arXiv:2603.01705v1 [cs.RO] 2 Mar 2026

一种使用控制屏障函数的 BarrierIK 安全感知共享自主框架

Berk Guler*[1, 6], Kay Pompetzki*[1], Yuanzheng Sun[1], Simon Manschitz[6], Jan Peters[1–5]

摘要—共享自主将操作者意图与自主辅助相结合。在杂乱环境中，即使每个来源单独来看都能避免碰撞，线性混合也可能产生不安全的指令。许多现有方法通过势函数或代价项来建模避障，但这只能将安全性作为软约束来实现。相比之下，安全关键控制要求提供硬保证。我们研究在共享自主的逆运动学（IK）层使用控制屏障函数（CBF），以确保混合后安全性，同时保持任务性能。我们在具有代表性的杂乱环境中进行仿真评估，并开展一项虚拟现实遥操作研究，对比纯遥操作与共享自主。在各种条件下，在 IK 层采用 CBF 可减少违规时间、增大最小间隙，同时保持任务性能。在用户研究中，参与者表示感知安全性和信任度更高、干扰更少，并且总体上更偏好采用我们安全滤波器的共享自主。更多材料请访问 BarrierIK。

I. 引言

在遥操作中，共享自主将操作员输入与自主辅助相结合，以提升任务性能 [1]。两种常见方法是：(i) 混合方法，即将操作员指令与自主系统指令线性混合 [2], [3], [4], [5], [6], [7], ；以及 (ii) 策略方法，即将操作员输入视为观测，并据此在预定义或学习得到的辅助策略中进行加权选择 [8]–[9], [10], [11], [12]。这些范式能够提高效率并降低工作负荷，但通常只在任务空间内进行仲裁，而不施加约束。因此，即使每条指令单独来看都是安全的，混合后的动作仍可能违反安全要求，例如碰撞规避 [2]–[5], [4], [13], [6]。

已有多种方法被提出，以解决遥操作中的约束满足问题。许多方法将碰撞规避纳入目标函数，例如通过人工势场 [14], [15], [16], [17], [18]或代价项。另一些方法则通过碰撞感知逆运动学（IK）过滤操作员指令，以确保其可行性 [19], [20]。尽管这些方法取得了成功，但它们将安全性视为软约束，因此当任务目标占主导地位。此外，将安全性建模为额外的代价项可能导致行为冲突，并有降低用户满意度的风险。

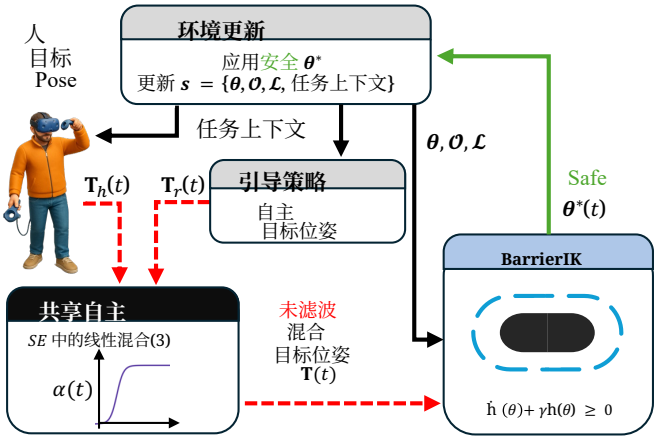

图 1：仲裁之后采用基于控制屏障函数的安全过滤的处理流程。操作员指定一个目标位姿$\mathbf{T}_\mathrm{h}(t)$；引导策略根据当前状态$\boldsymbol{s}(t) =$ $\{\boldsymbol{\theta}(t)$、$\mathcal{O}(t)$、$\mathcal{L}(t)$、任务上下文$\}$输出$\mathbf{T}_\mathrm{r}(t)$，其中 $\boldsymbol{\theta}$ 为关节构型，$\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{L}$ 分别表示障碍物和机器人连杆胶囊体，“任务上下文”包含任务特定信息（例如渲染视图）。这些未滤波位姿通过仲裁权重 $\alpha(t)$在$SE(3)$中进行混合，生成$\mathbf{T}(t)$（红色虚线），该位姿可能违反安全裕度。*BarrierIK* 接收$\mathbf{T}(t)$并施加控制屏障函数条件，以计算安全关节命令 $\boldsymbol{\theta}^*(t)$（绿色），并将其应用于机器人。更新后的状态 $\boldsymbol{s}(t)$反馈给策略和用户。

一种有前景的替代方案是使用控制屏障函数（CBF）[21], [22], [23]。控制屏障函数旨在确保安全集的正向不变性，为碰撞规避等形式化约束提供框架。与基于代价的方法不同，它们不会在安全性与任务性能之间做出妥协。相反，它们通过约束二次规划将潜在不安全的指令变换到安全集上。控制屏障函数已成功应用于遥操作 [24], [25], [26], [27], ，但其在共享控制与共享自主中的应用仍然有限 [28]。操作空间公式的进展现已提供高效的可扩展性 [29], ，这促使我们的方法严格保证可行性，并致力于在高自由度操作任务中实现无碰撞运动。

因此，我们提出 BarrierIK，这是一种置于策略融合之后的 CBF约束逆运动学求解器。我们假设，将融合后的指令投影到安全集，而非将安全性视为软目标函数，能够在提高约束满足度的同时保持任务性能——

