9 $G\ a_{1\,2}\ T_1 = G\ a_{1\,2}\ R_2 - R_1 = G\ a_2/a_1 \subseteq$。（），所以，根据定理 .，$\mathcal{O}^\times \dot{F}^2$ (，) (，，) (，) 7 5 3 。因此，.（）无条件地在 . 成立。

假设 $n \geq 2$。由于对 M，N 满足条件 R1，根据引理 7.20(i)，M^*，N^*也满足条件 R1。我们还有 $\theta(O^+(M^*)) \subseteq \theta(O^+(M))$ 和 $\theta(O^+(N^*)) \subseteq \theta(O^+(N))$，因此 7.5(4) 蕴含 7.5(4*) 也成立。

根据引理 6.3(i)，$\theta(X(M/N)) = \theta(O^+(M))\theta(X(M^*/N^*))$，并且根据 7.5(iv)，$\theta(O^+(M)) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。因此，$\theta(X(M/N)) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$ 等价于 $\theta(X(M^*/N^*)) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。所以，为了证明我们的结论，必须证明条件 7.5(1)-(4) 等价于 7.5(1*)-(4*)。

我们已经知道 7.5(4) 和 7.5(4*) 成立。根据引理 7.20(iv)，我们还知道 7.5(i) 与 (ii) 等价，且 7.5(i*) 与 7.5(ii*) 等价。而且，如上所见，7.5(iii) 在 $i = 1$ 处无条件成立。因此，我们只需证明 7.5(iii) 在指标≥ 2 处成立等价于 7.5(iii*) 成立。为此，我们证明，对每个 $2 \leq i \leq m-2$，7.5(iii) 在指标 i 处成立等价于 7.5(iii*) 在指标 $i-1$处成立。事实上，7.5(iii) 在指标 i 处成立意味着 $d(-a_{1,i+1}b_{1,i-1}) = 2e$，或者 $i \leq n$ 且 $\bar{G}(a_{1,i+1}b_{1,i-1}, T_i) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$；而 7.5(iii*) 在指标 $i-1$ 处成立意味着 $d(-a^*_{2,i+1}b_{2,i-1}) = 2e$，或者 $i \leq n$ 且$\bar{G}(a^*_{2,i+1}b_{2,i-1}, T^*_i) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。然而，$a^*_{2,i+1}b_{2,i-1} = a_{1,i+1}b_{1,i-1}$在 $\dot{F}/\dot{F}^2$ 中，并且根据引理 7.20(iv)，若 $i \leq n$，则 $T^*_i = T_i$。因此这两个陈述等价。

如果 $m = n = 1$，那么 $\theta(O^+(M)) = \theta(O^+(N)) = \theta(X(M/N)) = \dot{F}^2$。由于 $\dot{F}^2 \subset \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，我们有 $\theta(X(M/N)) \subset \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，且 7.5(4) 成立。为完成证明，我们注意到 7.5(1)-(3) 显然成立。（对于 7.5(1)，我们有 $R_1 = S_1$，因此 $R_1 \equiv S_1 \pmod 2$，而 (2) 和 (3) 均为空。）

现在假设 $n = 1$。那么，由于 R1 和 7.5(4) 成立，根据引理 7.20(iv)，7.5(1) 和 (2) 无条件成立。因此我们必须证明 $\theta(X(M/N)) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$ 等价于 7.5(3)。若 $m \leq 2$，根据引理 7.21，我们无条件有 $\theta(X(M/N)) = \theta(O^+(M)) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。但 7.5(3) 也无条件成立：若 $m = 1$，它是空命题；若 $n = 2$，则只涉及指标 $i = 1$，而这一情形已得到证明。若 $m = 3$，根据引理 7.21，$\theta(X(M/N)) = \mathrm{N}(-a_{1,3}b_1)\theta(O^+(M))$。但 $\theta(O^+(M)) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，所以 $\theta(X(M/N)) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$ 当且仅当 $\mathrm{N}(-a_{1,3}b_1) \subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$，这等价于 $d(-a_{1,3}b_1) = 2e$。另一方面，7.5(3) 在 $i = 1$ 处无条件成立，而在 $i = 2$ 处它表示 $d(-a_{1,3}b_1) = 2e$。因此我们再次得到等价关系。 □

与以下结果的比较 [B1]。条件 R1 是[B1] 引理中的定理 II.1。因此，定理 7.3 和定理 7.5 中所有对 R1 的引用，在其对应的定理—— [B1]中的定理 II.2 和定理 II.3——中均缺失。

在 [1] $a_i = \pi^{R_i}\varepsilon_i$ $b_i = \pi^{S_i}\eta_i$ $\xi_i = \varepsilon_{1\,i+1}\eta_{1\,i-1}$ $1 \leq i \leq$ B 中，我们有 and 和 and，并令：„ $m-1$ $a_{1\,i+1}b_{1\,i-1} = \pi^{R_1+\cdots+R_{i+1}+S_1+\cdots+S_{i-1}}\xi_i$ for 。因此„。

若 M, N满足定理 7.5 的条件 (i)，则对于所有 i，$R_1+\cdots+R_{i+1}+S_1+\cdots+S_{i-1}$和 T_i均为偶数，因此在 $\dot{F}/\dot{F}^2$中，我们有 $a_{1,i+1}b_{1,i-1} = \pi^{T_i}\xi_i = \xi_i$。因此，定理 7.5 与 [B1 的定理 II.3] 相同，唯一的区别是定理 7.5 的假设中包含条件 R1。

由 [B1，定理 II.2] 得到 $\theta(X(M/N))$ 的一般公式为 $\theta(X(M/N)) = (1 + \mathfrak{p}^\beta)\,\dot{F}^2 G_1 \cdots G_{m-1}\theta(O^+(M))$，其中若 $i \leq n$，则 $G_i = G(\pi^{R_{i+1}-S_i}\xi_i)$，且 $R_1 + \cdots + R_i \equiv$

$S_1+\cdots+S_i$(模 2) 且在其他情况下为 $G_i=$N($-a_{1,i+1}b_{1,i-1}$)。但是，如果 $R_1+\cdots+R_i\equiv S_1+\cdots+S_i$(模 2)，那么 $R_1+\cdots+R_{i+1}+S_1+\cdots+S_{i-1}\equiv R_{i+1}-S_i$(模 2)，所以 $a_{1,}$、$_{i+1}b_{1,}$、$_{i-1}=\pi^{R_{i+1}-S_i}\xi_i$ 属于 $\dot{F}/\dot{F}^2$，因此 $G(\pi^{R_{i+1}-S_i}\xi_i)=\bar{G}(a_{1,}{}_{i+1}b_{1,}{}_{i-1},R_{i+1}-S_i)$。所以，[B1，定理 II.2(ii)] 可由定理 7.3(i) 和 (ii) 推得。根据 [B1，定理 II.2(i)], ，在某些条件下，即若对所有 $1\le i\le m-1$ 都有 $(1+\mathfrak{p}^{\beta})\,\dot{F}^2G(a_{i+1}/a_i)\neq\dot{F}$，则可从 $\theta(X(M/N))$ 的公式中省略因子 $\theta(O^+(M))$。

