arXiv:2603.01689v1 [math.NA] 2 Mar 2026

用于静态与演化曲面上偏微分方程的随机神经网络

Jingbo Sun[1], Fei Wang[2]

摘要。 曲面偏微分方程广泛应用于科学与工程领域。在静态与演化曲面上求解这类方程的数值解仍然颇具挑战，这是因为几何复杂性较高，而对于演化几何，还需要反复进行网格更新以及几何或解的传递。尽管基于神经网络的方法提供了无网格离散方案，但基于非凸训练的方法可能成本高昂，且在实际应用中未必能达到高精度。本文提出一种随机神经网络（RaNN）方法，用于求解静态与演化曲面上的偏微分方程：随机生成隐藏层参数并保持固定，再通过求解最小二乘问题高效确定输出层系数。对于静态曲面，我们给出适用于参数化曲面、隐式水平集曲面和点云几何的表述，并针对满足界面相容性的基于参数化的表述提供相应的理论分析。对于拓扑随时间保持不变的演化曲面，我们提出一种基于 RaNN 的策略，通过流映射表示学习曲面演化，随后在时空配点集上求解曲面偏微分方程，从而避免重新网格化。大量数值实验表明，该方法适用范围广，并且在具有代表性的基准测试中表现出良好的精度与效率。

关键词。 随机神经网络；曲面偏微分方程；静态与演化曲面；时空方法 ch

1 引言

偏微分方程（PDE）是用于描述物理学、生物学和工程学中各种现象的基础工具。许多重要的偏微分方程定义在弯曲流形上，并广泛应用于图像处理（[54, 4, 45]）、生物力学（[66, 52]）和相场模型（[29]）等领域。明确纳入曲面几何信息，能够对这些复杂系统进行更真实、更精确的模拟。

尽管在静态与演化曲面上求解偏微分方程十分重要，但由于底层区域的几何复杂性，这一问题仍极具挑战性。传统方法（如曲面有限元方法（FEM， [18, 19, 20, 23, 21]））通过使用三角剖分或其他网格结构对流形进行离散化，以求解曲面偏微分方程。相比之下，径向基函数方法（[26, 1, 64, 75]）等无网格方法无需生成网格，便能提供高精度和灵活的几何处理能力。另一类称为嵌入方法的方法，则将定义在曲面上的偏微分方程改写为 $\mathbb{R}^3$ 中等价的体域偏微分方程，例如水平集方法（[3]）和最近点方法（[61, 59, 58]）。

机器学习的最新进展推动了基于神经网络的偏微分方程求解方法的发展。其中包括物理信息神经网络（PINN）（[60]），该方法以强形式求解偏微分方程；以及深度里兹方法（[22]），该方法采用变分方法。其他众多基于神经网络的框架也相继出现（[65, 41, 38, 39, 37, 48, 76, 74]）。这些方法利用神经网络的万能逼近能力（[11, 31, 2, 9, 51, 46, 47]），包括与维数无关的收敛率（[2]）。近期有多项研究将 PINN 扩展到了曲面偏微分方程（[25, 24, 70]）。然而，PINN 通常会将即使是线性的偏微分方程也重新表述为非凸优化问题，可能面临优化困难，从而

[1]中国陕西省西安市西安交通大学数学与统计学院，邮编 710049。电子邮箱：jingbosun@xjtu.edu.cn。[2]中国陕西省西安市西安交通大学数学与统计学院及动力工程多相流国家重点实验室，邮编 710049。该作者的工作部分得到国家自然科学基金委员会资助（项目编号：92470115）。电子邮箱：feiwang.xjtu@xjtu.edu.cn。

限制精度和效率。Hu 等人最近提出的一种方法（[33]）通过将 PINN 与嵌入技术、浅层网络以及 Levenberg–Marquardt 优化相结合，提高了精度和效率（[49]）。

在本研究中，我们采用不同的策略，使用随机神经网络（RaNN）求解静态与演化曲面上的偏微分方程。RaNN 在体域偏微分方程求解方面展现出巨大潜力，并在训练简便性和计算速度方面具有优势（[17, 14, 7, 63, 67, 40, 13]）。所提出的方法无需网格，适用于广泛的曲面类型，包括可参数化曲面、水平集定义的曲面，以及仅由散乱点数据描述的曲面。RaNN 最早于 [56, 55, 35, 36] 中提出。尽管其架构与全连接神经网络相似，但 RaNN 在训练方式上有着根本区别：隐藏层权重从预先指定的分布中随机采样并保持固定，而输出层则通过解析方法进行训练。这样便无需反向传播，从而显著提升计算效率。研究表明，在适当条件下，RaNN 仍具有良好的逼近和泛化性能 [35, 34, 43, 53]。

基于 RaNN 的方法已在各种体域偏微分方程中展现出成效，涵盖强形式（[17, 14, 7, 13]）和弱形式（[63, 67, 12]）表述。其应用包括扩散黏性波动方程（[68]）、KdV 方程和 Burgers方程（[69]）、线弹性和流体动力学（[62]），以及更复杂的问题，例如高维问题（[73]）、界面问题（[10, 40]）、障碍问题（[72]）、多尺度问题（[8, 42]）和反问题（[15]）。受这些进展的启发，我们将 RaNN 方法拓展至曲面偏微分方程，重点研究静态曲面和演化曲面。我们通过一系列数值实验展示了所提方法的有效性和效率。

本文其余部分安排如下。第 2 节回顾随机神经网络的架构与训练。第 3 节介绍静态曲面上稳态和时间依赖偏微分方程的 RaNN 表述，并对具有界面相容性的基于参数化的表述进行相应的理论分析。第 4节阐述具有拓扑不变性的演化曲面方法。第 5节给出数值结果。最后，第

6总结了论文并展望了未来的研究方向。

2 《神经网络》

本节将介绍一种特殊类型的神经网络，即随机神经网络（RaNN）。它可以轻松适用于各种偏微分方程，同时保持较高的效率和精度。

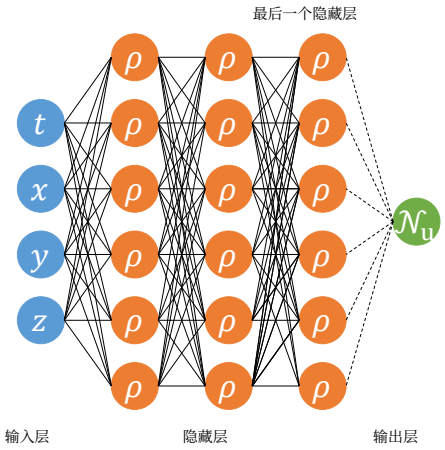


图1：随机神经网络的架构

RaNN 的架构与标准全连接神经网络相似。例如，图1 展示了一个输入维度为 4、输出维度为 1 的 RaNN。其主要区别在于参数的处理方式。连接输入层与隐藏层的权重，以及那些

连接各隐藏层的权重，均按照指定的概率分布随机生成，并在整个训练过程中保持固定。图中的黑色实线表示这些连接。相比之下，连接最后一个隐藏层与输出层的权重（虚线）则通过解析训练过程获得。

激活函数 ρ 选择为非线性且非多项式函数。令 M 表示最后一个隐藏层中的神经元数量。网络输出 u 为

$$\mathcal{N}_u(t,x,y,z) = \sum_{i=1}^{M} c_i \psi_i(\theta_i, t, x, y, z), \tag{2.1}$$

其中， $\psi_i(\theta_i, t, x, y, z)$表示最终隐藏层的第 i 个输出，而隐藏层参数 θ_i 是随机生成后固定不变的。向量 $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_M) \in \mathbb{R}^{1\times M}$ 包含输出层权重，这些权重是唯一可训练的参数。

深度神经网络以其卓越的逼近能力著称，但将其应用于偏微分方程通常需要求解一个非线性非凸优化问题，这往往会导致显著的优化误差。RaNN 通过适度牺牲逼近能力来降低优化复杂度，从而应对这一问题。由此可在逼近误差与优化误差之间取得良好平衡，既提高精度，又大幅降低计算成本。

3 静态曲面上偏微分方程的 RaNN 方法

本节采用 RaNN 方法求解静态曲面上的偏微分方程，并考察三种情形：**(i)** 由一组局部参数化描述的曲面；**(ii)** 通过零水平集函数隐式定义的曲面；**(iii)** 仅由有限个采样点坐标给出的曲面。针对每种情形，我们都构建相应的数值方法来求解曲面偏微分方程。

设 Γ 是嵌入于 $\mathbb{R}^3$ 中的二维静态曲面。曲面 Γ 上的偏微分方程一般可写为:

$$\mathcal{L}(u) = f \quad \text{on} \quad \Gamma, \tag{3.1}$$

其中， u 是定义在曲面上的未知函数， f 是给定的源项， $\mathcal{L}$ 是通常依赖于 Γ 几何的微分算子。我们假设 Γ 是闭曲面；否则，必须施加适当的边界条件。

3.1 定常偏微分方程

现在考虑光滑、闭且连通的曲面 Γ 上的定常偏微分方程。作为示例，我们采用拉普拉斯–贝尔特拉米方程:

$$-\Delta_\Gamma u = f \quad \text{on} \quad \Gamma, \tag{3.2}$$

其中， u 是定义在 Γ 上的未知函数， f 是给定的源项。在闭曲面上，可解性要求满足相容条件 $\int_\Gamma f\, ds = 0$，且解仅在相差一个加性常数的意义下唯一。在计算中，可以通过施加 $\int_\Gamma u\, ds = 0$，或在参考点处固定 $u(x_*) = 0$，来确定常数模态。

3.1.1 基于参数化的方法

我们仅考虑闭曲面 $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$。假设 Γ 由一个有限图册中的 C^k 参数化映射描述

$$X_i : D_i \to \Gamma_i \subset \Gamma, \qquad i = 1, \ldots, J,$$

其中每个 $D_i \subset \mathbb{R}^2$ 的边界为 $C^{1,\,1}$（或是分段 $C^{1,\,1}$），在 D_i 为矩形这一常见情况下，该假设成立。每个 X_i 都是一个 C^k 浸入，并且存在一个连续延拓 $X_i : D_i \to \Gamma_i$，它是到其像 $\Gamma_i := X_i(D_i)$上的同胚。这些曲面片构成一个分片分解：

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{J} \Gamma_i, \qquad \operatorname{int}(\Gamma_i) \cap \operatorname{int}(\Gamma_j) = \emptyset \ (i \neq j), \tag{3.3}$$

以及相邻的片 块可以沿光滑的界面曲线相接，且长度为正（一维豪斯多夫测度为正）。
豪斯多夫测度）。这 这种设定是参数曲面网格中的标准做法，并可避免二维重叠。

下面 [21], 我们回顾如何计算每个坐标图中的曲面度量张量及相应的局部拉普拉斯–贝尔特拉米算子。设 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2)^\top \in D_i$，并令 $X_{i,\,\alpha} := \partial_{\xi_\alpha} X_i\,(\alpha \in \{1,2\})$。定义度量张量$g^{(i)}_{\alpha\beta} := X_{i,\,\alpha} \cdot X_{i,\,\beta}$ 以及 $g_i := \det(g^{(i)}_{\alpha\beta}) > 0$，其逆矩阵 $(g_i^{\alpha\beta}) = (g^{(i)}_{\alpha\beta})^{-1}$。曲面测度在 Γ_i 上的拉回为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{g_i(\boldsymbol{\xi})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}, \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = \mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2, \qquad \boldsymbol{\xi} \in D_i.$$

对于曲面函数 u，定义其局部拉回 $\tilde{u}_i := u \circ X_i$ 于 D_i。我们定义坐标卡算子 $\mathcal{G}_i$，使其表示 $-\Delta_\Gamma$的拉回，即

$$\mathcal{G}_i \tilde{u}_i := -\frac{1}{\sqrt{g_i}} \partial_{\xi_\alpha} \left(\sqrt{g_i}\, g_i^{\alpha\beta}\, \partial_{\xi_\beta} \tilde{u}_i \right), \tag{3.4}$$

对于重复的希腊指标 $\alpha,\ \beta \in \{1,2\}$，我们采用爱因斯坦求和约定，因此，在 D_i 中有 $(-\Delta_\Gamma u) \circ X_i = \mathcal{G}_i(u \circ X_i)$。

设 $\rho\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为一个激活函数。对于每个曲面片 i，从均匀分布 $U(-r_x,\ r_x)$ 中抽取独立同分布的随机权重 $\boldsymbol{w}_i = [w_{i,1}, \cdots, w_{i,M_i}]^\top \in \mathbb{R}^{M_i \times 2}$，并根据$D_i$的参数范围选择 $\boldsymbol{B}_i \in \mathbb{R}^{2 \times M_i}$。偏置向量 $\boldsymbol{b}_i \in \mathbb{R}^{M_i \times 1}$ 定义为

$$\boldsymbol{b}_i := -(\boldsymbol{w}_i \odot \boldsymbol{B}_i^\top)\,\mathbf{1}_2, \qquad \mathbf{1}_2 = (1,1)^\top,$$

其中 $\odot$ 表示阿达马积。D_i 上的随机特征基为

$$\boldsymbol{\psi}_i(\boldsymbol{\xi}) := \rho(\boldsymbol{w}_i\,\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{b}_i) \in \mathbb{R}^{M_i \times 1}, \qquad \boldsymbol{\xi} \in D_i,$$

其中 $\rho(\cdot)$ 逐分量应用。定义分片试探函数类

$$\mathcal{N}_i^{\mathrm{par}} := \left\{ v_i = \boldsymbol{c}_i \boldsymbol{\psi}_i :\ \boldsymbol{c}_i \in \mathbb{R}^{1 \times M_i} \right\}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{N}}_{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{par}} := \prod_{i=1}^{J} \mathcal{N}_i^{\mathrm{par}}, \quad \boldsymbol{M} := (M_1, \ldots, M_J).$$

由于各曲面片互不重叠，曲面片之间的耦合仅通过其共有的边界曲线发生，我们将这些边界曲线称为界面。设 $\mathcal{E}$ 为由无向界面 $e \subset \partial\Gamma_i \cap \partial\Gamma_j$ 构成的集合，其中 $i \neq j$ 且长度为正。对于由曲面片 $(i,\ j)$ 共有的 $e \in \mathcal{E}$，定义参数边原像

$$\partial_e D_i := X_i^{-1}(e) \subset \partial D_i, \qquad \partial_e D_j := X_j^{-1}(e) \subset \partial D_j.$$

沿着 e，这两条参数边通过转移映射自然地对应起来

$$\phi^e_{ji} := X_j^{-1} \circ X_i\big|_{\partial_e D_i} :\ \partial_e D_i \to \partial_e D_j,$$

因此，对所有 $\boldsymbol{\xi} \in \partial_e D_i$,

$$X_i(\boldsymbol{\xi}) = X_j\big(\phi^e_{ji}(\boldsymbol{\xi})\big) \in e. \tag{3.5}$$

为了比较界面两侧的迹，假设 ϕ^e_{ji} 存在到某个邻域的 C^{k-1} 延拓：存在开邻域 $\mathcal{N}_{i,\,e} \subset D_i$ 和 $\mathcal{N}_{j,\,e} \subset D_j$，以及一个 C^{k-1} 微分同胚

$$\Phi^e_{ji} : \mathcal{N}_{i,e} \to \mathcal{N}_{j,e}, \qquad \Phi^e_{ji}\big|_{\partial_e D_i} = \phi^e_{ji},$$

其逆矩阵为 $\Phi_{ij}^e = (\Phi_{ji}^e)^{-1}$ 和 $\Phi_{ji}^e(\partial_e D_i) = \partial_e D_j$。

给定 $\boldsymbol{v} = (v_i)_{i=1}^J$，对于 (i, j) 共有的每条 $e \in \mathcal{E}$，我们在选定的一侧 $\partial_e D_i$ 上衡量失配。令 $\nu_{i,e}(\boldsymbol{\xi})$ 表示边界曲线 $\partial_e D_i \subset \partial D_i$ 的外向单位法向量（位于 $\mathbb{R}^2$ 中），并将法向导数定义为$\partial_{\nu_{i,e}} v := \nu_{i,e} \cdot \nabla v$。

(i) 值失配。

$$\delta_e^0(\boldsymbol{v})(\boldsymbol{\xi}) := v_i(\boldsymbol{\xi}) - v_j(\Phi_{ji}^e(\boldsymbol{\xi})), \qquad \boldsymbol{\xi} \in \partial_e D_i.$$

(ii) 法向导数不匹配（符合链式法则）。

$$\delta_e^n(\boldsymbol{v})(\boldsymbol{\xi}) := \partial_{\nu_{i,e}} v_i(\boldsymbol{\xi}) - \partial_{\nu_{i,e}}\big(v_j \circ \Phi_{ji}^e\big)(\boldsymbol{\xi}), \qquad \boldsymbol{\xi} \in \partial_e D_i.$$

将这两种失配合并为

$$\mathcal{B}_e \boldsymbol{v} := \big(\delta_e^0(\boldsymbol{v}),\ \delta_e^n(\boldsymbol{v})\big), \qquad \mathcal{B}\boldsymbol{v} := (\mathcal{B}_e \boldsymbol{v})_{e \in \mathcal{E}}.$$

注 3.1（为何值和法向导数已足够）对于 $v \in H^2(D)$，其迹满足 $v|_{\partial D} \in H^{3/2}(\partial D)$，且其切向导数满足 $\partial_\tau v|_{\partial D} = \partial_\tau (v|_{\partial D}) \in H^{1/2}(\partial D)$。因此，若 $v_i = v_j \circ \Phi_{ji}^e$ 在 $\partial_e D_i$ 上成立，且位于 $H^{3/2}$ 中，则切向导数在 $H^{1/2}$ 中自动匹配。因此，除了值匹配之外，再要求法向导数匹配，就足以确保跨界面的全局 H^2 拼接。

基于参数化的方法。令 $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^J \in \boldsymbol{\mathcal{N}}_{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{par}}$ 表示基于图册的近似，其中每个u_i 由 D_i上的一个局部随机神经网络表示。将 Γ上的拉普拉斯–贝尔特拉米方程拉回到各个坐标图上，可得到 $\mathcal{D}$ 上的耦合问题$= \{D_i\}_{i=1}^J$:

$$\mathcal{G}_i u_i = f \circ X_i \quad \text{in } D_i, \quad i = 1, \dots, J, \tag{3.6a}$$

$$\mathcal{B}\,\boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{on } \mathcal{E}. \tag{3.6b}$$

在配点处施加3.6（PDE 的内部点以及 $\mathcal{B}$的界面点）可得到关于输出权重 $\boldsymbol{c} = \{\boldsymbol{c}_i\}_{i=1}^J$的线性系统，并在最小二乘意义下求解。

基于参数化的方法（不单独进行边界强制）。我们在嵌入坐标 $x \in \Gamma \subset \mathbb{R}^3$上定义一个单个随机神经网络:

$$\hat{u}(x) := \boldsymbol{c}\,\rho(\boldsymbol{w}x + \boldsymbol{b}), \qquad x \in \Gamma,$$

其中，$\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{M \times 3}$ 的各项独立同分布，服从 $U(-r_x, r_x)$，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{1 \times M}$ 是可训练的，并且

$$\boldsymbol{b} := -(\boldsymbol{w} \odot \boldsymbol{B}^\top)\,\mathbf{1}_3, \qquad \mathbf{1}_3 = (1,1,1)^\top,$$

其中，选择 $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{B}_1, \dots, \boldsymbol{B}_M] \in \mathbb{R}^{3 \times M}$ 以覆盖 Γ 的坐标范围（例如，从支撑在 Γ包围盒上的均匀分布中独立同分布地采样 $\boldsymbol{B}_m$）。在每个补丁上，我们使用拉回

$$u_i(\boldsymbol{\xi}) := \hat{u}(X_i(\boldsymbol{\xi})) = \boldsymbol{c}\,\rho(\boldsymbol{w} X_i(\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{b}), \qquad \boldsymbol{\xi} \in D_i.$$

由于 $\hat{u}$ 在 Γ 上全局定义，令 $e = \Gamma_i \cap \Gamma_j$ 和 $\boldsymbol{\xi} \in \partial_e D_i$。根据界面识别 $X_i(\boldsymbol{\xi}) = X_j(\Phi_{ji}^e(\boldsymbol{\xi}))$，我们有

$$u_i(\boldsymbol{\xi}) = \hat{u}(X_i(\boldsymbol{\xi})) = \hat{u}(X_j(\Phi_{ji}^e(\boldsymbol{\xi}))) = u_j(\Phi_{ji}^e(\boldsymbol{\xi})),$$

因此 $\delta_e^0(\boldsymbol{u}) = 0$。

此外，令 $\nu_{i,e}(\boldsymbol{\xi})$ 为 $\partial_e D_i \subset \partial D_i$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的外向单位法向量。由于在一个邻域内，$u_i = \hat{u} \circ X_i$ 且 $u_j \circ \Phi_{ji}^e = \hat{u} \circ X_j \circ \Phi_{ji}^e = \hat{u} \circ X_i$，沿法向求导并应用链式法则可得

$$\partial_{\nu_{i,e}} u_i(\boldsymbol{\xi}) = \partial_{\nu_{i,e}}\big(u_j \circ \Phi_{ji}^e\big)(\boldsymbol{\xi}),$$

因此 $\delta_e^n(\boldsymbol{u}) = 0$，故 $\mathcal{B}\boldsymbol{u} = 0$ 自动成立。因此，对于这种全局定义的拟设，无需单独强制消除界面失配。

这一论证依赖于 C^1 每个界面邻域内转移映射的延拓存在，这一点将在第3.1.2节的几何设定中作出假设。利用 $\mathcal{G}_i$ 式（3.4）中的内容，我们求解图册形式偏微分方程：求$\hat{}u$使得，对于每个 $i = 1, \ldots, J$,

$$\mathcal{G}_i u_i(\boldsymbol{\xi}) = (f \circ X_i)(\boldsymbol{\xi}) \quad \text{in } D_i. \tag{3.7}$$

在 $\{D_i\}$ 的内部进行配点，得到关于共享输出权重的线性最小二乘系统 $\boldsymbol{c}$.

