arXiv:2603.01674v1 [physics.ao-ph] 2 Mar 2026

关于瞬态气候响应的解析性见解

Boriana Chtirkova [a, b]

[a]普林斯顿大学地球科学系，新泽西州普林斯顿[b]普林斯顿大学大气与海洋科学项目，新泽西州普林斯顿

通讯作者：Boriana Chtirkova，chtirkova@princeton.edu

摘要：瞬态气候响应中的温度低于相同强迫下的平衡温度。非平衡程度并非恒定不变，而是取决于各种气候参数。我们通过求解具有地表温度反馈、且强迫线性增加时的热方程，建立对此现象的直观认识。表面温度起初的变化速率低于相应稳态（SS）温度，随后逐渐加快，直至达到准稳态（QSS）；此时，SS 温度和 QSS 温度以相同速率变化，二者之间保持恒定偏差。该偏差取决于强迫速率，以及系统总热容量与气候反馈平方的比值。气候系统趋近 QSS 所需的时间尺度也取决于有效海洋混合，约为数千年。在与社会相关的时间尺度（~ 100 年）内，大气层顶能量不平衡不断增加，实际温度与相同强迫下预期的稳态温度之间的差距也随之扩大。

重要性声明：理解瞬态气候响应为何不同于平衡气候敏感度，对于解读近期气候变化至关重要。通过求解一个在强迫线性增加条件下、包含地表温度反馈的扩散海洋模型，我们表明，在与社会相关的时间尺度内，气候系统会逐渐远离平衡态，同时伴随大气层顶能量不平衡的演变。我们提出一个简明且具有清晰物理意义的框架，说明地表温度反馈和有效海洋混合如何影响温度及大气层顶不平衡的时间演化。

1. 引言

对于强迫的暂时性增加，温度响应总是低于强迫在某一时刻固定后系统最终趋近的温度。为探讨在分析时观测到的增暖是否与强迫相符这一问题，Wigley 和 Schlesinger（1985）讨论了热扩散方程的一个解析解，该方程描述了具有较大热惯性系统的表面温度演化。他们表明，在任意给定时刻，受强迫的气候系统都可能远未达到平衡态；并推导出非平衡程度取决于气候反馈和有效海洋扩散率，后者代表垂向海洋混合。Lebedeff（1988）、Watts 等人（1994）以及 Morantine 和 Watts（1994）针对混合层或完整海洋研究了类似的问题设定。研究表明，响应时间尺度取决于对域深度和气候反馈参数的假设，其时间尺度约为数百年。

我们重新探讨这样一个问题：在经历约100年的强迫之后，如何利用扩散模型解释气候系统的温度状态；不过，我们采用能量守恒边界条件，并为扩散柱设定有限深度，以模拟海洋热库。在这一设定中，热方程成为常用双箱模型的连续形式（Gregory 2000；Held 等，2010）。我们给出了表面温度和大气层顶能量不平衡对线性增加强迫的响应的简洁解析表达式。我们估算的系统趋近准稳态的时间尺度取决于域深度和热交换系数，而与气候反馈参数无关，其量级约为一千年。

目前，非平衡程度主要是根据大气—海洋环流模式（AOGCM）模拟推断的。所采用的方法是估算系统在给定恒定强迫下趋近的温度 T_{ECS} （例如，来自突增4倍二氧化碳实验），以及在强迫单调增加的模拟中某个固定时点的温度 T_{TCR} （例如，来自每年增加1% CO_2实验（Eyring 等，2016））。这两个温度通常都按强迫加倍进行归一化（F_{2x}），分别称为平衡气候敏感度（ECS）和瞬态气候响应（TCR）。将 T_{TCR} 定义为在年增长率为1%的情景下，二氧化碳$_2$ 排放量加倍之年附近的温度 [1]，是评估模型结果的一种实用方法。然而，T_{TCR} 是强迫增长率的函数，且未必随强迫线性变化，这正是本文探讨的问题之一。在耦合气候模型中，ECS 的范围为1.8 – 5.6 K，TCR 的范围为1.3 – 3.0 K（IPCC 2023；Flynn 和 Mauritsen，2020；Nijsse 等，2020；Meehl 等，2020）。

T_{TCR}与 T_{ECS}不同，它不仅是气候反馈参数的函数，还受到海洋吸热的影响（Hoffert 等，1980；Wigley 和 Schlesinger，1985；Raper 等，2002；Gregory 和 Forster，2008；Rose 和 Rayborn，2016），更确切地说，受到在用于评估 T_{TCR}的时间段内海洋吸热效率的影响。海洋吸热可通过改变系统的有效热容量（Gregory 和 Forster，2008；Gregory 等，2023）以及调节大气的响应（Held 等，2010；Winton 等，2010；Rose 和 Rayborn，2016）来影响瞬态气候响应。Kostov 等人（2014）将大西洋经向翻转环流（AMOC）与海洋吸热效率联系起来，并表明具有更强 AMOC 的气候模型具有更大的有效热容量，因而 T_{TCR}更低。Kuhlbrodt 和 Gregory（2012）强调了气候模型中涡旋诱导厚度扩散系数参数的重要性，该参数在南大洋尤为有效。据估计，南大洋是热含量增幅最大的海洋区域（Fr¨olicher 等，2015年）。海洋向深处传递热量的效率还与跃密层的深度（Newsom 等，2023）和盐度分布（Liu 等，2023）有关。

采用线性增加强迫的耦合大气环流模式进行的模拟表明，在强迫开始后的100–150年内，表面温度呈线性变化（例如，Gregory（2000年）；Gregory 和 Forster（2008年））。通过重新整理线性气候反馈

[1]浓度以每年 1% 的速率呈指数增长：$C(t) = C_0 1.01^t$，时间 t'为 $C(t') = 2C_0$等于 $2 = 1.01^{t'}$，$t' = \log_{1.01}(2) = \frac{ln}{ln}(2)(1.01) \approx 70$。

方程： $F(t) - \lambda \Delta T(t) = N(t)$，其中 $\Delta T(t)$ 表示相对于未扰动温度的偏差，λ 是气候反馈参数， F 是额外强迫， N 是系统不平衡，可得：

$$\Delta T(t) = \frac{F(t)}{\lambda + \frac{N(t)}{T(t)}} = \frac{F(t)}{\lambda + \varkappa(t)}, \tag{1}$$

其中， $\varkappa(t) = \frac{N(t)}{T(t)}$ 是海洋热吸收效率的定义（Gregory 2000；Gregory 和 Forster, 2008；Gregory等人，2015年、2023）。由于温度和不平衡都随时间变化， $\varkappa$取决于评估所采用的时段，并会从模拟初期的 $\varkappa \to \infty$ 变化到足够长时间后的 $\varkappa \to 0$ （Gregory 等, 2023）。在模式间比较中，通常会根据强迫加倍年份前后的 T_{TCR} 来评估 $\varkappa$ ， 而 $\varkappa$常被解释为大气环流模式特有的、表征上层海洋与深海之间热耦合的系数。

研究气候响应的一个概念框架是双箱扩散模型（Gregory2000；Held等人，2010；Winton等人，2010），该模型由一个双变量常微分方程组构成：

$$\begin{cases} C_1 \dfrac{dT_1}{dt} = F - \lambda T_1 - \epsilon\gamma(T_1 - T_2) \\ C_2 \dfrac{dT_2}{dt} = \gamma(T_1 - T_2) \end{cases} \tag{2}$$

大气层顶的强迫 F 作用于具有热容量 C_1 和温度T_1（t）的一层，该层将热量输送至具有热容量 C_2和温度 T_2（t）的下层。上层可代表充分混合的上层海洋，下层则代表深海，因此该系统通常针对 $C_1 << C_2$进行评估。两层之间的热通量通过热交换系数 γ与二者之差成正比。系统通过作用于上层温度的气候反馈参数 λ 向太空散失热量。该模型的完整版本包含效能因子 ϵ （Held 等，2010；Winton 等，2010），用以调节向太空的热量损失。就本文而言，我们不考虑此类调节，即 $\epsilon = 1$。

双层模型（方程 2）在极限 $C_1 \to 0$ 和 $T_2 \to 0$ （或 $C_2 \to \infty$）下，恢复了强迫与表面温度之间的线性关系：

$$\lim_{C_1 \to 0, T_2 \to 0} T_1 = \frac{F(t)}{\lambda + \gamma}, \tag{3}$$

但这样做会丢失所有时间信息，而且没有对这种近似的有效范围进行估计（Jeevanjee 等（2025））。

在双箱模型中， γ 是一个常数参数；与 κ（t）不同，它不会随时间变化，因此这两个量的物理含义并不明确。目前还没有从气候模型中诊断 γ 的标准方法。一种方法是假设方程 3 中的极限在强迫加倍当年成立，并根据 $T_{\mathrm{TCR}} = T_1$计算 γ。另一种方法是对大气环流模式的输出进行数值拟合，以确定两层模型的系数；在这种方法中，C_1 通常被视为一个非零自由参数（例如 Geoffroy 等（2013b））。这引出了一个问题：通过不同方法（即假设不同热容量）得到的 γ 估值应如何解读。

我们旨在为理解线性增加强迫下的瞬态气候响应提供一个简单且物理意义清晰的框架。我们探究为何在 150 年的 1pctCO2 模拟中，表面温度演变看似线性，但其温度倾向却不同于稳态温度变化率（$\frac{dF/dt}{\lambda}$）；同时，我们将表面温度演变对强迫变化率（$\frac{dF}{dt} = a$）的依赖性与系统的响应时间尺度联系起来。为此，我们研究具有能量守恒边界条件的热方程的解析解（第 2 节）。我们选择分析连续的偏微分方程，而非耦合常微分方程系统（方程 2），因为前者是更一般的情形，且不将 C_1 和 C_2 视为自由参数；不过，我们会说明这两个模型是类似的（附录 B）。在第 3 节中，我们通过时变表观热容量的概念，建立对 TCR 问题的物理直觉。在第 4 节中，我们提供一种通过考虑系统的响应时间尺度并假设总热容量，利用 AOGCM 估算 γ 的方法。全文中，我们同时关注表面温度和大气层顶能量不平衡。