*贡献相同；[1]达姆施塔特工业大学 [2]德国人工智能研究中心（DFKI） [3]hessian.AI [4]德国机器人研究所（RIG） [5]认知科学中心 [6]本田欧洲研究院有限公司；通讯作者：berk.gueler@tu-darmstadt.de

本研究由德国联邦研究、技术与航天部（BMFTR）通过德国机器人研究所（RIG）提供资助，并获得德国本田欧盟研究院以及欧盟地平线欧洲计划项目 ARISE（资助编号：101135959）的支持。

本研究已被 2026年 IEEE机器人与自动化国际会议（ICRA 2026）论文集录用。最终出版版本将通过 IEEE Xplore 提供。

并维持用户满意度。该流程遵循共享自主的顺序：（i）融合任务空间指令，然后（ii）在逆运动学层实现安全目标。我们在仿真中使用包含动态和静态障碍物的杂乱操作场景评估 BarrierIK，并在一项有十名参与者的虚拟现实遥操作研究中进行评估。在所有测试场景中，BarrierIK 都减少了违规时间并增大了间隙，同时保持任务性能。用户研究进一步显示出支持我们假设的一致趋势：将 BarrierIK 用作安全滤波器，能够提升共享自主中的安全性并保持任务性能，同时维持用户满意度。

本文有三项贡献。第一，我们提出一种共享自主架构，先融合任务空间指令，再在逆运动学层处理混合后安全性，从而应对指令空间融合在杂乱、非凸场景中的失效模式。第二，我们提出 BarrierIK，这是一种控制屏障函数约束的逆运动学形式，将安全性作为硬不等式约束，同时兼容标准逆运动学目标，包括位姿跟踪、关节限位和平滑性。第三，我们在仿真（动态障碍物和框架/架子）以及一项包含十名参与者的虚拟现实遥操作研究中进行比较评估，将所提方法与逆运动学基线方法进行对比，并量化其在安全性和任务性能方面的优势。

II. 相关工作

本节回顾与本文研究范围相关的三个领域。首先，我们讨论将自主辅助融入遥操作的共享自主方法。其次，我们探讨安全性，重点关注碰撞规避。最后，我们回顾控制屏障函数，它既能提供形式化的安全保证，也为融入安全性提供了一种有原则的方法。

共享自主（*SA*）： 旨在通过加入自主引导 [1]来提升操作员的表现并降低工作负荷。常见范式是线性策略混合，即根据推断出的用户意图 [2], [5], [3], [4], [13], [7], 将操作员和自主系统的指令线性组合为最终动作。自主策略通常采用优化问题 [2], [3]，[13]、运动基元 [11], [30], ，或对数据中的行为进行编码 [4], [6], [7]。用于控制操作员与自主系统指令之间权衡的仲裁值，取决于目标概率估计的置信度；该估计通常基于最大熵原理 [2], [3]，[13] 或递归贝叶斯推断 [31], [7]得出。

其他研究则聚焦于基于策略的方法，将操作员的指令视为一种观测，用于影响预定义的或学习得到的辅助策略 [8], [9]，[10], [12]。这些方法将共享自主形式化为部分可观测马尔可夫决策过程（POMDP），以实现目标感知动作选择 [8], [9], [10], ，或根据操作员指令对运动基元进行仲裁 [32]，[12]。这些 POMDP 建模以及运动基元所使用的代价函数通常是预先定义的，或从数据中学习得到的。

尽管存在许多仲裁机制，线性策略混合仍然是最广泛使用的方法之一。然而，该方法在杂乱或遮挡场景中容易失效：即使人和自主系统的指令各自都是安全的，将二者组合后仍可能落在非凸安全集之外，从而导致不安全或偏离目标的动作 [33]。当忽略人机联合分布中的多模态性时，这些冲突会进一步加剧。将安全性纳入线性混合的一种自然扩展方法是使用吸引场与排斥场 [14],；这种方法加入了安全性考量，但仍将安全性视为软约束 [4], [13], [6]。在导航式共享自主中，目标层级混合是在目标/分布层面进行仲裁，而不是直接在指令空间中进行，从而提升了系统在杂乱环境中的响应能力 [34]。人因研究结果还表明，与不透明的混合方式相比，使辅助行为具有可理解性（例如通过触觉或透明共享自主）能够提高用户的一致性和满意度 [35]。

在这项工作中，我们保留标准共享自主流程（先进行混合），但将安全约束执行置于混合之后的逆运动学层。这样可以确保混合后的动作优先考虑安全性和避碰，同时保持与操作员意图一致。

遥操作中的安全性： 涵盖几何之外的多种概念，包括限制交互力、确保闭环稳定性（例如时域无源性），以及通过主动约束/虚拟夹具将运动限制在任务空间范围内 [36], [37]。本文聚焦于辅助操作期间机械臂的环境碰撞安全。

遥操作中的碰撞规避： 对于在杂乱环境中的遥操作操纵，通常在逆运动学层处理碰撞规避。除逆运动学层之外，基于采样的遥操作优化器会通过实时选取接近当前位姿的可行关节状态，生成具备碰撞意识的更新 [38]。本节将逆运动学层方法分为两类：(i) 基于优化的求解器，以及 (ii) 微分/零空间方法。典型的零空间策略运用操作空间控制 [15], [16] ，将避障梯度投影到雅可比矩阵的零空间中，从而在塑造自运动的同时保留末端执行器任务 [39]。然而，此类方法要求机器人具备冗余度，并受其层级特性的限制：一个任务（例如末端执行器运动）必须优先于其他任务（例如碰撞规避）。