在下一节中，我们将证明，假设表示定理 [B3，定理 4.5] 中，公式 $\theta(X(M/N))$ 里的因子 $\theta(O^+(M))$ 总是可以省略的。我们还将证明一个类似于注 1.8 的结论，即如果对于某个 $1\le i\le m-2$，$R_{i+2}-S_i$ 为奇数，则因子 $(1+\mathfrak{p}^{\beta})\,\dot{F}^2$ 可以省略，其中 $(1+\mathfrak{p}^{\beta})\,\dot{F}^2=(1+\mathfrak{p}^{[(R_{i+2}-S_i)/2]})\,\dot{F}^2$。

8 附录

现在我们证明定理 1.7 的一个更强版本，并假设来自[B5]的未发表结果。特别地，我们假设 R1，因此 §7 中 R1 的推论均成立。

与上一节相同，相对于良好 BONG，$M\cong\prec a_1,\dots,a_m\succ$ 和 $N\cong\prec b_1,\dots,b_n\succ$，$R_i(M)=R_i$ 和 $R_i(N)=S_i$；若 $m-n=2$，则约定 $S_{m-1}=S_{n+1}\gg 0$。此外，令 $\alpha_i(M)=\alpha_i$ 和 $\alpha_i(N)=\beta_i$。

对于每个 $\varepsilon\in\dot{F}/\dot{F}^2$ 以及每个 $0\le i\le m$，$0\le j\le n$ 我们定义

$$d[\varepsilon a_{1,i}b_{1,j}]:=\min\{d(\varepsilon a_{1,i}b_{1,j},\alpha_i,\beta_j\}.$$

（若 $i=0$ 或 m，我们忽略 α_i。若 $j=0$ 或 n，我们忽略 β_j。）当 $M=N$ 时，我们有类似的表达式。若 $1\le i-1\le j\le m$，则 $d[\varepsilon a_{i,j}]:=d[\varepsilon a_{1,i-1}a_{1,j}]=min\{d(\varepsilon a_{i,j},\alpha_{i-1},\alpha_j\}$。（若 $i=1$ 或 $m+1$，我们忽略 α_i。若 $i=0$ 或 m，我们忽略 α_j。）

表达式 $d[\varepsilon a_{1,i}b_{1,j}]$ 与 $d[\varepsilon a_{i,j}]$ 是不变量，其意义在于它们与BONG的选取无关。它们满足与 $d(\varepsilon a_{1,i}b_{1,j})$及 $d(\varepsilon a_{i,j})$所满足的相同的支配原理。若 $K\cong\prec c_1,\dots,c_k\succ$是第三个格，则

$$d[\varepsilon\varepsilon' a_{1,i}c_{1,l}]\ge\min\{d[\varepsilon a_{1,i}b_{1,j}],d[\varepsilon b_{1,j}c_{1,l}]\}.$$

当格 M,N,K 中有两个或更多重合时，我们会得到类似的不等式，例如涉及三元组 $d[\varepsilon\varepsilon' a_{1,i}b_{1,l}]$，$d[\varepsilon a_{1,i}b_{1,j}]$，$d[\varepsilon b_{j+1,l}]$ 或 $d[\varepsilon\varepsilon' a_{i,l}]$，$d[\varepsilon a_{i,j}]$，$d[\varepsilon a_{j+1,l}]$ 的不等式。

我们还有如下关系

$$\alpha_i=\min\{(R_{i+1}-R_i)/2+e,\ R_{i+1}-R_i+d[-a_{i,i+1}]\}.$$

定理 8.1 *(i)* 若 $N\subseteq M$ 且对 M,N 具有性质 *A*，则

$$\theta(X(M/N))=(1+\mathfrak{p}^{\beta})\dot{F}^2\prod_{i=1}^{m-2}\bar{G}(a_{1,i+1}b_{1,i-1},R_{i+1}-S_i).$$

(iii) 若对 M,N 不具有性质 *A*，则 $\theta(X(M/N))\supseteq\mathcal{O}^{\times}\dot{F}^2$。

与定理 7.3 的情形相同，若 $m-n=2$，由于 $S_{m-1}\gg 0$，*(i)* 中的最后一个因子 $\bar{G}(a_{1,m}b_{1,m-2},R_m-S_{m-1})$ 等于 $\mathrm{N}(-a_{1,m}b_{1,m-2})$。

并且，如果 $m\le 2$，那么 $\beta:=\infty$，所以因子 $(1+\mathfrak{p}^{\beta})\dot{F}^2=\dot{F}^2$ 在*(i)*中可以忽略。

注意，我们假设 R1 始终成立，因此与定理 7.3(i) 不同，定理 8.1(i) 的假设中省略了这一条件。此外，定理 8.1(ii) 与定理 7.3(iii) 相同。

沿用注释 7.4(1)中的记号，定理 7.3(i)写作 $\theta(X(M/N)) = G(M/N)$，而定理 8.1(i)写作 $\theta(X(M/N)) = G(M/N)$。因此，只要 $G(M/N) = G(M/N)$，定理 8.1(i)便可由定理 7.3(i)推出。但是 $G(M/N)$ $G(M/N)$ $\prod_{i=2}^{m-1} \bar{G}(a_{i,\,i+1},\ R_{i+1} - R_i)$，所以我们只需要以下结果。

引理 8.2 对于每个 $2 \le i \le m-1$，都有 $G(a_{i,\,i+1}, R_{i+1} - R_i) \subseteq G(M/N)$

在附录的其余部分中，我们假设 M，N 满足定理 8.1 的假设，即 $N \subseteq M$, $m - n \le 2$，且对 M，N 具有性质 A，并且
我们首先证明一些预备结果。