注 *3.2* $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_M] \in \mathbb{R}^{d\times M}$的选择不会带来额外的计算负担，因为它由曲面特征决定。令 $\tilde{D} \subset \mathbb{R}^d$ 表示与所选输入空间相关联的轴对齐包围盒：若 $d = 3$, $D = [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}] \times [z_{\min}, z_{\max}]$，其中 $[x, y, z]_{\min/\boldsymbol{max}} = \tilde{}\boldsymbol{inf}/\boldsymbol{sup}_{(\xi_1,\xi_2)\in D} X(\xi_1, \xi_2)$，等等；若 $d = 2$, $D = [\boldsymbol{min}(\xi_1), \boldsymbol{max}(\xi_1)] \times [\boldsymbol{min}(\xi_2), \boldsymbol{max}(\xi_2)]$。随后，我们将各列$\tilde{}$按 $\boldsymbol{B}_i \sim U(D)$独立同分布地抽取。

上述构造 $\boldsymbol{b}$（通过 $\boldsymbol{B}$）仅用于数值实验，以便覆盖输入域。在后续的理论分析中，我们改为假设内部参数 $\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 分别从给定的均匀分布中独立采样。

注 3.3（在闭曲面上固定加性常数）设 Γ 为闭曲面。由于 $\ker(\Delta_\Gamma) = \text{span}\{1\}$，曲面泊松问题 $-\Delta_\Gamma u = f$（其中 $\int_\Gamma f \, \mathrm{d}s = 0$）的解仅在相差一个加性常数的意义下唯一。因此，我们将 u视为商空间 $H^1(\Gamma)/\mathbb{R}$中的元素。

在本文余下部分中，收敛分析将在零均值子空间（等价地，在 $H^1(\Gamma)/\mathbb{R}$）中进行，方法是选取满足下式的唯一代表元

$$\int_\Gamma u \, \mathrm{d}s = 0.$$

所有误差估计均针对这些规范化代表元，即在模去加性常数的意义下理解。

在数值实验中，我们不显式施加零均值约束，而是通过在固定参考点 $x_* \in \Gamma$处将数值逼近与精确解对齐，来消除常数模态：

$$\tilde{u}_h(x) := u_h(x) - u_h(x_*) + u(x_*).$$

随后，我们使用 $\tilde{u}_h$ 计算误差。这种后处理与零均值归一化仅相差一个常数，因此不会影响对加性常数不变的量，同时为 L^2 型误差测量提供一致的代表元。

3.1.2 基于参数化的方法的理论分析

我们在一个抽象的希尔伯特空间设定中，利用 RaNN，在基于残差的学习框架下，对采用显式界面失配惩罚的基于参数化的方法进行理论分析。其思路是将总误差分解为逼近误差、统计误差和优化误差。为便于说明，全文聚焦于闭连通曲面上的拉普拉斯–贝尔特拉米方程；更一般的线性曲面偏微分方程的延拓见注 3.19 。

可解性假设。 由于 Γ 是闭的，且 $\ker(\Delta_\Gamma) =$ 由$\{1\}$张成，我们假设相容条件 $\int_\Gamma f \, \mathrm{d}s = 0$成立，并选取满足 $\int_\Gamma u^* \, \mathrm{d}s = 0$的唯一零均值解 $u^* \in H^2(\Gamma)$。

几何设定。我们采用分片分解（3.3）以及式（ $\{\mathcal{G}_i\}_{i=1}^J$ （3.4）中的坐标卡算子。为了赋予 $\mathcal{B}$ 坐标不变意义，同时保持互不重叠分解，我们假设每个X_i： $D_i \to \Gamma_i$ 都是定义在开集 C^k 上的坐标图 $\widetilde{X}_i$： $\widetilde{D}_i \to \Gamma$ 的限制。对于每个界面 $\widetilde{D}_i \supset D_i$。

$e=\Gamma_i\cap\Gamma_j$ 存在开邻域$\mathcal{N}_{i,\ e}\subset\widetilde{D}_i$ 以及$\mathcal{N}_{j,\ e}\subset\widetilde{D}_j$ 并且存在一个 C^{k-1} 微分同胚 $\Phi^e_{ji}:\ \mathcal{N}_{i,\ e}\to\mathcal{N}_{j,\ e}$使得 $\widetilde{X}_j\circ\Phi^e_{ji}=\widetilde{X}_i$在$\mathcal{N}_{i\text{上},\ e}$，且 $\Phi^e_{ji}|_{\partial_eD_i}=X_j^{-1}\circ X_i|_{\partial_eD_i}$。这是光滑流形上的标准图册相容性假设，不会在计算用的分片分解（3.3）中引入二维重叠。

函数空间。设 $H^m(D_i)$ 为通常的索об列夫空间，并定义分片空间

$$\boldsymbol{H}^m(\mathcal{D}):=\prod_{i=1}^{J}H^m(D_i),\qquad \boldsymbol{v}=(v_1,\dots,v_J).$$

我们对 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^0(\mathcal{D})$ 使用相容的曲面积分，

$$\int_\Gamma v\,\mathrm{d}s:=\sum_{i=1}^{J}\int_{D_i}v_i(\boldsymbol{\xi})\,\sqrt{g_i(\boldsymbol{\xi})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi},$$

并定义全局零均值投影算子

$$(\Pi_\diamond\boldsymbol{v})_i:=v_i-\frac{\sum_{m=1}^{J}\int_{D_m}v_m\sqrt{g_m}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}{\sum_{m=1}^{J}\int_{D_m}\sqrt{g_m}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}},\qquad i=1,\dots,J.\tag{3.8}$$

由于常数跨界面的失配为零，且 $\mathcal{G}_i(\mathrm{const})=0$，$\Pi_\diamond$ 保持界面约束，并使总体损失与经验损失均保持不变。

界面失配范数与迹空间。对每个界面 $e\in\mathcal{E}$，固定一个定向 $i(e):=\min\{i,j\}$，并令 $\partial_eD:=\partial_eD_{i(e)}\subset\partial D_{i(e)}$，配备弧长测度 $\mathrm{d}l$。定义可计算赋范空间

$$Z_e:=\big(L^2(\partial_eD)\big)^2,\qquad \|\mathcal{B}_e\boldsymbol{v}\|^2_{Z_e}:=\|\delta^0_e(\boldsymbol{v})\|^2_{L^2(\partial_eD)}+\|\delta^n_e(\boldsymbol{v})\|^2_{L^2(\partial_eD)},$$

以及 $Z:=\prod_{e\in\mathcal{E}}Z_e$，其中 $\|\mathcal{B}\boldsymbol{v}\|^2_Z:=\sum_{e\in\mathcal{E}}\|\mathcal{B}_e\boldsymbol{v}\|^2_{Z_e}$。为了稳定性，我们还使用迹尺度空间

$$\mathcal{Z}_e:=H^{3/2}(\partial_eD)\times H^{1/2}(\partial_eD),\qquad \|\mathcal{B}_e\boldsymbol{v}\|^2_{\mathcal{Z}_e}:=\|\delta^0_e(\boldsymbol{v})\|^2_{H^{3/2}(\partial_eD)}+\|\delta^n_e(\boldsymbol{v})\|^2_{H^{1/2}(\partial_eD)},$$

以及 $\mathcal{Z}:=\prod_{e\in\mathcal{E}}\mathcal{Z}_e$ 其中 $\|\mathcal{B}\boldsymbol{v}\|^2_{\mathcal{Z}}:=\sum_{e\in\mathcal{E}}\|\mathcal{B}_e\boldsymbol{v}\|^2_{\mathcal{Z}_e}$。注意，$\mathcal{B}\boldsymbol{v}=0$ 在此迹意义下理解

.

总体与经验残差损失。设 $\tilde{f}_i:=f\circ X_i$。对于 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})$ 定义

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{v}):=\sum_{i=1}^{J}\|\mathcal{G}_iv_i-\tilde{f}_i\|^2_{L^2(D_i)}+\eta\|\mathcal{B}\boldsymbol{v}\|^2_Z.$$

对于经验损失，设 $\{\boldsymbol{\xi}_{i,n}\}_{n=1}^{N_i}\overset{\text{独立同分布}}{\sim}U(D_i)$，并设 $\{\boldsymbol{\xi}_{e,n}\}_{n=1}^{N_e}\overset{\text{独立同分布}}{\sim}U(\partial_eD)$为关于 ∂_eD上归一化弧长测度的独立同分布样本。则

$$\widehat{\mathcal{J}}(\boldsymbol{v}):=\sum_{i=1}^{J}\frac{|D_i|}{N_i}\sum_{n=1}^{N_i}\big|\mathcal{G}_iv_i(\boldsymbol{\xi}_{i,n})-\tilde{f}_i(\boldsymbol{\xi}_{i,n})\big|^2+\eta\sum_{e\in\mathcal{E}}\frac{|\partial_eD|}{N_e}\sum_{n=1}^{N_e}\|\mathcal{B}_e\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}_{e,n})\|^2_{\mathbb{R}^2}.$$

试验函数类。将分片 RaNN 输出写为

$$v_i(\boldsymbol{\xi})=\sum_{m=1}^{M_i}c_{i,m}\,\psi_{i,m}(\boldsymbol{\xi}),\qquad \boldsymbol{\xi}\in D_i,$$

其中 $\psi_{i,\ m}$ 是上一小节生成的固定随机特征，且 $\boldsymbol{c}_i=(c_{i,\ 1},\ \dots,\ c_{i,\ M_i})$。对于统计分析，我们采用一个 ℓ^1-有界系数集：

$$\mathcal{N}^{par}_{i,C_N}:=\Big\{v_i=\sum_{m=1}^{M_i}c_{i,m}\psi_{i,m}:\ \|c_i\|_1\le C_N\Big\},\qquad \boldsymbol{\mathcal{N}}^{par}_{\boldsymbol{M},C_N}:=\prod_{i=1}^{J}\mathcal{N}^{par}_{i,C_N}.$$

我们通过投影算子施加全局零均值约束：

$$\Pi_\diamond \boldsymbol{\mathcal{N}}^{par}_{\boldsymbol{M},C_N} := \{\Pi_\diamond \boldsymbol{v} : \ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{N}}^{par}_{\boldsymbol{M},C_N}\}.$$

经验（最小二乘）极小化解为

$$\boldsymbol{u_M} \in \arg\min_{\boldsymbol{v}\in\Pi_\diamond \boldsymbol{\mathcal{N}}^{par}_{\boldsymbol{M},C_N}} \widehat{\mathcal{J}}(\boldsymbol{v}). \tag{3.9}$$

我们在分片范数中度量误差

$$\|\boldsymbol{v}\|^2_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})} := \sum_{i=1}^{J} \|v_i\|^2_{H^2(D_i)}.$$

步骤 1：解析稳定性（图范数控制）。我们首先证明，残差算子能够控制分片 H^2 范数（相差一个常数因子），这是将残差最小化转化为误差估计的关键。

为了将基于残差的损失与曲面上的实际误差联系起来，我们需要一种稳定性机制，将（i）在 $L^2(D_i)$ 中度量的分片 PDE 残差，以及（ii）在界面上度量的片间不相容性，转化为对 $\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})$ 中分片 H^2-误差的控制。该论证分为三个概念步骤：（1）各坐标图上局部算子 $\{\mathcal{G}_i\}$ 的一致椭圆性和系数正则性，这由参数化的度量性质保证；（2）闭曲面上的全局图范数估计，它通过 $L^2(\Gamma)$ 范数控制零均值 $H^2(\Gamma)$ 范数；（3）图册上的拼接–提升构造：零界面失配使我们能够将一个分片函数拼接成全局 $H^2(\Gamma)$ 函数，而失配迹算子的有界右逆则能将一般界面缺陷提升为一个校正项。综合这些要素，可得图册上的图范数不等式，这是后续逼近–统计–优化误差分解所依据的关键稳定性估计。

引理 3 .4（每个坐标图上的一致椭圆性）对于 i，存在 $0 < \lambda_i \le \Lambda_i < \infty$ 使得 t

$$\lambda_i|\zeta|^2 \le g_i^{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi})\zeta_\alpha\zeta_\beta \le \Lambda_i|\zeta|^2, \qquad \forall \zeta \in \mathbb{R}^2,\ \forall \boldsymbol{\xi} \in D_i,$$

和 $g_i^{\alpha\beta}$、$\sqrt{g_i} \in C^{k-1}(\overline{D_i})$。

证明。 由于 $X_i \in C^k(\overline{D_i})$ 是浸入，雅可比矩阵 $J_i = [X_{i,1}\ X_{i,2}]$ 在 D_i 上的秩为 2。因此，对于每个 $\boldsymbol{\xi} \in D_i$，度量张量 $g^{(i)}(\boldsymbol{\xi}) = J_i(\boldsymbol{\xi})^\top J_i(\boldsymbol{\xi})$ 都是对称正定的。令 $\lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi})$ 和 $\lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi})$ 表示 $g^{(i)}(\boldsymbol{\xi})$ 的极端特征值。由连续性可知 J_i（进而 $g^{(i)}$）连续；又由 D_i 的紧致性，$\lambda_{\min}$ 和 $\lambda_{\max}$ 能取到其极值，且满足 $0 < \underline{\lambda} := \min_{D_i} \lambda_{\min} \le \max_{D_i} \lambda_{\max} =: \overline{\lambda} < \infty$。因此，对于 $(g_i^{\alpha\beta}) = (g^{(i)}_{\alpha\beta})^{-1}$，

$$\frac{1}{\overline{\lambda}}|\zeta|^2 \le g_i^{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi})\zeta_\alpha\zeta_\beta \le \frac{1}{\underline{\lambda}}|\zeta|^2, \qquad \forall \zeta \in \mathbb{R}^2,\ \forall \boldsymbol{\xi} \in D_i,$$

因此我们可以取 $\lambda_i = 1/\overline{\lambda}$ 和 $\Lambda_i = 1/\underline{\lambda}$。此外，$g^{(i)}_{\alpha\beta} = X_{i,\alpha} \cdot X_{i,\beta} \in C^{k-1}(\overline{D_i})$，因此 $g_i = \det(g^{(i)}_{\alpha\beta}) \in C^{k-1}(\overline{D_i})$，而 $g_i > 0$ 蕴含 $\sqrt{g_i} \in C^{k-1}(\overline{D_i})$。由于求逆在对称正定矩阵上是光滑的，$g_i^{\alpha\beta} \in C^{k-1}(\overline{D_i})$ 也成立。 ■

定理 3.5（闭连通曲面上的椭圆正则性（图范数））设 $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ 为一个闭连通 C^k 曲面，且满足 $k \ge 2$。则存在 $C_\Gamma > 0$，使得对于所有 $u \in H^2(\Gamma)$ 且满足 $\int_\Gamma u \mathrm{d}s = 0$，

$$\|u\|_{H^2(\Gamma)} \le C_\Gamma \|\Delta_\Gamma u\|_{L^2(\Gamma)}.$$

证明。 在紧致的 C^k 无边界 Γ流形上，强椭圆算子 Δ_Γ 的标准椭圆正则性给出

$$\|u\|_{H^2(\Gamma)} \le C_1\big(\|\Delta_\Gamma u\|_{L^2(\Gamma)} + \|u\|_{L^2(\Gamma)}\big), \qquad \forall u \in H^2(\Gamma),$$

例如，参见 [30]。为消去 $\|u\|_{L^2}$ 项，利用 Γ是连通的且 u 的均值为零，因此由曲面庞加莱不等式可得$\|u\|_{L^2(\Gamma)} \le C_P\|\nabla_\Gamma u\|_{L^2(\Gamma)}$。此外，由于 Γ 无边界，

$$\|\nabla_\Gamma u\|^2_{L^2(\Gamma)} = -\int_\Gamma u\,\Delta_\Gamma u\,\mathrm{d}s \le \|u\|_{L^2(\Gamma)}\,\|\Delta_\Gamma u\|_{L^2(\Gamma)}.$$

结合这　　两个不等式可得$\|u\|_{L^2(\Gamma)} \le C\,\|\Delta_\Gamma u\|_{L^2(\Gamma)}$，代回后即得所述结论。 ■

现在，我们来弥合参数域上的分片（逐补丁）索об列夫空间与曲面上的全局索伯列夫空间之间的差距。核心思路是标准的：(i) 若界面失配为零，则可将分片 H^2场拼接为全局 $H^2(\Gamma)$ 函数；(ii) 若失配不为零，则可将其提升为支撑在界面附近的体修正。这两个步骤使我们能够将定理 3.5 中的曲面椭圆正则性估计转化为图册表述。

引理 3.6（拼接：零失配意味着存在全局 $H^2(\Gamma)$ 函数）设 $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})$ 满足 $\mathcal{B}\boldsymbol{v} = 0$ （在迹意义下）。则存在唯一的 $u \in H^2(\Gamma)$ 使得 $u \circ X_i = v_i$ 在 D_i 中几乎处处成立，对所有 i均成立。此外，存在依赖于图册的常数 $C_r, C_l > 0$，使得

$$\|u\|_{H^2(\Gamma)} \le C_r\,\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})}, \qquad \|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})} \le C_l\,\|u\|_{H^2(\Gamma)}.$$

证明。 按补丁逐片定义 u： $u|_{\Gamma_i} := v_i \circ X_i^{-1}$。由于每个 X_i： $D_i \to \Gamma_i$都是映到其像上的微分同胚，索伯列夫拉回稳定性给出 $u|_{\Gamma_i} \in H^2(\Gamma_i)$。

由于 $v_i \in H^2(D_i)$，边界迹满足 $v_i|_{\partial D_i} \in H^{3/2}(\partial D_i)$ 和 $\partial_{\nu_i} v_i|_{\partial D_i} \in H^{1/2}(\partial D_i)$（这里 ν_i 是 ∂D_i上的外向单位法向量）。条件 $\mathcal{B}\boldsymbol{v} = 0$ 意味着，在通过转移映射 Φ^e_{ji}等同的每个界面 $e = \Gamma_i \cap \Gamma_j$ 上，值迹和法向导数迹均在适当的迹意义下跨界面一致。因此， u在界面两侧是单值的，且其余法向导数相匹配。

根据标准的分片索伯列夫粘合刻画（分片 H^2 加上 u 和 $\partial_\nu u$在界面两侧的连续性），并通过坐标卡等同传递，可得 $u \in H^2(\Gamma)$；例如，参见 [5]。

最后，范数等价性由 H^2 范数在坐标卡映射下的有界性以及图册的有限性得出：

$$\|u\|^2_{H^2(\Gamma)} \simeq \sum_{i=1}^J \|u\|^2_{H^2(\Gamma_i)} \simeq \sum_{i=1}^J \|u \circ X_i\|^2_{H^2(D_i)} = \sum_{i=1}^J \|v_i\|^2_{H^2(D_i)},$$

其中，隐含常数仅取决于 D_i 上 DX_i、 D^2X_i 及其逆矩阵的一致有界性。 — ■

引理 3.7（界面失配迹的提升）存在一个有界线性算子

$$\mathcal{R} : \mathrm{Range}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{Z} \to \boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})$$

使得对每个 $h \in$ 值域$(\mathcal{B})$，

$$\mathcal{B}(\mathcal{R}h) = h, \qquad \int_\Gamma (\mathcal{R}h)\,\mathrm{d}s = 0, \qquad \|\mathcal{R}h\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})} \le C_{\mathrm{lift}}\,\|h\|_{\mathcal{Z}},$$

其中 C_{lift} 仅取决于图册。此外，可以取 $C_{\mathrm{lift}} \lesssim \big($最大值$_{e\in\mathcal{E}}\, C_e\big)\sqrt{d_{\max}}$，其中 $d_{\max}$： =最大值$_{1\le i\le J}\,\#\{e \in \mathcal{E}$： e 与 $i\}$ 相邻，而 C_e 是下文定义的局部延拓常数。

证明。步骤 1：受限 H^2 迹的局部右逆。 固定一个界面 $e \in \mathcal{E}$ 及其选定的一侧$i(e)$。考虑作用于 $\partial_e D_{i(e)}$ 上的受限迹算子，

$$\gamma_{i(e),e}:\ H^2(D_{i(e)}) \to H^{3/2}(\partial_e D_{i(e)}) \times H^{1/2}(\partial_e D_{i(e)}), \quad \gamma_{i(e),e}(v) := \big(v, \partial_{\nu_{i(e),e}} v\big)\big|_{\partial_e D_{i(e)}},$$

其中 $\nu_{i(e),\,e}$ 是沿着 $\partial_e D_{i(e)}$ 的外向单位法向量（位于 $\mathbb{R}^2$ 中）。

由于假设 $\partial D_{i(e)}$ 是分片 $C^{1,\,1}$，因此全边界迹映射

$$\gamma_{i(e)}:\ H^2(D_{i(e)}) \to H^{3/2}(\partial D_{i(e)}) \times H^{1/2}(\partial D_{i(e)}), \quad \gamma_{i(e)}(v) := \big(v, \partial_{\nu_{i(e)}} v\big)\big|_{\partial D_{i(e)}},$$

是满射的，并且存在有界右逆 $R_{i(e)}:\ H^{3/2}(\partial D_{i(e)}) \times H^{1/2}(\partial D_{i(e)}) \to H^2(D_{i(e)})$ (例如参见 [50]以及针对分片 $C^{1,\,1}$ 边界的标准局部化论证）。

利用边界局部化，我们构造一个有界线性算子

$$E_e : \mathcal{Z}_e \to H^2(D_{i(e)}), \qquad \mathcal{Z}_e := H^{3/2}(\partial_e D_{i(e)}) \times H^{1/2}(\partial_e D_{i(e)}),$$

使得

$$\gamma_{i(e),e}(E_e h_e) = h_e \quad \text{on } \partial_e D_{i(e)} \text{ (in the trace sense)}, \qquad \|E_e h_e\|_{H^2(D_{i(e)})} \le C_e \, \|h_e\|_{\mathcal{Z}_e}, \tag{3.10}$$

其中 C_e 仅依赖于图册（尤其是 $\partial D_{i(e)}$ 的分片 $C^{1,\,1}$ 性质以及界面线段的选取）。

一种具体的构造。 设 $h_e = (g_0,\ g_1) \in \mathcal{Z}_e$。首先利用有界线性延拓算子，将 $(g_0,\ g_1)$ 从边界线段 $\partial_e D_{i(e)}$ 延拓到整个边界 $\partial D_{i(e)}$

$$\mathcal{E}_e^{\partial}:\ H^{3/2}(\partial_e D_{i(e)}) \times H^{1/2}(\partial_e D_{i(e)}) \to H^{3/2}(\partial D_{i(e)}) \times H^{1/2}(\partial D_{i(e)}),$$