在基于优化的逆运动学方法中，CollisionIK 通过加入环境距离惩罚项来扩展多目标逆运动学，并在每个步骤评估经过剪枝的最近连杆—障碍物对活动集，以提高计算效率 [19]。这带来了平滑的目标函数和实时运行速度，但安全性仍可以权衡：在狭窄通道中，求解器可能接受暂时的违规，以降低跟踪误差；其行为也取决于活动对的选择（以及权重调节）。硬约束变体会在基于二次规划的逆运动学求解器中直接施加最小距离不等式，并报告在约束可行时能够实时实现无碰撞更新 [40]。这些方法将安全性设为约束（而非代价），但需要可靠的有符号距离，并谨慎聚合多个接触点的信息。当所选安全裕度下任务不可行时，它们必须放宽

约束，或大幅偏离用户指令。对于狭窄、杂乱的工作空间，也有人提出了不依赖零空间的微分逆运动学方法（例如 DawnIK [41]）；其短视的线性化支持高频率控制，但无法保证前向不变性，且可能对步长或正则化的选择较为敏感。因此，我们采用基于优化的逆运动学 formulation，以支持冗余和非冗余机械臂。

控制屏障函数（***CBF***）：为安全集的正向不变性提供充分条件，通常通过最小偏差二次规划来实施 [21], [22], [42]。在遥操作中，控制障碍函数滤波器已用于确保几何约束和交互约束，同时尽可能贴近用户输入 [24], [25], [26], [27]。例如，二次规划滤波器被用于约束机器人手术中的交互力 [27]。在共享自主领域，诸如 [28] 的研究利用障碍函数对来处理安全问题，但主要聚焦于低维机器人导航任务。近期进展将控制屏障函数扩展至任务一致的操作空间控制，提出了可扩展至数百甚至数千个同时安全约束的运动学和动力学公式 [29]。这些进展促使我们开展本研究：引入一种混合后安全滤波器，在逆运动学层拦截混合后的用户-自主系统指令并对其进行调整。在此方法中，我们保留基于优化的逆运动学公式，同时通过控制障碍函数式不等式实施安全约束，并将安全性视为混合后的硬不等式约束。

III. 安全感知共享自主框架

在本节中，我们详细介绍实时遥操作框架。如图1所示，系统分两个阶段运行：高层策略混合模块通过线性插值将用户指令与自主运动指令相结合，生成标称笛卡尔目标。随后，该指令被传递给逆运动学求解器，以确保相对于运动学约束和环境约束的可行性与安全性。我们在第三节中介绍策略融合策略，随后详述三种逆运动学求解器——基线 N（N）、基线 P（P），以及我们提出的基于控制障碍函数的 BarrierIK（B）。

共享自主：我们假设人类操作员在每个时间步 t 提供笛卡尔位姿指令，表示为变换 $\mathbf{T}_{\mathrm{h}}(t) \in SE(3)$，由位置 $\mathbf{x}_{\mathrm{h}}(t) \in \mathbb{R}^3$ 和姿态 $\mathbf{q}_{\mathrm{h}}(t) \in \mathbb{H}$（单位四元数）组成。同时，自主系统提出一个参考位姿 $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}(t) = (\mathbf{x}_{\mathrm{r}}(t), \mathbf{q}_{\mathrm{r}}(t))$，该位姿由抓取规划器导出。在我们的实验中，这些位姿基于与目标物体相关联的几何基元进行启发式定义；然而，该框架与抓取规划器无关，并可容纳更复杂的方法。

最终混合位姿 $\mathbf{T}(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{q}(t))$ 通过对位置和姿态进行插值计算得出。位置采用线性混合 $\mathbf{x}(t) = (1-\alpha_t)\mathbf{x}_{\mathrm{h}}(t) + \alpha_t \mathbf{x}_{\mathrm{r}}(t)$，其中 $\alpha_t \in [0,1]$ 是用于调节自主系统影响程度的仲裁系数，姿态则通过球面线性插值（SLERP）进行混合 $\mathbf{q}(t) = \mathrm{slerp}\,(\mathbf{q}_{\mathrm{h}}(t), \mathbf{q}_{\mathrm{r}}(t), \alpha_t)$。。为避免对跖四元数导致的不连续性，我们在插值前确保 $\mathbf{q}_{\mathrm{h}}(t)$ 与 $\mathbf{q}_{\mathrm{r}}(t)$ 的点积为正。随后将得到的混合位姿 $\mathbf{T}(t)$ 传递给下游逆运动学求解器，以生成安全且可执行的机器人构型。

仲裁系数 α_t 可以固定，也可以根据用户与机器人指令之间的分歧动态调整。参照 [3],等人的工作，我们采用逻辑斯谛函数 α_t 根据位置空间分歧进行

$$\alpha_t = \sigma\left(p\left(\frac{\|\mathbf{x}_{\mathrm{h}}(t) - \mathbf{x}_{\mathrm{r}}(t)\|_2}{s} + b\right)\right),$$

其中 $\sigma(\cdot)$表示逻辑斯谛函数，p是斜率参数，s是缩放因子，b是偏置项。该仲裁策略在人与机器人的意图出现偏差时降低自主性，在二者意图一致时提高自主性，从而促进流畅协作。该仲裁函数遵循Muelling等人提出的方法 [3]。