2. 热方程的设定与解

我们建立经典的热（扩散）方程，其中温度是时间和深度的函数 $T = T(t,\ z)$:

$$c\frac{\partial T}{\partial t} = K\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{4}$$

海水的体积热容为 $c \approx 4\times10^6\,\mathrm{Jm^{-3}K^{-1}}$，分子扩散率为 $K \approx 0.6\ \mathrm{WK^{-1}m^{-1}}$（Alexandrov 等，2017）。与风应力、涡旋、潮汐和底边界层引发的平流、对流和混合作用相比，分子扩散率的影响微不足道。这种湍流混合可表示为有效海洋扩散率 $\kappa[\mathrm{m^2s^{-1}}]$（Redi，1982；Gent 和 Mcwilliams，1990；Gnanadesikan，1999），既可直接作用于温度场，也可通过影响速度场间接作用于温度场。全球海洋扩散率的估算通常基于浮力与扩散率相平衡的理论。这些理论表明，垂向结构中，中层深度的扩散率为 $\kappa \sim 10^{-5}\,\mathrm{m^2s^{-1}}$，深海则为 $\sim 10^{-4}\,\mathrm{m^2s^{-1}}$（Munk，1966；Munk 和 Wunsch，1998；Nikurashin 和 Vallis，2011；Rogers 等，2023）。上层海洋中具有代表性的扩散率值为 κ，即 $2.5\times10^{-5}\,\mathrm{m^2s^{-1}}$；在 2500 米以下，由于地形的影响，该值会增大到 $2\times10^{-4}\ \mathrm{m^2s^{-1}}$ 以上。将这些扩散率估算值直接联系到温度（即 $\kappa = \frac{K}{c}$），可得到热导率 $K \approx 100 - 800\ \mathrm{WK^{-1}\,m^{-1}}$。在特殊情形 K（z）下，可以求得解析解，揭示所需的尺度关系，从而指导对气候模型模拟的解读；在这些模拟中，与真实海洋一样，K 可能随深度、地理位置和时间而变化。

对于能量守恒系统，边界条件需要用顶部和底部的通量来表述。上边界使用强迫和线性反馈来表述，因此它在 z 中同时包含函数及其导数（罗宾边界条件）。下边界条件表明下边界没有向外的通量（诺伊曼边界条件）。

$$\begin{aligned} z = 0:&\quad \mathcal{F}(t, z=0) &&= -K\,\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=0} &&= F(t) - \lambda T(t, z=0) = N(t), \lambda > 0 \\ z = L:&\quad \mathcal{F}(t, z=L) &&= -K\,\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=L} &&= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

在这一表述中，上边界条件决定了整个系统的热变化率。在气候科学中，它被称为净大气层顶（TOA）辐射通量，而对于$N \neq 0$，它是大气层顶能量不平衡[2]。由气候模型估计的气候反馈参数值范围为$0.6 - 1.5\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-1}}$（IPCC 2023；Flynn 和 Mauritsen, 2020；Nijsse 等，2020）。域深度的适当取值应为有效海洋深度[3]$L \approx 2600$ m。我们采用通量向下为正、且 z 随深度增加（$z > 0$）的约定，因此边界条件中带有负号（方程5）。

a. 稳态解

我们首先考虑具有恒定强迫 $F(t > 0) = const$ 的情形。经过足够长的时间后，系统将趋近于稳态（SS），其定义为 $\frac{\partial T(z)}{\partial t} = 0$，此时通量处于平衡态，且温度不随深度变化：

$$T_{\mathrm{SS}}(z) = \frac{F}{\lambda} \tag{6}$$

对于 $F = F_{2x}$，T_{SS} 对应于气候科学中常用的平衡气候敏感度 T_{ECS}。

b. 准稳态解

对于线性增加强迫 $F = at$，系统存在一个解析解，其中含有 t 和 z 的项彼此分离：

$$T_{\mathrm{QSS}}(t,z) = \frac{-2acKL + 2a\lambda Kt - 2a\lambda cLz + a\lambda cz^2}{2\lambda^2 K} = \frac{a}{\lambda}t + f(z) \tag{7}$$

其中 $f(z) = \frac{-2aCKL - 2a\lambda cLz + a\lambda cz^2}{2\lambda^2 K}$。该解描述了一种准稳态（QSS），此时整个区域内的温度倾向恒定为 $\frac{\partial T(z)}{\partial t} = const = \frac{a}{\lambda}$，相应的深度函数 $T(z) = f(z)$ 是二次函数。

对于每种强迫量T_{SS}（t），我们可以将表面温度及其相对于 T_{SS} 的偏差表示为：$= \frac{a}{\lambda}t$

–

[2]正确的表达式表示相对于工业化前全球平均表面温度的温度差 ΔT_s。为简便起见，我们将初始温度设为 0，并在全文中省略 Δ。[3]该数值由海洋平均深度 3682 米乘以其表面积占比 71% 得出。

$$T_{\mathrm{QSS}}(t, z=0)=\frac{a}{\lambda} t-\frac{a c L}{\lambda^2}=T_{\mathrm{SS}}(t)-\frac{a c L}{\lambda^2} \tag{8}$$

我们注意到， T_{QSS}（t）与热导率 K无关，但达到准稳态所需的时间尺度取决于 K（见下一节）。这与具有下边界条件 T（t，$z \to \infty$）$=0$ 的扩散方程解不同；正如 Wigley 和 Schlesinger（1985）所示，这种情况下永远不会达到准稳态。另一种情况是 T（t，$z \to L$）$=0$，如 Lebedeff（1988）以及 Morantine 和 Watts（1994）所示，此时准稳态表面温度除了取决于热导率系数 K 外，还取决于其他因素；垂直结构函数 T(z) 除了包含 z^2 项外，还包含 z^3 项。Watts 等人（1994）将不含 K 的相同准稳态表面温度推导为扩散方程解的渐近值。下一节中，我们将提出一个不同于 Watts 等人（1994）的时间尺度，用以描述趋近这一准稳态的过程。

图 1 a、c 将地表的 T_{SS} 及其平行的 T_{QSS}（即 $z=0$）显示为黑色和灰色虚线；图 1 c 则将深度方向的二次温度剖面 $f(z)$ 显示为红色虚线。

由于温度倾向为常数，相应的不平衡也随时间保持不变：

$$N_{\mathrm{QSS}}=-K \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0}=-K \left.\frac{-2 a \lambda c L+2 a \lambda c z}{2 \lambda^2 K}\right|_{z=0}=\frac{a c L}{\lambda} \tag{9}$$

N_{QSS} 与时间无关，取决于系统热容量和强迫速率。对于等效海洋深度为 $L=2600$ m，且温室气体强迫速率约为当前水平的情形$a=0$。04 $\mathrm{Wm^{-2}yr^{-1}}$（Smith等人 2021），准稳态下的大气顶能量不平衡为 $N_{\mathrm{QSS}} \approx \frac{13}{\lambda}\ \mathrm{Wm^{-2}}$；对于 λ 的任何可能取值，该数值都高于目前观测到的 1。0 ± 0。2 $\mathrm{Wm^{-2}}$（Loeb等人 2021、2024）。这表明，即使在线性增加强迫持续约 100 年后，地球仍未接近准稳态。下文将说明，这一结果与扩散模型中达到准稳态所需时间尺度的解析解一致（方程 4、5）。

c. 趋近准稳态解

如果为系统 $T(t=0,\ z)=0$ 添加零初始条件，完整解就是由随时间衰减的指数模态构成的无穷级数：

$$T(t, z)=\frac{a}{\lambda} t-\sum_{i=1}^{\infty} f_i(z) e^{-t / \tau_i} \tag{10}$$