使得 $\mathcal{E}_e^{\partial}(g_0,\ g_1) = (\tilde g_0,\ \tilde g_1)$，且 $(\tilde g_0,\ \tilde g_1) = (g_0,\ g_1)$ 在 $\partial_e D_{i(e)}$ 上成立。设 $\tilde v := R_{i(e)}(\tilde g_0,\ \tilde g_1) \in H^2(D_{i(e)})$，使得 $\gamma_{i(e)}(\tilde v) = (\tilde g_0,\ \tilde g_1)$。

接下来，选取一个光滑截断函数 $\chi_e \in \overline{C^\infty}(D_{i(e)})$，其支集包含于 $\partial_e D_{i(e)}$ 的领状邻域内，并满足 $\partial_{\nu_{i(e),\,e}} \chi_e =$ 在 $\partial_e D_{i(e)}$ 上为 0，且 $\chi_e \equiv 1$ 在 $\partial_e D_{i(e)}$ 上成立，但在其两个端点的任意小邻域内可能例外（这在迹意义下无关紧要）。此外，我们选取领状邻域和截断函数 χ_e，使得 $\operatorname{supp}(\chi_e) \cap \partial D_{i(e)} \subset \partial_e D_{i(e)}$。因此，$E_e h_e = \chi_e \tilde v$ 的迹及其法向导数迹在 $\partial D_{i(e)} \setminus \partial_e D_{i(e)}$ 上均为零（在迹意义下），所以不同的界面提升彼此不会干扰。定义 $E_e h_e := \chi_e \, \tilde v$。则在 $\partial_e D_{i(e)}$ 上（在迹意义下），

$$(E_e h_e)|_{\partial_e D_{i(e)}} = \tilde v|_{\partial_e D_{i(e)}} = g_0, \qquad \partial_{\nu_{i(e),e}}(E_e h_e)|_{\partial_e D_{i(e)}} = \chi_e \, \partial_{\nu_{i(e),e}} \tilde v + (\partial_{\nu_{i(e),e}} \chi_e)\tilde v = \partial_{\nu_{i(e),e}} \tilde v = g_1,$$

因此（3.10）成立。由乘积法则以及 $H^2(D_{i(e)})$ 的有界性，可得其 χ_e 及其导数的有界性。

步骤 2：在每个补丁上组装一个全局提升。对于 $h = (h_e)_{e\in\mathcal{E}} \in$ 值域$(\mathcal{B})$，逐补丁定义

$$(\mathcal{R}h)_i := \sum_{e:\, i(e)=i} E_e h_e, \qquad i = 1, \dots, J.$$

由于每个 $E_e h_e$ 都局部化在 $\partial_e D_{i(e)}$ 附近，并且在该线段上重现 (g_0, g_1)，其对 $\gamma_{i(e),e}((\mathcal{R}h)^{i(e)})$ 的贡献恰好为 h_e。因此，上述组装定义良好，从而 $\mathcal{B}(\mathcal{R}h) = h$。

步骤 3：范数界。利用柯西–施瓦茨不等式，并注意到每个补丁至多与 $d_{\max}$ 个界面相邻，

$$\|(\mathcal{R}h)_i\|^2_{H^2(D_i)} = \Big\| \sum_{e:\, i(e)=i} E_e h_e \Big\|^2_{H^2(D_i)} \le d_{\max} \sum_{e:\, i(e)=i} \|E_e h_e\|^2_{H^2(D_i)} \le d_{\max} \Big(\max_e C_e^2 \Big) \sum_{e:\, i(e)=i} \|h_e\|^2_{\mathcal{Z}_e}.$$

对 i 求和可得

$$\|\mathcal{R}h\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})} \le (\max_e C_e) \sqrt{d_{\max}} \, \|h\|_{\mathcal{Z}}.$$

步骤 4：施加零均值归一化。令 $c := |\Gamma|^{-1} \int_\Gamma (\mathcal{R}h)\, \mathrm{d}s$，并从每个分量中减去 c。由于常数的界面失配为零，因此 $\mathcal{B}(\mathcal{R}h)$ 保持不变，同时满足 $\int_\Gamma (\mathcal{R}h)\, \mathrm{d}s = 0$。 ■

定理 3.8（带界面失配迹的图范数控制）假设引理3.4 成立，且 Γ 是闭且连通的。令 $\eta > 0$。则存在常数 $C_{\mathrm{tr}} > 0$，仅依赖于 Γ、图册和η，使得对每个 $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})$ 满足 $\int_\Gamma v \mathrm{d}s = 0$，

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})} \le C_{\mathrm{tr}} \left(\Big(\sum_{i=1}^{J} \|\mathcal{G}_i v_i\|^2_{L^2(D_i)} \Big)^{1/2} + \sqrt{\eta}\, \|\mathcal{B}\boldsymbol{v}\|_{\mathcal{Z}} \right),$$

此外，可以取

$$C_{\mathrm{tr}} := \max\left\{ C_1,\ \frac{C_2}{\sqrt{\eta}} \right\},$$

其中 C_1、$C_2 > 0$ 仅取决于 Γ 和图册。

证明。步骤 1：通过提升消除界面失配。 令 $h := \mathcal{B}\boldsymbol{v} \in$ 值域$(\mathcal{B}) \subset \mathcal{Z}$，并设置 $\boldsymbol{\psi} := \mathcal{R}h$由引理 3.7得到。定义 $\boldsymbol{w} := \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\psi}$。则 $\mathcal{B}\boldsymbol{w} = 0$。此外，由于 $\int_\Gamma v \, \mathrm{d}s = 0$ 和 $\int_\Gamma (\mathcal{R}h) \mathrm{d}s = 0$ 均为 $\int_\Gamma w \mathrm{d}s = 0$，我们也有该结论。

步骤 2：将 $\boldsymbol{w}$ 拼接为一个全局曲面函数。 由于 $\mathcal{B}\boldsymbol{w} = 0$ 是在自然迹空间中理解的$H^{3/2}$（函数值）和 $H^{1/2}$（法向导数），引理 3.6 给出了唯一的 $u \in H^2(\Gamma)$，使得 $u \circ X_i = w_i$ 几乎处处成立于D_i，对所有 i均成立。此外，根据索博列夫拉回在 C^k 坐标卡映射下的稳定性以及图册的有限性，存在一个依赖于图册的常数 $C_l > 0$ 使得

$$\|\boldsymbol{w}\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})} \le C_l \, \|u\|_{H^2(\Gamma)}. \tag{3.11}$$

步骤 3：应用曲面椭圆正则性并转换到坐标图。根据定理3.5（闭连通曲面上的零均值），

$$\|u\|_{H^2(\Gamma)} \le C_\Gamma \, \|\Delta_\Gamma u\|_{L^2(\Gamma)}.$$

利用 $(-\Delta_\Gamma u) \circ X_i = \mathcal{G}_i(u \circ X_i) = \mathcal{G}_i w_i$ 和 $\mathrm{d}s = \sqrt{g_i}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$，可得

$$\|\Delta_\Gamma u\|^2_{L^2(\Gamma)} = \sum_{i=1}^{J} \int_{D_i} |\mathcal{G}_i w_i(\boldsymbol{\xi})|^2 \sqrt{g_i(\boldsymbol{\xi})}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \le C_g \sum_{i=1}^{J} \|\mathcal{G}_i w_i\|^2_{L^2(D_i)},$$

其中 $C_g :=$ 最大值$_i \, \|\sqrt{g_i}\|_{L^\infty(D_i)} < \infty$ 仅取决于图册。结合（3.11）可得

$$\|\boldsymbol{w}\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})} \le C_l C_\Gamma \sqrt{C_g} \Big(\sum_{i=1}^{J} \|\mathcal{G}_i w_i\|^2_{L^2(D_i)} \Big)^{1/2}. \tag{3.12}$$

步骤 4：用 $\mathcal{G}\boldsymbol{v}$ 和提升项来界定 $\mathcal{G}\boldsymbol{w}$。由线性性可知，$\mathcal{G}_i w_i = \mathcal{G}_i v_i - \mathcal{G}_i \psi_i$。因此

$$\Big(\sum_{i=1}^{J} \|\mathcal{G}_i w_i\|^2_{L^2(D_i)} \Big)^{1/2} \le \Big(\sum_{i=1}^{J} \|\mathcal{G}_i v_i\|^2_{L^2(D_i)} \Big)^{1/2} + \Big(\sum_{i=1}^{J} \|\mathcal{G}_i \psi_i\|^2_{L^2(D_i)} \Big)^{1/2}.$$

根据引理3.4，$\mathcal{G}_i$ 的系数在 D_i上有界，因此 $\mathcal{G}_i$： $H^2(\overline{D_i}) \to L^2(D_i)$ 有界。令

$$C_0 := \max_{1 \le i \le J} \|\mathcal{G}_i\|_{\mathcal{L}(H^2(D_i), L^2(D_i))} < \infty.$$

Then

$$\Big(\sum_{i=1}^{J} \|\mathcal{G}_i \psi_i\|^2_{L^2(D_i)} \Big)^{1/2} \le C_0 \, \|\boldsymbol{\psi}\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})} \le C_0 \, C_{\mathrm{lift}} \, \|\mathcal{B}\boldsymbol{v}\|_{\mathcal{Z}},$$

其中我们在引理 3.7中使用了最后一步。

步骤 5：得出 $\boldsymbol{v}$。将（3.12）与步骤 4 中的估计结合，得到

$$\|\boldsymbol{w}\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})} \le A\Big(\sum_{i=1}^{J}\|\mathcal{G}_i v_i\|^2_{L^2(D_i)}\Big)^{1/2} + A\,C_0 C_{\mathrm{lift}}\|\mathcal{B}\boldsymbol{v}\|_{\mathcal{Z}},$$

其中 $A := C_l C_\Gamma \sqrt{C_g}$。利用 $\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})} \le \|\boldsymbol{w}\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})} + \|\boldsymbol{\psi}\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})}$ 以及 $\|\boldsymbol{\psi}\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})} \le C_{\mathrm{lift}}\|\mathcal{B}\boldsymbol{v}\|_{\mathcal{Z}}$，我们进一步得到 in

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})} \le A\Big(\sum_{i=1}^{J}\|\mathcal{G}_i v_i\|^2_{L^2(D_i)}\Big)^{1/2} + B\,\|\mathcal{B}\boldsymbol{v}\|_{\mathcal{Z}},$$

其中 $B := C_{\mathrm{lift}} + A\,C_0 C_{\mathrm{lift}}$。最后，由于 $B\|\mathcal{B}\boldsymbol{v}\|_{\mathcal{Z}} = \frac{B}{\sqrt{\eta}}\big(\sqrt{\eta}\,\|\mathcal{B}\boldsymbol{v}\|_{\mathcal{Z}}\big)$，我们有

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})} \le \max\Big\{A, \frac{B}{\sqrt{\eta}}\Big\}\left(\Big(\sum_{i=1}^{J}\|\mathcal{G}_i v_i\|^2_{L^2(D_i)}\Big)^{1/2} + \sqrt{\eta}\,\|\mathcal{B}\boldsymbol{v}\|_{\mathcal{Z}}\right).$$

因此 re t该结论在 $C_{\mathrm{tr}} := \max\{A, B/\sqrt{\eta}\}$ 时成立，即陈述中的 $C_1 = A$ 和 $C_2 = B$。 ■

引理 3.9（训练图范数的上界）假设引理 *3.4* 成立，并且每个界面映射Φ^e_{ji} 在其邻域上均为 C^1 且双利普希茨，即 $\|D\Phi^e_{ji}\|_{L^\infty(\mathcal{N}_{i,e})} + \|D(\Phi^e_{ji})^{-1}\|_{L^\infty(\mathcal{N}_{j,e})} < \infty$。设 $\eta > 0$。则存在一个仅依赖于 η、图册以及 $\{\mathcal{G}_i\}_{i=1}^J$ 的系数界的 $C_U > 0$，使得对所有 $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})$，

$$\sum_{i=1}^{J}\|\mathcal{G}_i v_i\|^2_{L^2(D_i)} + \eta\|\mathcal{B}\boldsymbol{v}\|^2_{Z} \le C_U\,\|\boldsymbol{v}\|^2_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})},$$

其中 $\mathcal{B}_e\boldsymbol{v} = (\delta^0_e(\boldsymbol{v})\ \ \delta^n_e(\boldsymbol{v}))$ 以及 $Z_e = (L^2(\partial_e D))^2$。

证明。步骤 1：内部项。将 $\mathcal{G}_i$ 写成非散度形式，

$$\mathcal{G}_i v = -g_i^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta} v - b_i^\beta \partial_\beta v, \qquad b_i^\beta := \frac{1}{\sqrt{g_i}}\partial_\alpha(\sqrt{g_i}\,g_i^{\alpha\beta}),$$

引理 3.4 给出 $g_i^{\alpha\beta}$，$b_i^\beta \in L^\infty(D_i)$。因此$\|\mathcal{G}_i v_i\|_{L^2(D_i)} \le C_{G,\,i}\|v_i\|_{H^2(D_i)}$，并对 i 求和得到

$$\sum_{i=1}^{J}\|\mathcal{G}_i v_i\|^2_{L^2(D_i)} \le C_G\,\|\boldsymbol{v}\|^2_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})},$$

对于 $C_G := \max_i C^2_{G,\,i}$。

步骤 2：界面项。固定一个由 $(i,\ j)$ 共享的界面 e，并在所选侧 $\partial_e D_{i(e)}$上测量 $\mathcal{B}_e\boldsymbol{v}$。根据 Φ^e_{ji} 的双利普希茨性质以及曲线上的变量替换公式，

$$\|\psi\circ\Phi^e_{ji}\|_{L^2(\partial_e D_i)} \le C_{\Phi,e}\|\psi\|_{L^2(\partial_e D_j)}.$$

利用利普希茨区域上的迹定理，

$$\|v_\ell\|_{L^2(\partial_e D_\ell)} + \|\partial_{\nu_{\ell,e}} v_\ell\|_{L^2(\partial_e D_\ell)} \le C_{\mathrm{Lip}}\|v_\ell\|_{H^2(D_\ell)}, \qquad \ell \in \{i,j\},$$

以及对 $\partial_{\nu_{i,\,e}}(v_j\circ\Phi^e_{ji})$ 应用链式法则，我们得到

$$\|\delta^0_e(\boldsymbol{v})\|_{L^2(\partial_e D_{i(e)})} \le C_e\big(\|v_i\|_{H^2(D_i)} + \|v_j\|_{H^2(D_j)}\big),$$

$$\|\delta^n_e(\boldsymbol{v})\|_{L^2(\partial_e D_{i(e)})} \le C_e\big(\|v_i\|_{H^2(D_i)} + \|v_j\|_{H^2(D_j)}\big),$$

其中 C_e 仅取决于图册和 Φ^e_{ji}。因此，

$$\|\mathcal{B}_e \boldsymbol{v}\|_{Z_e}^2 = \|\delta_e^0(\boldsymbol{v})\|_{L^2(\partial_e D)}^2 + \|\delta_e^n(\boldsymbol{v})\|_{L^2(\partial_e D)}^2 \le C_{B,e}\big(\|v_i\|_{H^2(D_i)}^2 + \|v_j\|_{H^2(D_j)}^2\big).$$

对 $e \in \mathcal{E}$ 求和并统计关联数，得到因子 $d_{\max}$：

$$\|\mathcal{B}\boldsymbol{v}\|_Z^2 \le C_B\, d_{\max}\, \|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})}^2,$$

其中 $C_B := \max_{e\in\mathcal{E}} C_{B,\,e}$。

步骤 3：合并并代入 η。合并两个估计可得

$$\sum_{i=1}^{J} \|\mathcal{G}_i v_i\|_{L^2(D_i)}^2 + \eta\|\mathcal{B}\boldsymbol{v}\|_Z^2 \le \big(C_G + \eta\, C_B d_{\max}\big)\, \|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})}^2.$$

因此，该结论成立，其中 $C_U := C_G + \eta\, C_B d_{\max}$。 ■

假设 3.10（试探空间上的界面逆估计）考虑一个试验空间序列 $\boldsymbol{\mathcal{N}}^{par}_{\boldsymbol{M}},\ C_N$其总宽度为 $M_{\mathrm{tot}} := \sum_{i=1}^{J} M_i$。对于每个 M_{tot}，随机参数均取自有界分布，

$$\|w_{i,m}\|_\infty \le r_{M_{\mathrm{tot}}}, \qquad |b_{i,m}| \le b_{\max} \quad a.s., \qquad i = 1,\dots,J,\ m = 1,\dots,M_i,$$

其中带宽 $r_{M_{\mathrm{tot}}}$ 可以依赖于 M_{tot}，但对于每个固定的 M_{tot} 都是有限的。

固定一个配备弧长测度的界面 $e \in \mathcal{E}$。令

$$S_e := \{\mathcal{B}_e \boldsymbol{v} :\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{N}}^{par}_{\boldsymbol{M},C_N}\} \subset \mathcal{Z}_e$$

为由试探函数类诱导的有限维迹不匹配空间。我们假设，对特征进行随机抽样时，以高概率存在常数 $C_{\mathrm{inv},\,e} > 0$ 使得

$$\|g\|_{\mathcal{Z}_e} \le C_{\mathrm{inv},e}\, \|g\|_{Z_e} \qquad \forall g \in S_e,$$

因此，$C_{\mathrm{inv}} := \max_{e\in\mathcal{E}} C_{\mathrm{inv},\,e}$，

$$\|\mathcal{B}\boldsymbol{v}\|_{\mathcal{Z}} \le C_{\mathrm{inv}}\, \|\mathcal{B}\boldsymbol{v}\|_Z \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{N}}^{par}_{\boldsymbol{M},C_N}.$$

此外，在分析所用的试验空间序列中，假设 C_{inv} 保持一致有界，即随着 M_{tot} 增大，不会出现病态的爆炸。特别地，C_{inv} 可以依赖于图册、激活函数正则性和有效带宽 $r_{M_{\mathrm{tot}}}$，以及各界面上诱导的迹基的条件数。

推论 3.11（用可计算的 Z-范数控制图范数）设 $\boldsymbol{u}^* = (\tilde{u}_1^*, \dots, \tilde{u}_J^*)$ 为精确零均值解的~拉回，使得 $\mathcal{G}_i \tilde{u}_i^* = f_i$ 且 $\mathcal{B}\boldsymbol{u}^* = 0$。假设定理 *3.8* 和假设 *3.10*成立。那么对每个 $\boldsymbol{v} \in \Pi_\diamond \boldsymbol{\mathcal{N}}^{par}_{\boldsymbol{M}},\ C_N$，

$$\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}^*\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})} \le C_{gn}\Big(\Big(\sum_{i=1}^{J} \|\mathcal{G}_i v_i - \tilde{f}_i\|_{L^2(D_i)}^2\Big)^{1/2} + \sqrt{\eta}\, \|\mathcal{B}\boldsymbol{v}\|_Z\Big), \tag{3.13}$$

其中可取 $C_{gn} := C_{\mathrm{tr}}$ 最大值$\{1, C_{\mathrm{inv}}\}$。

引理 3.12（残差到误差界）假设推论 *3.11*成立。那么对于任意 $\boldsymbol{v} \in \Pi_\diamond \boldsymbol{\mathcal{N}}^{par}_{\boldsymbol{M}},\ C_N$，

$$\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}^*\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})}^2 \le 2C_{gn}^2\, \mathcal{J}(\boldsymbol{v}),$$

其中 $\mathcal{J}(\boldsymbol{v}) := \sum_{i=1}^{J} \|\mathcal{G}_i v_i - \tilde{f}_i\|_{L^2(D_i)}^2 + \eta\|\mathcal{B}\boldsymbol{v}\|_Z^2$。

证明。 应用（3.13），并利用 $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$。■

步骤 2：误差分解。

定理 3.13（误差分解）设 $\boldsymbol{u}_M$ 由下式定义：(3.9) 并设

$$\boldsymbol{u}_a \in \arg\min_{\boldsymbol{v}\in\Pi_\diamond \boldsymbol{\mathcal{N}}^{par}_{M,C_N}} \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}^*\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})}$$

为最佳 误差-H^2 试探函数类中的逼近。假设引理3.9 和推论3.11成立。那么

$$\|\boldsymbol{u}_M-\boldsymbol{u}^*\|^2_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})} \le 2C_{gn}^2 C_U \|\boldsymbol{u}_a-\boldsymbol{u}^*\|^2_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})} + 4C_{gn}^2 \sup_{\boldsymbol{v}\in\Pi_\diamond \boldsymbol{\mathcal{N}}^{par}_{M,C_N}} \big|\mathcal{J}(\boldsymbol{v})-\widehat{\mathcal{J}}(\boldsymbol{v})\big| \tag{3.14}$$

$$+ 2C_{gn}^2\Big(\widehat{\mathcal{J}}(\boldsymbol{u}_M)-\widehat{\mathcal{J}}(\boldsymbol{u}_a)\Big).$$

如果最小二乘 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$问题被精确求解，那么 $\mathcal{J}(\boldsymbol{u}_M) \le \mathcal{J}(\boldsymbol{u}_a)$ 且最后一项非正 *ve.*

证明。 根据引理 3.12,

$$\|\boldsymbol{u}_M-\boldsymbol{u}^*\|^2_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})} \le 2C_{gn}^2\,\mathcal{J}(\boldsymbol{u}_M).$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$将 $\mathcal{J}=\widehat{\mathcal{J}}+(\mathcal{J}-\widehat{\mathcal{J}})$ 分解，并加上再减去 $\widehat{\mathcal{J}}(\boldsymbol{u}_a)$，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\boldsymbol{u}_M) &= \widehat{\mathcal{J}}(\boldsymbol{u}_M) + (\mathcal{J}-\widehat{\mathcal{J}})(\boldsymbol{u}_M)\\ &\le \widehat{\mathcal{J}}(\boldsymbol{u}_a) + \big(\widehat{\mathcal{J}}(\boldsymbol{u}_M)-\widehat{\mathcal{J}}(\boldsymbol{u}_a)\big) + \sup_{\boldsymbol{v}\in\Pi_\diamond \boldsymbol{\mathcal{N}}^{par}_{M,C_N}} |\mathcal{J}(\boldsymbol{v})-\widehat{\mathcal{J}}(\boldsymbol{v})|.\end{aligned}$$