引理 8.3 *(i)* $R_i \le S_i$ 对每个 $1 \le i \le n$均成立。

(ii) $d[a_{1,i}b_{1,i}] \ge A_i =$最小值$\{(R_{i+1} - S_i)/2 + e,\ R_{i+1} - S_i + d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}]\}$ 对于 $1 \le i \le$ 最小值$\{m-1, n\}$。明确地，

$$d[a_{1,i}b_{1,i}] \ge \bar{A}_i = \begin{cases} (R_{i+1} - S_i)/2 + e & \text{if } d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}] > e + (S_i - R_{i+1})/2 \\ R_{i+1} - S_i + d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}] & \text{if } d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}] \le e + (S_i - R_{i+1})/2 \end{cases}.$$

特别地，如果 $R_{i+1} - S_i > 2e$，那么 $a_{1,\,i}b_{1,\,i} = 1$ 属于 $\dot{F}\dot{F}^2$。

(iii) 对于每个满足 $d[-a_{1,i}b_{1,i-2}] + d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}] > 2e + S_{i-1} - R_{i+1}$ 的 $1 \le i \le$最小值 $\{n+1, m-1\}$，我们有 $[b_1, \ldots, b_{i-1}] \twoheadrightarrow [a_1, \ldots, a_i]$。

Proof. (i) 这已在推论 7.2 中作为 R1 的推论得到证明。

(ii) 我们有 $R_{i+1} > S_{i-1}$ 和 $R_{i+2} > S_i$，因此 $R_{i+1} + R_{i+2} > S_{i-1} + S_i$。接着，根据 [B5，定义 6]，$A_i$ 有定义；根据以下注记 [B5，注记 2，8],由于我们同时有 $R_{i+1} \ge S_{i-1}$ 和 $R_{i+2} \ge S_i$，因此可以从 A_i 的定义中忽略项 $2R_{i+1} - S_{i-1} - S_i + \alpha_{i+1}$ 和 $R_{i+1} + R_{i+2} - 2S_i + \beta_{i-1}$。于是 $A_i =$min$\{(R_{i+1} - S_i)/2 + e,\ R_{i+1} - S_i + d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}]\}$。接着，根据 [B5，引理 2，9], 条件 [B2，定理 2.1(ii)]，$d[a_{1,i}, b_{1,i}] \ge A_i$等价于 $d[a_{1,i}, b_{1,i}] \ge A_i$。关于显式公式，我们注意到 $(R_{i+1} - S_i)/2 + e >$ 或 $\le R_{i+1} - S_i + d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}]$ 当且仅当 $d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}] >$ 或 $\le e + (S_i - R_{i+1})/2$，分别成立。

若 $R_{i+1} - S_i > 2e$ $d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}] \ge 0 > e + (S_i - R_{i+1})/2$ $d[a_{1,i}b_{1,i}] \ge (R_{i+1} - S_i)/2 + e > 2e$ $a_{1,i}b_{1,i} = 1$ $\dot{F}/\dot{F}^2$，则 ( )，因此 ( ) ( )，这意味着 在 中。

(iii) 根据性质 A，我们有 $R_{i+1} > S_{i-1}$，且 $d[-a_{1,i}b_{1,i-2}] + d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}] > 2e + S_{i-1} - R_{i+1}$，因此由条件 [B5，定理 2.1(iii')]，(它取代了 [B5，定理 2.1(iii)])，可得 $[b_1, \ldots, b_{i-1}] \twoheadrightarrow [a_1, \ldots, a_i]$。（参见 [B5，定理 2.1]和 [B5，引理 2.16]之后的评论。） □

引理 8.4 若 $G(M/N) \ne F$，且对于某个 $1 \le i \le m-1$，有 $d(-a_{1,i+1}b_{1,i-1}) \le e + (S_i - R_{i+1})/2$ 或 $i = m - 1 = n + 1$，则 $G(M/N) = N(c)$，其中 $c = -a_{1,i+1}b_{1,i-1}$，并且对于每个 $1 \le j \le m-2$，都有 $R_{j+2} - S_j + 2d(c) > 4e$。

Proof. 由于 $d(-a_{1,i+1}b_{1,i-1}) \le e-(R_{i+1}-S_i)/2$，根据推论 2.3(iii)，我们有 $G(a_{1,i+1}b_{1,i-1}, R_{i+1}-S_i) = \mathsf{N}(-a_{1,i+1}b_{1,i-1}) = \mathsf{N}(c)$。若 $i = n+1 = m-1$，则默认同样成立。由此可得 $\mathsf{N}(c) \subseteq G(M/N)$。由于 $[F\colon \mathsf{N}(c)] = 2$ 且 $G(M/N) \neq F$，因此必有$G(M/N) = \mathsf{N}(c)$。

由于 $(1+\mathfrak{p}^{\beta})\dot{F}^2 \subseteq G(M/N) = \mathsf{N}(c)$，根据引理，我们有 $\beta + d(c) > 2e$。由于对于每个 j，都有 $(R_{j+2}-S_j)/2 \ge \beta$，因此得到 $(R_{j+2}-S_j)/2+d(c) > 2e$，即 $R_{j+2}-S_j+2d(c) > 4e$。 □

我们将所有满足 $d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}] \le e+(S_i-R_{i+1})/2$ 且 $d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}] < d(-a_{1,\ i+1}b_{1,\ i-1})$ 的 $1 \le i \le n-1$ 组成的集合记为 I。由于 $d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}] = \min\{d(-a_{1,\ i+1}b_{1,\ i-1})\ \alpha_{i+1},\ \beta_{i-1}\}$，我们有 $I = I_\alpha \cup I_\beta$，其中 $I_\alpha = \{i \in I \mid d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}] = \alpha_{i+1}\}$ 且 $I_\beta = \{i \in I \mid d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}] = \beta_{i-1}\}$。

引理 8.5 设 $G(M/N) \neq F$。

(i) 若 $i \in I_\alpha$，则 $d[-a_{1,i+2}b_{1,i}] = R_{i+1} - R_{i+2} + d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}]$ 且 $i+1 \in I$。*(ii)* 若 $i \in I_\beta$，则 $d[-a_{1,i}b_{1,i-2}] = S_{i-1} - S_i + d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}]$ 且 $i-1 \in I$。

Proof. 首先注意到，对于 (i) 和 (ii)，我们都有 $i \in I$，因此 $d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}] \le e+(S_i-R_{i+1})/2$。由引理 8.3(ii)，可得 $d[a_{1,i}b_{1,i}] \ge R_{i+1} - S_i + d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}]$。