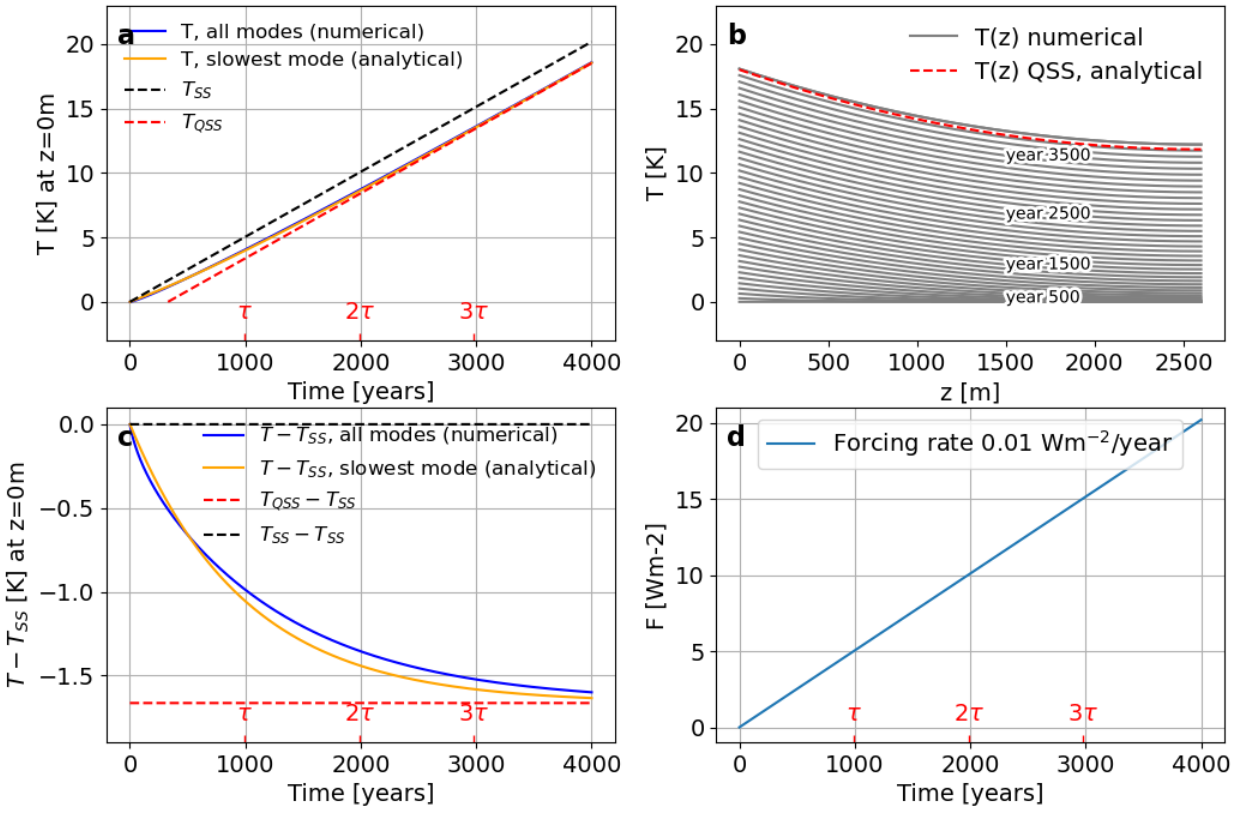

图1. 热方程的解析解（仅包含衰减最慢模态）和数值解（包含所有衰减模态），参数为 $F_{2\times} = 3.5$ Wm^{-2}, $\lambda = 1$ Wm^{-2}K^{-1}, $K = 350$Wm^{-1}K^{-1}, $L = 2600$m，强迫以每年1permille的幅度增加。表面温度异常的演变（a）、相应的深度温度剖面（b）——每条灰线间隔100年、相对于稳态（SS）温度的表面温度异常演变（c）以及强迫的演变（d）。

在附录A中，我们证明，在极限 $\lambda L >> K$ 下，可以将衰减最慢模态 τ_{sl} 的时间尺度近似为

$$\tau_{sl} \approx \frac{c}{K}\frac{4L^2}{\pi^2} \tag{11}$$

对各项的量级（$L \sim 2\times10^3$[m], $\lambda \sim 1$[Wm^{-2}K^{-1}], $K \sim 10^2$ –10^3[WK^{-1}m^{-1}]）进行分析后可得 $\lambda L > K$；因此，不应期望该近似具有很高的精度。与包含所有模态的数值解相比（图1—2中的橙色线与蓝色线），该近似能够较好地描述表面温度和系统不平衡的演化，适合用于获得物理直觉。仅使用一个

时间尺度来近似系统响应，会减小强迫开始附近表层时间演化的曲率。

垂直结构函数$T(z)$为二次形式时，系统达到准稳态所需的时间尺度 τ_{sl} 是系统的属性（即 c、K、L的函数），且与强迫速率 a或总强迫 at无关。代入数值（$L = 2600\text{m}$, $K = 350\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$, $c = 4\times10^{6}\text{Jm}^{-3}K^{-1}$），可得 $\tau \approx 990$ 年。

因此，用一个衰减模态近似完整解，可得温度和 TOA 能量不平衡随时间的演变：

$$T(t,z) \approx \frac{a}{\lambda}t - (1-e^{-t/\tau})f(z) \tag{12}$$

$$N(t) \approx (1-e^{-t/\tau})\frac{acL}{\lambda}. \tag{13}$$

采用衰减最慢模态近似时，衰减模态 $\tau = \tau_{sl}$ 是扩散系统中衰减最慢的模态，项 cL 是系统的总热容量 C。解 12-13 的一般形式不仅适用于扩散方程。单层模型$C\frac{dT_s}{dt} = F(t) - \lambda T_s(t)$可得出相同的解，但响应时间尺度为： $\tau = C/\lambda$。双箱模型（方程 2）也具有相同的解形式，其响应时间尺度 τ 取决于两个热容量、热交换系数和气候反馈参数（例如参见 Gregory 等（ 2023 ）的附录 B.3 ）。Watts 等（ 1994 ）给出的时间尺度也取决于 C 和 λ。此处响应时间尺度中 λ 的消失，是由近似$\lambda L >> K$所致。具有扩散域的模型，其时间尺度总是长于最简单单层模型的时间尺度。

3. 物理　对瞬态响应的直觉：不断增大的表观热容量　ty

对于单调增加的强迫所产生的瞬态响应，可以将系统想象成一个温度为 T_s 且热容量随时间变化的单层结构，以此获得直觉：

$$C_{\text{app}}(t)\frac{\mathrm{d}T_s}{\mathrm{d}t} = N = F - \lambda T_s \tag{14}$$

这里的表观热容 C_{app} 并非真实的物理热容，而是一个数学概念，用于描述扩散域随时间变化的影响。它可以通过以下方式诊断

：$C_{\mathrm{app}} = {}^{N}\mathrm{d}T_s/\mathrm{d}t = {}^{N}\mathrm{d}T_s^{t} = {}^{E}_{\Delta T_s}\mathrm{d}$，其中 E 是系统中的累积能量，单位为焦耳。表观热容可以根据瞬时通量和温度变化率$C_{\mathrm{app}} = {}^{N}\mathrm{d}T_s/\mathrm{d}t$进行诊断，也可以根据热含量的积分变化 E 和表面温度变化 ΔT_s $C_{\mathrm{app}} = {}^{\Delta E}_{\Delta T_s}$ 进行诊断。等价地，我们可以定义表观深度 $L_{\mathrm{app}} = C_{\mathrm{app}}/c$，即以米为单位表示的等效海洋深度的表观热容。

利用方程12和13中 $T(z=0)$与 N的表达式，我们可以推导线性增加强迫情形下的 $L_{\mathrm{app}}(t)$：

$$L_{\mathrm{app}} = \frac{\lambda\left(-1+e^{t/\tau}\right)L\tau}{-cL+\lambda\tau\, e^{t/\tau}} \xrightarrow[t\to\infty]{} L, \tag{15}$$

其中对精确强迫速率 a 的依赖消失。 L_{app} 随时间的增加表明，在强迫增长开始之初，系统以浅层储库的方式响应，并随时间趋近总域深度 L的极限。这与不断增大的不平衡 N 同步发生。在准稳态下， $L_{\mathrm{app}} = L$ 与 $N = {}^{acL}_{\lambda}$，而在达到准稳态之前， L_{app} 与 N 均呈对数增长（见图2 a、b）。

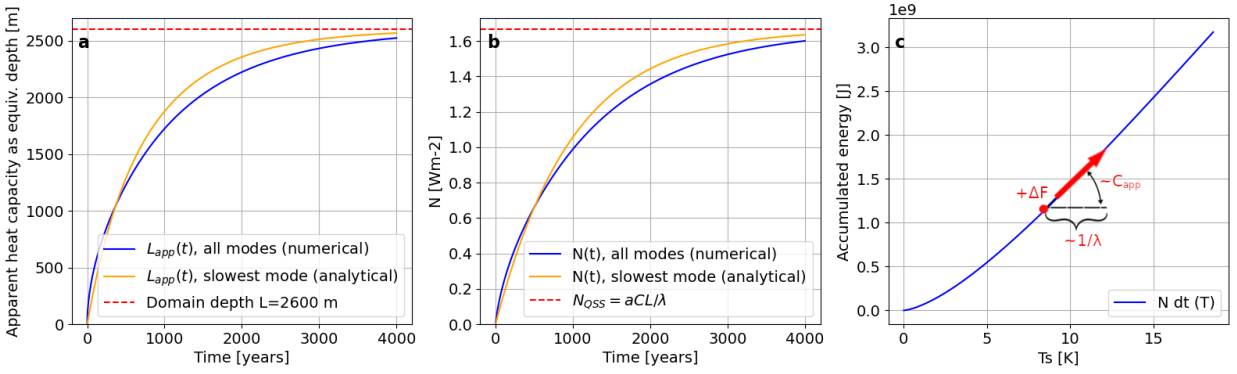

图2. 表观热容（a）与域顶不平衡（b）的时间演化。累积能量与表面温度的相空间（c）。参数与图 1相同。

可以将这个问题描述为：在 E(T) 相空间中，短时间内（$\Delta t \sim 1$ 年）对 ΔF 进行分配（图2 c）。额外强迫 ΔF 的一部分会提高 N，即在深层引入温度倾向，并导致系统中的能量累积；另一部分则会提高表面温度 T_s，并通过气候反馈降低 N。在 E（T_s）相空间中的夹角为 C_{app}（t），在 T_s 轴上的投影

与 $1/\lambda$ 成正比。在准稳态之前，$C_{\mathrm{app}}(t)$ 不仅取决于 L，还取决于 K 和 λ（方程 15）。

需要指出的是，C_{app} 取决于强迫的函数形式。对于赫维赛德函数（$F(t \le 0) = 0,\ F(t > 0) =$ 常数（例如CO_2骤增四倍实验）），L_{app} 最初将从一个很小的值演化到超过 L 的最大值，因为深层仍经历显著的温度倾向，而表面温度已接近稳态温度。该极限在附录C中进一步讨论。