此外,

$$\widehat{\mathcal{J}}(\boldsymbol{u}_a) \le \mathcal{J}(\boldsymbol{u}_a) + \sup_{\boldsymbol{v}\in\Pi_\diamond \boldsymbol{\mathcal{N}}^{par}_{M,C_N}} |\mathcal{J}(\boldsymbol{v})-\widehat{\mathcal{J}}(\boldsymbol{v})|.$$

由于 $\mathcal{J}(\boldsymbol{u}^*)=0$，我们有 $\mathcal{J}(\boldsymbol{u}_a)=\mathcal{J}(\boldsymbol{u}_a-\boldsymbol{u}^*)$，而引理 3.9 给出 $\mathcal{J}(\boldsymbol{u}_a) \le C_U\|\boldsymbol{u}_a-\boldsymbol{u}^*\|^2_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})}$。结合上述界可得（3.14）。 ■

步骤 3：逼近与统计界。

假设 3.14（激活函数与参数有界性）设 $\rho \in C^3(\mathbb{R})$。在每个补丁 $D_i \subset \mathbb{R}^2$ 上，随机特征族满足

$$\psi_{i,m}(\boldsymbol{\xi}) = \rho(w_{i,m}\cdot\boldsymbol{\xi}+b_{i,m}), \qquad m=1,\dots,M_i.$$

For 对于给定的试探空间（总宽度为 M_{tot}），假设这些参数几乎必然有界 *d:*

$$\|w_{i,m}\|_\infty \le r_{M_{\mathrm{tot}}}, \qquad |b_{i,m}| \le b_{M_{\mathrm{tot}}}.$$

此外， ρ、ρ'、ρ''、ρ''' 在每个有界区间上都有界。

引理 3.15（图册上的一致特征界）假设引理3.4 和假设3.14成立。此外，假设界面延拓 $\Phi^e_{ji}:\mathcal{N}_{i,e}\to\mathcal{N}_{j,e}$ 如前所述存在（其中 $k\ge 2$，因此 $\Phi^e_{ji}\in C^1$），并定义

$$L_\Phi := \max_{e\in\mathcal{E}} \max\big\{\|D\Phi^e_{ji}\|_{L^\infty(\mathcal{N}_{i,e})},\ \|D\Phi^e_{ij}\|_{L^\infty(\mathcal{N}_{j,e})}\big\} < \infty.$$

那么存在一个常数 $C_{\mathrm{feat}}>0$，它仅取决于

$$r_{M_{\mathrm{tot}}},\ b_{M_{\mathrm{tot}}},\ \rho,\ \textit{the atlas (in particular } \{D_i\} \textit{ and } L_\Phi),\ \textit{and coefficient bounds of } \{\mathcal{G}_i\}_{i=1}^J,$$

such 对于任意 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{\mathcal{N}}^{par}_M$，$C_N$ 具有分片展开 $v_i=\sum_{m=1}^{M_i} c_{i,\,m}\psi_{i,\,m}$ 且 $\|c_i\|_{\ell^1}\le C_N$,

$$\sup_{\boldsymbol{\xi}\in D_i} |\mathcal{G}_i v_i(\boldsymbol{\xi})| \le C_N\,C_{\mathrm{feat}}, \qquad \sup_{e\in\mathcal{E}}\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\partial_e D_{i(e)}} \|\mathcal{B}_e\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathbb{R}^2} \le 2C_N\,C_{\mathrm{feat}}.$$

证明。步骤 0：特征参数的一致有界性。由于图册是有限的，且每个 $D_i \subset \mathbb{R}^2$都有界，定义

$$R := \max_{1\le i\le J} \sup_{\boldsymbol{\xi}\in D_i} |\boldsymbol{\xi}|_1 < \infty.$$

对于任意特征 $\psi_{i,m}(\boldsymbol{\xi}) = \rho(w_{i,m}\cdot\boldsymbol{\xi} + b_{i,m})$ 以及任意 $\boldsymbol{\xi}\in D_i$，

$$|w_{i,m}\cdot\boldsymbol{\xi} + b_{i,m}| \le \|w_{i,m}\|_\infty\,|\boldsymbol{\xi}|_1 + |b_{i,m}| \le r_{M_{\mathrm{tot}}}\,R + b_{M_{\mathrm{tot}}} =: T.$$

因此， ρ 的所有自变量都位于固定的紧区间 $[-T,T]$ 内。

步骤 1：在每个补丁上，对 $\psi_{i,m}$ 及其导数给出一致界。令

$$K_0 := \sup_{|t|\le T}|\rho(t)|, \qquad K_1 := \sup_{|t|\le T}|\rho'(t)|, \qquad K_2 := \sup_{|t|\le T}|\rho''(t)|,$$

这些量由假设 3.14 可知均为有限值。设 $t(\boldsymbol{\xi}) := w_{i,m}\cdot\boldsymbol{\xi} + b_{i,m}$，由链式法则可得

$$\partial_{\xi_\alpha}\psi_{i,m}(\boldsymbol{\xi}) = \rho'(t(\boldsymbol{\xi}))\,w_{i,m,\alpha}, \qquad \partial_{\xi_\alpha\xi_\beta}\psi_{i,m}(\boldsymbol{\xi}) = \rho''(t(\boldsymbol{\xi}))\,w_{i,m,\alpha}w_{i,m,\beta}.$$

利用 $|w_{i,m,\alpha}| \le \|w_{i,m}\|_\infty \le r_{M_{\mathrm{tot}}}$，可得

$$\sup_{D_i}|\psi_{i,m}| \le K_0, \qquad \sup_{D_i}|\partial_{\xi_\alpha}\psi_{i,m}| \le K_1\,r_{M_{\mathrm{tot}}}, \qquad \sup_{D_i}|\partial_{\xi_\alpha\xi_\beta}\psi_{i,m}| \le K_2\,r_{M_{\mathrm{tot}}}^2.$$

步骤 2：对 L^∞ 给出一致界：$\mathcal{G}_i\psi_{i,m}$。将 $\mathcal{G}_i$ 展开为非散度形式，

$$\mathcal{G}_i v = -g_i^{\alpha\beta}\,\partial_{\xi_\alpha\xi_\beta}v - b_i^\beta\,\partial_{\xi_\beta}v, \qquad b_i^\beta := \frac{1}{\sqrt{g_i}}\partial_{\xi_\alpha}\big(\sqrt{g_i}\,g_i^{\alpha\beta}\big),$$

引理 3.4 在 D_i上给出有界系数。设

$$A := \max_i \max_{\alpha,\beta}\|g_i^{\alpha\beta}\|_{L^\infty(D_i)}, \qquad B := \max_i\max_\beta\|b_i^\beta\|_{L^\infty(D_i)}.$$

然后，步骤 1 给出

$$\sup_{D_i}|\mathcal{G}_i\psi_{i,m}| \le A\sum_{\alpha,\beta}\sup_{D_i}|\partial_{\xi_\alpha\xi_\beta}\psi_{i,m}| + B\sum_\beta\sup_{D_i}|\partial_{\xi_\beta}\psi_{i,m}| \le C^{(1)}\big(r_{M_{\mathrm{tot}}}^2 + r_{M_{\mathrm{tot}}}\big),$$

其中， $C^{(1)}$ 仅取决于 A、B、K_1、K_2（因此取决于图册和 ρ）。

步骤 3：将该界扩展到试探函数 $v_i = \sum_m c_{i,m}\psi_{i,m}$。由线性性，

$$\mathcal{G}_i v_i = \sum_{m=1}^{M_i} c_{i,m}\,\mathcal{G}_i\psi_{i,m},$$

因此

$$\sup_{D_i}|\mathcal{G}_i v_i| \le \|c_i\|_{\ell^1}\ \sup_m\sup_{D_i}|\mathcal{G}_i\psi_{i,m}| \le C_N\,C^{(2)},$$

其中 $C^{(2)} := $ 上确界$_{i,\,m}$上确界$_{D_i}|\mathcal{G}_i\psi_{i,\,m}|$ 由步骤 2 控制。

步骤 4：界面失配的一致有界性 $\mathcal{B}_e\boldsymbol{v} = (\delta_e^0, \delta_e^n)$。固定一个界面 $e = \Gamma_i\cap\Gamma_j$及其选定的一侧 $i(e) = i$，使得 $\mathcal{B}_e\boldsymbol{v}$ 在 $\partial_e D_i$上取值。对于值失配，

$$\sup_{\partial_e D_i}|v_i| \le \sum_m |c_{i,m}|\sup_{D_i}|\psi_{i,m}| \le C_N K_0, \qquad \sup_{\partial_e D_i}|v_j\circ\Phi_{ji}^e| \le \sup_{D_j}|v_j| \le C_N K_0,$$

so

$$\sup_{\partial_e D_i} |\delta_e^0(\boldsymbol{v})| \le 2C_N K_0.$$

对于法向导数不匹配，令 $\nu_{i,e}(\boldsymbol{\xi})$ 为 $\partial_e D_i$的外向单位法向量。利用 $\partial_{\nu_{i,e}} v_i = \nu_{i,e} \cdot \nabla v_i$以及步骤 1 中的迹界，

$$\sup_{\partial_e D_i} |\partial_{\nu_{i,e}} v_i| \le \sup_{\partial_e D_i} |\nabla v_i| \le \sum_m |c_{i,m}| \sup_{D_i} |\nabla \psi_{i,m}| \le C_N \, (2K_1 r_{M_{\mathrm{tot}}}).$$

此外，根据链式法则，

$$\partial_{\nu_{i,e}} \big(v_j \circ \Phi_{ji}^e\big)(\boldsymbol{\xi}) = \nabla v_j(\Phi_{ji}^e(\boldsymbol{\xi})) \cdot D\Phi_{ji}^e(\boldsymbol{\xi}) \, \nu_{i,e}(\boldsymbol{\xi}),$$

因此

$$\sup_{\partial_e D_i} \left|\partial_{\nu_{i,e}} \big(v_j \circ \Phi_{ji}^e\big)\right| \le \sup_{D_j} |\nabla v_j| \; \|D\Phi_{ji}^e\|_{L^\infty(\mathcal{N}_{i,e})} \le C_N \, (2K_1 r_{M_{\mathrm{tot}}}) \, L_\Phi.$$

因此

$$\sup_{\partial_e D_i} |\delta_e^n(\boldsymbol{v})| \le C_N \, (2K_1 r_{M_{\mathrm{tot}}}) \, (1 + L_\Phi).$$

结合 (δ_e^0, δ_e^n) 的界，并在必要时增大常数，可得

$$\sup_{\boldsymbol{\xi} \in \partial_e D_i} \|\mathcal{B}_e \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathbb{R}^2} \le 2C_N \, C_{\mathrm{feat}},$$

其中， C_{feat} 仅取决于 $r_{M_{\mathrm{tot}}}, b_{M_{\mathrm{tot}}}, \rho$、图册（通过 R 和 L_Φ），以及 $\{\mathcal{G}_i\}$ 的系数界（通过A, B）。 ■

定理 3.16（图册上的逐片 Sobolev 逼近）假设满足假设*3.14*。进一步假设精确零均值解满足 $u^* \in H^{\frac{5}{2}+\varepsilon}(\Gamma)$ 对于某个 $\varepsilon > 0$。那么，对于任意 $\epsilon_A > 0$和 $\delta \in (0,1)$，存在一个系数半径 $C_N > 0$以及宽度 $\boldsymbol{M} = (M_1, \ldots, M_J)$使得，对所有逐片特征进行随机抽取时，以至少 $1 - \delta$的概率，

$$\inf_{\boldsymbol{v} \in \Pi_\diamond \mathcal{N}_{\boldsymbol{M}, C_N}^{par}} \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}^*\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})} \le \epsilon_A.$$

证明。步骤 1：将目标拉回到参数图表。设：在上。由于（）且图册映射在每个补丁上都是微分同胚（足够大，使得复合在阶 $s = \frac{5}{2} + \varepsilon$ 处稳定），拉回在每个坐标图上有界：

$$\tilde{u}_i^* \in H^{\frac{5}{2}+\varepsilon}(D_i), \qquad \|\tilde{u}_i^*\|_{H^{\frac{5}{2}+\varepsilon}(D_i)} \le C_{X,i} \, \|u^*\|_{H^{\frac{5}{2}+\varepsilon}(\Gamma_i)}.$$

这里 $C_{X,\,i}$ 仅依赖于图册（坐标图正则性与雅可比矩阵界）。

步骤 2：在每个补丁上进行随机 Sobolev 逼近。固定 $\epsilon_A > 0$ 与 $\delta \in (0,\ 1)$。设定目标精度与失效概率

$$\epsilon_i := \frac{\epsilon_A}{C_\Pi \sqrt{J}}, \qquad \delta_i := \frac{\delta}{J},$$

其中 $C_\Pi \ge 1$ 是零均值投影 $\Pi_\diamond$ 的稳定性常数（见下文步骤 4）。将逐片随机 Sobolev 逼近定理（例如， [13, 定理 4.12] 取 $(d,\ s) = (2,\ 2)$)应用于有界区域 D_i上的函数 $\tilde{u}_i^* \in H^{\frac{5}{2}+\varepsilon}(D_i)$。在假设 3.14（有界区间上的激活函数正则性与有界参数）下，该定理给出：存在宽度 M_i 和系数半径$C_{N,\,i}$ 使得以至少 $1 - \delta_i$ 的概率，在对 M_i 个特征于补丁 i上的随机抽取中，可以找到

$$v_i \in \mathcal{N}_{M_i, C_{N,i}}^{par}(D_i) \quad \text{with} \quad \|v_i - \tilde{u}_i^*\|_{H^2(D_i)} \le \epsilon_i.$$

定义 $C_N := \max_{1\le i\le J} C_{N,\,i}$ 并在需要时扩大半径，使得所有构造的 v_i 同时属于 $\mathcal{N}_{M_i}^{par},\,_{C_N}(D_i)$。

步骤 3：通过并集界组合曲面片。令 $\mathcal{E}_i$ 为上述逐补丁逼近在补丁 i 上成功的事件。则 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_i) \ge 1-\delta_i$，因此

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{J}\mathcal{E}_i\Big) \ge 1-\sum_{i=1}^{J}\delta_i = 1-\delta.$$

在交事件上，定义分片函数 $\boldsymbol{v} := (v_1,\dots,v_J) \in \boldsymbol{\mathcal{N}}_{\boldsymbol{M}}^{par},_{C_N}$。根据分片范数的定义，

$$\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}^*\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})}^2 = \sum_{i=1}^{J}\|v_i-\tilde{u}_i^*\|_{H^2(D_i)}^2 \le \sum_{i=1}^{J}\epsilon_i^2 = \frac{\epsilon_A^2}{C_\Pi^2}.$$

步骤 4：通过 $\Pi_\diamond$ 实现零均值，同时不损失精度。回忆一下，$\Pi_\diamond$ 通过减去一个全局常数来确保 $\int_\Gamma(\Pi_\diamond \boldsymbol{v})\,ds = 0$：对于 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})$，令

$$(\Pi_\diamond \boldsymbol{v})_i := v_i - c(\boldsymbol{v}), \qquad c(\boldsymbol{v}) := |\Gamma|^{-1}\int_\Gamma v\,ds,$$

其中 v 表示由 $\boldsymbol{v}$ 诱导的逐补丁曲面函数（在每个补丁上几乎处处定义良好）。由于 u^* 是零均值的，$c(\boldsymbol{u}^*) = 0$，因此

$$\Pi_\diamond \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}^* = (\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}^*) - c(\boldsymbol{v})\,(1,\dots,1).$$

根据柯西–施瓦茨不等式，

$$|c(\boldsymbol{v})| = |\Gamma|^{-1}\Big|\int_\Gamma (v-u^*)\,ds\Big| \le |\Gamma|^{-1/2}\,\|v-u^*\|_{L^2(\Gamma)} \le C\,\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}^*\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})},$$

且常数具有有限的 $\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})$ 范数。因此，$\Pi_\diamond$ 在 $\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})$ 上有界：

$$\|\Pi_\diamond \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}^*\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})} \le C_\Pi\,\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}^*\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})}$$

对于一个依赖于图册的常数 $C_\Pi \ge 1$。结合步骤 3 可得

$$\|\Pi_\diamond \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}^*\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})} \le \epsilon_A$$

在同一事件上，其概率至少为 $1-\delta$。这证明了该结论。 ■

˜**定理 *3.17***（图册上的一致统计界）假设引理 *3.15* 以及对于所有 i 有 $f_i \in L^\infty(D_i)$。设 $\eta>0$ 且 $\delta\in(0,1)$。令 $M_{\mathrm{tot}} := \sum_{i=1}^{J} M_i$。对每个补丁 i，抽取 $\{\boldsymbol{\xi}_{i,n}\}_{n=1}^{N_i}$ *i.i.*$\sim$ $U\,d\,(D_i)$。对每个界面 $e\in\mathcal{E}$，抽取 $\{\boldsymbol{\xi}_{e,n}\}_{n=1}^{N_e}$ *i.i.*$\sim$ $U\,d\,(\partial_e D)$（关于 dl）。则存在绝对常数 c_0、$C>0$，使得以至少 $1-\delta$ 的概率（关于随机配点），

$$\sup_{\boldsymbol{v}\in\Pi_\diamond\boldsymbol{\mathcal{N}}_{\boldsymbol{M},C_N}^{par}} \big|\mathcal{J}(\boldsymbol{v}) - \widehat{\mathcal{J}}(\boldsymbol{v})\big| \le$$

$$C\,C_N^2\Big(C_{\mathrm{feat}} + \max_i \|\tilde{f}_i\|_{L^\infty(D_i)}\Big)^2\left(\sum_{i=1}^{J} M_i\sqrt{\frac{\log(c_0 M_{\mathrm{tot}}/\delta)}{N_i}} + \eta\sum_{e\in\mathcal{E}} M_e\sqrt{\frac{\log(c_0 M_{\mathrm{tot}}/\delta)}{N_e}}\right),$$

其中 $\mathcal{J}(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{J}\|\mathcal{G}_i v_i - \tilde{f}_i\|_{L^2\,(D_i)}^2 + \eta\|\mathcal{B}\boldsymbol{v}\|_Z^2$，$\widehat{\mathcal{J}}$ 是其经验对应量，且 $M_e := M_{i(e)} + M_{j(e)}$。

证明。步骤 1：补丁残差项。固定一个补丁 i。对于试探函数类中的 $\boldsymbol{v}$，v_i 具有如下形式

$$v_i(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{m=1}^{M_i} c_{i,m}\psi_{i,m}(\boldsymbol{\xi}), \qquad \|c_i\|_{\ell^1} \le C_N,$$

且逐点残差为

$$r_i(\boldsymbol{\xi}) := \mathcal{G}_i v_i(\boldsymbol{\xi}) - \tilde{f}_i(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{m=1}^{M_i} c_{i,m}\,\mathcal{G}_i\psi_{i,m}(\boldsymbol{\xi}) - \tilde{f}_i(\boldsymbol{\xi}).$$

由引理 3.15 以及 $f_i \in L^\infty(D_i)$，

$$|r_i(\boldsymbol{\xi})| \le C_N C_{\mathrm{feat}} + \|\tilde{f}_i\|_{L^\infty(D_i)} \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in D_i,$$

因此，$|r_i(\boldsymbol{\xi})|^2$ 在该函数类上是一致有界的。

令 μ_i 为 D_i上的归一化均匀概率测度。对一个具有有界特征的 M_i维线性模型应用平方最小二乘损失的一致集中界（例如，[13, 定理 4.14]），可得：存在绝对常数 c_0，$C > 0$ 使得，以至少 $1-\delta_i$的概率，

$$\sup_{\boldsymbol{v}\in\Pi_\diamond\mathcal{N}^{par}_{M,C_N}} \left| \int_{D_i} |r_i|^2\, d\mu_i - \frac{1}{N_i}\sum_{n=1}^{N_i} |r_i(\boldsymbol{\xi}_{i,n})|^2 \right| \le C\, C_N^2 \left(C_{\mathrm{feat}} + \|\tilde{f}_i\|_{L^\infty(D_i)}\right)^2 M_i \sqrt{\frac{\log(c_0 M_{\mathrm{tot}}/\delta_i)}{N_i}}.$$

将两边乘以 $|D_i|$，即可将该界转换为缩放量 $\|r_i\|^2_{L^2(D_i)}$ 以及 $\frac{|D_i|}{N_i}\sum |r_i(\boldsymbol{\xi}_{i,n})|^2$，它们出现在 $\mathcal{J}$ 和 $\mathcal{J}$中。

步骤 2：界面失配项。固定一个界面 e，其定向为 $i(e)$，并令边 $\partial_e D$ 配备弧长测度 dl；设 μ_e 为 $\partial_e D$上的归一化均匀概率测度。对于试探函数类中的 $\boldsymbol{v}$，界面失配为

$$\mathcal{B}_e\boldsymbol{v} = (\delta_e^0(\boldsymbol{v}), \delta_e^n(\boldsymbol{v})) : \partial_e D \to \mathbb{R}^2,$$

并且仅依赖于 两个相邻补丁上的系数；记 $M_e := M_{i(e)} + M_{j(e)}$。根据引理 3.1 5，

$$\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\partial_e D} \|\mathcal{B}_e\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathbb{R}^2} \le 2C_N C_{\mathrm{feat}},$$

因此，平方损失 $\ell_e(\boldsymbol{\xi}) := \|\mathcal{B}_e\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi})\|^2_{\mathbb{R}^2}$ 是一致有界的。

在一维区域（$\partial_e D$，μ_e）上应用相同的一致集中定理（无论采用其向量值形式，还是对每个分量应用标量形式后求和），可得：以至少 $1-\delta_e$ 的概率，

$$\sup_{\boldsymbol{v}\in\Pi_\diamond\mathcal{N}^{par}_{M,C_N}} \left| \int_{\partial_e D} \|\mathcal{B}_e\boldsymbol{v}\|^2_{\mathbb{R}^2}\, d\mu_e - \frac{1}{N_e}\sum_{n=1}^{N_e} \|\mathcal{B}_e\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}_{e,n})\|^2_{\mathbb{R}^2} \right| \le C\, C_N^2 \left(C_{\mathrm{feat}} + \max_i \|\tilde{f}_i\|_{L^\infty(D_i)}\right)^2 M_e \sqrt{\frac{\log(c_0 M_{\mathrm{tot}}/\delta_e)}{N_e}}.$$