(i) 由于 $R_{i+2} > S_i$，我们有 $\alpha_{i+1} = d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}] \le e + (S_i - R_{i+1})/2 < (R_{i+2} - R_{i+1})/2 + e$。由于 $\alpha_{i+1} = \min\{(R_{i+2} - R_{i+1})/2 + e, R_{i+2} - R_{i+1} + d[-a_{i+1,i+2}]\}$，我们有 $\alpha_{i+1} = R_{i+2} - R_{i+1} + d[-a_{i+1,i+2}]$，因此 $d[-a_{i+1,i+2}] = R_{i+1} - R_{i+2} + \alpha_{i+1} = R_{i+1} - R_{i+2} + d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}]$。另一方面，$d[a_{1,i}b_{1,i}] \ge R_{i+1} - S_i + d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}]$。由于$R_{i+2} > S_i$，这意味着 $d[a_{1,i}b_{1,i}] > R_{i+1} - R_{i+2} + d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}] = d[-a_{i+1,i+2}]$。根据支配原理，可得 $d[-a_{1,i+2}b_{1,i}] = d[-a_{i+1,i+2}] = R_{i+1} - R_{i+2} + d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}]$。

由于 $d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}] \le e+(S_i-R_{i+1})/2$，我们有 $d[-a_{1,i+2}b_{1,i}] \le R_{i+1}-R_{i+2}+e+(S_i-R_{i+1})/2 = (R_{i+1}+S_i)/2 - R_{i+2} + e$。但 $R_{i+2} > S_i$，并且根据引理 8.3(i)，$R_{i+1} \le S_{i+1}$。由此可得 $(R_{i+1}+S_i)/2 - R_{i+2} + e < (R_{i+1} - R_{i+2})/2 + e \le e + (S_{i+1} - R_{i+2})/2$。因此 $d[-a_{1,i+2}b_{1,i}] < e + (S_{i+1} - R_{i+2})/2$。为完成 $i+1 \in I$的证明，我们必须证明 $d[-a_{1,i+2}b_{1,i}] < d(-a_{1,i+2}b_{1,i})$。反设不然，即 $d[-a_{1,i+2}b_{1,i}] = d(-a_{1,i+2}b_{1,i})$。那么 $d(-a_{1,i+2}b_{1,i}) < e + (S_{i+1} - R_{i+2})/2$，因此若 $c = -a_{1,i+2}b_{1,i}$，则根据引理 8.4，有 $R_{i+2} - S_i + 2d(c) > 4e$。但 $d(c) = d[-a_{1,i+2}b_{1,i}] \le (R_{i+1} + S_i)/2 - R_{i+2} + e$，故 $4e < R_{i+2} - S_i + 2d(c) \le R_{i+2} - S_i + 2((R_{i+1} + S_i)/2 - R_{i+2} + e) = R_{i+1} - R_{i+2} + 2e$，这与 $R_{i+2} - R_{i+1} \ge -2e$ 矛盾。因此 $i+1 \in I$。

(ii) 由于 $R_{i+1} > S_{i-1}$，我们有 $\beta_{i-1} = d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}] \le e + (S_i - R_{i+1})/2 < (S_i - S_{i-1})/2 + e$。由于 $\beta_{i-1} = \min\{(S_i - S_{i-1})/2 + e,\ S_i - S_{i-1} + d[-b_{i-1,i}]\}$，我们有 $\beta_{i-1} = S_i - S_{i-1} + d[-b_{i-1,i}]$，因此 $d[-b_{i-1,i}] = S_{i-1} - S_i + \beta_{i-1} = S_{i-1} - S_i + d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}]$。另一方面，$d[a_{1,i}b_{1,i}] \ge R_{i+1} - S_i + d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}]$。由于 $R_{i+1} > S_{i-1}$，我们有 $d[a_{1,i}b_{1,i}] > S_{i-1} - S_i + d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}] = d[-b_{i-1,i}]$。根据支配原理，可得 $d[-a_{1,i}b_{1,i-2}] = d[-b_{i-1,i}] = S_{i-1} - S_i + d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}]$。

由于 $d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}] \le e + (S_i - R_{i+1})/2$，我们有 $d[-a_{1,i}b_{1,i-2}] \le S_{i-1} - S_i + e + (S_i - R_{i+1})/2 = S_{i-1} - (R_{i+1} + S_i)/2 + e$。但 $R_{i+1} > S_{i-1}$，并且根据引理 8.3(i)，$R_i \le S_i$。由此可得 $S_{i-1} - (R_{i+1} + S_i)/2 + e < (S_{i-1} - S_i)/2 + e \le e + (S_{i-1} - R_i)/2$。因此 $d[-a_{1,i+2}b_{1,i}] < e + (S_{i-1} - R_i)/2$。为了完成 $i-1 \in I$ 的证明，我们必须

证明 $d[-a_{1,i}b_{1,i-2}] < d(-a_{1,i}b_{1,i-2})$。反设结论不成立，即 $d[-a_{1,i}b_{1,i-2}] = d(-a_{1,i}b_{1,i-2})$。那么 $d(-a_{1,i}b_{1,i-2}) < e + (S_{i-1} - R_i)/2$，因此若 $c = -a_{1,i}b_{1,i-2}$，则根据引理 8.4，有 $R_{i+1} - S_{i-1} + 2d(c) > 4e$。但 $d(c) = d[-a_{1,i}b_{1,i-2}] \le S_{i-1} - (R_{i+1} + S_i)/2 + e$，所以 $4e < R_{i+1} - S_{i-1} + 2d(c) \le R_{i+1} - S_{i-1} + 2(S_{i-1} - (R_{i+1} + S_i)/2 + e) = S_{i-1} - S_i + 2e$，这与 $S_i - S_{i-1} \ge -2e$ 矛盾。因此 $i - 1 \in I$。 □

引理 8.6 若 $G(M/N) \neq F$ 则 $I = \emptyset$。

Proof. 假设 $I = I_\alpha \cup I_\beta \neq \emptyset$。首先注意到 $\min I \in I_\alpha$，因此 $I_\alpha \neq \emptyset$。事实上，若 $i := \min I \in I_\beta$，则根据引理 8.5(ii)，$i - 1 \in I$，这与 i 的极小性矛盾。

现在令 $i = \max I_\alpha$。那么，根据引理 8.5(i)，$i + 1 \in I$。由于 i 的极大性，我们不可能有 $i + 1 \in I_\alpha$。因此 $i + 1 \in I_\beta$。由于 $i \in I_\alpha$ 且 $i + 1 \in I_\beta$，根据引理 8.5(i) 和 (ii)，我们有 $d[-a_{1,i+2}b_{1,i}] = R_{i+1} - R_{i+2} + d[a_{1,i+1}b_{1,i-1}]$ 和 $d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}] = S_i - S_{i+1} + d[a_{1,i+2}b_{1,i}]$。将这些关系相加，得到 $0 = R_{i+1} - R_{i+2} + S_i - S_{i+1}$。但是 $R_{i+2} > S_i$，并且根据引理 8.3(i)，$R_{i+1} \le S_{i+1}$。因此 $R_{i+1} - R_{i+2} + S_i - S_{i+1} < 0$。矛盾。故 $I = \emptyset$。 □