逆运动学：给定期望的末端执行器位姿$\mathbf{T}(t) \in SE(3)$，我们实现了一个基于非线性优化的逆运动学（IK）求解器，用于计算关节构型 $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$，其中 n 是自由度（DoF）的数量。我们的实现基于先前的工作 [43],，通过确保运动的平滑性，在实现平滑、可行运动的同时兼顾位姿跟踪和自碰撞规避。我们在JAX中重新实现了该框架，以便为正运动学、自碰撞检测以及用于逆运动学求解器的可微碰撞检测算法提供高性能的自动微分 [44], [45], [46]。

将逆运动学问题表述为一个约束优化问题

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\theta}^* = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}} \ \mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}) \\ &\text{s.t.} \ \ c_k(\boldsymbol{\theta}) \le 0, \ k = 1, \ldots, K, \ \ l_i \le \theta_i \le u_i \ \forall i. \end{aligned} \tag{1}$$

其中，$c_k(\boldsymbol{\theta})$为不等式约束（例如可操作性约束或 BarrierIK 的控制障碍函数约束），$[l_i, u_i]$ 表示关节限位。目标函数 $\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta})$ 定义为多个可微任务特定项 $\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{m=1}^{M} w_m\, g_m(F_m(\boldsymbol{\theta}))$ 的加权和，其中 $w_m \in \mathbb{R}^+$ 为权重，$F_m(\boldsymbol{\theta})$ 为可微任务特征，$g_m(\cdot)$ 为第 m 个目标函数对应的标量惩罚函数。我们使用序列最小二乘规划（SLSQP）求解方程 2。SLSQP 是一种序列二次规划（SQP）方法，在每次迭代中对约束进行线性化，并最小化拉格朗日函数的二次模型，从而生成一系列二次规划子问题 [47]。由于 SLSQP 依赖局部线性化，因此只能在数值容差范围内保证约束可行性，提供的是近似安全保证，而非连续时间安全保证。

遵循 [43], , 任务特征 $F(\boldsymbol{\theta})$ 包括：(i) 末端执行器跟踪，对相对于$\mathbf{T}(t)$的位置误差和姿态误差进行惩罚；(ii) 对关节速度/加速度/急动度以及笛卡尔速度施加运动平滑正则项；(iii) 自碰撞规避项，通过惩罚机器人连杆之间的距离过近

，利用一个以 $\boldsymbol{\theta}$ 为条件的人工神经网络预测器来预测连杆对之间的距离。在我们的 JAX 实现中，该网络在优化器的各个步骤中始终保持完全可微。此外，我们施加可操作性约束$c_m(\boldsymbol{\theta})$，通过防止最小奇异值低于较小阈值并在每个步骤限制条件数，使雅可比矩阵保持良好的条件数。

在后续章节中，我们将此逆运动学求解器作为基线，称为 **基线 N**。它包含上述目标函数和约束，包括跟踪、平滑性、自碰撞规避以及可操作性约束，但不对障碍物建模。

BarrierIK：基于控制屏障函数的环境感知逆运动学： 我们提出*BarrierIK*，一种基于控制屏障函数（CBF）的逆运动学形式，旨在通过保留基线 N 中定义的目标函数和可操作性约束，确保遥操作过程中的安全性。

对于每个障碍物 $o \in \mathcal{O}$ ，我们定义控制屏障函数 $h_o(\boldsymbol{\theta}) = \phi_o(\boldsymbol{\theta}) - \epsilon$，其中 ϕ_o 是机器人与障碍物之间的最小有符号距离， ϵ 是安全裕度。实际应用中，我们识别出使 ϕ_o 取值达到极值的活动连杆—障碍物对（即距离最近的一对），并通过自动微分计算其梯度 [46]。

我们采用如下形式的离散时间控制屏障函数条件 $\nabla h_o(\boldsymbol{\theta})^\top \Delta\boldsymbol{\theta} + \mathcal{K}\big(h_o(\boldsymbol{\theta})\big) \geq 0$，并使用扩展类-$\mathcal{K}$ 函数 $\mathcal{K}(h) = \gamma h + \beta h^3$，其中 $\gamma,\ \beta > 0$ 是控制收敛至安全集边界的类-$\mathcal{K}$系数。该形式采用基于位置的更新规则（$\Delta\boldsymbol{\theta}$），而非速度控制形式；虽然这偏离了经典的连续时间控制障碍函数，但这种离散化版本符合我们的基于位置的控制回路，是一种设计选择。

为避免约束切换时出现不连续，并缓解下溢或上溢问题，我们使用经温度缩放的软最大值（log-sum-exp）近似来汇总所有控制屏障函数约束

$$c_{\mathrm{CBF}}(\boldsymbol{\theta}) = \tfrac{1}{T}\,\log\textstyle\sum_{o\in\mathcal{O}} \exp\Big(T\big[-\,\dot{h}_o(\boldsymbol{\theta}) - \mathcal{K}(h_o(\boldsymbol{\theta}))\big]\Big),$$

其中 $\dot{h}_o(\boldsymbol{\theta}) = \nabla h_o(\boldsymbol{\theta})^\top \Delta\boldsymbol{\theta}$。温度参数 T 控制最大值近似（$T \Rightarrow$ 越高，结果越接近最大值）。BarrierIK 的优化问题

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\theta}^* = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}}\ \mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}) \\ &\text{s.t.}\ \ c_m(\boldsymbol{\theta}) \leq 0,\ \ c_{\mathrm{CBF}}(\boldsymbol{\theta}) \leq 0,\ \ l_i \leq \theta_i \leq u_i\ \forall i, \end{aligned} \tag{2}$$