乘以 $|\partial_e D|$ 可将此界转换为 $\mathcal{J}$ 和 $\mathcal{J}$中使用的缩放界面项，再进一步乘以 η 即可得到加权界面贡献。

步骤 3：并集界与求和。为 $i = 1$ 选择 $\delta_i = \delta/(2J)$，…，J，并为 $e \in \mathcal{E}$ 选择 $\delta_e = \delta/(2|\mathcal{E}|)$。并集界表明，所有补丁和界面的偏差界以至少 $1-\delta$ 的概率同时成立。对 i 和 e 的界求和，并将诸如 $|D_i|$、$|\partial_e D|$ 以及向量值约化中的常数等无关紧要的因子吸收到 C，c_0 中，即可得到所述不等式。 ∎

定理 3.18（收敛）假设定理3.16 和定理3.17，以及推论3.11和引理3.9的假设成立。固定 $\epsilon > 0$和 $\delta \in (0,\ 1)$。选择宽度 $\boldsymbol{M}$（以及 C_N），使得定理3.16成立，且

$$\epsilon_A = \frac{\epsilon}{2C_{gn}\sqrt{C_U}}$$

且概率至少为 $1-\delta/2$，针对随机特征。选择样本量$(N_i)_{i=1}^J$ 和$(N_e)_{e\in\mathcal{E}}$，使定理3.17 右端有界于

$$\frac{\epsilon^2}{8C_{gn}^2}$$

以至少 $1-\delta/2$ 的概率（针对配点）。若经验最小二乘问题(3.9) 被精确求解，则

$$\|\boldsymbol{u_M} - \boldsymbol{u}^*\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})} \le \epsilon$$

以至少 $1-\delta$ 的概率（针对随机特征和配点）。

证明。根据误差分解（3.14）以及经验最小二乘的精确求解，优化项非正，因此

$$\|\boldsymbol{u_M} - \boldsymbol{u}^*\|^2_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})} \le 2C_{gn}^2 C_U \|\boldsymbol{u}_a - \boldsymbol{u}^*\|^2_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})} + 4C_{gn}^2 \sup_{\boldsymbol{v}\in\Pi_\diamond \boldsymbol{\mathcal{N}}^{par}_{M,C_N}} \left|\mathcal{J}(\boldsymbol{v}) - \widehat{\mathcal{J}}(\boldsymbol{v})\right|.$$

在定理3.16 以 $\epsilon_A = \epsilon/(2C_{gn}\sqrt{C_U})$ 为界成立的事件上，有 $\|\overline{\boldsymbol{u}_a} - \boldsymbol{u}^*\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})} \le \epsilon_A$，因此逼近项有界于

$$2C_{gn}^2 C_U\, \epsilon_A^2 = \frac{\epsilon^2}{2}.$$

在定理3.17 以如下界 $\epsilon^2/(8C_{gn}^2)$成立的事件上，统计项有界于

$$4C_{gn}^2 \cdot \frac{\epsilon^2}{8C_{gn}^2} = \frac{\epsilon^2}{2}.$$

因此，在这两个事件同时发生时，$\|\boldsymbol{u_M} - \boldsymbol{u}^*\|^2_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})} \le \epsilon^2$，从而 $\|\boldsymbol{u_M} - \boldsymbol{u}^*\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathcal{D})} \le \epsilon$. 最后，由并集界可知，这两个事件同时发生的概率至少为 $(1-\delta/2) + (1-\delta/2) - 1 = 1-\delta$。 ■

注 3.19（推广至拉普拉斯–贝尔特拉米方程之外）上述分析可推广至如下形式的线性二阶强椭圆曲面算子：

$$\mathcal{L}u := -\nabla_\Gamma \cdot (A\nabla_\Gamma u) + b\cdot\nabla_\Gamma u + c\,u,$$

其中，A 是定义在 Γ上的切向对称一致正定张量场，b 是切向向量场，且$c \in L^\infty(\Gamma)$。假设系数足够光滑（例如 C^{k-1}，使得拉回的坐标图算子具有有界系数），并且在适当的商空间上成立一个 H^2 图估计，即：存在 $C>0$，使得对所有与$\ker(\mathcal{L})$ 正交的 $u \in H^2(\Gamma)$（例如，当$\ker(\mathcal{L}) = \mathrm{span}\{1\}$时取零均值），

$$\|u\|_{H^2(\Gamma)} \le C\,\|\mathcal{L}u\|_{L^2(\Gamma)}.$$

在这些假设下，将 Δ_Γ 替换为 $\mathcal{L}$，并将 $\{\mathcal{G}_i\}$ 替换为相应的拉回的局部算子后，所有步骤（逐坐标图一致椭圆性、提升/拼接、图范数控制，以及随后的逼近/统计误差分解）均可沿用；此时常数还取决于 A、b、c 的系数界。

3.1.3 基于水平集的方法与基于点云的随机神经网络方法。

当无法获得或实际构造 Γ 的局部参数化时，我们改用隐式表示。首先指定 Γ 的水平集描述，然后给出计算曲面微分算子的相应表达式。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为有界区域，且 $\phi \in C^2(\Omega)$ 是一个水平集函数，在零水平集的某个邻域内满足 $\nabla\phi(\boldsymbol{X}) \neq 0$ 。我们考虑曲面

$$\Gamma = \{\boldsymbol{X} = (x, y, z)^\top \in \overline{\Omega} : \phi(\boldsymbol{X}) = 0\}. \tag{3.15}$$

定义单位法向量和切向投影算子

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{X}) = \frac{\nabla\phi(\boldsymbol{X})}{\|\nabla\phi(\boldsymbol{X})\|_2}, \qquad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{X})^\top. \tag{3.16}$$

文献中关于平均曲率存在不同的符号约定。此处所有公式均与 $H = \frac{1}{2}\nabla \cdot \boldsymbol{n}$一致，因此 $\nabla \cdot \boldsymbol{n} = 2H$。

对于曲面函数 u: $\Gamma \to \mathbb{R}$，令 $\tilde{u}$ 为 C^2 在 Γ 的某个延拓至邻域，并满足 $\tilde{u}|_\Gamma = u$。那么（例如参见 [27, 21]）

$$\nabla_\Gamma u(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X})\nabla\tilde{u}(\boldsymbol{X}), \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}\Delta_\Gamma u(\boldsymbol{X}) &= \nabla_\Gamma \cdot (\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X})\nabla\tilde{u}(\boldsymbol{X})) \\ &= \Delta\tilde{u}(\boldsymbol{X}) - 2H(\boldsymbol{X})\,\nabla\tilde{u}(\boldsymbol{X}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{X})^\top(\nabla^2\tilde{u}(\boldsymbol{X}))\boldsymbol{n}(\boldsymbol{X}),\end{aligned} \tag{3.18}$$

其中， ∇ 和 Δ 分别表示 $\mathbb{R}^3$中的标准梯度和拉普拉斯算子， $\nabla_\Gamma\cdot$ 表示曲面散度，而 $\nabla_\Gamma u = \boldsymbol{P}\nabla\tilde{u}$..

基于水平集的方法。当可用的几何描述为水平集函数 ϕ时，我们通过 $\mathbb{R}^3$中定义的嵌入型RaNN，在 $\Gamma = \{\phi = 0\}$ 上求解曲面偏微分方程。我们构造一个具有三个输入和一个输出的单隐层随机神经网络：

$$u_{imp}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{c}\,\rho(\boldsymbol{w}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}), \qquad \boldsymbol{X} \in \Omega, \tag{3.19}$$

其中， $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{M\times 3}$的元素独立同分布地取自 $U(-r_x,\ r_x)$， $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{1\times M}$是可训练的，并且

$$\boldsymbol{b} := -(\boldsymbol{w} \odot \boldsymbol{B}^\top)\,\mathbf{1}_3, \qquad \mathbf{1}_3 = (1, 1, 1)^\top, \tag{3.20}$$

其中， $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_M] \in \mathbb{R}^{3\times M}$的各列独立同分布地取自轴对齐包围盒 $\widetilde{D} \subset \mathbb{R}^3$上的均匀分布，该包围盒包含 Γ（即 $\boldsymbol{B}_m \sim U\ (\widetilde{D})$ ）。

在此设定下，我们采用延拓 $\tilde{u} = u_{imp}$ （3.17）–（3.18，因此所需的外围导数 $\nabla\tilde{u}$和 $\nabla^2\tilde{u}$ 可直接由网络计算。设$P_t = \{\boldsymbol{X}_n\}_{n=1}^N \subset \Gamma$ 为曲面上的配点。对 $\{\boldsymbol{X}_n\}$ 施加拉普拉斯–贝尔特拉米方程 $-\Delta_\Gamma u = f$，可得

$$-\Big(\Delta u_{imp}(\boldsymbol{X}_n) - 2H(\boldsymbol{X}_n)\,\nabla u_{imp}(\boldsymbol{X}_n) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{X}_n) - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{X}_n)^\top(\nabla^2 u_{imp}(\boldsymbol{X}_n))\boldsymbol{n}(\boldsymbol{X}_n)\Big) = f(\boldsymbol{X}_n), \quad \boldsymbol{X}_n \in P_t. \tag{3.21}$$

由于（3.19）关于 $\boldsymbol{c}$呈线性，因此通过最小二乘意义求解配置系统（3.21），以得到输出权重。

方法（3.6）（基于参数化）和（3.21）（基于水平集）各有优势，且互为补充。当 Γ高度复杂（可能存在自交），或者无法获得高质量的全局参数化时，水平集公式通常更加灵活，因为它无需构建显式图册。对于具有稳定参数化的光滑曲面，图册表述通常精度更高、效率也更高，因为在参数空间中采样是精确的，无需额外的曲面提取过程。实际上，在水平集曲面上采样配点可能依赖于其他算法，例如 DistMesh 类型的距离函数网格剖分 [57] 或 Marching Cubes [44]。这些步骤会增加额外的计算成本，并可能降低采样

精度，进而影响最终的偏微分方程解（见示例 5.2）。需要强调的是，本文侧重于介绍数值公式；具体应用中应根据目标应用所采用的几何表示来选择这两种方法。

基于点云的 RaNN 方法。 最后，我们考虑曲面仅通过有限点位置集合给出的情形 $P = \{\boldsymbol{X}_n\}_{n=1}^N \subset \Gamma$。为计算该算子（3.18），我们从点云重构局部几何量。具体而言，我们采用局部二次插值 [6] 以获得单位法向量的逼近 $\boldsymbol{n}$（$\boldsymbol{X}_n$）以及平均曲率 H（$\boldsymbol{X}_n$）（例如，通过第一和第二基本形式；参见 [71]）。随后，我们使用相同的环境空间 RaNN 试探形式（3.19），并对（3.21）在可用点 $\boldsymbol{X}_n \in P$ 处加以强制，从而确定$\boldsymbol{c}$（最小二乘意义下）。

3.2 时间相关偏微分方程

在本节中，我们 将所提出的方法推广到时间相关曲面偏微分方程，并以热方程作为一个说明性示例 .

设 Γ 为静态曲面，且 $I = [0, T]$。我们考虑

$$\partial_t u - \Delta_\Gamma u = f \quad \text{on } I \times \Gamma, \tag{3.22a}$$

$$u(0, \cdot) = u_0 \quad \text{on } \Gamma, \tag{3.22b}$$

其中，$f = f(t, \boldsymbol{X})$ 是给定的源项，$u_0 = u_0(\boldsymbol{X})$ 是初始条件。

基于参数化的方法。 我们仅考虑由有限图册的 C^k 参数化描述的闭合曲面 $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$

$$X_i : D_i \to \Gamma_i \subset \Gamma, \qquad i = 1, \dots, J,$$

其中，$D_i \subset \mathbb{R}^2$ 是有界利普希茨区域，且这些曲面片构成互不重叠分解 $\Gamma = \bigcup_{i=1}^J \Gamma_i$，如式（3.3）所示。我们使用式（ $\mathcal{G}_i$ 3.4）中定义的坐标卡算子，使得 $(-\Delta_\Gamma u) \circ X_i = \mathcal{G}_i(u \circ X_i)$。

我们直接将式（3.7）推广以求解热方程，并定义一个单一时空随机化神经网络，其输入为嵌入坐标：

$$\hat{u}(t, \boldsymbol{X}) := \boldsymbol{c}\, \rho(\boldsymbol{w}_t\, t + \boldsymbol{w}_x\, \boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}), \qquad (t, \boldsymbol{X}) \in I \times \mathbb{R}^3,$$

其中，$\boldsymbol{w}_t \in \mathbb{R}^{M\times 1}$和 $\boldsymbol{w}_x \in \mathbb{R}^{M\times 3}$分别独立地从 $U(-r_t,\ r_t)$和 $U(-r_x,\ r_x)$中抽取，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{1\times M}$ 是可训练的，并且

$$\boldsymbol{b} := -(\boldsymbol{w} \odot \boldsymbol{B}^\top)\, \mathbf{1}_4, \qquad \boldsymbol{w} = [\boldsymbol{w}_t, \boldsymbol{w}_x] \in \mathbb{R}^{M\times 4}, \qquad \mathbf{1}_4 = (1, 1, 1, 1)^\top,$$

其中 $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{4\times M}$ 选取为覆盖 $I \times \widetilde{D}$ 的值域，而 $\widetilde{D}$ 是 Γ 的包围盒。

在每个曲面片上，我们使用拉回

$$u_i(t, \boldsymbol{\xi}) := \hat{u}\big(t, X_i(\boldsymbol{\xi})\big), \qquad (t, \boldsymbol{\xi}) \in I \times D_i.$$

由于 $\hat{u}$ 在 Γ 上全局定义，因此对于每个 $t \in I$，相邻曲面片的迹自动一致。因此，无需单独施加界面失配约束。

我们通过配点法求解图册形式热方程：求 $\hat{u}$，使得对于每个 $i = 1, \dots, J$，

$$\partial_t u_i(t, \boldsymbol{\xi}) + \mathcal{G}_i u_i(t, \boldsymbol{\xi}) = (f \circ X_i)(t, \boldsymbol{\xi}) \qquad \text{in } I \times D_i, \tag{3.23a}$$

$$u_i(0, \boldsymbol{\xi}) = (u_0 \circ X_i)(\boldsymbol{\xi}) \qquad \text{in } D_i. \tag{3.23b}$$

在内部时空配置点处强制满足（3.23），可得到关于共享输出权重的线性最小二乘系统 $\boldsymbol{c}$。

基于水平集的方法。假设 $\Gamma = \{\boldsymbol{X} \in \Omega : \phi(\boldsymbol{X}) = 0\}$，其中 $\phi \in C^2(\Omega)$，且在 Γ 附近有 $\nabla\phi \neq 0$。我们通过在输入中加入时间，对嵌入型RaNN进行扩展：

$$u_{\text{imp}}(t, \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{c}\,\rho(\boldsymbol{w}_t\, t + \boldsymbol{w}_x\, \boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}), \qquad (t, \boldsymbol{X}) \in I \times \Omega, \tag{3.24}$$

其中，$\boldsymbol{w}_t \in \mathbb{R}^{M\times 1}$和 $\boldsymbol{w}_x \in \mathbb{R}^{M\times 3}$分别独立地从 $U(-r_t, r_t)$ 和 $U(-r_x, r_x)$ 中抽取，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{1\times M}$ 是可训练的，并且

$$\boldsymbol{b} := -(\boldsymbol{w} \odot \boldsymbol{B}^\top)\,\mathbf{1}_4, \qquad \boldsymbol{w} = [\boldsymbol{w}_t, \boldsymbol{w}_x] \in \mathbb{R}^{M\times 4}, \qquad \mathbf{1}_4 = (1,1,1,1)^\top,$$

其中，选择 $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_M] \in \mathbb{R}^{4\times M}$ 以覆盖 $I \times \widetilde{D}$，其中 $\widetilde{D}$ 是包含 $\widetilde{\Gamma}$ 的轴对齐包围盒（例如，$\boldsymbol{B}_m \sim U(I \times D)$）。

对于每个固定的 $t \in I$，我们采用延拓 $\tilde{u}(\cdot) = u_{\text{imp}}(t, \cdot)$，如式（3.17）–（3.18）所示。由于 Γ 是静态的，几何量 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{X})$ 和 $H(\boldsymbol{X})$ 由 ϕ 计算得到，且不依赖于 t。

令 $\mathring{P}_t = P_T \times P_\Gamma \subset I \times \Gamma$ 为时空配点集，$\mathring{P}_t^0 = \{0\} \times P_\Gamma$ 为初始集。在 $(t_i, \boldsymbol{X}_i)$ 处施加热方程，$\in \mathring{P}_t$ 得到

$$\begin{aligned} \partial_t u_{\text{imp}}(t_i, \boldsymbol{X}_i) - \Big(&\Delta u_{\text{imp}}(t_i, \boldsymbol{X}_i) - 2H(\boldsymbol{X}_i)\,\nabla u_{\text{imp}}(t_i, \boldsymbol{X}_i)\cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{X}_i) \\ &- \boldsymbol{n}(\boldsymbol{X}_i)^\top (\nabla^2 u_{\text{imp}}(t_i, \boldsymbol{X}_i))\boldsymbol{n}(\boldsymbol{X}_i)\Big) = f(t_i, \boldsymbol{X}_i), \qquad (t_i, \boldsymbol{X}_i) \in \mathring{P}_t \end{aligned} \tag{3.25a}$$

$$\beta\big(u_{\text{imp}}(0, \boldsymbol{X}_i) - u_0(\boldsymbol{X}_i)\big) = 0, \qquad \boldsymbol{X}_i \in \mathring{P}_t^0. \tag{3.25b}$$

由于（3.24）关于 $\boldsymbol{c}$是线性的，因此（3.25）在 $\boldsymbol{c}$的最小二乘意义下求解。

基于点云的方法。如果 Γ 仅由点云 $P_\Gamma = \{\boldsymbol{X}_m\}_{m=1}^{N_x} \subset \Gamma$给出，我们使用相同的空间–时间形式（3.24），并在 $P_t = P_T \times P_\Gamma$上施加条件（3.25）。不同之处在于，几何量 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{X}_m)$ 和 $H(\boldsymbol{X}_m)$ 是从点云重建的，例如通过局部二次拟合 [6] 以及第一和第二基本形式 [71]。

备注 3.20（线性与非线性时间依赖偏微分方程）本文重点研究线性曲面偏微分方程，其训练目标会导出一个关于输出权重的线性最小二乘问题。非线性曲面偏微分方程可以通过求解非线性最小二乘问题，或应用 *Picard* 或牛顿迭代等线性化方案来处理；参见 *[14, 63, 62, 69]*。

4 演化曲面上的 RaNN 偏微分方程求解方法

在演化曲面上求解偏微分方程在许多应用中具有重要意义。本节将介绍所提出的 RaNN 框架在演化曲面上最简单的线性问题中的初步应用。

在传统的基于网格的数值方法中，每个时间步都必须更新网格，这会大幅增加计算复杂度。本文提出的方法本质上是一种无网格方法，可通过一次计算获得时空域内演化曲面上的全部点。与需要通过插值更新网格的传统方法不同，本文提出的方法将曲面信息直接存储为网络参数，因此后续只需进行简单的代数运算即可使用，无需复杂的插值步骤。

4.1 用于捕捉曲面演化的 RaNN 方法

在求解演化曲面 $\Gamma(t)$上的偏微分方程之前，我们首先近似曲面运动。设 Γ_0 为初始曲面，并设 $\boldsymbol{v}$：$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 为给定的速度场。假设该运动由流映射描述

$$\boldsymbol{x} : [0, T] \times \Gamma_0 \to \mathbb{R}^3, \qquad (t, \boldsymbol{X}_0) \mapsto \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{X}_0),$$

其满足表面轨迹常微分方程

$$\partial_t \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{X}_0) = \boldsymbol{v}\big(t, \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{X}_0)\big), \qquad t \in [0, T],\ \boldsymbol{X}_0 \in \Gamma_0, \tag{4.1a}$$

$$\boldsymbol{x}(0, \boldsymbol{X}_0) = \boldsymbol{X}_0, \qquad \boldsymbol{X}_0 \in \Gamma_0. \tag{4.1b}$$

为清晰起见，我们假设 Γ_0 在参数域 D 上由 $\boldsymbol{X}_0(\xi,\eta)$参数化，从而 $\Gamma_0 = \{\boldsymbol{X}_0(\xi,\eta) : (\xi,\eta) \in D\}$；然而，下文的构造直接在嵌入坐标 $\boldsymbol{X}_0 \in \Gamma_0$中表述。

记 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$ 与 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)^\top$，（4.1）等价于耦合系统

$$\partial_t x_i(t, \boldsymbol{X}_0) = v_i\big(t, x_1(t, \boldsymbol{X}_0), x_2(t, \boldsymbol{X}_0), x_3(t, \boldsymbol{X}_0)\big), \qquad i = 1, 2, 3, \tag{4.2}$$

其中 $x_i(0, \boldsymbol{X}_0) = (\boldsymbol{X}_0)_i$。

我们引入三个随机神经网络 $\mathcal{N}_e^1, \mathcal{N}_e^2, \mathcal{N}_e^3$，分别逼近 x_1, x_2, x_3。每个网络以时间 t 和初始点 $\boldsymbol{X}_0 \in \Gamma_0$ 为输入，并输出时间t处的相应坐标：

$$\mathcal{N}_e^i(t, \boldsymbol{X}_0) = \boldsymbol{c}^i \, \rho\left(\boldsymbol{w}^i \begin{bmatrix} t \\ \boldsymbol{X}_0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{b}^i \right), \qquad i = 1, 2, 3, \tag{4.3}$$

其中 $\boldsymbol{w}^i \in \mathbb{R}^{M \times 4}$ 被随机采样，$\boldsymbol{c}^i \in \mathbb{R}^{1 \times M}$ 是可训练的，且 ρ逐分量作用。