推论 8.7 若 $G(M/N) \neq F$ 且 $d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}] \le e + (S_i - R_{i+1})/2$，则 $d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}] = d(-a_{1,i+1}b_{1,i-1})$。此外，若 $c = -a_{1,i+1}b_{1,i-1}$，则对所有 $1 \le j \le m - 2$ 和 $d[a_{1,i}b_{1,i}] \ge R_{i+1} - S_i + d(c)$，$G(M/N) = N(c)$，$R_{j+2} - S_j > 4e - 2d(c)$。

Proof. 若 $d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}] < d(-a_{1,i+1}b_{1,i-1})$，则根据定义，$i \in I$。但是，根据引理 8.6 $I = \emptyset$，我们必须有 $d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}] = d(-a_{1,i+1}b_{1,i-1})$。这意味着 $d(-a_{1,i+1}b_{1,i-1}) \le e + (S_i - R_{i+1})/2$ 因此，根据引理 8.4，$G(M/N) = N(c)$，且对所有 $1 \le j \le m - 2$，$R_{j+2} - S_j + 2d(c) > 4e$。并且，根据引理 8.3(ii)，$d[a_{1,i}b_{1,i} \ge R_{i+1} - S_i + d[-a_{1,i+1}b_{1,i-1}] = R_{i+1} - S_i + d(c)$。 □

引理 8.8 设 $a_1, \ldots, a_{i+1}, b_1, \ldots, b_{i-1} \in F$。以下三个命题中，若其中两个成立，则第三个也成立：*(a)* $[b_1, \ldots, b_{i-1}] \rightarrowtail [a_1, \ldots, a_i]$，*(b)* $[b_1, \ldots, b_i] \rightarrowtail [a_1, \ldots, a_{i+1}]$，*(c)* $(a_{1,i}b_{1,i}, -a_{1,i+1}b_{1,i-1})_{\mathfrak{p}} = 1$。

Proof. 设 $V_1 = [a_1, \ldots, a_{1,i+1}]$，$V_2 = [b_1, \ldots, b_{i-1}, a_{1,i}b_{1,i-1}, a_{i+1}]$ 和 $V_3 = [b_1, \ldots, b_i, a_{1,i+1}b_{1,i}]$。我们断言，命题 (a)、(b) 和 (c) 分别等价于 $V_1 \cong V_2$，$V_1 \cong V_3$ 和 $V_2 \cong V_3$。显然，这些等距变换中任意两个都蕴含第三个，因此结论成立。

根据 [OM，定理 63：21]，(a) 等价于 $[a_1, \ldots, a_i] \cong [b_1, \ldots, b_{i-1}, a_{1,i}b_{1,i-1}]$，而这又等价于 $[a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}] \cong [b_1, \ldots, b_{i-1}, a_{1,i}b_{1,i-1}, a_{i+1}]$，即 $V_1 \cong V_2$。并且 (b) 等价于 $[a_1, \ldots, a_{i+1}] \cong [b_1, \ldots, b_i, a_{1,i+1}b_{1,i}]$，即 $V_1 \cong V_3$。

根据 Witt 消去定理，$V_2 \cong V_3$ 等价于 $[a_{1,i}b_{1,i-1}, a_{i+1}] \cong [b_i, a_{1,i+1}b_{1,i}]$。现在，对于每个满足 $ab = cd$ 的 a、b、c、$d \in \dot{F}/\dot{F}^2$，有 $[a, b] \cong [c, d]$ 当且仅当 $c \rightarrowtail [a, b]$，而这等价于 $(ac, -ab)_{\mathfrak{p}} = 1$。当 a、b、c、d 是 a_1、$_ib_1$、$_{i-1}$、a_{i+1}、b_i、a_1、$_{i+1}b_1$、$_i$ 时，我们得到 $V_2 \cong V_3$ 等价于 $(a_{i,}b_{1,i}, -a_{i,i+1}b_{1,i-1})_{\mathfrak{p}} = 1$，即等价于 (c)。这就完成了证明。□

现在我们已具备证明引理 8.2 所需的全部要素，而引理 8.2 蕴含定理 8.1。

引理 8.2 的证明。我们可以假设 $G(M/N) \neq F$。否则结论显然成立。由引理 8.3(i)，可得 $R_i \leq S_i$，因此 $R_{i+1} - R_i \geq R_{i+1} - S_i$。（当 $i = n+1 = m-1$ 时也会出现这种情况，此时 $S_{n+1} \gg 0$，这蕴含 $R_{n+1} \leq S_{n+1}$。）

首先假设 $R_{i+1} - R_i = -2e$。我们有 $R_{i+1} > S_{i-1}$，所以 $R_i - S_{i-1} > R_i - R_{i+1} = 2e$。于是，由引理 8.3(ii)，在 $\dot{F}/\dot{F}^2$ 中有 $a_{1,\,i-1}b_{1,\,i-1} = 1$，因此 $a_{1,\,i+1}b_{1,\,i-1} = a_{i,\,i+1}$。由引理 2.6(i)，因为 $R_{i+1} - R_i \geq R_{i+1} - S_i$，这意味着 $G(a_{i,\,i+1},\ R_{i+1} - R_i) \subseteq G(a_{1,\,i+1}b_{1,\,i-1},\ R_{i+1} - S_i) \subseteq G(M/N)$。

现在假设 $R_{i+1} - R_i \neq -2e$。由引理 2.16，我们有

$$\bar{G}(a_{i,i+1}, R_{i+1} - R_i)\bar{G}(a_{1,i+1}b_{1,i-1}, R_{i+1} - S_i) = \langle a_{1,i-1}b_{1,i-1}\rangle(1 + \mathfrak{p}^{f(R_{i+1}-R_i)+d(a_{1,i-1}b_{1,i-1})})\dot{F}^2\bar{G}(a_{1,i+1}b_{1,i-1}, R_{i+1} - S_i).$$

由于 $G(a_{1,\,i+1}b_{1,\,i-1},\ R_{i+1} - S_i) \subseteq G(M/N)$，包含关系 $G(a_{i,\,i+1},\ R_{i+1} - R_i) \subseteq G(M/N)$ 等价于 $\langle a_{1\,i-1}b_{1\,i-1}\rangle\ 1 + \mathfrak{p}^{f(R_{i+1}-R_i\ +d\ a_{1\,i-1}b_{1\,i-1}}\ \dot{F}^2 \subseteq G\ M/N$ $1 +\ .\ .\ ()(.\ .))\ (\ )$，也就是说，等价于 $()(.\ .))\ (\ )$ 和 $.\ .\ (\ )$。