最小化相同的目标函数，并保留基线 N 中定义的可操作性约束，同时加入额外的控制障碍不等式 $c_{\mathrm{CBF}}(\boldsymbol{\theta}) \leq 0$。控制障碍函数约束在每一步都强制满足安全裕度，同时跟踪，并在更新足够小时促进安全集的正向不变性。

我们不再将避障作为 BarrierIK 中的硬约束，而是将其作为软约束纳入目标函数，并称之为**基线 P**。按照 [19],中的邻近惩罚公式，该方法

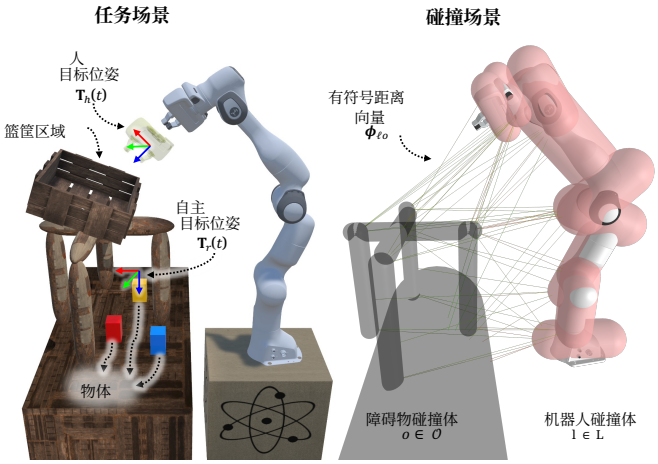

图 2：模拟任务与碰撞评估设置。**左：**包含人类目标$\mathbf{T}_h(t)$和自主参考$\mathbf{T}_r(t)$的场景。**右：**机器人连杆（红色）和障碍物（黑色）的凸胶囊碰撞体；对于每个连杆 $\ell \in \mathcal{L}$ 和障碍物 $o \in \mathcal{O}$，我们计算有符号距离 $\phi_{\ell o}(\boldsymbol{\theta})$以及供 BaselineP 和 BarrierIK 使用的有符号距离向量（颜色表示幅值）。

通过惩罚机器人与周围障碍物之间的近距离来感知环境。对于每个障碍物 $o \in \mathcal{O}$和每个机器人连杆 $\ell \in \mathcal{L}$，我们计算连杆与障碍物之间的有符号距离 $\phi_{\ell o}(\boldsymbol{\theta})$，并将相应的碰撞目标函数定义为 $\chi_{\ell o}(\boldsymbol{\theta}) = w_{\mathrm{safe}}(\phi^2_{\ell o}(\boldsymbol{\theta}) + \delta)^{-1}$，其中 $w_{\mathrm{safe}} = (5\epsilon)^2$ 是基于标量安全裕度 ϵ的缩放因子，而 δ 是一个较小的正则化常数，用于避免除以零。基线 P 的最终目标函数

$$\mathcal{J}_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{J}_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\theta}) + w_{\mathrm{col}} \cdot g_{\mathrm{col}}(F_{\mathrm{col}}(\boldsymbol{\theta})),$$

通过在所有连杆—障碍物对 $F_{\mathrm{col}}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{\ell\in\mathcal{L}} \sum_{o\in\mathcal{O}} \chi_{\ell o}(\boldsymbol{\theta})$上加入碰撞惩罚，扩展了基线 N 目标函数 $\mathcal{J}_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\theta})$。该目标函数结合了末端执行器跟踪、运动平滑性和自碰撞规避，其中每个 $\chi_{\ell o}(\boldsymbol{\theta})$都会惩罚连杆 ℓ 与障碍物 o之间的接近程度。此外，还保留了受可操作性约束的 c_{m}，其定义见第三节。

标量权重 w_{col} 控制避障在整体代价中的相对重要性。这种软惩罚形式使机器人能够以平滑且可微的方式在安全性与任务目标之间进行权衡，但无法保证正向不变性或严格的约束满足。

IV. 实验

我们在自主模式和遥操作中评估基于控制障碍函数的安全层，以检验**BarrierIK** 相较于两个基线方法是否能提升安全性、表现和用户体验：**N**（不处理环境碰撞）和**P** （基于软惩罚的碰撞规避）。我们报告碰撞、间隙、跟踪和平滑性，并标注 B 与 P 之间的显著差异。为对环境和机器人连杆建模，我们采用一种适用于胶囊体基元的可微碰撞检测算法 [46],，如图 2 所示。

自主评估任务与环境：我们在杂乱环境中评估 BarrierIK，以考察其表现和泛化能力。首先，我们进行

表 I：自主轨迹评估（均值 ± 标准差）。对于最小间隙，数值越大越好（负值 ⇒表示穿透）。对于所有其他指标，数值越小越好。**粗体** 表示 B 与 P 之间的差异具有统计显著性（N 仅作参考，不纳入显著性分析检验）。