按照前文介绍的参数选择策略，我们使用一种时间权重与空间权重分离的浅层随机网络。具体而言，在 (4.3) 中，我们写作 $\boldsymbol{w}^i = [\boldsymbol{w}_t^i, \boldsymbol{w}_x^i]$ 其中 $\boldsymbol{w}_t^i \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ 和 $\boldsymbol{w}_x^i \in \mathbb{R}^{M \times 3}$分别独立地从 $U(-r_t^i,\ r_t^i)$ 和 $U(-r_x^i,\ r_x^i)$中抽取。偏置定义为

$$\boldsymbol{b}^i := -(\boldsymbol{w}^i \odot (\boldsymbol{B}^i)^\top)\, \mathbf{1}_4, \qquad \mathbf{1}_4 = (1,1,1,1)^\top,$$

其中，$\boldsymbol{B}^i \in \mathbb{R}^{4 \times M}$ 经抽样后覆盖 $I \times \widetilde{D}$的值域，$\widetilde{D}$ 是 Γ_0的轴对齐包围盒。

设 $P_0 = \{\boldsymbol{X}_{0,m}\}_{m=1}^{N_x} \subset \Gamma_0$为初始曲面上的配点，$P_T = \{t_n\}_{n=1}^{N_t} \subset [0, T]$ 为时间配置点。定义时空集合 $\mathring{P} := P_T \times P_0$ 以及初始集 $\mathring{P}^0 := \{0\} \times P_0$。我们通过在时空配置点处强制满足 (4.2)，来确定可训练的输出权重 $\{\boldsymbol{C}^i\}_{i=1}^3$；具体而言，我们寻求 $\{\mathcal{N}_e^i\}_{i=1}^3$使得

$$\partial_t \mathcal{N}_e^i(t_n, \boldsymbol{X}_{0,m}) = v_i\big(t_n, \mathcal{N}_e^1(t_n, \boldsymbol{X}_{0,m}), \mathcal{N}_e^2(t_n, \boldsymbol{X}_{0,m}), \mathcal{N}_e^3(t_n, \boldsymbol{X}_{0,m})\big), \quad i = 1,2,3,\ \forall (t_n, \boldsymbol{X}_{0,m}) \in \mathring{P}, \tag{4.4a}$$

$$\beta\Big((\mathcal{N}_e^1, \mathcal{N}_e^2, \mathcal{N}_e^3)(0, \boldsymbol{X}_{0,m}) - \boldsymbol{X}_{0,m} \Big) = 0, \quad \forall \boldsymbol{X}_{0,m} \in P_0, \tag{4.4b}$$

并在最小二乘意义下求解所得系统，其中 $\beta > 0$ 用于控制初始条件的施加。一般而言，由于 $\boldsymbol{v}$ 取决于网络输出，(4.4) 是一个 非线性 最小二乘问题。可使用标准的非线性最小二乘求解器或线性化策略 [69] （例如高斯–牛顿法）求解。

注 4.1（关于拓扑保持）上述表述假设流映射 $\boldsymbol{x}(t,\cdot)$ 将Γ_0 输运至 $\Gamma(t)$，且不发生拓扑变化；也就是说，$\Gamma(t)$ 对所有$t \in [0,T]$均与 Γ_0 同胚，通常也微分同胚。要捕捉发生拓扑变化（例如夹断或合并）的演化，需要采用不同的表示方法，这将作为未来的研究方向。

4.2 RaNN 求解偏微分方程的方法

一旦通过学习流映射 $\mathcal{N}_e$ 得到曲面演化的逼近，我们便可在时空曲面 $I \times \Gamma(t)$ 上采样配点。现在，我们将所提出的 RaNN 方法扩展到演化曲面上的对流–扩散方程：

$$\partial^\bullet u + u\, \nabla_{\Gamma(t)} \cdot \boldsymbol{v} - \Delta_{\Gamma(t)} u = f \quad \text{on } \Gamma(t),\ t \in [0, T], \tag{4.5a}$$

$$u(0, \cdot) = u_0 \quad \text{on } \Gamma_0. \tag{4.5b}$$

这里， $\partial^\bullet u$ 表示物质导数。由于 u 仅定义在 $\Gamma(t)$ 上，我们通过在 $\Gamma(t)$ 的邻域内进行延拓 $\tilde{u}$，来解释 $\partial^\bullet u$:

$$\partial^\bullet u := \partial_t \tilde{u} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \tilde{u} \quad \text{on } \Gamma(t).$$

在我们的数值表述中，我们采用 RaNN 来逼近解，因此所有外围导数都直接从网络中计算。

令 $\mathcal{N}_e = (\mathcal{N}_e^1, \mathcal{N}_e^2, \mathcal{N}_e^3)^\top$ 表示第 4.1节中获得的训练流映射网络。于是，对于 (ξ_1, ξ_2)， $\in D$演化曲面可表示为时变参数化

$$\boldsymbol{X}(t, \xi, \eta) := \mathcal{N}_e\big(t, \boldsymbol{X}_0(\xi, \eta)\big) \in \Gamma(t).$$

对 $\boldsymbol{X}(t, \xi_1, \xi_2)$ 关于 (ξ_1, ξ_2) 求导，我们得到第一和第二基本形式，进而得到单位法向量 $\boldsymbol{n}_{\mathcal{N}}(t, \xi_1, \xi_2)$ 和平均曲率 $H_{\mathcal{N}}(t, \xi_1, \xi_2)$ 的逼近。这些几何量用于在配点处计算 $\nabla_{\Gamma(t)} \cdot \boldsymbol{v}$ 和 $\Delta_{\Gamma(t)}$。

选择参数样本 $\{(\xi_{1,m}, \xi_{2,m})\}_{m=1}^{N_x} \subset D$ 和时间样本 $\{t_n\}_{n=1}^{N_t} \subset [0, T]$。在演化曲面上定义时空配点集

$$P_e := \Big\{(t_n, \boldsymbol{X}(t_n, \xi_{1,m}, \xi_{2,m})) : \ n = 1, \dots, N_t, \ m = 1, \dots, N_x\Big\} \subset [0, T] \times \Gamma(t),$$

以及初始集

$$P_e^0 := \Big\{(0, \boldsymbol{X}_0(\xi_{1,m}, \xi_{2,m})) : \ m = 1, \dots, N_x\Big\} \subset \{0\} \times \Gamma_0.$$

我们引入一种外围时空RaNN

$$u_e(t, \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{c}\, \rho\left(\boldsymbol{w} \begin{bmatrix} t \\ \boldsymbol{X} \end{bmatrix} + \boldsymbol{b}\right), \qquad (t, \boldsymbol{X}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3,$$

其中 $\boldsymbol{w} = [\boldsymbol{w}_t, \boldsymbol{w}_x] \in \mathbb{R}^{M \times 4}$， $\boldsymbol{w}_t \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ 和 $\boldsymbol{w}_x \in \mathbb{R}^{M \times 3}$ 分别从 $U(-r_t, r_t)$ 和 $U(-r_x, r_x)$ 中抽取，而 $\boldsymbol{b} := -(\boldsymbol{w} \odot \boldsymbol{B}^\top)\mathbf{1}_4$，其中 $\boldsymbol{B}$ 按照前述方法在 $[0, T] \times \Gamma_0$ 的包围盒上采样。

在每个配点 $(t_i, \boldsymbol{X}_i) \in P_e$ 处，我们计算算子

$$\mathcal{L}u_e := \partial^\bullet u_e + u_e\,(\nabla_\Gamma \cdot \boldsymbol{v}) - \Delta_\Gamma u_e,$$

其中 $\partial^\bullet u_e = \partial_t u_e + \boldsymbol{v} \cdot \nabla u_e$。利用 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_{\mathcal{N}}$ 和 $H = H_{\mathcal{N}}$ 的嵌入恒等式，我们计算

$$\nabla_\Gamma \cdot \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{n}_{\mathcal{N}}^\top (\nabla \boldsymbol{v}) \boldsymbol{n}_{\mathcal{N}}, \qquad \Delta_\Gamma u_e = \Delta u_e - 2H_{\mathcal{N}} \nabla u_e \cdot \boldsymbol{n}_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{n}_{\mathcal{N}}^\top (\nabla^2 u_e) \boldsymbol{n}_{\mathcal{N}}.$$

随后，我们通过配点法强制满足偏微分方程和初始条件:

$$\mathcal{L}u_e(t_i, \boldsymbol{X}_i) = f(t_i, \boldsymbol{X}_i), \qquad \forall (t_i, \boldsymbol{X}_i) \in P_e, \tag{4.6a}$$

$$\beta\big(u_e(0, \boldsymbol{X}_i) - u_0(\boldsymbol{X}_i)\big) = 0, \qquad \forall (0, \boldsymbol{X}_i) \in P_e^0, \tag{4.6b}$$

并通过最小二乘法求解所得系统，以确定输出权重 $\boldsymbol{c}$。

5 数值实验

本节将 RaNN 应用于静态与演化曲面上的各种问题，以评估其性能。所有实验均在 Intel(R) Xeon(R) Gold 6240 中央处理器 @ 2.60GHz 上进行。神经网络使用 Python 和 PyTorch（版本 1.12.1）实现，并采用固定的随机种子以确保结果可复现。输出层参数通过使用 SciPy（版本 1.4.1）求解最小二乘问题获得。隐藏层权重从均匀分布 $U(-r_x, r_x)$ 中独立同分布地采样，空间输入使用 $U(-r_t, r_t)$

时间输入（若有）也从该分布中采样，并在整个训练过程中保持固定；仅优化输出权重。关于 r_x 和 r_t的影响及实际选择方法，详见 [16, 77, 13]。所有示例中使用的激活函数为双曲正切 $\tanh(\cdot)$。

为评估精度，我们在曲面上随机选取 N_{test} 个测试点 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^{N_{\text{test}}}$，并计算精确解 u^* 与数值解 u之间的相对 ℓ^2误差：

$$E^{\ell^2}(u) := \frac{\left(\sum_{i=1}^{N_{\text{test}}} \left(u^*(\boldsymbol{x}_i) - u(\boldsymbol{x}_i)\right)^2\right)^{1/2}}{\left(\sum_{i=1}^{N_{\text{test}}} \left(u^*(\boldsymbol{x}_i)\right)^2\right)^{1/2}}.$$

除非另有说明，测试点均独立于配点法（训练）点选取。

由于我们采用输入至隐藏层权重固定且已知的浅层神经网络，网络输出相对于输入的所需导数（包括拉普拉斯–贝尔特拉米项所需的二阶导数）均可通过闭式计算得到。这避免了在残差计算中使用自动微分，并降低了实现中的计算开销。

例5.1（环面曲面上的拉普拉斯–贝尔特拉米方程）我们考虑拉普拉斯–贝尔特拉米方程

$$-\Delta_\Gamma u = f \quad on\ \Gamma,$$

其中，环面 $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ 具有全局参数化 $X = X(\xi_1, \xi_2)$：

$$\begin{cases} x &= \left(\frac{1}{4}\cos(\xi_1) + 1\right)\cos(\xi_2), \\ y &= \left(\frac{1}{4}\cos(\xi_1) + 1\right)\sin(\xi_2), \\ z &= \frac{1}{4}\sin(\xi_1), \end{cases} \qquad (\xi_1, \xi_2) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi].$$

We 令 $u(x, y, z) = \sin(x)\exp(\cos(y - z))$，并由该精确解导出源项 f .

我们首先在单个坐标图上采用基于参数化的表述求解该问题 $D = [0, 2\pi]^2$。由于 Γ 具有全局参数化，我们取 $J = 1$，并通过定义在 D上的单个 RaNN 对 u 进行近似。由于参数化在 ξ_1 和 ξ_2两个方向上均具有周期性，我们还通过边界配置，在 D 的识别边界对之间强制满足周期相容性（即匹配 $\xi_1 = 0$ 与 $\xi_1 = 2\pi$ 之间以及 $\xi_2 = 0$ 与 $\xi_2 = 2\pi$之间的函数值和一阶导数）。对于闭曲面泊松问题，所有误差均在消除常数模态后计算：通过平移数值解，使其在某个固定点处与参考值一致（参见备注 3.3）。

˜输入至隐藏层权重从 $U(-1, 1)$ 中采样，偏置采样集 $\boldsymbol{B}$ 从 $U(D)$ 中抽取，且$\tilde{D} = [0, 2\pi]^2$，与参数范围相符。我们在参数域 $D = [0, 2\pi]^2$ 上进行均匀采样，每个方向取N_0 个点，得到

$$N_{\text{col}} = N_0^2$$

用于强制满足偏微分方程的内部配置点。边界配对上还设置了额外的配点，以施加周期相容条件。表 1 报告了不同网络宽度 M 和配置点数量 N_{col}下的相对误差和训练时间。随机特征抽样及最小二乘系统的条件数可能导致非单调行为。

M	600		1000		1400	
N_{col}	误差	时间（秒）	误差	时间（秒）	误差	时间（秒）
900	1.77E-04	0.078	2.95E-04	0.139	4.17E-04	0.191
2500	4.77E-05	0.111	4.04E-06	0.213	1.63E-06	0.304
4900	1.79E-05	0.172	2.06E-07	0.449	1.32E-07	0.721
8100	3.86E-05	0.415	3.66E-07	0.666	5.90E-08	1.018

表1：在示例5.1中，由单图参数化方法（强制周期边界相容性）得到的相对误差

这些结果已优于 [33]中报告的结果。为进一步提升性能，我们采用一种基于参数化的方法（不单独进行边界强制）（3.7），该方法能够自然地纳入周期边界条件。此处 $\boldsymbol{B}$ 从 $U([-1.5,1.5]\times[-1.5,1.5]\times[-0.5,0.5])$中抽样，同时保持其他所有参数不变。更新后的结果见表 2。

M	600		1000		1400	
N_{col}	误差	时间（秒）	误差	时间（秒）	误差	时间（秒）
900	4.23E-07	0.081	1.33E-07	0.143	1.01E-07	0.178
2500	4.16E-11	0.118	4.74E-12	0.229	3.34E-12	0.400
4900	1.01E-10	0.262	1.93E-12	0.548	4.87E-14	1.015
8100	7.61E-11	0.597	7.11E-13	1.072	2.57E-13	1.626

表2：基于参数化的方法（未单独进行边界强制）得到的相对误差，例 5.1。

例 5.2（奶酪状曲面上的拉普拉斯–贝尔特拉米方程）我们考虑静态曲面 Γ 上的拉普拉斯–贝尔特拉米方程 $-\Delta_\Gamma u = f$，其精确解 $u(x,y,z) = \sin(x)\exp(\cos(y-z))$ 与前文相同。该曲面无法进行便捷的全局参数化，但可隐式表示为零水平集 $\Gamma = \{\phi_{CL} = 0\}$，其中

$$\begin{aligned}\phi_{CL}(x,y,z) =& (4x^2-1)^2 + (4y^2-1)^2 + (4z^2-1)^2 + 16(x^2+y^2-1)^2 \\ &+ 16(x^2+z^2-1)^2 + 16(y^2+z^2-1)^2 - 16.\end{aligned}$$

源项 f 由精确解推导得到。

为了在 Γ上生成配点，我们采用基于有符号距离的网格划分策略 [57]，使用 DistMesh 包（MATLAB），得到一个点集P_{CL}^{coarse}，其中包含 $N_{\text{all}} = 21192$ 个样本。我们设置 $r_x = 1$，并根据曲面的几何形状选择包围盒 $\widetilde{D} = [-1.5,1.5]^3$。每次运行中，我们使用网络宽度$M$，并从 N_{col}中随机选取 P_{CL}^{coarse}个点用于训练，同时在完整的粗略集合 P上评估误差CL。结果见表3。请注意，测试集 P_{CL}^{coarse}包含随机选取的训练子集；由于$N_{\text{all}} \gg N_{\text{col}}$ 我们关注整个曲面上的全局精度，因此这种重叠对所报告的误差影响可以忽略不计。

M	1200		1600		2000	
N_{col}	误差	时间（秒）	误差	时间（秒）	误差	时间（秒）
2000	5.70E-07	0.229	1.18E-06	0.366	7.98E-08	0.485
4000	1.16E-08	0.334	1.25E-06	0.740	6.42E-08	0.984
6000	5.57E-07	0.567	3.01E-07	0.988	3.51E-08	1.387
8000	6.43E-08	0.770	9.04E-08	1.344	1.29E-08	1.755

表 3：相对误差（在 P_{CL}^{coarse} 上评估），由示例 5.2 中的基于水平集的方法得到。

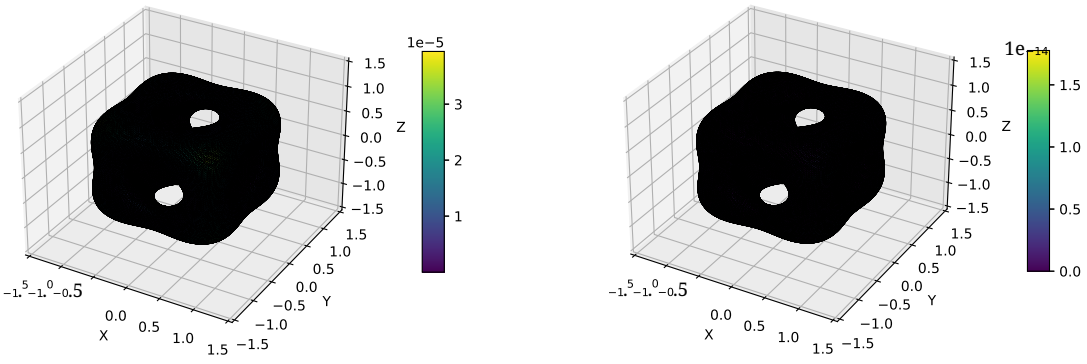
M	1200		1600		2000	
N_{col}	误差	时间（秒）	误差	时间（秒）	误差	时间（秒）
2000	1.44E-09	0.236	6.93E-10	0.331	1.36E-10	0.456
4000	1.04E-09	0.427	1.08E-10	0.606	3.72E-12	0.991
6000	3.30E-10	0.690	1.83E-11	1.013	3.60E-12	1.285
8000	3.26E-10	0.900	1.19E-11	1.308	1.76E-12	1.702

表 4：基于水平集的方法在示例 P_{CL}^{fine} 上得到的相对误差（在 5.2 中评估）。

我们观察到，当训练点偏离零水平集时，精度的进一步提升有限。为量化点集 $P = \{\boldsymbol{X}_i\}_{i=1}^{N_{\text{all}}}$ 的几何采样误差，我们定义均方根水平集残差

$$E_p(P) := \left(\frac{1}{N_{\text{all}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{all}}} |\phi_{CL}(\boldsymbol{X}_i)|^2 \right)^{1/2}.$$

对于 P_{CL}^{coarse}，我们得到 $E_p(P_{\text{粗略}CL}) = 1.17 \times 10^{-5}$。



(a) 点集 P_{CL}^{coarse} 的误差。　(b) 点集 P_{CL}^{fine} 的误差。

图 2：两个点集的逐点绝对误差。

为减小离面采样误差，我们将每个粗点投影到零水平集 $\{\phi_{CL} = 0\}$ 上，沿水平集梯度进行几次牛顿型更新，直到 $|\phi_{CL}(\boldsymbol{X})|$ 低于规定容差。得到的点集记为 $P_{\text{精细}CL}$。为缓解这一问题，我们使用SciPy 中的 fsolve 函数调整粗点，并获得校正坐标，记为 P_{CL}^{fine}，其中 $E_p(P_{CL}^{\text{fine}}) = 1.87 \times 10^{-15}$。图2展示了这两组点的逐点残差 $|\phi_{CL}(\boldsymbol{X}_i)|$。

在其他设置保持不变的情况下，我们从 P_{CL}^{fine} 中抽取训练点，并在表4中报告相应结果，表明在计算成本相近的情况下，精度显著提高。

例5.3（奶酪状曲面上的热方程）我们考虑静态奶酪状曲面 $\Gamma = \{\phi_{CL} = 0\}$ 上的热方程，时间区间为 $I = [0, 1]$。精确解为

$$u(t, x, y, z) = \sin\big(x + \sin t\big) \exp(\cos(y - z)),$$

由此可推导出源项。

与例 5.2一样，我们在 Γ上使用两个空间点集：粗点集 $P_{\text{粗}CL}$和细点集 P_{CL}^{fine}，两者的大小均为N_{all}。我们将 I 均匀划分为 200 个子区间，并定义时间点集

$$P_T = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{200} = 1\}.$$

相应的时空点集为

$$\mathring{P}_{CL}^{\text{coarse}} := P_T \times P_{CL}^{\text{coarse}}, \qquad \mathring{P}_{CL}^{\text{fine}} := P_T \times P_{CL}^{\text{fine}}.$$

每次运行中，我们从 $\mathring{P}_{\text{粗}CL}$（或 $\mathring{P}_{CL}^{\text{fine}}$）中随机选取 N_{col}个点来约束偏微分方程残差，并从 $\{0\} \times P_{CL}^{\text{coarse}}$（或 $\{0\} \times P_{\text{细}CL}$）中选取 N_0个点来施加初始条件。集合 $\{1\} \times P_{\text{粗}CL}$和 $\{1\} \times P_{\text{细}CL}$用于评估。

M	1200		1600		2000		2400	
N_{col}, N_0	误差	时间（秒）	误差	时间（秒）	误差	时间（秒）	误差	时间（秒）
2000, 1000	1.89E-04	0.280	1.40E-04	0.428	1.56E-04	0.655	1.45E-04	1.137
4000, 1000	9.97E-05	0.642	4.94E-05	0.901	2.11E-05	1.204	1.21E-05	1.598
6000, 1000	4.55E-05	0.915	1.89E-05	1.285	1.36E-05	1.571	5.90E-06	2.098
8000, 1000	4.80E-05	1.095	1.52E-05	1.587	9.78E-06	1.985	3.43E-06	2.541

T ̊表 5：使用基于水平集的方法获得的相对误差 P_{CL}^{coarse}在例 5 .3.

M	1200		1600		2000		2400	
N_{col}, N_0	误差	时间（秒）	误差	时间（秒）	误差	时间（秒）	误差	时间（秒）
2000, 1000	1.89E-04	0.271	1.37E-04	0.477	1.65E-04	0.667	1.50E-04	0.938
4000, 1000	9.95E-05	0.534	4.94E-05	0.834	1.97E-05	1.281	1.13E-05	1.637
6000, 1000	4.55E-05	0.927	1.91E-05	1.231	1.29E-05	1.672	5.23E-06	2.111
8000, 1000	4.80E-05	1.114	1.52E-05	1.582	9.71E-06	2.050	3.57E-06	2.540

表 6：使用 $\mathring{P}_{CL}^{\text{fine}}$的基于水平集的方法在示例 5.3中得到的相对误差 .