4. 用于解释观测与模式的应用

a. 考虑强迫速率与响应时间尺度时的*TCR*

我们现在利用前几节的解析认识，来解释每年增加1% CO_2实验中表面温度与大气层顶能量不平衡的时间演化。我们希望刻画系统接近准稳态的程度，这取决于评估温度倾向的时刻（t'）相对于系统响应时间尺度（τ）的关系。一个方便的指标是表面温度倾向（$\mathrm{d}T_{(t)}/\mathrm{d}t$）与相应稳态温度倾向（$\mathrm{d}T_{\mathrm{SS}}/\mathrm{d}t$）之比。后者可简单地利用突增4倍$CO_2$模拟[4]中的$F_{2x}$和 λ 估计为$\mathrm{d}T_{\mathrm{SS}}/\mathrm{d}t = a/\lambda$。系统的平衡时间尺度远长于1pctCO2模拟的150年时长。因此，可以将$\mathrm{d}T_{(t)}/\mathrm{d}t$ 近似为整个150年时段或任何足够大、不受内部变率影响的子集上表面温度的线性回归。从AOGCM模拟中无法获得足够信息来估计系统的总热容量，因此我们需要对总域深度 L作近似：作为一阶估计，我们将 $L = 2600\,\mathrm{m}$设为海洋平均深度3682 m乘以其表面积占比71%。

图3a显示了1pctCO2情景下的表面温度——线性回归无法捕捉这一演变过程中的轻微曲率，但它是系统状态的良好指标，因为该曲率源于衰减较快的模态，而我们的解析近似仅针对最慢的模态推导。

我们使用方程 12 在任意时刻解析地估算导数之比 t'：

[4]可以从 F_{2x} 推导出强迫速率，表示为 $F(t) = F_{2x}\, ln(1.01^t)/ln(2)$，$a = \mathrm{d}F/\mathrm{d}t = F_{2x}\, ln(1.01)/ln(2)$

$$\frac{\mathrm{d}T(t=t')}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{SS}}}{\mathrm{d}t} = 1 - \frac{K e^{-t'/\tau} \pi^2}{4\lambda L}, \tag{16}$$

这是应施加于 $\mathrm{d}T_{\mathrm{SS}}/\mathrm{d}t$ 的时间依赖修正，用以估算时间 t' 时的瞬态变化率 $\mathrm{d}_{T(t=t')}\mathrm{d}_t$。从强迫开始到系统接近准稳态[5]的过程中，该比值将从 $1 - \frac{K\pi^2}{4\lambda L} \approx 0.67$ 逐渐变化至 1。

更进一步，可以利用方程13和方程16得到如下表达式：

$$\frac{dT/dt}{dT_{\mathrm{SS}}/dt} = 1 - \frac{dN/dt}{dF/dt}, \tag{17}$$

该式将温度变化率与瞬态模拟中大气顶能量不平衡的变化率联系起来。这些导数之比通过对耦合模式比较计划第六阶段（CMIP6，Eyring 等（2016））中的模式进行线性回归得到，并显示在表1的最后两列。平均而言，瞬态温度以稳态温度变化率的67%演变，因此 N 与 F 的变化率之比为33%。随着时间推移，$\mathrm{d}_T/\mathrm{d}_t$ $\mathrm{d}_{T_{\mathrm{SS}}}/\mathrm{d}_t$ 将以$\mathrm{d}_N/\mathrm{d}_t$ $\mathrm{d}_F/\mathrm{d}_t$的减小为代价而增大。

如果海洋热吸收效率（方程 2中的ϵ）与1显著不同，则需要在方程17中将其考虑在内（见Winton 等（2010）中的方程14）：

$$\frac{\mathrm{d}T/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}T_{\mathrm{SS}}/\mathrm{d}t} = 1 - \epsilon \frac{\mathrm{d}N/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}F/\mathrm{d}t}, \tag{18}$$

因此，我们可以预期，表1中最后两列（d_T $\mathrm{d}_{T_{\mathrm{SS}}}$ + d_N d_F）之和不为1的模式将具有 $\epsilon \neq 1$。

b. 由耦合模式估算K

评估随时间变化的比值 $\mathrm{d}_{T(t)}\mathrm{d}_t/^{\mathrm{d}T_{\mathrm{SS}}}\mathrm{d}_t$ 的另一种等效方法，是通过求解方程16来求得K。我们从估算趋势的时段中间选取 t'（我们对整个 1pctCO2 模拟时段进行估算：150 年，因此 $t' = 75$年）。已知 a和 λ（我们采用 Flynn 和 Mauritsen（2020）估算的值），并假设 $c = 4 \times 10^6\ \mathrm{Jm^{-3}\,K^{-1}}$ 和 $L = 2600\ \mathrm{m}$，即可通过求解方程16求得 K。K 也出现在 τ 中，因此我们求解超越方程；不过，由于 τ 非常大，采用 $t' = 0$也会得到类似的解。

[5]我们将 $t' = 0$ 代入方程16，$K = 350\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$，$L = 2600\ \mathrm{m}$。$K$ 的值由模式获得。

表1. 耦合模式根据 1pctCO2 和 abrupt-4xCO2 模拟估算的热方程参数。前3列摘自 Flynn 和 Mauritsen（2020）。 K 根据方程16估算， γ 根据方程 B6 估算。 K 和 γ 的估算值取决于总域深度 $L = 2600$ m 的假设。估算 γ时，我们还假设上层（C_1）与深层（C_2）热容量之比为 $k = C_1/C_2 = 0$。1。 dT 为温度变化率， dT_{SS} 为通量平衡时相应温度的变化率， dN 为大气顶能量不平衡的变化率， dF 为强迫的变化率。导数之比基于对整个时段（150 年）进行线性回归所得结果。

	TCR [K]	F_{2x} [瓦米$^{-2}$开尔文$^{-1}$]	λ [Wm^{-2}K^{-1}]	K [瓦特/米$^{-1}$开尔文$^{-1}$] (L=2600)	γ_{QSS} [瓦米$^{-2}$开尔文$^{-1}$] (L=2600, k=0.1)	dT/dT$_{SS}$	dN/dF
BCC-ESM1	1.77	3.02	0.92	323	0.35	0.69	0.33
BCC-CSM2-MR	1.60	3.06	1.00	326	0.36	0.71	0.28
CESM2	1.99	3.19	0.62	332	0.36	0.53	0.42
CESM2-WACCM	1.92	3.26	0.62	365	0.40	0.48	0.43
CNRM-ESM2-1	1.82	2.96	0.62	304	0.33	0.56	0.45
CNRM-CM6-1	2.23	3.70	0.77	343	0.38	0.61	0.39
CNRM-ESM2-1	2.75	3.68	0.66	284	0.31	0.62	0.39
CNRM-CM6-1	2.91	3.28	0.62	189	0.21	0.72	0.30
EC-Earth3-Veg	2.76	3.34	0.80	240	0.26	0.73	0.26
GFDL-CM4	-	3.14	0.83	318	0.35	0.66	0.35
GFDL-ESM4	-	3.84	1.50	408	0.45	0.76	0.25
GISS-E2-1-G	1.66	3.84	1.48	-	-	-	-
GISS-E2-1-H	1.81	3.47	1.16	351	0.38	0.73	0.29
HadGEM3-GC31-LL	2.47	3.48	0.64	263	0.29	0.63	0.39
INM-CM4-8	1.30	2.64	1.46	204	0.22	0.87	0.13
IPSL-CM6A-LR	2.39	3.39	0.75	301	0.33	0.64	0.32
MIROC-ES2L	1.51	4.03	1.51	478	0.52	0.73	0.30
MIROC6	1.58	3.61	1.39	469	0.51	0.71	0.31
MPI-ESM1-2-HR	1.57	3.60	1.27	395	0.43	0.73	0.29
MRI-ESM2-0	-	3.37	1.08	491	0.54	0.61	0.36
NESM3	-	3.78	0.84	314	0.34	0.67	0.33
NorCPM1	1.55	3.58	1.29	425	0.46	0.71	0.31
NorESM2-LM	1.48	3.44	1.38	538	0.59	0.67	0.29
SAM0-UNICON	2.08	3.85	1.05	401	0.44	0.67	0.33
UKESM1-0-LL	2.79	3.56	0.67	286	0.31	0.62	0.38
Mean	1.98	3.44	1.00	348	0.38	0.67	0.33
5th 至 95thp	[1.5, 2.8]	[3, 3.8]	[0.6, 1.5]	[210, 489]	[0.2, 0.5]	[0.5, 0.8]	[0.3, 0.4]