我们有两种子情形：

(a) $d[-a_{1,i}b_{1,i-2}] > e + (S_{i-1} - R_i)/2$。由引理 8.3(ii)，有 $d(a_{1,i-1}b_{1,i-1}) \geq (R_i - S_{i-1})/2 + e$。结合 $f(R_{i+1} - R_i) \geq (R_{i+1} - R_i)/2 - e$，可得 $f(R_{i+1} - R_i) + d(a_{1,i-1}b_{1,i-1}) \geq (R_{i+1} - S_{i-1})/2 \geq \beta$，因此 $(1 + \mathfrak{p}^{f(R_{i+1}-R_i)/2+d(a_{1,i-1}b_{1,i-1})})\,\dot{F}^2 \subseteq (1 + \mathfrak{p}^{\beta})\,\dot{F}^2 \subseteq G(M/N)$。

Next 我们证明 $a_{1,\,i-1}b_{1,\,i-1} \in G(a_{1,\,i}b_{1,\,i-2},\ R_i - S_{i-1}) \subseteq G(M/N)$，因此得证 .

如果 $(a_{1,i}b_{1,i-2}, R_i - S_{i-1}) = (-1, -2e)$ 在 $\dot{F}/\dot{F}^2 \times \mathbb{R}$，则 $G(\quad) = {}_{,i}b_{1,,}\,R_i - S_{i-1})$ 且 ord $_{,,}$为偶数（我们有 $_{,,}$属于 $\mathcal{O}^{\times}\dot{F}^2$）。因此 ord $a_{1\,i-1}b_{1\,i-1} = a_{1\,i}b_{1\,i-2} - R_i + S_{i-1} = a_{1\,i}b_{1\,i-2} + 2e$ $a_{1\,i-1}b_{1\,i-1} \in {}_{,,}$ord $_{,,}$ord $_{,,}$ 为偶数，所以 $_{,,}(_{,,})$。

若 $(a, R) \neq (-1, -2e)$，则我们使用推论 2.13(iii)。由于 $d(a_{1,i-1}b_{1,i-1}) \geq (R_i - S_{i-2})/2 + e$ 且 $d(-a_{1,i}b_{1,i-2}) \geq d[-a_{1,i}b_{1,i-2}] > e - (R_i - S_{i-1})/2$，我们有 $a_{1,i-1}b_{1,i-1} \in (1 + \mathfrak{p}^{(R_i-S_{i-1})/2+e})\,\dot{F}^2 \subseteq \bar{G}(a_{1,i}b_{1,i-2}, R_i - S_{i-1})$。

(b) $d[-a_{1,i}b_{1,i-2}] \leq e + (S_{i-1} - R_i)/2$。根据推论 8.7，若 $c = -a_{1,i}b_{1,i-2}$，则 $d(c) = d[-a_{1,i}b_{1,i-2}]$，$G(M/N) = \mathbf{N}(c)$，$d[a_{1,i-1}b_{1,i-1}] \geq R_i - S_{i-1} + d(c)$ 和 $R_{j+2} - S_j > 4e - 2d(c)$ 对于 $1 \leq j \leq m-2$。由于 $f(R_{i+1} - R_i) \geq R_{i+1} - R_i - 2e$，$d(a_{1,i-1}b_{1,i-1}) \geq R_i - S_{i-1} + d(c)$ 且 $R_{i+1} - S_{i-1} > 4e - 2d\ c\quad f\ R_{i+1} - R_i\ +d\ a_{1\,i-1}b_{1\,i-1} \geq R_{i+1} - S_{i-1} - 2e + d\ c\ >(\ )$，因此我们有 $(\ )\ (_{,,})\ (\ )\ (\ )$。由引理 $.\ (i)\ ()(_{,,})\ \mathbf{N}(\ )\ (\ )$。

$2e - d\ c \qquad 1\ 2 \qquad 1 + \mathfrak{p}^{f(R_{i+1}-R_i\ +d\ a_{1\,i-1}b_{1\,i-1}}\ \dot{F}^2 \subseteq \quad c\ = G\ M/N$

我们有 $d[a_{1,i}b_{1,i-2}] \leq e + (S_{i-1} - R_i)/2 < \infty$，因此 $d[a_{1,i-1}b_{1,i-1}] = d(c) \leq 2e$。于是，对于 $1 \leq j \leq m-2$，由于 $R_{j+2} - S_j > 4e - 2d(c)$，我们有 $2e + S_j - R_{j+2} < 2d(c) - 2e \leq d(c)$。由于 $R_{i+1} > S_{i-1}$ 和 $d[-a_{1,i-2}b_{1,i}] + d[a_{1,i+1}b_{1,i-1}] \geq d(c) + 0 > 2e + S_{i-1} + R_{i+1}$，由引理 8.3(iii)，可得 $[b_1, \ldots, b_{i-1}] \rightarrowtail [a_1, \ldots, a_i]$。若 $i = 2$，则可写成 $b_1 \rightarrowtail [a_1, a_2]$，因此 $(a_1b_1, c)_{\mathfrak{p}} = (a_1, b_1, -a_1, 2)_{\mathfrak{p}} = 1$。于是 $a_1b_1 \in \mathbf{N}(c) = G(M/N)$，结论得证。若 $i \geq 3$，则类似地有 $R_i > S_{i-2}$ 和 $d[-a_{1,i-1}b_{1,i-3}] + d[a_{1,i}b_{1,i-2}] \geq 0 + d(c) > 2e + S_{i-2} + R_i$，故 $[b_1, \ldots, b_{i-2}] \rightarrowtail [a_1, \ldots, a_{i-1}]$。结合 $[b_1, \ldots, b_{i-1}] \rightarrowtail [a_1, \ldots, a_i]$，由引理 8.8 可知 $(a_{1,i-1}b_{1,i-1}, c)_{\mathfrak{p}} = (a_{1,i-1}b_{1,i-1}, -a_{1,i}b_{1,i-2})_{\mathfrak{p}} = 1$。于是 $a_{1,i-1}b_{1,i-1} \in \mathbf{N}(c) = G(M/N)$。 □

引理 8.9 若某个 $1 \leq i \leq m-2$ 对应的 $R_{i+2} - S_i$ 为奇数，则 $(1 + \mathfrak{p}^{[(R_{i+2}-S_i)/2]})\,\dot{F}^2 \subseteq G(a_{1,i+1}b_{1,i-1}, R_{i+1} - S_i)G(a_{1,i+2}b_{1,i}, R_{i+2} - S_{i+1})$.