我们设置 $r_x = r_t = 0.6$， $\beta = 100$，并采样 $\boldsymbol{B} \sim U([0, 1] \times [-1.5, 1.5]^3)$。使用 $\mathring{P}_{\text{粗略}CL}$和 $\mathring{P}_{\text{精细}CL}$得到的结果分别列于表 5和 6中。对于这个时变示例及当前参数选择，使用粗略或精细的空间点都能获得相近的精度，这表明总体误差主要由空间采样的几何残差以外的因素主导。一种可能的解释是，热方程属于抛物型方程，具有时间上的平滑效应，因此配点位置的微小离面扰动会被削弱，而非放大。此外，在我们的实现中，主要误差来源可能是有限模型容量（固定宽度随机特征）、配点的随机性

时空集合中的子采样，以及由此产生的最小二乘系统的条件数。在当前的 $(r_x,\ r_t)$、β 和时空采样密度选择下，这些因素似乎主导了总体误差，因此 $\mathring{P}_{CL}^{\mathrm{coarse}}$ 和 $\mathring{P}_{CL}^{\mathrm{fine}}$ 的精度相近。

例5.4（杯形曲面上的热方程）我们在 Γ_{cup} 上的非闭合杯形曲面 $I=[0,1]$上求解热方程：

$$\partial_t u-\alpha\,\Delta_\Gamma u=f\quad on\ I\times\Gamma_{\mathrm{cup}},$$

其热扩散率为 $\alpha=10$，初始条件为 $u(0,\ \cdot)\ \equiv 10$，定义在 Γ_{cup}上。曲面 Γ_{cup} 由两个参数化部分 $\Gamma_{\mathrm{cup}}=\Gamma_{\mathrm{cup}}^1\cup\Gamma_{\mathrm{cup}}^2$组成，它们由坐标图 $X_1:\ D_1\to\Gamma_{\mathrm{cup}}^1$ 和 $X_2:\ D_2\to\Gamma_{\mathrm{cup}}^2$定义：

$$X_1(\xi_1,\xi_2)=\Big(\sqrt{1-\big(\tfrac{\xi_2+1}{0.1}\big)^2}\cos\xi_1,\ \sqrt{1-\big(\tfrac{\xi_2+1}{0.1}\big)^2}\sin\xi_1,\ \xi_2\Big),\quad D_1=[0,2\pi]\times[-1.1,-1],$$

$$X_2(\xi_1,\xi_2)=(\cos\xi_1,\ \sin\xi_1,\ \xi_2),\quad D_2=[0,2\pi]\times[-1,1].$$

在底部附近施加局部热源，持续时间为 $t\in[0,0.5]$，随后将其移除：

$$f(t,\boldsymbol{X})=15\,\exp\big(-\big(x^2+y^2+(z+1.1)^2\big)\big)\,\mathbf{1}_{[0,0.5]}(t).$$

在边缘 $\partial\Gamma_{\mathrm{cup}}=\{X_2(\xi_1,\ \mathbf{1}):\ \xi_1\in[0,2\pi]\}$ 处，我们施加罗宾边界条件

$$u+\partial_\mu u=10\quad on\ I\times\partial\Gamma_{\mathrm{cup}},$$

其中，μ 表示向外的单位余法向（与 Γ_{cup} 相切且与 $\partial\Gamma_{\mathrm{cup}}$垂直）。

为避免显式地在交界处 $\Gamma_{\mathrm{cup}}^1\cap\Gamma_{\mathrm{cup}}^2$施加相容性条件，我们使用定义在嵌入坐标上的单个时空RaNN：

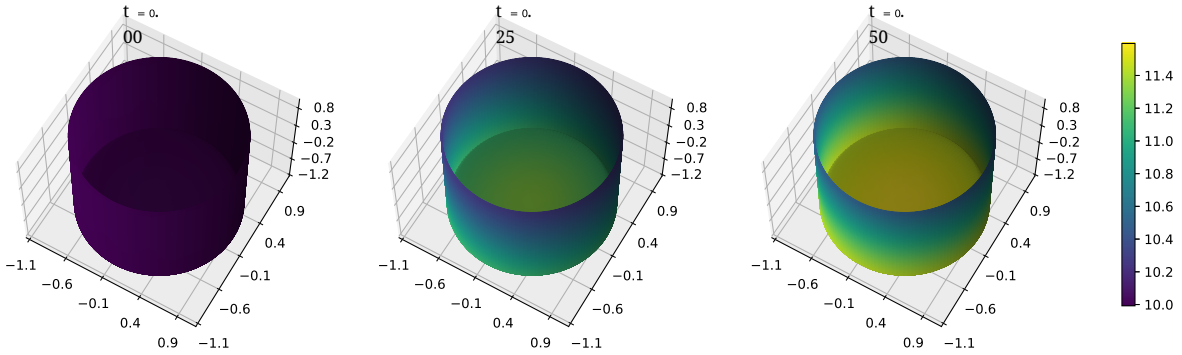
$$\hat{u}(t,\boldsymbol{X})=\boldsymbol{c}\,\rho(\boldsymbol{w}_t\,t+\boldsymbol{w}_x\,\boldsymbol{X}+\boldsymbol{b}),\qquad (t,\boldsymbol{X})\in I\times\mathbb{R}^3.$$

随后，我们通过拉回 $u_i(t,\ \boldsymbol{\xi})=\hat{u}(t,\ X_i(\boldsymbol{\xi}))$，$i=1,\ 2$，在每个坐标图上评估 u。由于 $\hat{u}$ 在 Γ_{cup} 上有全局定义，因此两个坐标图的迹沿交界曲线自动一致，无需单独约束界面失配。

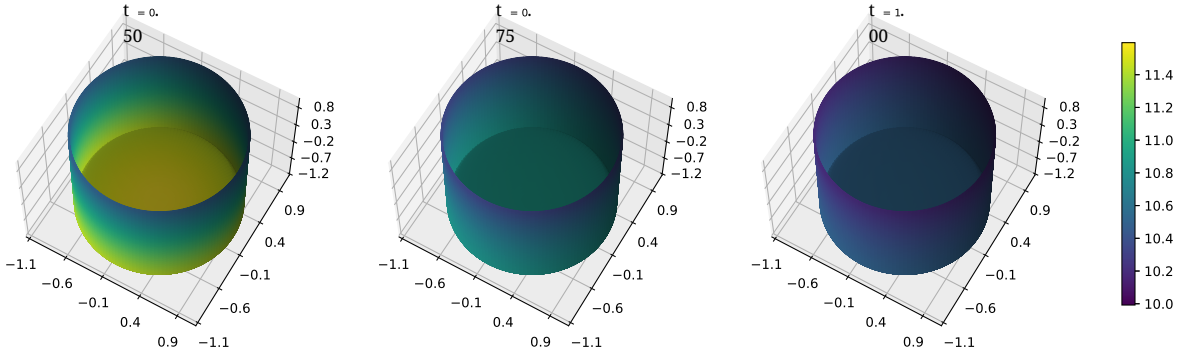
我们在 $I\times D_1$ 和 $I\times D_2$ 上的内部配置点处约束偏微分方程残差，在$\{0\}\times(D_1\cup D_2)$处约束初始条件，并在 $I\times\{\xi_2=1\}\subset I\times D_2$ 上约束罗宾边界条件。对于罗宾项，我们使用$\partial_\mu u=\nabla_\Gamma\hat{u}\cdot\mu$，其中 $\nabla_\Gamma\hat{u}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^\top)\nabla\hat{u}$ 和 μ 可根据 $\xi_2=1$ 上 X_2 的参数化计算得到。

在实验中，我们设定 $r_t=r_x=1$，$\beta=100$，并将网络宽度设为 $M=2000$。在每个坐标方向上，我们均匀采样 $N_t=N_{\xi_1}=N_{\xi_2}=25$ 个点：每个补丁上用于偏微分方程残差的内部时空点 $N_tN_{\xi_1}N_{\xi_2}$ 个，每个补丁上在 $N_{\xi_1}N_{\xi_2}$ 处用于初始条件的点 $t=0$ 个，以及用于罗宾边界条件的 $N_tN_{\xi_1}$ 上的点 $I\times\{\xi_2=1\}$ 个。图 3 显示，预测温度捕捉到了加热阶段（$0\le t\le 0.5$）和冷却阶段（$0.5<t\le 1$）。

当既没有解析参数化，也没有水平集表示，且曲面仅以点云形式给出时，我们可以采用第3.1.3 节介绍的基于点云的 RaNN 方法，通过点集重建局部几何（法向量/曲率），并设计与本文类似的热实验，以评估其鲁棒性。



(a) 加热过程（$0 \le t \le 0.5$）。



(b) 冷却过程（$0.5 < t \le 1$）。

图3：杯形曲面上的预测温度分布。

例5.5（点云曲面上的热方程）我们考虑兔子曲面上的热方程Γ_b 在 $I = [0, 1]$:

$$\partial_t u - \alpha \, \Delta_\Gamma u = f \quad on \; I \times \Gamma_b,$$

热扩散率为 $\alpha = 0.015$ ，初始条件为 $u(0, \cdot) \equiv 0$。在兔子的尾巴附近的 $\boldsymbol{X}_* = (0.068, 0.06, 0.01)$ 处施加局部热源：

$$f(t, x, y, z) = 10 \, \exp\Big(- \big((100(x - 0.068))^2 + (100(y - 0.06))^2 + (100(z - 0.01))^2\big)\Big),$$

该热源在 $t \in [0, 1]$ 上与时间无关。

该曲面 Γ_b 仅以点云形式给出。按照前文所述的基于点云的方法，我们通过局部二次拟合重建评估 Δ_Γ （例如，单位法向量和平均曲率）所需的局部几何信息 [6, 71]。随后，我们使用 u 和偏置采样集 $\boldsymbol{B} \sim U([0, 1] \times [-0.1, 0.07] \times [0, 0.2] \times [-0.07, 0.07])$，采用网络宽度为 $M = 2500$的外围时空RaNN 来近似 $r_x = r_t = 1$。通过惩罚参数 $\beta = 50$施加初始条件。

训练时，我们随机抽取 $N_{\text{col}} = 40000$ 时空配点，取自 $[0, 1] \times \Gamma_b$，以约束偏微分方程残差；并从 $N_0 = 200$ 中抽取 $\{0\} \times \Gamma_b$ 个点，用于施加初始条件。预测温度分布如图4所示，温升源自尾部附近，这与预期的物理行为一致。

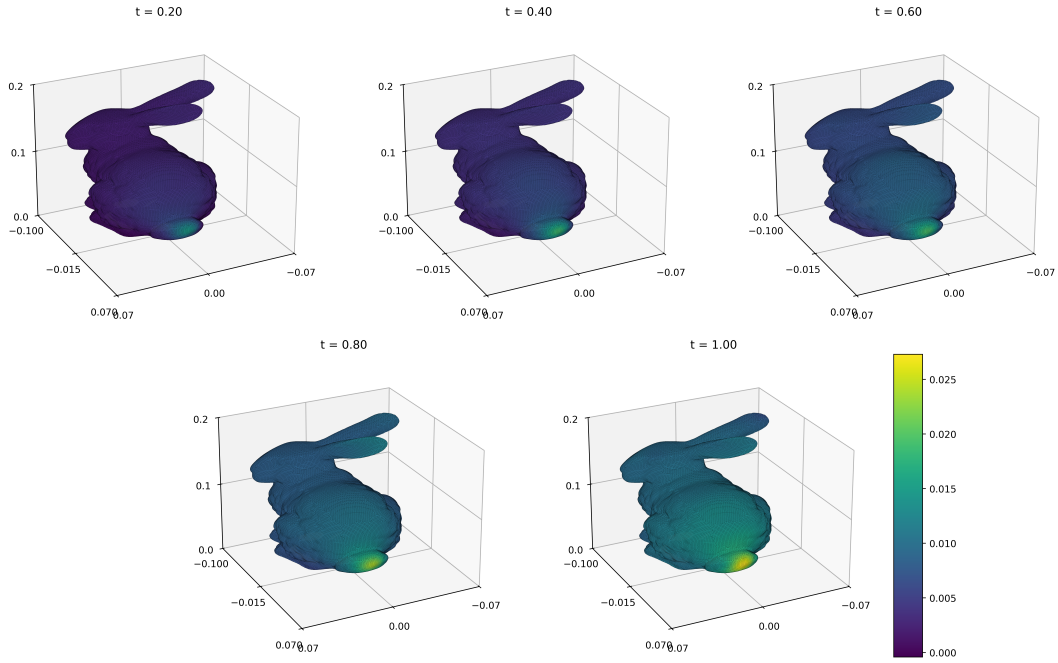


图 4：兔子曲面上的预测热分布。

例5.6（振荡椭球上的对流–扩散）为便于与现有方法进行比较，并进一步验证所提出的方法，我们考虑椭球(4.5)上的对流–扩散方程（*[59, 32, 33]*），该椭球表示为零水平集

$$\Gamma(t)=\left\{(x,y,z)\mid\left(\frac{x}{1.5a(t)}\right)^2+y^2+\left(\frac{z}{0.5}\right)^2=1\right\},$$

其中 $a(t)=\sqrt{1+0.95\sin(\pi t)}$。对应的速度场为 $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}a'\\a\end{pmatrix}(t)\,(t)\,x,\ 0,\ 0\Big)$。我们采用精确解$u^*(x,y,z)=\sin(x+\sin(t))\exp(\cos(y-z))$，由此可直接得到源项和初始条件。

首先，我们通过学习流映射 $\mathcal{N}_e$ 来近似曲面演化。在此基准测试中，速度场 $\boldsymbol{v}=(a'(t)/a(t)\ x,0,0)$ 在 x 方向上产生纯拉伸，因此轨迹方程按分量解耦。因此，每个分量网络 $\mathcal{N}_e^i$ 只需依赖于 $(t,(X_0)_i)$，也就是说，它有两个输入。我们使用三个单隐层 RaNN，其宽度为 (M_1,M_2,M_3)，以近似流映射的三个坐标分量。我们设定 $r_x^1=r_x^2=r_x^3=1$，并选择 $r_t^1=16$, $r_t^2=r_t^3=1$ 以反映不同的时间尺度。根据初始曲面 Γ_0 的坐标范围，我们使用轴对齐包围盒~ ~ ~$D_1=[-1.5,1.5]$、$D_2=[-1,1]$和 $D_3=[-0.5,0.5]$，并取 $\beta=100$ 来施加初始条件。

为在初始曲面上近似均匀地采样点，我们采用斐波那契格点法 [28]。我们在 Γ_0 上选取 N_x 个点以施加初始条件，并选取 $N_{\mathrm{col}}=N_tN_x$ 个时空点以约束轨迹常微分方程残差，其中 $I=[0,2]$中的时间样本数为 N_t。

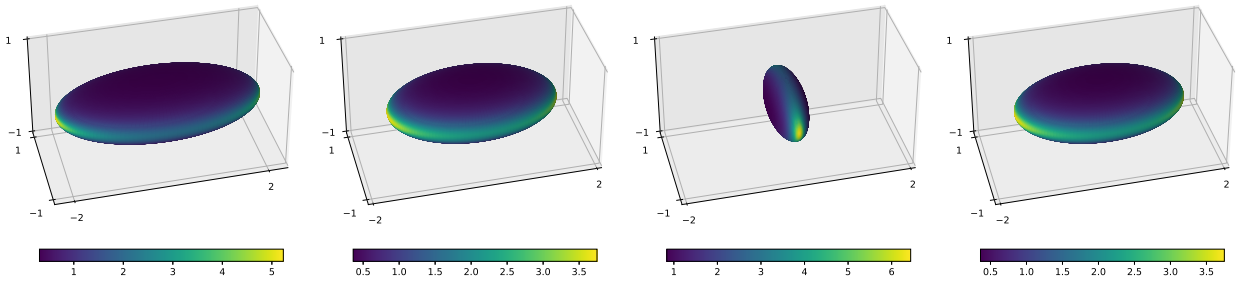
我们在 $t=2$ 处通过流映射坐标、单位法向量和平曲率的相对离散误差 ℓ^2 评估精度：

$$E_{\boldsymbol{x}}:=\frac{\|\mathcal{N}_e-\boldsymbol{x}\|_{\ell^2(P_{\mathrm{test}})}}{\|\boldsymbol{x}\|_{\ell^2(P_{\mathrm{test}})}},\qquad E_{\boldsymbol{n}}:=\frac{\|\boldsymbol{n}_{\mathcal{N}}-\boldsymbol{n}\|_{\ell^2(P_{\mathrm{test}})}}{\|\boldsymbol{n}\|_{\ell^2(P_{\mathrm{test}})}},\qquad E_H:=\frac{\|H_{\mathcal{N}}-H\|_{\ell^2(P_{\mathrm{test}})}}{\|H\|_{\ell^2(P_{\mathrm{test}})}},$$

以及总训练时间，其中 $P_{\mathrm{test}}\subset\Gamma(2)$ 是一个独立的测试集。结果汇总于表 7，演化曲面如图5所示，颜色表示平均曲率。

M_1, M_2, M_3	N_{col}, N_x	$E_{\boldsymbol{x}}$	$E_{\boldsymbol{n}}$	E_H	时间（秒）
1600,500,500	$80^2, 80$	2.27E-06	1.58E-06	2.42E-06	0.624
	$120^2, 120$	7.48E-08	1.17E-07	6.62E-07	1.324
	$160^2, 160$	8.06E-09	8.63E-08	6.47E-07	2.150
	$200^2, 200$	5.31E-09	3.64E-08	1.81E-07	3.510
2600,500,500	$80^2, 80$	5.87E-05	1.11E-05	1.71E-05	1.125
	$120^2, 120$	1.32E-07	1.27E-07	1.88E-07	2.136
	$160^2, 160$	1.46E-09	2.41E-09	1.08E-08	3.554
	$200^2, 200$	2.42E-10	2.54E-09	1.36E-08	5.293

表 7： $\boldsymbol{x}$、 $\boldsymbol{n}$和 H 在 $t = 2$ 时的相对误差，以及学习曲面演化的训练时间 n.



(a) t = 0.5。 (b) t = 1.0。 (c) t = 1.5。 (d) t = 2.0。

图5：演化中的椭球及相应的平均曲率分布。

接下来，我们在演化曲面 $\Gamma(t)$ 上求解对流–扩散问题 (4.5)。使用宽度为 (2600, 500, 500) 的学习演化网络 ($\mathcal{N}_e^1, \mathcal{N}_e^2, \mathcal{N}_e^3$) 和采样分辨率 $N_0 = 200$（如表7所示），我们在 $I \times \Gamma(t)$ 上生成时空配置点，以训练解网络 u_e。我们设置 $r_t = r_x = 0.8$，并使用初始条件惩罚项 $\beta = 100$。偏置采样集通过抽取 $\boldsymbol{B} \sim U([0,2] \times [-2,2] \times [-1,1] \times [-0.5, 0.5])$ 选取。相对误差（在 $t = 2$ 处评估）和训练时间汇总于表8，结果表明，所提出的方法能够高效、准确地求解演化曲面上的对流–扩散方程。

M	1400		2000		2600	
N_x, N_{col}	误差	时间（秒）	误差	时间（秒）	误差	时间（秒）
$80, 80^2$	2.41E-04	1.140	9.63E-05	1.714	7.80E-05	2.370
$120, 120^2$	2.83E-05	2.218	8.16E-06	3.301	1.03E-05	4.484
$160, 160^2$	4.66E-06	3.860	3.05E-06	5.613	1.40E-06	7.532
$200, 200^2$	3.32E-06	5.901	6.97E-07	8.579	3.07E-07	11.330

表8：演化曲面上 u 在 $t = 2$ 处的相对误差及训练时间。

例5.7（剪切流作用下液滴表面上的表面活性剂输运） 我们考虑由给定剪切流驱动的液滴表面上的表面活性剂输运，遵循 *[33]*。流体效应被忽略，环境速度场为

$$\boldsymbol{v}(t, x, y, z) = (z, 0, 0).$$

初始液滴表面是以原点为中心的单位球面，演化曲面具有精确的水平集形式

$$\Gamma(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x - tz)^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \qquad t \in I = [0, 3].$$

我们考虑守恒型表面对流–扩散方程（4.5），其中 $f = 0$，初始条件为 $u(0, \cdot) \equiv 1$，定义在 $\Gamma(0)$ 上。

尽管该基准测试可获得精确流映射，我们仍首先使用RaNN流映射网络 $\mathcal{N}_e = (\mathcal{N}_e^1, \mathcal{N}_e^2, \mathcal{N}_e^3)$ 近似曲面演化，以评估几何精度。对于 $\boldsymbol{v} = (z, 0, 0)$，轨迹方程解耦为 $x(t) = x_0 + tz_0$，$y(t) = y_0$，$z(t) = z_0$，因此我们取

$$\mathcal{N}_e^1 = \mathcal{N}_e^1(t, x_0, z_0), \qquad \mathcal{N}_e^2 = \mathcal{N}_e^2(t, y_0), \qquad \mathcal{N}_e^3 = \mathcal{N}_e^3(t, z_0),$$

即空间输入维数为 $d_1 = 2$、$d_2 = d_3 = 1$。我们设定 $r_x^i = r_t^i = 1$，并利用惩罚参数 $\beta = 100$强制满足初始条件。由于 $\Gamma(0)$ 为单位球面，我们将偏置集采样为

$$\boldsymbol{B}_1 \sim U([0, 3] \times [-1, 1]^2), \qquad \boldsymbol{B}_2 \sim U([0, 3] \times [-1, 1]), \qquad \boldsymbol{B}_3 \sim U([0, 3] \times [-1, 1]).$$

利用 N_0 个位于 $\Gamma(0)$ 上的样本以及 N_0 个时间样本，我们构造$N_{\text{col}} = N_0^2$ 个时空配置点对以强制满足轨迹常微分方程残差，并报告 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{n}$和 H 在 $t = 3$ 处的相对误差，以及表9中的训练时间。