Task	求解器	#碰撞	最小间隙 [m]	违规时间 [%]	位置误差 [m]	姿态误差 [°]	任务加加速度 [m/s^3]	关节加加速度 [rad/s^3]
货架	N	44.13 ± 9.74	-0.162 ± 0.016	24.52 ± 1.19	0.020 ± 0.001	4.15 ± 0.07	4.197 ± 0.354	48.15 ± 2.89
	P	19.30 ± 5.85	-0.171 ± 0.017	4.26 ± 5.22	0.049 ± 0.018	**4.50 ± 0.12**	6.518 ± 0.738	**57.22 ± 3.35**
	B	16.80 ± 4.31	**-0.153 ± 0.020**	**0.53 ± 0.19**	0.043 ± 0.009	4.76 ± 0.49	**6.037 ± 0.496**	65.89 ± 6.22
动态	N	13.43 ± 3.30	-0.091 ± 0.025	56.25 ± 16.62	0.002 ± 0.004	7.26 ± 0.13	2.835 ± 0.437	45.55 ± 3.51
	P	1.55 ± 1.80	-0.033 ± 0.022	4.04 ± 9.17	0.023 ± 0.015	**7.35 ± 0.25**	**3.219 ± 0.911**	**33.62 ± 6.25**
	B	2.05 ± 3.74	-0.024 ± 0.022	**0.84 ± 1.92**	**0.017 ± 0.010**	8.13 ± 1.32	5.949 ± 1.927	54.47 ± 4.92

N = 基线 N（无碰撞规避 ；P =基线 P（基于目标的碰撞规避）；**B = BarrierIK（本文方法）**（基于控制屏障函数的碰撞规避 e)

自主滚动执行两项互补任务——（i）间隙狭窄的货架/框架场景，以及（ii）障碍物按指定方式运动的动态障碍物场景——每项任务都旨在考验行为的不同方面，例如最小间隙、违规时间、位姿跟踪和平滑性。随后，我们在有人参与的遥操作设置中测试 BarrierIK。所有控制器采用相同的非环境目标函数；BarrierIK 的唯一区别是在逆运动学层强制保证控制障碍函数安全性，并使用相同的安全裕度 ϵ。

在**动态障碍物（DO）**任务中，三个圆柱形障碍物以不同相位沿相互正交的前后、左右和垂直轴振荡（速度上限为 0.025 m/s），偶尔会靠近工具。末端执行器保持在中心附近，主要通过旋转进行调整，以模拟相机/工具重新定向，并考验系统对移动约束的响应能力。**框架/货架（FS）**任务包含一个类似货架的矩形框架，框架上有由垂直圆柱杆分隔的四个大型“窗口”，用于模拟工具插入任务。末端执行器必须依次穿过每个开口，并采用不同的姿态。窗口之间的过渡被刻意设计得较为困难：参考轨迹会轻微穿入框架边缘，以检验控制器能否在不牺牲跟踪保真度的情况下保持间隙。对于每项任务，我们都指定航点，并生成经过时间参数化的末端执行器轨迹。所有逆运动学求解器都跟踪相同的预定义轨迹。

我们开展了一项**基于虚拟现实的遥操作用户研究**，以评估所提出的共享自主框架。研究中，参与者通过 HTC Vive 手持控制器在 Unity3D 中操控一台七自由度机械臂，如图 2 所示。任务是在杂乱环境中拾取三个彩色编码立方体并将其放入篮子。具体而言，参与者需要拾取三个彩色编码立方体，并将它们放入指定的篮子。环境经过刻意布置，杂乱无序，因此参与者必须精准绕过障碍物才能完成任务。十名参与者（6 名男性、3 名女性、1 名非二元性别；平均年龄：27.9 ± 3.14）在六种配置下完成了试验：(i) 不含共享自主的基线 N（N）；(ii) 不含共享自主的基线 P（P）；(iii) 不含共享自主的 BarrierIK（B）；(iv) 含共享自主的基线 N（SA-N）；(v) 含共享自主的基线 P（SA-P）；以及 (vi) 含共享自主的 BarrierIK（SA-B）。参与完全自愿，并在研究开始前取得知情同意；所有数据均以匿名方式收集和分析，且未收集任何个人身份信息。每位参与者完成了五次零样本试验，每种条件各进行一次，且此前未接受任务特定训练。试验开始前安排了 3 分钟的熟悉阶段。每位参与者的条件顺序均经过随机化，以避免学习效应。每次试验的时限为 3 分钟，最多允许发生五次碰撞；超过任一限制即判定失败。如果物体掉落到工作空间之外，该次试验也会被判定为失败。

完整流程——包括仿真、共享自主控制和逆运动学求解——以 90 Hz 运行，以匹配虚拟现实头显的刷新率。尽管计算后端支持更高频率，但渲染成为瓶颈。在上限为 100 Hz 的测试中，B 以 98.2 Hz（± 7.91）运行，P 以 99.0Hz（± 3.20）运行，而 N 固定以 100 Hz 运行（受实现限制）。所有计算均在 CPU（Intel®CoreT M i7-14700F）上运行；为兼容 SteamVR 和缺乏稳定 CUDA 支持的 Windows 版 JAX，未启用 GPU 加速。