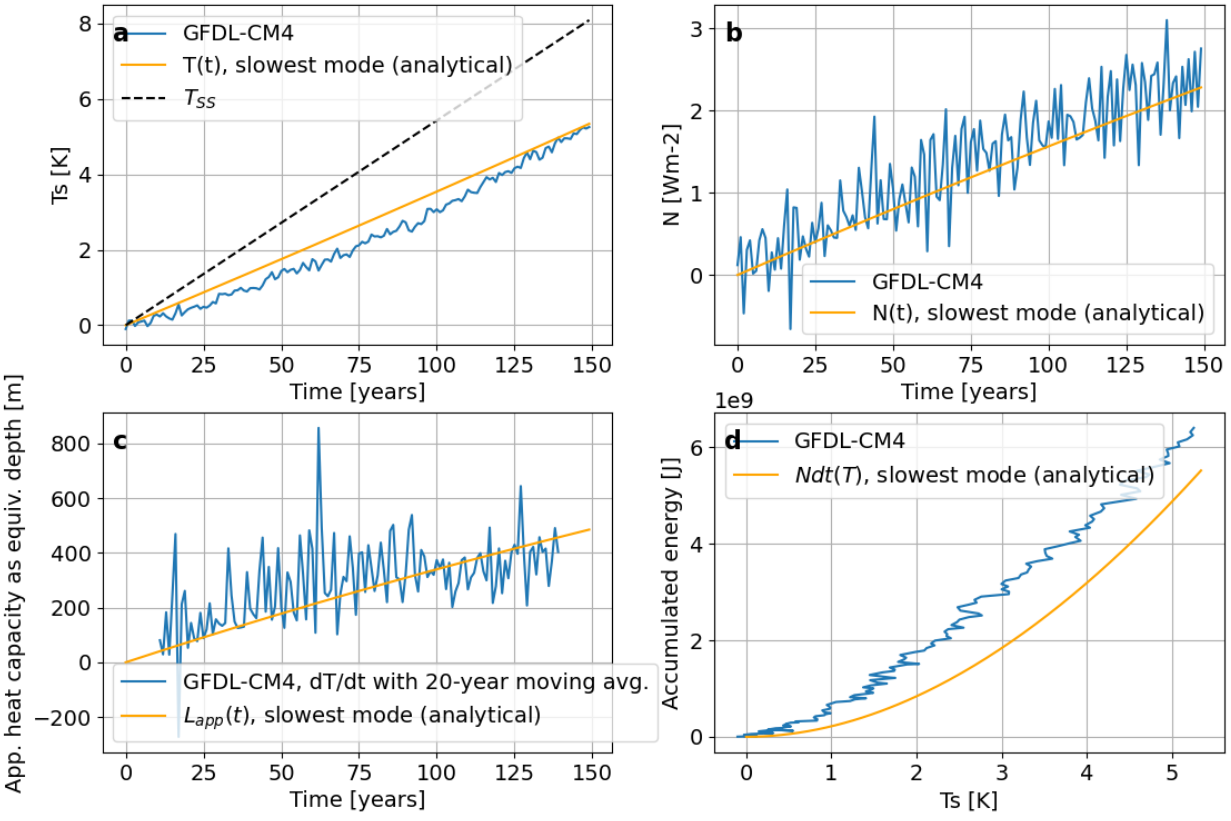

图3. 表面温度 (a)、大气层顶能量不平衡 (b)、有效热容量 (c)，以及累积能量与表面温度的相空间 (d)。蓝线对应 GFDL-CM4 1pctCO2 模拟（相对于 piControl 的异常）。橙线为解析近似（方程 12–13），其参数为 $F_{2x} = 3。13\ \mathrm{Wm^{-2}}$, $\lambda = 0。83\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-1}}$, $K = 318\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$, $L = 2600\ \mathrm{m}$。

单个模型的结果见表1，K 的平均值约为 $350\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$。

如果我们回到假设 K 在深度方向上保持恒定，那么我们给出的 K 值可能被高估，因为在 150 年的时间跨度内，温度演化主要会受到上层海洋混合的影响。

我们可以将对 K 的估算与双箱模型（方程 2）中两层之间的交换系数 γ 联系起来。这是因为，可以通过定义 $T_1(t)$ 和 $T_2(t)$ 为 $T_{\mathrm{QSS}}(t,\ z)$ 在相应深度区间内的积分，从热方程的准稳态解（方程 7）解析推导出双箱模型的准稳态解。完整推导见附录 B。估算的 γ_{QSS} 将由域深度的假设所决定

（$C_1 + C_2$）以及 $k = C_1/C_2$ 的比值，并会随时间演变直至达到准稳态。我们假设域深度为 2600 m，且比值为 0.1。以此方式得到的 γ_{QSS} 平均值约为 0。4 $Wm^{-2}K^{-1}$。

Geoffroy 等（2013b）将 abrupt-4xCO2 实验中的表面温度演变拟合到双箱模型。他们在 CMIP5 模型中得到的 γ 估计值范围为 0.5 – 1.1 $Wm^{-2}K^{-1}$。我们的 $\gamma_{QSS} = 0.4$ $Wm^{-2}K^{-1}$ 估计值无法与 Geoffroy 等（2013b）的结果直接比较，原因有二：（1）我们估计的是 γ_{QSS}，也就是γ 随时间推移会趋近的值。图 B1 表明，将热方程简化为两个箱体时，γ 起初较大，随后会降至 γ_{QSS}；（2）我们无法准确估计域的真实深度——根据等效海洋深度，我们假设其为 $L = 2600$ m。Geoffroy 等（2013b）估计的域深度约为 700 m，但由于系统的有效热容量随时间变化，且模拟时长有限，这一估计值可能偏低——参见图 3c。事实上，如果将扩散模型（方程 4、5）的数值解前 150 年的数据（参数为 $\lambda = 1$ $Wm^{-2}K^{-1}$, $K = 350 Wm^{-1}K^{-1}$,$L = 2600$m）拟合到双箱模型（方程 2），得到的参数值为 $\lambda = 1$ $Wm^{-2}K^{-1}$,$\epsilon \approx 1.3$ $Wm^{-2}K^{-1}$, $C_1 \approx 100$m, $C_2 \approx 550$m, $\gamma \approx 0.8 Wm^{-2}K^{-1}$，与 Geoffroy 等（2013b,a）得到的数值一致。

这表明，根据较短时间段估算的双箱模型参数可能会高估 γ 和/或低估域深度，因此不应将这些参数视为系统的一般属性。通过此类拟合得到的参数，在拟合所覆盖的时间范围内仍然适用，可用于模拟时间尺度相近的气候。例如，如果参数是根据 10 年的时间段估算的，却将双箱模型积分 100 年，就应谨慎对待。扩散模型的另一个问题是，系统响应取决于初始状态；当系统处于非平衡状态 $T_1 \neq T_2$时，无法用$T_1 = T_2 = 0$ 初始化模型。

c. 对预期观测趋势的简单估算

我们将方程 12-13 中的解析表达式与全球平均地表温度和大气层顶能量不平衡的观测到的趋势进行比较。对 $T(t)$ 求时间导数

以及 $N(t)$，可以估算它们在线性增加强迫 $F(t) = at$ 下的变化趋势：

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = a - \frac{1 - e^{-t/\tau}}{\tau}\frac{aC}{\lambda} \tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{e^{-t/\tau}}{\tau}\frac{aC}{\lambda} \tag{20}$$

Myhre等人（2025）确实指出，在气候模型中 $\mathrm{d}N\,\mathrm{d}t \sim \frac{1}{\lambda}$。

温室气体的历史强迫可近似为一段较长时期的弱线性强迫，并在20世纪60年代开始上升：从1750年到2025（275年），增长率为$a_1 = 0.005\ \mathrm{Wm^{-2}年^{-1}}$；从1965年到2025（60年），增长率为 $a_2 = 0.04\ \mathrm{Wm^{-2}年^{-1}}$（Smith等人，2021）。由于该模型是线性的，2025年的估值可通过将两种增长率 a_1 和 a_2 各自对应的估值相加得到。

假设 λ、 C 和 τ 取现实值，便可估算系统当前状态的数量级，并评估扩散模式的结构。设 $\lambda = 1\mathrm{Wm^{-2}K^{-1}}$、$C = 10^{10}\mathrm{Jm^2K^{-1}}$、 $\tau = 1000$ 年，那么到2025年，预计总温度变化为2.6K，温度倾向为0.3K/十年，大气顶能量不平衡为$1.2\ \mathrm{Wm^{-2}}$，大气顶能量不平衡的趋势为$0.1\ \mathrm{Wm^{-2}}$/十年。作为比较，可能受年代际尺度内部气候变率影响的观测值为 $T \approx 1.5\mathrm{K}$、 $\frac{dT}{dt} \approx 0.3$（基于ERA5全球再分析（Hersbach等人，2020），但趋势在不同数据集之间有所差异（Menemenlis等人，2025））、大气顶能量不平衡为 $N = 1.0 \pm 0.2\ \mathrm{Wm^{-2}}$，以及 $dN/dt = 0.45 \pm 0.18\ \mathrm{Wm^{-2}}$/十年（Loeb等人，2024）。

就数量级而言，这些估计与观测结果相符，并表明了一个令人费解的事实：气候反馈在20世纪60年代之前更强，此后则有所减弱（例如Fueglistaler和Silvers（2021）；Salvi等人（2023））。此处所讨论的能量平衡框架中对参数的调整，并不能对 T、 N 及其趋势给出更好的估计。假如观测或强迫估计中存在偏差的可能性不大，且年代际尺度变率的影响也未达到如此量级，那么就只能重塑理论框架。重塑可以包括时变有效气候反馈（例如Winton 等（2010）中的效能因子；Held等人（2010））、对垂向海洋混合更为复杂的表征，和/或一种不仅考虑垂直热输送、也考虑经向热输送的几何结构（如Gregory 等（2023）最近所提出）。

5. 讨论与总结

基于以表面反馈及其下方的垂直热交换来描述大气-海洋系统的能量平衡模式，我们采用具有能量守恒边界条件的热方程，对瞬态气候响应给出简单的解析描述。表面反馈 λ 是大气的一种属性，深度 K处的热导率代表海洋混合。该方程对线性增加强迫 $\frac{dF}{dt} = a$ 的响应解可近似为：

$$T(t, z=0) \approx \frac{a}{\lambda} t - (1 - e^{-t/\tau}) \frac{acL}{\lambda^2}$$

$$N(t) \approx (1 - e^{-t/\tau}) \frac{acL}{\lambda}$$

时间尺度为 $\tau \approx \frac{c}{K} \frac{4L^2}{\pi^2}$，它取决于混合系数 K 以及域深度的平方 L^2，量级约为数千年。