Proof. 由引理 8.3(i), $R_{i+1} \le S_{i+1}$。（这包括 $i = n = m-2$ 的情形，因为 $S_{n+1} \gg 0$ 蕴含 $R_{n+1} \le S_{n+1}$。）

为方便起见，我们记作 $a = a_{1,\ i+1}b_{1,\ i-1}$ 和 $b = a_{1,\ i+2}b_{1,\ i}$。我们有 $b = a_{i+2}b_i a$，因此赋值 $b = R_{i+2} + S_i +$赋值 a。由于 $R_{i+2} - S_i$是奇数，赋值 a 和赋值 b 的奇偶性相反。因此赋值 ab 是奇数，从而 $d(ab) = 0$。

我们令 $G = G(a, R_{i+1}-S_i, a)G(b, R_{i+2}-S_i)$。由于 $[(R_{i+2}-S_i)/2] = (R_{i+2}-S_i-1)/2$, 我们必须证明 $(1+\mathfrak{p}^{(R_{i+2}-S_i-1)/2})\,\dot{F}^2 \subseteq G$。若 $G = \dot{F}$，则结论显然成立，因此我们将假设 $G \neq F$。注意， $a \in G(a, R_{i+1}-S_i, a) \subseteq G$ 且 $b \in G(b, R_{i+2}-S_i) \subseteq G$，所以 $ab \in G$。但赋值 ab 是奇数，因此 $G \not\subseteq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。特别地， $G \neq \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。又由于 $G \neq \dot{F}$，我们有 $\mathcal{O}^\times \dot{F}^2 \not\subseteq G$。

We 考虑 $R_{i+1} - S_i$ 和 $R_{i+2} - S_{i+1}$ 为 $\le 2e$ 或 $\ge 2e+1$ 的四种情形.

(1) $R_{i+1} - S_i$， $R_{i+2} - S_{i+1} \ge 2e+1$。由于 $R_{i+1} \le S_{i+1}$, 我们有 $R_{i+2} - S_i \ge (R_{i+2} - S_{i+1}) + (R_{i+1} - S_i) > 4e+2$。由此可得 $(R_{i+2} - S_i - 1)/2 > 2e$，所以 $(1+\mathfrak{p}^{(R_{i+2}-S_i-1)/2})\,\dot{F}^2 = \dot{F}^2 \subseteq G$ 显然成立。

(2) $R_{i+1} - S_i$， $R_{i+2} - S_{i+1} \le 2e$。由引理 2.12(i) 和 2.16，我们有 $G \supseteq \bar{G}(a,\ 2e)\,\bar{G}(b,\ 2e) \supseteq (1+\mathfrak{p}^{2e/2+d(ab)-e})\,\dot{F}^2 = (1+\mathfrak{p}^0)\,\dot{F}^2 = \dot{F}$，即 $G = \dot{F}$，这与我们的假设矛盾。

(3) $R_{i+1} - S_i \le 2e$ 和 $R_{i+2} - S_{i+1} \ge 2e+1$。我们有两个子情形:

(a) $d(-a) > e - (R_{i+1}-S_i)/2$。我们不可能有 $(a,\ R_{i+1}-S_i) = -2e$，因为这意味着 $\mathcal{O}^\times \dot{F}^2 = \bar{G}(a,\ R_{i+1} - S_i) \subseteq G$。然后，根据推论 2.13(iii)，$(1+\mathfrak{p}^{(R_{i+1}-S_i)/2+e})\,\dot{F}^2 \subseteq G(a, R_{i+1} - S_i) \subseteq G$。另一方面， $R_{i+1} \le S_{i+1}$，所以 $R_{i+2} - R_{i+1} \ge R_{i+2} - S_{i+1} \ge 2e+1$。由此可得 $(R_{i+2}-S_i-1)/2 \ge (R_{i+1}-S_i)/2+e$，因此 $(1+\mathfrak{p}^{(R_{i+2}-S_i-1)/2})\,\dot{F}^2 \subseteq (1+\mathfrak{p}^{(R_{i+1}-S_i)/2+e})\,\dot{F}^2 \subseteq G$。

(b) $d(-a) \le e - (R_{i+1} - S_i)/2$。由推论 2.13(iii)，$\mathsf{N}(-a) = G(a, R_{i+1} - S_i) \subseteq G$。但 $G \neq \dot{F}$，故 $G = \mathsf{N}(-a)$。我们不可能有 $a = -\Delta$ 属于 $\dot{F}/\dot{F}^2$，因为这将蕴含 $G = \mathsf{N}(\Delta) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。由于 $R_{i+2} - S_{i+1} > 2e$，由推论 2.15， $\bar{G}(b, R_{i+2} - S_{i+1}) \subseteq G = \mathsf{N}(-a)$蕴含 $R_{i+2} - S_{i+1} + d(-a) = R_{i+2} - S_{i+1} + d(ab) + d(-a) > 4e$。并且，由引理 8.3(ii)，在 $\dot{F}/\dot{F}^2$ 中我们有 $a_{1\text{、}\ i+1}b_{1\text{、}\ i+1} = 1$，故 $a = a_{1\text{、}\ i+1}b_{1\text{、}\ i-1} = b_{i\text{、}\ i+1}$。由于 $b_{i\text{、}\ i+1} = a \neq -\Delta$ 属于 $\dot{F}/\dot{F}^2$，来自引理 1.4 的不等式 $S_{i+1} - S_i + d(-a) = S_{i+1} - S_i + d(-b_{i,i+1}) \ge 0$是严格的，故 $S_{i+1} - S_i - 1 + d(-a) > 0$。我们将此不等式加到 $R_{i+2} - S_{i+1} + d(-a) > 4e$ 上并除以 2，得到 $(R_{i+2} - S_i - 1)/2 + d(-a) > 2e$，由引理 1.2(i)，这蕴含 $(1+\mathfrak{p}^{(R_{i+2}-S_i-1)/2})\,\dot{F}^2 \subseteq \mathsf{N}(-a) = G$。

(4) $R_{i+1} - S_i \ge 2e+1$ 和 $R_{i+2} - S_{i+1} \le 2e$。同样，我们有两个子情形:

(a) $d(-b) > e - (R_{i+2} - S_{i+1})/2$。我们不可能有 $(b, R_{i+2} - S_i) = (-1, -2e)$ 在 $\dot{F}/\dot{F}^2$中，因为这将导致 $\mathcal{O}^\times \dot{F}^2 = \bar{G}(b, R_{i+2} - S_{i+1}) \subseteq G$。然后，由推论 2.13(iii)，$(1+\mathfrak{p}^{(R_{i+2}-S_{i+1})/2+e})\,\dot{F}^2 \subseteq \bar{G}(b, R_{i+2} - S_{i+1}) \subseteq G$。由于 $R_{i+1} \le S_{i+1}$，我们有 $S_{i+1} - S_i \ge R_{i+2} - S_i \ge 2e+1$，因此 $(R_{i+2} - S_i - 1)/2 \ge (R_{i+2} - S_{i+1})/2 + e$，这意味着 $(1+\mathfrak{p}^{(R_{i+2}-S_i-1)/2})\,\dot{F}^2 \subseteq (1+\mathfrak{p}^{(R_{i+2}-S_{i+1})/2+e})\,\dot{F}^2 \subseteq G$。

(b) $d(-b) \le e - (R_{i+2} - S_{i+1})/2$。由推论 2.13(iii)，$\mathsf{N}(-b) = G(b, R_{i+2} - S_{i+1}) \subseteq G$。但 $G \neq \dot{F}$，故 $G = \mathsf{N}(-b)$。我们不能有 $a = -\Delta$ 属于 $\dot{F}/\dot{F}^2$，因为这将蕴含 $G = \mathsf{N}(\Delta) = \mathcal{O}^\times \dot{F}^2$。由于 $R_{i+1} - S_i > 2e$，由推论 2.15， $\bar{G}(a, R_{i+1} - S_i) \subseteq G = \mathsf{N}(-b)$蕴含 $R_{i+1} - S_i + d(-b) = R_{i+1} - S_i + d(ab) + d(-b) > 4e$。并且，由引理 8.3(ii)，在 $\dot{F}/\dot{F}^2$ 中我们有 $a_{1\text{、}\ i}b_{1\text{、}\ i} = 1$，故 $b = a_{1\text{、}\ i+2}b_{1\text{、}\ i} = a_{i+1\text{、}\ i+2}$。由于 $a_{i+1\text{、}\ i+2} = b \neq -\Delta$ 属于 $\dot{F}/\dot{F}^2$，来自引理 1.4 的不等式 $R_{i+2} - R_{i+1} + d(-b) = R_{i+2} - R_{i+1} + d(-b) \ge 0$ 是严格的，故 $R_{i+2} - R_{i+1} - 1 + d(-b) > 0$。我们将此不等式加到 $R_{i+1} - S_i + d(-b) > 4e$

然后我们除以 2，得到 $(R_{i+2}-S_i-1)/2+d(-b)\ >2e$，由引理 1.2(i)，这蕴含 $(1+\mathfrak{p}^{(R_{i+2}-S_i-1)}$ $^{/2})\,\dot{F}^2\subseteq \mathrm{N}(-b)\ =G$。 □

命题 8.10 ***(i)*** 若对某个 $1\leq i\leq \min\{n,m-1\}$，有 $R_1+\cdots+R_i\not\equiv S_1+\cdots+S_i$（模 2），则在 ***(i)*** 中，因子 $G(a_{1,i+1}b_{1,i-1}, R_{i+1}-S_i)$ 可替换为 $\mathrm{N}(-a_{1,i+1}b_{1,i-1})$。***(ii)*** 若对某个满足 $R_{i+2}-S_i$ 为奇数的 $1\leq i\leq m-2$，有 $(1+\mathfrak{p}^{\beta})\,\dot{F}^2=(1+\mathfrak{p}^{[(R_{i+2}-S_i)/2]})\,\dot{F}^2$，则在定理 ***8.1(i)*** 的公式中可删去因子 $(1+\mathfrak{p}^{\beta})\,\dot{F}^2$。

Proof. (i) 这与定理 7.3(ii) 相同。（由注记 7.4（2），这两个陈述都等价于：对所有满足 $R_1+\cdots+R_i\not\equiv S_1+\cdots+S_i$（模 2）的 i，$\subseteq\theta(X(M/N))-a_{1,i+1}b_{1,i-1}$。）

(ii) 由引理 $8\,9,\ \ 1+\mathfrak{p}^{\beta}\,\dot{F}^2\ =\ 1+\mathfrak{p}^{[(R_{i+2}-S_i\ /2]}\,\dot{F}^2\ \subseteq\ \bar{G}\ a_{1\,i+1}b_{1\,i-1}\ R_{i+1}\ -$。( ) $S_{i-1}\ \bar{G}\ a_{1\,i+1}b_{1\,i}\ R_{i+2}-S_i\ \subseteq\prod_{i=1}^{m-1}\bar{G}\ a_{1\,i+1}b_{1\,i-1}\ R_{i+1}-S_i$ $1+\mathfrak{p}^{\beta}\ \dot{F}^2$ () (,,,) (,,,) (,,,)。因此，定理 8.1(i) 中的因子 ( ) 是多余的。 □

参考文献

[B1] C. N. Beli，二进局部域上的整数自旋范数群与二次格的表示，俄亥俄州立大学学位论文（2001）。[B2] C. N. Beli，二进局部域上的整数自旋范数群，《数论杂志》102（2003），125–182。[B3] C. N. Beli，二进局部域上整数二次型的表示，《美国数学会电子研究公告》12（2006），100–112。[B4]C. N. Beli，二进局部域上整数二次型分类的新方法，《美国数学会汇刊》362（2010），1599–1617。[B5] C. N. Beli，二进局部域上的二次格表示，（2019），arXiv:1905.04552v2。[H1] J. S. Hsia，局部整数旋转的自旋范数 *I*，《太平洋数学杂志》，第 57 卷（1975），199 - 206。[H2] J. S. Hsia，自旋属表示，《太平洋数学杂志》63（1976），147 - 152。[SP] R. Schulze-Pillot，通过自旋属表示三元二次型，《数论杂志》第 12 卷（1980），529 - 540。[X1] F. Xu，关于局部整数旋转自旋范数的注记 *I*，《太平洋数学杂志》第 136 卷（1989），81 - 84。[X2] F. Xu，二进局部域中的整数自旋范数 *I*，《太平洋数学杂志》第 157 卷（1993），179 - 200。[X3] F. Xu，二进局部域上整数正交群的生成，《太平洋数学杂志》第 167 卷（1995），385 - 398。[X4] F. Xu，奇数次域扩张下二次型的算术 *Springer* 定理，《当代数学》第 249 卷（1999），175 - 197。