评估指标：我们报告自主滚动执行和遥操作中的客观与主观指标。

在**自主滚动执行设置**中，我们评估三种逆运动学求解器——基线 N（N）、基线 P（P）和 BarrierIK（B）——在两项具有挑战性的任务中的表现。所有控制器采用相同的非环境目标函数；它们的差异仅体现在处理避障的方式上。我们报告以下指标，数值为采用随机种子的 40 次试验的平均值：(i)碰撞次数：轨迹中连杆与障碍物碰撞的总次数；(ii) 最小间隙：任意机器人连杆 ℓ 与任意障碍物 o之间的最小有符号距离 $\min_{\ell,\,o}\phi_{\ell o}(\boldsymbol{\theta})$；(iii) 违规时间百分比：任意 $\phi_{\ell o} < 0$ 的时间步所占百分比，表示发生了穿透；(iv) 位置误差和 方向误差：执行的末端执行器轨迹与参考轨迹之间的平均欧氏误差和旋转误差（四元数）；(v)任务加加速度：末端执行器位置三阶导数幅值的时间平均值，反映笛卡尔运动平滑度；(vi)关节加加速度：关节空间加加速度的时间平均幅值 ... $\boldsymbol{\theta}(t)$，用于表征低层驱动平滑度。评估时使用 HPP-FCL [48]，进行碰撞检测；这是一种高保真几何邻近库，能够计算凸胶囊模型之间的有符号距离。

在**遥操作实验**中，参与者在 VR 中遥操作机器人。我们评估三种求解器——BaselineN、基线 P 和 BarrierIK——在有无共享自主功能时的任务效率和安全性。

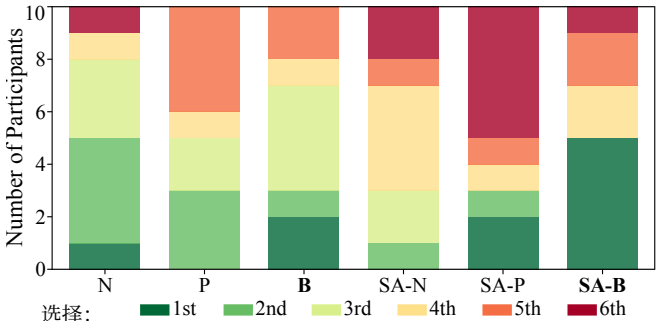

图3：堆叠条形图展示了将每种控制器配置从第1到第6选择进行排名的参与者人数。条形中的每个颜色分段表示在相应排名上选择该配置的用户数量。

作为目标函数指标，我们报告：(i)成功率：成功放置全部三个物体且未超出时间或碰撞限制的试验所占百分比；(ii) 完成时间（仅统计成功试验），从人首次移动 t_i 到最终放置 t_f所用的时间；(iii) Unity PhysX 的碰撞次数 。求解器内部使用基于 JAX 的可微碰撞模型，而 Unity 引擎则提供实时接触检测以及用户反馈/可视化。遥操作中，我们不报告位置/姿态跟踪误差和运动抖动，因为人的行为差异较大，这些底层指标对比较而言诊断价值较低。

为基于主观指标评估感知可用性，我们在每种配置之后施测了经过修改的NASA任务负荷指数（TLX） [49]，其中所有维度均被反转，从而使更高的分数表示更有利的结果。反转后的量表包括身体需求（I-PD）、时间需求（I-TD）和心理需求（I-MD）、感知努力（I-EFF）、挫折感（I-FL）以及感知绩效（I-PER）。我们进一步用共享自主特有的维度扩展了TLX，即感知控制水平（CL）、辅助（AL）和安全性（SL）。这些评分以极坐标图进行可视化，其中更大的面积代表更有利的用户体验。最后，参与者在完成所有试验后，提供了六种配置从最偏好到最不偏好的排名列表。

V. 结果

本节展示了我们在自主和遥操作场景下的实验结果。我们使用标准的安全性和表现指标，将 BarrierIK 与基线方法进行评估，并报告定量结果和用户研究结果。

自主轨迹 - 评估结果： 在两个场景中，**B** 的违规时间显著更短，且最小间隙负值更小，优于**P**，这表明即使发生接触，其持续时间也更短、程度也更轻。**B** 残留的违规时间源于离散时间的位置更新和 SLSQP 的局部线性化，这可能导致控制步骤之间出现瞬时数值穿透。从实际效果来看，控制器不会在边界附近徘徊，而是迅速返回安全集——也就是说，它
从不利状态中恢复，而不是卡在约束条件上。

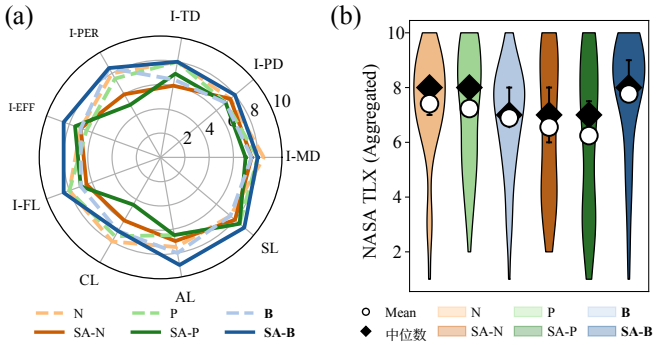

图 4：不同遥操作配置下的主观工作负荷与可用性。**(a)** 修订版 NASA-TLX 维度的极坐标（“雷达”）图——身体需求（I-PD）、时间需求（I-TD）、心理需求（I-MD）、表现（I-PER）、努力程度（I-EFF）、挫折感（I-FL）、控制水平（CL）、辅助水平（AL）和安全水平（SL）；其中“I-”表示量表已反向处理，因此数值越大，评价越有利。(**b)** 各配置下参与者汇总 NASA-TLX 得分的小提琴图（均值○，中位数 ♦），量表上方表示工作负荷较低（支持度较高）。