我们将该解与 T_{TCR} 的常规定义联系起来，即在AOGCM模拟的1pctCO2情景中强迫加倍时刻的温度。响应时间尺度τ 取决于 K 和 L，并且会因AOGCM而异。为了从 T_{TCR} 的常规定义中推导出描述系统固有属性的参数，需要考虑依赖于AOGCM的响应时间尺度。150年的CMIP6模拟时间过短，不足以估算系统的总热容量，我们基于有效海洋深度假设为 $L = 2600\mathrm{m}$。这使得我们能够在给定 F_{2x} 和 λ 的情况下，由1pctCO2模拟估算热交换系数 K（例如， F_{2x} 和 λ 可由abrupt-4xCO2情景计算得到）。由于响应时间尺度较长，对 ~ 100 年的表面温度演变进行线性回归可得到良好结果。我们建议将1pctCO2模拟中表面温度演变的线性趋势（导数）相对于相应稳态温度的导数$\mathrm{d}T_{\mathrm{SS}}/\mathrm{d}t = \frac{a}{\lambda}$ 进行归一化，从而消除对强迫速率 a的依赖。在强迫开始后的短时期内，表面温度演变呈线性，这等价于取 T_{TCR}/T_{ECS}。所得比值随时间变化，并通过通量平衡的时间尺度依赖于 K，同时通过稳态（T_{SS}）与准稳态温度（T_{QSS}）之间的偏差依赖于 λ 和 L：

$$\frac{\mathrm{d}T/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}T_{\mathrm{SS}}/\mathrm{d}t}=\begin{cases}1-\frac{K\pi^2}{4\lambda L},\ t\to 0\\ 1,\ t/\tau >> 1.\end{cases} \tag{21}$$

它从强迫开始附近约0.67演变至准稳态时的1（方程16和表1）。换言之，在历经数千年达到准稳态之前，表面温度会越来越远离 T_{SS}，并且即使强迫呈线性增长，大气顶能量不平衡也会增大。

海洋混合系数 K可根据 $\mathrm{d}T(t)\ \mathrm{d}t/^{\mathrm{d}T_{\mathrm{SS}}}\mathrm{d}t$（方程16）估算，在气候模型中约为 350 $\mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$。这相当于双箱模型中的 $\gamma\approx 0$。4 $\mathrm{Wm^{-2}K^{-1}}$，或海洋扩散率 $\kappa=\frac{K}{c}\approx 2\times 10^5$ $\mathrm{m^2s^{-1}}$。K较小的 AOGCM，其 $\mathrm{d}T(t)\ \mathrm{d}t/^{\mathrm{d}T_{\mathrm{SS}}}\mathrm{d}t$和 T_{TCR}较高。这个 K 估值可能偏高，因为在真实海洋中，$K=\bar{K}(z)$，而 150 年的模拟仅能探测海洋上层 ~500 m。

双箱模型（Gregory 2000；Held 等，2010）可从此处讨论的热方程形式推导得出——两者本质上都是在顶部受强迫、并具有地表温度反馈的扩散模型。我们注意到，在 abrupt-4xCO2 实验中，根据表面温度诊断出的两个表观响应时间尺度——先是快速升温，随后是较慢的调整——不一定应被解释为两个底层热容库。相反，这种响应源于具有地表温度反馈的扩散域的内在结构。

这种能量平衡框架能够对观测到的表面温度和大气顶能量不平衡变化趋势给出数量级估计。该框架在结构上有所局限，因为它没有纳入时变有效气候反馈（Held 等人（2010）通过引入效能因子实现了这一点），并且只考虑了垂直方向的海洋热输送，而未考虑水平方向的输送（这是 Gregory 等（2023）提出的一种扩展）。

致谢。 感谢 Stephan Fueglistaler 提供建设性的意见和反馈，助力完善本文。我也非常感谢 Doris Folini 一直以来对数学问题的热忱。热方程的数值解是在一台图形处理器计算机上实现的，该计算机由 Daniel Tsvetkov 和 Denitsa Rusinova 作为个人项目搭建并维护。

感谢世界气候研究计划、CMIP6建模团队和地球系统网格联合会提供支持并共享数据。

数据分析和可视化使用自由和开源软件完成：衷心感谢社区开发出人人都能受益的强大工具。

B.C. 获瑞士国家科学基金会资助（资助编号：P500PN 222086）。

数据可用性声明。 Wolfram Mathematica 笔记本和分析代码可在 https://gitlab.com/mjade/analytical-insights-into-tcr 获取。本研究使用的版本对应于提交 2a2f347c。

可通过 https://esgf-node.llnl.gov/projects/cmip6/ 访问 CMIP6档案。

附录A

衰减最慢模态的推导

方程 7 是满足方程 5 中边界条件的热方程（方程 4）的准稳态解，也就是说，这是该解的长期极限。我们还要得到热方程的完整时变解，用以描述解偏离初始条件的情况。对于处于平衡态（稳态）的未扰动态，我们将初始条件设为随深度不变的常数剖面：

$$T(t=0,z)=0 \tag{A1}$$

在这种情况下，完整解为：

$$T(t,z)=-\frac{a}{\lambda}t+\sum_{k_1=1}^{\infty} f(k_2(k_1))e^{-\frac{K}{C}k_2(k_1)t}, \tag{A2}$$

其中，系数 k_2 是超越方程的所有可能根：

$$tan(L\sqrt{k_2})=\frac{\lambda}{K\sqrt{k_2}} \tag{A3}$$

ι方程 A3 的第一个根最大，对应衰减最慢模态 $e^{-\tau_1}$，其衰减时间为 $\tau_1 = \frac{c}{Kk_2(1)}$。我们可以通过求曲线 $tan(L\sqrt{x})$ 和 $\frac{\lambda}{K\sqrt{x}}$ 的第一个交点来求解 $k_2(1)$。由于所有参数均为正，我们令 $u = \sqrt{x}/L$，于是曲线变为 $f_1(u) = tan(u)$ 和 $f_2(u) = L\lambda/(Ku)$。在极限 $L\lambda >> K$ 下，第一个根趋近于 $\pi/2$。在气候情形中，气候反馈参数 λ 约为 $1 \mathrm{Wm^{-2}K^{-1}}$；海洋深度L 约为几千米，海洋湍流扩散率 K 通常为几百 $\mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$。由此得到衰减最慢模态：$\tau_{sl} = \tau_1 \approx \frac{c}{K}\frac{4L^2}{\pi^2}$。

如果进一步假设这是作用于系统、使其趋于准稳态的唯一随时间变化模态，则完整解的近似形式可写为方程 12：

$$T(t,z) \approx \frac{a}{\lambda}t - (1 - e^{-t/\tau_{sl}})f(z),$$

其中，$f(z) = \frac{-2acKL - 2a\lambda cLz + a\lambda cz^2}{2\lambda^2 K}$ 是需要向准稳态演化的二次深度剖面。

对于深层中未受扰动剖面的初始偏离（$t \to 0$）（$z \to L$），当强迫速率 a 较大时，该近似可能失效。如果 a 大于由（$1 - e^{-t/\tau_1}$）$f(z)$给出的初始阶段，则在准稳态 $f(z)$ 较小的层面（即 $z \to L$），温度可能变为负值。这一解是不现实的，原因在于我们忽略了其他所有随深度变化的衰减时间尺度 τ_2，τ_2，……，它们对应于完整解（方程 A2）中的 $i = 2$，3……。

如果 K 足够大，这种近似也可能低估 τ，并且$f_1(u)$与 $f_2(u)$的交点位于 $\frac{\pi}{2}$之前。

图 1 展示了完整解（通过数值方法求得）和近似解（通过解析方法求得）。方程 12 给出的上层解（$z \to 0$）足够准确；深度方向模拟温度剖面（数值解）与其在准稳态下的解析解（图 1 b）并非完全吻合，这是由于如上所述略微低估了 τ。

附录 B

与两层模型的类比

我们使用准稳态表达式（方程 7）推导出双箱模型（方程 2）的等效表达式，并通过数值方法评估双箱模型趋近准稳态的过程。

我们将使用完整的扩散偏微分方程（方程 4、5）推导出由两个耦合常微分方程组成的双箱模型（方程 2）。双箱模型中两个箱体的温度，分别对应于完整扩散模型中在某一深度比处分层后各层的垂直平均温度：

$$T_1 = \int_0^{kL} T(t,z)dz/(kL-0) \tag{B1}$$

$$T_2 = \int_{kL}^{L} T(t,z)dz/(L-kL) \tag{B2}$$

方程 B1 和 B2 的准稳态解为：

$$T_1 = \frac{a}{\lambda}t + \frac{acL(-6K+\lambda(-3+k)kL)}{6\lambda^2 K} \tag{B3}$$

$$T_2 = \frac{a}{\lambda}t + \frac{acL(-6K+\lambda(-2+(-2+k)k)L)}{6\lambda^2 K} \tag{B4}$$

根据方程 7 中的准稳态解 $T(t,\ z)$ 求得 T_1 和 T_2，即可从原始系统（方程 2）反向推导出 γ：

$$C_2 = (L-kL)c \tag{B5}$$

$$\gamma_{\mathrm{QSS}} = \frac{C_2\frac{\partial T_2}{\partial z}}{T_1 - T_2} = K\frac{6(k-1)}{L(k-2)} \tag{B6}$$

该方程将 γ [$\mathrm{Wm^{-2}K^{-1}}$] 与热导率 K [$\mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$] 以及系数 k联系起来，该系数将热方程解的连续有限域划分为两个有限层。根据对气候模型的拟合结果（Geoffroy 等，2013b），其中 $L \approx 800$ m，且上层的深度为 ~ 80 m，则 $k \approx 0$。1。