M_1, M_2, M_3	N_{col}, N_0	$E_{\boldsymbol{x}}$	$E_{\boldsymbol{n}}$	E_H	时间（秒）
1600	$80^2, 80$	1.11E-06	7.49E-06	3.36E-05	0.975
	$120^2, 120$	8.43E-10	7.98E-09	5.50E-08	2.046
	$160^2, 160$	1.19E-09	1.19E-08	6.50E-08	3.754
	$200^2, 200$	8.44E-10	1.19E-08	8.77E-08	6.137
2600	$80^2, 80$	1.90E-06	1.43E-05	6.02E-05	1.805
	$120^2, 120$	2.18E-08	2.22E-07	1.57E-06	3.685
	$160^2, 160$	2.59E-10	3.17E-09	2.05E-08	6.037
	$200^2, 200$	4.54E-11	5.32E-10	3.71E-09	10.387

表 9： $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{n}$ 和 H 在 $t = 3$ 时的相对误差及训练时间。

由于给定剪切流 $\boldsymbol{v}$ 不可压缩，所包围的液滴体积应随时间保持不变。我们使用标准曲面公式计算体积

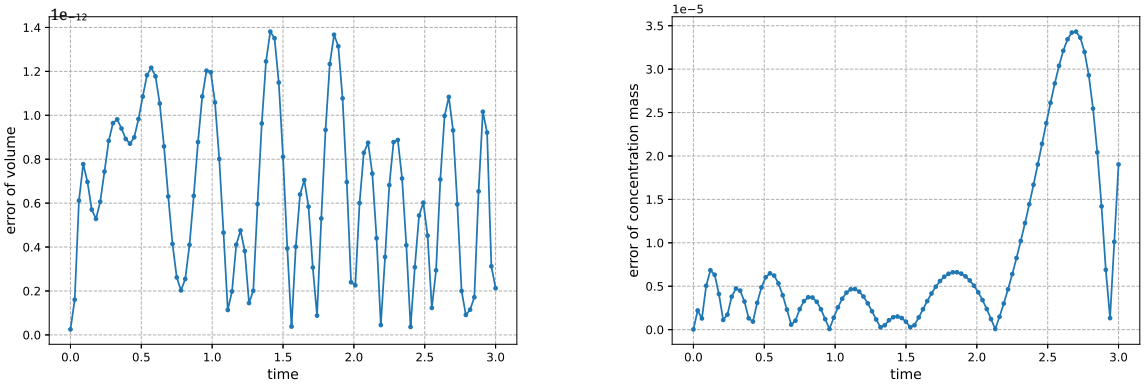
$$V(t) = \frac{1}{3} \int_{\Gamma(t)} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n} \, ds,$$

因此，对于单位球面，$V(0) = \frac{4}{3}\pi$。我们评估相对体积误差

$$E_V(t) := \frac{|V_{\mathcal{N}}(t) - V(0)|}{V(0)}$$

通过在重构曲面上进行高斯求积，其中 $\Gamma_{\mathcal{N}}(t)$ 表示由 $\mathcal{N}_e$ 表示的曲面。图 6a将所得体积误差与 [33], 中报告的结果进行了比较，表明所提出的方法在该基准测试中实现了显著更小的体积漂移。

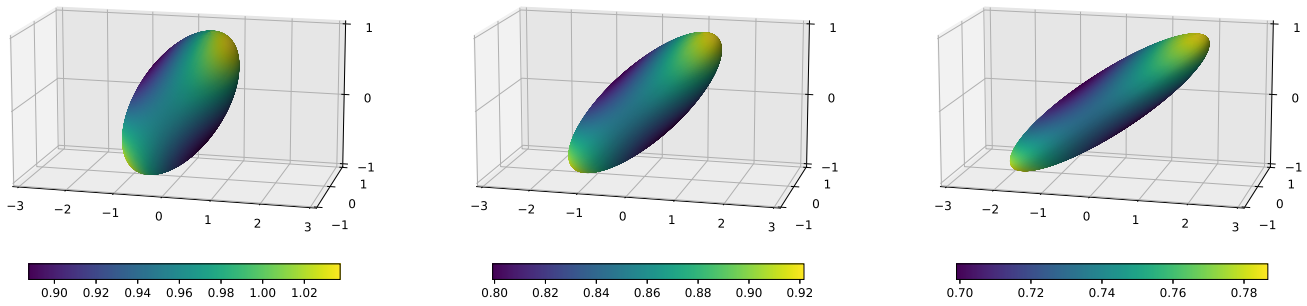
接下来，我们使用宽度为 $M_i = 2600$、$i = 1$、2、3的学习演化网络求解 4.5，其定义在 $\Gamma(t)$ 上，并采用采样分辨率 $N_0 = 200$ (参见表 9)，在 $I \times \Gamma(t)$上生成时空配置点。我们设定 $r_t = r_x = 1$



(a) 液滴体积误差。

(b) 表面活性剂质量误差。

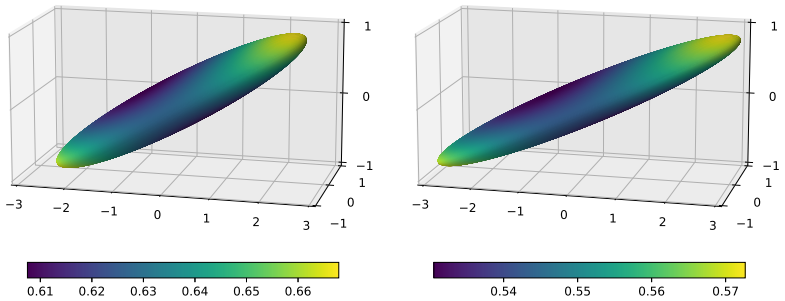
图6：液滴体积误差（a）和表面活性剂质量误差（b）的时间历程。



(a) t=0.6。

(b) t=1.2。

(c) t=1.8。



(d) t=2.4。

(e) t=3.0。

图 7：不同时间的液滴表面 $\mathcal{N}^1$、$_{e}$ $_{2\ 3}$和表面活性剂浓度 u_e 的快照。颜色表示 u_e的大小。

并对解网络 u_e使用初始条件惩罚项 $\beta = 100$ 。偏置采样集选取为$\boldsymbol{B} \sim U([0,3] \times [-3.2, 3.2] \times [-1,1] \times [-1,1])$。由于 $f = 0$，表面活性剂总质量

$$m(t) := \int_{\Gamma(t)} u \, ds$$

应满足守恒 $m(0) = 4\pi$。因此，我们监测相对质量误差 $E_m(t) := |m_{\mathcal{N}}(t) - m(0)|/m(0)$（高斯求积），结果见图 6b。图 7 展示了预测浓度的快照；剪切流将表面活性剂输运至液滴尖端。值得注意的是，即使没有显式施加质量守恒约束，所提出的方法仍能以很高的精度保持表面活性剂质量。

传统的基于网格的方法在演化曲面上求解偏微分方程时，通常需要反复更新网格以适应大幅变形，同时还要在网格之间传递（插值）几何量和解值，这会增加计算开销，并可能引入额外的数值误差。相比之下，所提出的 RaNN 框架是无网格的，因为它直接在时空配置点上施加控制方程，并通过学习流映射表示演化几何，从而避免重新网格化以及连续网格之间的解传递。在当前的剪切流基准测试中，该方法在曲面发生显著变形时仍保持精确，并以很高的精度保持关键不变量（例如体积和表面活性剂质量），凸显了其求解经历平滑保拓扑变换的演化曲面上偏微分方程的潜力。

6 总结

在本工作中，我们开发了一种无网格 RaNN 框架，用于基于偏微分方程的强形式求解静态与演化曲面上的偏微分方程。所提出的方法适用于广泛的曲面表示，包括（i）可参数化曲面（通过图册）、（ii）由水平集函数描述的隐式曲面，以及（iii）仅以非结构化点云给出的曲面。

对于静态曲面上的偏微分方程，我们针对定常与含时问题构建了 RaNN 离散格式，并对带界面相容性的基于参数化的表述给出了相应的理论分析。在多种基准测试中，所提出的方法以较低的计算成本实现了高精度，并与近期用于曲面偏微分方程的基于神经网络的求解器相比具有优势，其中包括 [33]中的物理信息神经网络类方法。

对于拓扑随时间保持不变的演化曲面，我们进一步提出了一种基于 RaNN 的策略：通过流映射表示学习曲面演化，然后在所得时空配点集上求解曲面偏微分方程。该方法避免了反复的网格构建/重新网格化以及网格到网格的解传递，从而降低计算开销，并减轻与低质量曲面离散相关的误差。数值实验表明，所提出的方法能够准确捕捉曲面演化，并高效逼近强变形演化曲面上的偏微分方程解。

未来的工作将从多个方向拓展这一框架。首先，我们将研究具有拓扑变化的演化曲面；在这种情况下，单一的全局流映射表示可能会失效，因此需要采用其他隐式或混合几何表示。其次，我们将研究强耦合演化问题，其中曲面运动与曲面偏微分方程相互依赖，因此几何与解必须以耦合方式推进，而非分两个阶段分别处理。第三，我们将考虑更复杂的模型，例如定义在曲面上的相场系统和多物理场系统。此外，我们计划通过制定有理论依据的带宽参数（例如 r_x 和 r_t）选择策略，以及设计有效的时空采样和条件数控制方法，提升所得最小二乘系统的鲁棒性与适应性。

参考文献

[1] D. Álvarez、P. González-Rodríguez 和 M. Moscoso，拉普拉斯-贝尔特拉米算子基于径向基函数的近似的闭式公式，《J. Sci. Comput.》77 (2018年)，1115-1132。[2] A. R. Barron，S形函数叠加的通用逼近界，《IEEE T. Inform. Theory》39(3) (1993年)，930-945。[3] M. Bertalmío、L.-T. Cheng、S. Osher 和 G. Sapiro，隐式曲面上的变分问题与偏微分方程，《计算物理学杂志》174 (2001年)，759–780。[4] H. Biddle、I. von Glehn、C. B. Macdonald 和 T. März，曲面去噪的基于体积的方法，ICIP 2013 (2013年)，529-533。[5] S.C. Brenner 和 L.R. Scott，有限元方法的数学理论，纽约：Springer New York (2008年)。[6] F. Cazals 和 M. Pouget，通过密切喷流的多项式拟合估计微分量，Comput. Aided Geom. D. 22(2) (2005年)，121-146。[7] J. Chen、X. Chi、W. E 和 Z. Yang，连接求解偏微分方程的传统算法与基于机器学习的算法：随机特征方法，J. Mach. Learn. 1 (2022年)，268-298。[8] J. Chen、Z. Ma 和 K. Wu，一种用于多尺度辐射传输方程的基于微宏分解的渐近保持随机特征方法，arXiv 预印本 (2024年)，arXiv:2411.04643。[9] T. Chen 和 H. Chen，径向基函数神经网络对多元函数、非线性泛函和算子的逼近能力，《IEEE Trans. Neural Netw.》6(4) (1995年)，904-910。[10] X. Chi、J. Chen 和 Z. Yang，求解界面问题的随机特征方法，Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 420 (2024年)，116719。[11] G. Cybenko，S形函数叠加的逼近，《控制数学》，Math. Control. Signals, Syst. 2(4) (1989年)，303-314。[12] H. Dang 和 F. Wang，结合混合间断 Petrov-Galerkin 方法求解 Stokes-Darcy 流的局部随机神经网络，Phys. Fluids 36(8) (2024年)。[13] H. Dang、F. Wang 和 S. Jiang，求解偏微分方程的自适应增长随机神经网络，arxiv 预印本 (2024年)，arXiv:2408.17225。[14] S. Dong 和 Z. Li，局部极限学习机与区域分解在求解线性与非线性偏微分方程中的应用，Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg. 387 (2021年)，114129。[15] S. Dong 和 Y. Wang，使用随机权重神经网络求解逆参数偏微分方程问题的方法，《计算物理学杂志》489 (2023年)，112263。[16] S. Dong 和 J. Yang，极限学习机超参数的计算：算法及其在计算偏微分方程中的应用，并与经典高阶有限元进行比较，《计算物理学杂志》463 (2022年)，111290。[17] V. Dwivedi 和 B. Srinivasan，物理信息极限学习机（pielm）——一种快速求解偏微分方程数值解的方法，Neurocomputing 391 (2020年)，96-118。[18] G. Dziuk 和 C. M. Elliott，演化曲面上的有限元，IMA J. Numer. Anal.，27 (2007年)，262–292。[19] G. Dziuk 和 C. M. Elliott，抛物型方程的曲面有限元，J. Comput. Math. 25 (2007年)，385–407。

[20] G. Dziuk 和 C. M. Elliott，隐式曲面上抛物型偏微分方程的欧拉有限元方法，Interfaces Free Bound. 10(1) (2008)，119-138..[21] G. Dziuk 和 C. M. Elliott，曲面偏微分方程的有限元方法，Acta Numer. 22 (2013)，289–396。[22] W. E 和 B. Yu，深度里兹方法：一种用于求解变分问题的基于深度学习的数值算法，Commun. Math. Stat. 6(1) (2018)，1–12。[23] C. M. Elliott 和 V. Styles，一种用于求解演化曲面上偏微分方程的 ALE ESFEM，Milan J. Math. 80(2) (2012)，469-501。[24] Z. Fang，一种基于卷积神经网络的高效混合物理信息神经网络，IEEE Trans. Neural Networks Learn. Syst. 33(10) (2021)，5514-5526。[25] Z. Fang 和 J. Zhan，三维曲面偏微分方程的物理信息神经网络框架：时间无关问题，IEEE Access 8 (2019)，26328-26335。[26] E. J. Fuselier 和 G. B. Wright，一种用于曲面扩散方程和反应扩散方程的高阶核方法，J. Sci. Comput. 56 (2013)，535–565。[27] R. Goldman，隐式曲线和曲面的曲率公式，Comput. Aided Geom. D. 22(7) (2005)，632-658。[28] Á González，使用斐波那契格点和经纬度格点测量球面面积，Math. Geosci. 42 (2010)，49-64。[29] C. Gugenberger、R. Spatschek 和 K. Kassner，曲面扩散相场模型的比较，Phys. Rev. E. 78(1) (2008)，016703。[30] E. Hebey，流形上的非线性分析：索伯列夫空间与不等式：索伯列夫空间与不等式，American Mathematical Soc. 第5卷 (2000)。[31] K. Hornik、M. Stinchcombe 和 H. White，多层前馈网络是通用逼近器，Neural Netw. 2(5) (1989)，359-366。[32] S. H. Hsu、J. Chu、M. C. Lai 和 R. Tsai，一种用于含不溶性表面活性剂两相流的耦合网格粒子与隐式边界积分方法，J. Comput. Phys. 395 (2019)，747-764。[33] W. Hu、Y. Shih、T. Lin 和 M. Lai，一种用于求解静态与演化曲面上偏微分方程的浅层物理信息神经网络，Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 418 (2024)，116486。[34] G. B. Huang、Q. Y. Zhu 和 C. K. Siew，极限学习机：理论与应用，Neurocomputing 70(1-3) (2006)，489–501。[35] B. Igelnik 和 Y. H. Pao. 自适应函数逼近和函数连接网络中基函数的随机选择，IEEE Trans. Neural Netw. 6(6) (1995)，1320-1329。[36] B. Igelnik、Y. H. Pao、S. R. LeClair 和 C. Y. Shen，神经网络学习与泛化的集成方法，IEEE Trans. Neural Netw. 10(1) (1999)，19-30。[37] A. D. Jagtap 和 G. E. Karniadakis，扩展物理信息神经网络（xpinns）：一种针对非线性偏微分方程的通用时空域分解深度学习框架，计算物理学通讯 28(5) (2020)，2002-2041。[38] A. D. Jagtap、E. Kharazmi 和 G. E. Karniadakis，离散域上用于守恒律的守恒物理信息神经网络：正问题与逆问题中的应用，计算方法与应用力学工程 365 (2020)，113028。

[39] A. D. Jagtap、E. Kharazmi 和 G. E. Karniadakis，自适应激活函数加速深度神经网络和物理信息神经网络的收敛，J. Comput. Phys. 404 (2020)，109136。[40] Y. Li 和 F. Wang，结合有限差分方法求解界面问题的局部随机神经网络，J. Comput. Phys. 529 (2025)，113847。[41] Y. Liao 和 P. Ming，深度 Nitsche 方法：带本质边界条件的深度里兹方法，计算物理学通讯 29 (2021)，1365-1384。[42] J. Linghu、H. Dong、F. Wang 等，高阶多尺度随机神经网络（Homs-Rnn）方法：复合材料热传导的高精度高效模拟，SSRN 4953953 预印本。[43] X. Liu、S. Lin、J. Fang 和 Z. Xu，极限学习机是否可行？理论评估（第一部分），IEEE 神经网络与学习系统汇刊 26(1) (2014)，7–20。[44] W. E. Lorensen 和 H. E. Cline，Marching Cubes：一种高分辨率三维表面构造算法，《开创性图形学：塑造该领域的先驱工作》(1998)，347-353。[45] F. Lozes、A. Elmoataz 和 O. Lézoray，用于曲面和点云图像处理的加权图偏差分算子，IEEE 图像处理汇刊 23(9) (2014)，3896-3909。[46] Z. Lu、H. Pu、F. Wang 等，神经网络的表达能力：从宽度的视角看，神经信息处理系统进展 30 (2017)。[47] C. Ma 和 L. Wu，Barron 空间与神经网络模型的流诱导函数空间，Constr. Approx. 55(1) (2022)，369-406。[48] Z. Mao、A. D. Jagtap 和 G. E. Karniadakis，用于高速流动的物理信息神经网络，计算方法与应用力学工程 360 (2020)，112789。[49] D. Marquardt，非线性参数最小二乘估计的一种算法，SIAM 应用数学杂志 11 (1963年)，431-441。[50] W. C. H. McLean，强椭圆系统与边界积分方程，剑桥大学出版社 (2000)。[51] H. Mhaskar 和 C. Micchelli，单隐藏层神经网络和平移网络的逼近阶，Adv. Appl. Math. Mech. 16(2) (1995)，151-183。[52] A. Mietke、F. Jülicher 和 I. F. Sbalzarini，活性曲面的自组织形状动力学，美国国家科学院院刊 116(1) (2019)，29-34。[53] S. Neufeld 和 P. Schmocker，随机神经网络的通用逼近性质，arXiv 预印本 (2023)，arXiv:2312.08410。[54] O. Niang、A. Thioune、M. C. E. Gueirea 等，基于偏微分方程的方法用于经验模态分解：在图像分析中的应用，IEEE 图像处理汇刊 21(9) (2012)，3991-4001。[55] Y. H. Pao、G. H. Park 和 D. J. Sobajic，随机向量函数连接网络的学习与泛化特性，Neurocomputing 6(2) (1994)，163–180。[56] Y. H. Pao 和 Y. Takefuji，函数连接网络计算：理论、系统架构与功能，Comput. 25(5) (1992)，76-79。[57] P.-O. Persson 和 G. Strang，MATLAB 中的简易网格生成器，SIAM 评论 46 (2004)，329-345。

[58] A. Petras, L. Ling, C. Piret 和 S. Ruuth，最小二乘隐式径向基函数有限差分最近点法及其在运动曲面上偏微分方程中的应用，《计算物理学杂志》381（2019年），146-161。[59] A. Petras 和 S. Ruuth，利用最近点方法和改进的基于网格的粒子法求解运动曲面上的偏微分方程，《计算物理学杂志》312（2016年），139-156。[60] M. Raissi、P. Perdikaris 和 G. E. Karniadakis，物理信息神经网络：用于求解涉及非线性偏微分方程的正问题与逆问题的深度学习框架，《计算物理学杂志》378（2019年），686–707。[61] S. J. Ruuth 和 B. Merriman，一种求解曲面上偏微分方程的简单嵌入法，《计算物理学杂志》227（2008年）1943-1961。[62] Y. Shang 和 F. Wang，利用佩特罗夫-伽辽金方法求解线弹性与纳维-斯托克斯方程的随机神经网络，《工程力学杂志》150(4)（2024年），04024010。[63] Y. Shang、F. Wang 和 J. Sun，利用佩特罗夫-伽辽金方法求解线性与非线性偏微分方程的随机神经网络，《非线性科学与数值模拟通讯》127（2023年），107518。[64] V. Shankar、G. B. Wright 和 A. Narayan，一种用于流形上对流-扩散-反应方程稳定径向基函数有限差分离散的稳健超粘性公式，《SIAM科学计算杂志》42（2020年），A2371–A2401。[65] J. Sirignano 和 K. Spiliopoulos，DGM：一种求解偏微分方程的深度学习算法，《计算物理学杂志》375（2018年），1339-1364。[66] N. Stoop、R. Lagrange、D. Terwagne 等，曲率诱导的对称性破缺决定弹性表面图案，《自然·材料》14(3) 2015年，337-342。[67] J. Sun、S. Dong 和 F. Wang，利用间断伽辽金方法求解偏微分方程的局部随机神经网络，《计算与应用数学杂志》445，（2024年），115830。[68] J. Sun 和 F. Wang，利用间断伽辽金方法求解扩散-黏性波动方程的局部随机神经网络，《计算数学与应用》154（2024年），128-137。[69] J. Sun 和 F. Wang，利用间断伽辽金方法求解KdV型方程与Burgers方程的局部随机神经网络，《非线性科学与数值模拟通讯》150（2025年），108957。[70] Z. Tang、Z. Fu 和 S. Reutskiy，一种基于物理信息神经网络的曲面偏微分方程外在方法，《数学》10(16)（2022年），2861。[71] S. W. Walker，《万物的形状：微分几何与形状导数实用指南》，SIAM（2015年）。[72] F. Wang 和 H. Dang，求解障碍问题的随机神经网络方法，《巴拿赫中心出版物》127（2024年），261-276。[73] Y. Wang 和 S. Dong，一种基于极限学习机的高维计算偏微分方程求解方法，《计算物理学杂志》489（2023年），112263。[74] Y. Wang 和 H. Xie，利用张量神经网络计算高维特征值问题的多个特征对，《计算物理学杂志》506（2024年），112928。[75] H. Wendland 和 J. Künemund，利用径向基函数求解（演化）曲面上的偏微分方程，《计算数学进展》46（2020年），64。[76] Y. Zang、G. Bao、X. Ye 和 H. Zhou，用于高维偏微分方程的弱对抗网络，《计算物理学杂志》411（2020年），109409。[77] Z. Zhang、F. Bao、L. Ju 和 G. Zhang，用于偏微分方程的可迁移神经网络，《J. Sci. Comput.》99(1)（2024年），2。