该方程与时间无关，因为它基于稳态解，因此可以得到一个明确的表达式。在趋向稳态的过程中，γ 会随时间演变，并趋近于预测值。

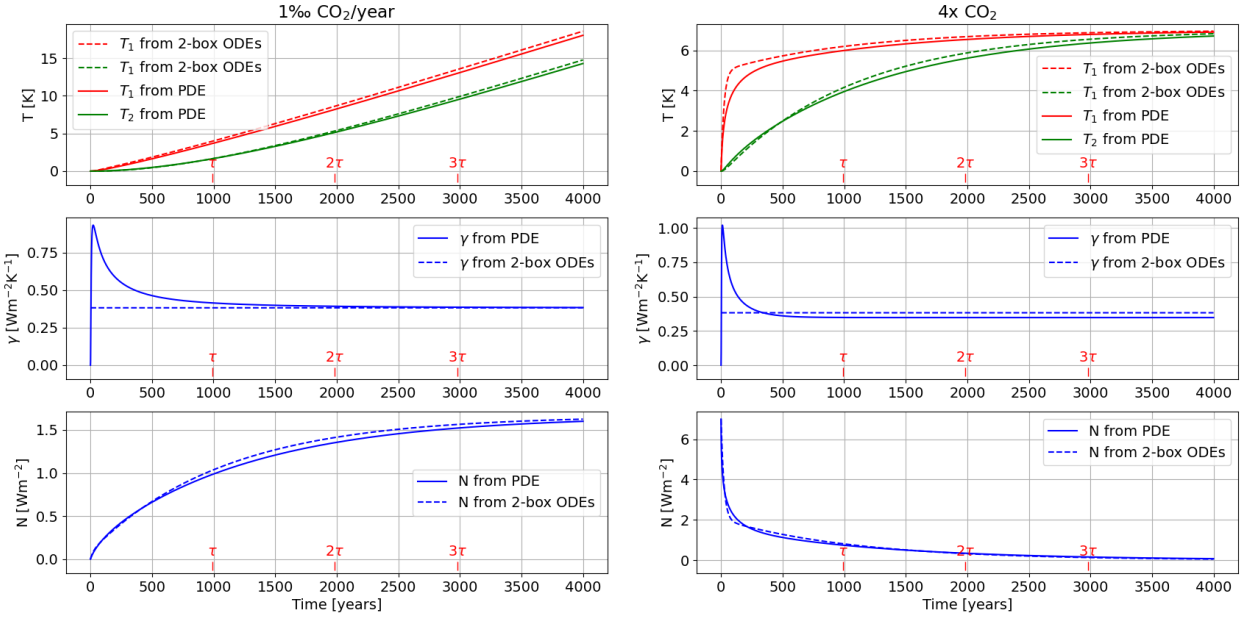

图 B1. 热方程和双层模型的数值解。热方程的参数与图 1 中相同；双箱模型的等效参数选取为 $k = 0.1$ 和 $L = 2600$ m 作为 $C_1 = 260$ m、$C_2 = 2340$ m，等效的 γ 估算为 0.38 $\mathrm{Wm^{-2}K^{-1}}$。

如图 B1 所示，当热方程简化为双箱模型时，γ 在初始阶段较大，并趋近于方程 B6 中的 γ_{QSS}，我们对此进行了解析估算。由于 γ 通常是根据耦合模式估算的，也就是说，通常采用反向的做法，因此，如果要将拟合参数与热方程进行比较，该参数很可能会产生偏高的偏差。

简要说明一下，热容量的单位并不相同：在方程 4 中，我们使用体积热容 c [$\mathrm{Jm^{-3}K^{-1}}$]；而在双箱模型（方程 2）中，热容量直接将温度变化率与能量通量联系起来，因此单位为 C_1, C_2 [$\mathrm{Jm^{-2}K^{-1}}$]，有时也表示为 C_1, C_2 [W 年$^{-1}$ $\mathrm{m^{-2}}$ $\mathrm{K^{-1}}$]（Geoffroy 等，2013b）。

附录C

$F = at$ 和 $F = const$的表观热容

表观热容的时间演化及其上限取决于强迫的函数形式。我们推导了线性增加强迫 $F = at$ （例如 1pctCO2）和赫维赛德突变恒定强迫 $F = const$ （例如 abrupt-4xCO2）情况下的下限和上限。

从方程 2 中的双箱模型出发，可以根据系统温度变化率的总和诊断表观热容：

$$N = C_1 \frac{dT_1}{dt} + C_2 \frac{dT_2}{dt} \tag{C1}$$

$$C_{\text{app}} = \frac{N}{dT_1/dt} = C_1 + C_2 \frac{dT_2}{dT_1} \tag{C2}$$

再除以海水的体积热容 $c = 4 \times 10^6$ [$\text{Jm}^{-3}\text{K}^{-1}$]，即可得到以米为单位的表观海洋深度 $L_{\text{app}} = C_{\text{app}}/c$ 。

对于 $F = at$， C_{app}的上限为准稳态（QSS），此时 $\frac{dT_1}{dt} = \frac{dT_1}{dt} = \frac{a}{\lambda}$，因此 $C_{\text{app}} = C_1 + C_2$，即系统的域深度或总热容量。

对于 $F = const$，这是一个赫维赛德弛豫情形。随着时间推移，深层的温度倾向 $\frac{dT_2}{dt}$ 会大于上层的温度倾向 $\frac{dT_1}{dt}$，并且两者都会随时间降低，因为系统正趋近于通量平衡。一个有趣的特点是，温度倾向之比保持恒定，因此 C_{app} 有一个上限，并且在达到通量平衡之前的某个时刻就会达到该上限。温度倾向之比的上限为：

$$\frac{dT_2}{dT_1} = \frac{-\gamma C_1 + \sqrt{(\gamma C_1 + C_2(\gamma\epsilon + \lambda))^2 - 4\gamma C_1 C_2 \lambda} + \gamma C_2 \epsilon + C_2 \lambda}{2\gamma C_2 \epsilon}, \tag{C3}$$

对于 $C_1 \to 0$，其计算结果为 $\lim_{C_1 \to 0} \frac{dT_2}{dT_1} = \frac{\lambda + \epsilon\gamma}{\epsilon\gamma}$。

由于 $\frac{dT_2}{dt} > \frac{dT_1}{dt}$，对于 $F = const$ 强迫形式，表观热容的上限将高于系统总热容量。

图 C1 展示了全扩散偏微分方程和双层模型在两种强迫形式下的 C_{app} 时间演化。

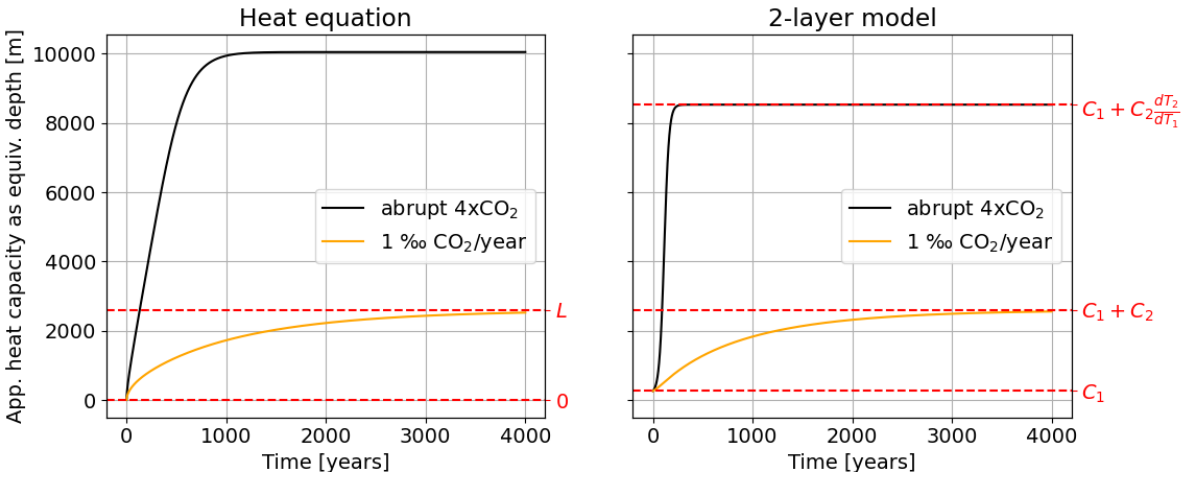

图 C1. 针对不同函数形式的强迫，由热方程数值解诊断得到的以等效深度表示的表观热容（左），以及由两层模型诊断得到的结果（右）。模型参数与图 B1 相同。 dT_2/dT_1 由方程 C3 结合 $\epsilon = 1$计算得到。

全扩散模式（热方程）的 C_{app} 下限为 0，而两层模型的下限为 C_1 。

一个重要的启示是，通常从表面温度的突然四倍二氧化碳试验中推断出的两个表观响应时间尺度——初期快速上升，随后是更为平缓的持续增温（见图 B1 右图）——并不一定反映存在两个不同的热容库（例如 C_1 和 C_2）。相反，这些特征源于具有地表温度反馈的扩散域结构。在这类系统中，扩散模态连续谱投射到表面温度上，表现为一个快分量和一个慢分量，尽管只设定了单一的物理热容。

参考文献

Alexandrov, A. A.、K. A. Orlov 和 M. V. Butakova，2017：国际水和水蒸气性质协会发布的用于计算水蒸气、普通水和重水物质及海水性质的资料。*Journal of Physics: Conference Series*，**891**，012 329，https://doi.org/10.1088/1742-6596/891/1/012329。

Eyring, V., S. Bony, G. A. Meehl, C. A. Senior, B. Stevens, R. J. Stouffer, 和 K. E. Taylor，2016：耦合模式比较计划第六阶段（cmip6）实验设计

与组织。《地球科学模型开发》，**9(5)**，1937–1958，https://doi.org/10.5194/gmd-9-1937-2016。

Flynn, C. M., 和 T. Mauritsen，2020年：近期耦合模式集合中的气候敏感度与历史变暖演变。《大气化学与物理》，**20 (13)**，7829–7842，https://doi.org/10.5194/acp-20-7829-2020。

Fr¨olicher, T. L., J. L. Sarmiento, D. J. Paynter, J. P. Dunne, J. P. Krasting, 和 M. Winton，2015年：南大洋在人为碳吸收和 CMIP5 模型热吸收中的主导作用。《气候杂志》，**28 (2)**，862–886，https://doi.org/10.1175/jcli-d-14-00117.1。

Fueglistaler, S., 和 L. Silvers，2021年：全球变暖的独特轨迹。《地球物理研究杂志：大气》，**126 (4)**，https://doi.org/10.1029/2020jd033629。

Gent, P. R., 和 J. C. Mcwilliams，1990：海洋环流模式中的等密度混合。《物理海洋学杂志》，**20 (1)**，150 – 155，https://doi.org/10.1175/1520-0485(1990)0200150:IMIOCM2.0.CO;2。

Geoffroy, O., D. Saint-Martin, G. Bellon, A. Voldoire, D. J. L. Olivi´e, 和 S. Tyt´eca，2013a：双层能量平衡模型中的瞬态气候响应。第二部分：深海热吸收效能的表征及对CMIP5大气海洋环流模式的验证。《气候杂志》，**26 (6)**，1859–1876，https://doi.org/10.1175/jcli-d-12-00196.1。

Geoffroy, O.、D. Saint-Martin、D. J. L. Olivi´e、A. Voldoire、G. Bellon 和 S. Tyt´eca，2013b：双层能量平衡模型中的瞬态气候响应。第一部分：解析解及利用CMIP5大气环流模式试验进行的参数校准。《气候杂志》，**26(6)**，1841–1857，https://doi.org/10.1175/jcli-d-12-00195.1。

Gnanadesikan, A.，1999：海洋温跃层结构的简单预测模型。《科学》，**283 (5410)**，2077–2079，https://doi.org/10.1126/science.283.5410.2077。

Gregory, J. M.，2000年：海洋中的垂直热输送及其对随时间变化的气候变化的影响。《气候动力学》，**16 (7)**，501–515，https://doi.org/10.1007/s003820000059。

Gregory, J. M., T. Andrews, 和 P. Good，2015年：随着二氧化碳增加，瞬态气候响应参数的不恒定性。《皇家学会哲学汇刊 *A* 辑》：

数学、物理与工程科学，**373**（**2054**），20140 417，https://doi.org/10.1098/rsta.2014.0417。

Gregory, J. M. 和 P. M. Forster，2008：根据辐射强迫和观测到的温度变化估算瞬态气候响应。《地球物理研究杂志：大气》，**113 (D23)**，https://doi.org/10.1029/2008jd010405。

Gregory, J. M. 和合著者，2023：全球海洋热吸收的新概念模型。《气候动力学》，**62(3)**，1669–1713，https://doi.org/10.1007/s00382-023-06989-z。

Held, I. M.、M. Winton、K. Takahashi、T. Delworth、F. Zeng 和 G. K. Vallis，2010：通过突然恢复工业化前强迫，探究全球变暖的快速和缓慢分量。《气候杂志》，**23 (9)**，2418–2427，https://doi.org/10.1175/2009jcli3466.1。

Hersbach、H.及合著者，2020：ERA5全球再分析。《英国皇家气象学会季刊》，**146**（**730**），1999–2049，https://doi.org/10.1002/qj.3803。

Hoffert、M. I.、A. J. Callegari和C. Hsieh，1980：深海热储存在气候强迫长期响应中的作用。《地球物理研究杂志：海洋》，**85**（**C11**），6667–6679，https://doi.org/10.1029/jc085ic11p06667。

政府间气候变化专门委员会，2023：《*2021*年气候变化——物理科学基础》：政府间气候变化专门委员会第六次评估报告第一工作组的贡献。剑桥大学出版社，https://doi.org/10.1017/9781009157896，URL http://dx.doi.org/10.1017/9781009157896。

Jeevanjee, N., D. J. Paynter, J. P. Dunne, L. T. Sentman 和 J. P. Krasting，2025：气候敏感度的整体视角。《地球与行星科学年度评论》，**53 (1)**，367–396，https://doi.org/10.1146/annurev-earth-040523-014302。

Kostov, Y., K. C. Armour 和 J. Marshall，2014：大西洋经向翻转环流对海洋热储存和瞬态气候变化的影响。《地球物理研究快报》，**41 (6)**，2108–2116，https://doi.org/10.1002/2013gl058998。

Kuhlbrodt, T. 和 J. M. Gregory，2012：海洋吸热及其对海平面上升幅度和气候变化的影响。《地球物理研究快报》，**39**（**18**），https://doi.org/ 10.1029/2012gl052952。

Lebedeff, S. A.，1988：全球海洋箱式扩散模型的解析解。《地球物理研究杂志：大气》，**93 (D11)**，14 243–14255，https://doi.org/ 10.1029/jd093id11p14243。

Liu, M., B. J. Soden, G. A. Vecchi 和 C. Wang，2023：海洋吸热效率的差异可追溯至海洋盐度。《地球物理研究快报》，**50 (4)**，https://doi.org/10. 1029/2022gl100171。

Loeb, N. G., S.-H. Ham, R. P. Allan, T. J. Thorsen, B. Meyssignac, S. Kato, G. C. Johnson 和 J. M. Lyman，2024：对2000年以来地球能量不平衡变化的观测评估。《地球物理学调查》，**45(6)**，1757–1783，https://doi.org/10.1007/s10712-024-09838-8。

Loeb, N. G., G. C. Johnson, T. J. Thorsen, J. M. Lyman, F. G. Rose 和 S. Kato，2021：卫星与海洋数据揭示地球增温速率显著上升。《地球物理研究快报》，**48 (13)**，https://doi.org/10.1029/2021gl093047。

Meehl, G. A., C. A. Senior, V. Eyring, G. Flato, J.-F. Lamarque, R. J. Stouffer, K. E. Taylor, and M. Schlund, 2020：解读 CMIP6地球系统模式的平衡气候敏感度和瞬态气候响应的背景。《科学进展》, **6 (26)**, https://doi.org/ 10.1126/sciadv.aba1981。

Menemenlis, S., G. A. Vecchi, W. Yang, S.Fueglistaler, and S. P. Raghuraman, 2025：不同数据集的卫星时代海表温度趋势存在重大差异。《自然·气候变化》,**15 (8)**, 897–903, https://doi.org/10.1038/s41558-025-02362-6。

Morantine, M. C., and R. G. Watts, 1994：能量平衡气候模型中的时间尺度：2. 中间时间解。《地球物理研究杂志：大气》, **99 (D2)**, 3643–3653, https://doi.org/10.1029/93jd01866。

Munk, W. 和 C. Wunsch，1998：《深海配方II：潮汐与风致混合的能量学》。《深海研究第一辑：海洋学研究论文》，**45（12）**，1977–2010，https://doi.org/ 10.1016/s0967-0637(98)00070-3。

Munk, W. H., 1966：深海配方。《深海研究与海洋学文摘》，**13 (4)**，707–730，https://doi.org/10.1016/0011-7471(66)90602-4。

Myhre, G., O. Hodnebrog, N. Loeb 和 P. M. Forster，2025：观测到的地球能量不平衡趋势或可为低气候敏感度模型提供约束。《科学》，**388 (6752)**，1210–1213，https://doi.org/10.1126/science.adt0647。

Newsom, E., L. Zanna, and J. Gregory, 2023：背景跃密层深度约束未来海洋热吸收效率。《地球物理研究快报》，**50 (22)**，https://doi.org/10.1029/ 2023gl105673。

Nijsse, F. J. M. M., P. M. Cox, and M. S. Williamson, 2020：基于 CMIP5 和 CMIP6 模型的历史变暖对瞬态气候响应（TCR）和平衡气候敏感度（ECS）的涌现约束。《地球系统动力学》，**11 (3)**，737–750，https://doi.org/10.5194/ esd-11-737-2020。

Nikurashin, M., and G. Vallis, 2011：海洋深层层化与翻转环流理论。《物理海洋学杂志》，**41 (3)**，485–502，https://doi.org/10.1175/ 2010jpo4529.1。

Raper, S. C. B., J. M. Gregory, 和 R. J. Stouffer，2002：气候敏感度和海洋吸热在大气环流模式瞬态温度响应中的作用。《气候杂志》，**15 (1)**，124 – 130，https://doi.org/10.1175/1520-0442(2002)0150124:TROCSA2.0.CO;2。

Redi, M. H.，1982：通过坐标旋转实现的海洋等密度混合。《物理海洋学杂志》，**12 (10)**，1154 –1158，https://doi.org/10.1175/1520-0485(1982)0121154: OIMBCR2.0.CO;2。

Rogers, M., R. Ferrari, 和 L.-P. Nadeau，2023：中层配方。《物理海洋学杂志》，**53(7)**，1753–1766，https://doi.org/10.1175/jpo-d-22-0225.1。

Rose, B. E. J., and L. Rayborn, 2016: 海洋吸热对瞬态气候敏感性的影响。《当前气候变化报告》，**2 (4)**，190–201，https://doi.org/10.1007/ s40641-016-0048-4。

Salvi, P., J. M. Gregory, 和 P. Ceppi, 2023：历史时期随时间演变的辐射反馈。《地球物理研究杂志：大气》，**128(20)**，https://doi.org/ 10.1029/2023jd038984。

Smith, C. 等，2021：政府间气候变化专门委员会第一工作组（WG1）第六次评估报告（AR6）附件三扩展数据。Zenodo，网址 https://zenodo.org/record/5705391, https://doi.org/10. 5281/ZENODO.5705391。

Watts, R. G., M. C. Morantine, 和 K. Achuta Rao, 1994：能量平衡气候模型中的时间尺度：1. 极限情况解。《地球物理研究杂志：大气》，**99 (D2)**，3631–3641, https://doi.org/10.1029/93jd01867。

Wigley, T. M. L., 和 M. E. Schlesinger, 1985：二氧化碳增加对全球平均温度影响的解析解。《自然》，**315 (6021)**，649–652，https://doi.org/10.1038/315649a0。

Winton, M., K. Takahashi, 和 I. M. Held, 2010：海洋热吸收效率对瞬态气候变化的重要性。《气候杂志》，**23 (9)**，2333–2344，https://doi.org/10.1175/ 2009jcli3139.1。