遥操作 - 主观结果： 参与者明显分成两类：一类偏好**N**（无辅助），另一类偏好**SA-B** （结合 BarrierIK 的共享自主）（图 3）。这两种配置处于自主性谱系的两端，但都带来了良好的体验，这表明感知到的质量不仅取决于辅助如何与操作员互动，也取决于辅助的程度 。

在反向计分的 NASA–TLX 雷达图（图 4a）中，**N** 和 **SA-B**覆盖的面积最大：感知到的心理、身体、时间需求、努力程度和 挫折感较低，同时控制水平、辅助水平和自评安全水平较高。值得注意的是，**SA-B** 的响应集中在有利区域附近，这表明具备约束感知能力的辅助可以降低工作负荷，同时不损害自主性；这一点与较高的控制水平以及较高的辅助水平和安全水平相一致。相比之下，中等程度的共享自主模式（**SA-N**、**SA-P**）呈现出较小且更分散的分布，反映出评价不一：当辅助偏离用户意图时，操作员会报告控制感减弱、感知到的支持度降低。

为综合比较各维度，我们将反向计分后的工作负荷得分与 CL/AL/SL 汇总为一项综合指标（图 4）。**SA-B** 的平均得分最高，其次是**N**。**SA-B**的得分分布似乎也更集中，表明各参与者感知到的工作负荷减轻程度更为一致。在 n=10 的条件下，采用 Nemenyi 事后检验的 Friedman 检验未发现显著的两两差异（均为 p>0.05），因此应将观察到的模式视为趋势性迹象，而非确凿结论。尽管如此，结果仍呈现出一致的倾向：操作员要么偏好**N**的透明性和可预测性，要么偏好**SA-B**一致且能顾及约束的引导。

我们将结果解读如下：如果系统优先考虑安全性，且参与者能够保留控制权，他们就会接受帮助。在逆运动学层应用控制屏障函数，可引导动作

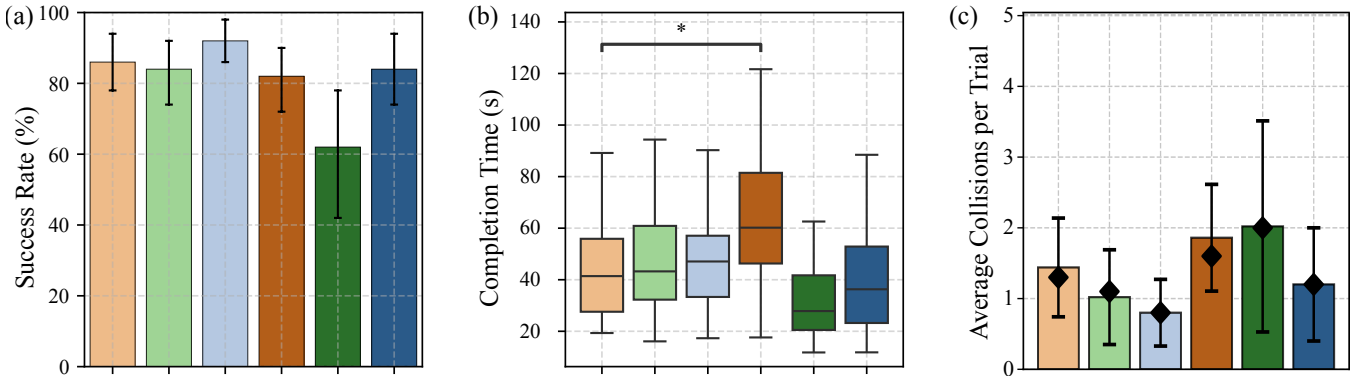

图5：六种系统配置的目标函数评估。子图**(a)–(c)** 展示表现和安全性指标：成功率（越高越好）、任务完成时间（越短越好，仅统计成功试验）和碰撞次数（越少越好）。 ♦ 表示中位数，星号表示具有统计显著性： $^{*}\ p < .05$, $^{**}\ p < .01$, $^{***}\ p < .001$。

在安全且可行的区域内调整，而不是凌驾于操作员之上。因此，**SA-B**在 CL（控制）、AL（辅助）和 SL（安全性）方面的得分优于**SA-N/SA-P**。

遥操作 - 目标函数结果： 对于成功率，大多数配置的结果集中在 ∼80%左右；**SA-P**是例外，其平均成功率较低且变异性较高（图5a）。非辅助的**B** 配置呈现出较高的成功率中位数，且四分位距更小；不过，在当前样本量下，成对差异不具有统计显著性。就完成时间而言（仅统计成功试验），**SA-P**在成功试验中似乎更快（图5b），但这反映的是排除了失败试验，而非其本身具有更高的效率。对于碰撞，无结构的辅助往往会增加杂乱环境中的接触点。**SA-N** 和**SA-P** 的碰撞次数均高于对应的非 SA 配置（图5c）。在共享自主模式中，**SA-B** 能够减少碰撞，而**B** （无 SA）在碰撞原始计数方面总体表现最佳。

VI. 结论与未来工作

我们提出了一种分层共享自主框架，将目标导向引导与逆运动学层级安全保障分开。安全层 **BarrierIK（B）**将控制障碍函数与基于优化的逆运动学相结合，以便在混合人类与自主输入之后系统地保障安全。我们的评估包括：（i）在具有代表性的杂乱场景中进行自主滚动执行；（ii）开展有共享自主和无共享自主的 VR 遥操作研究。在自主滚动执行中，与基于代价的基线方法 **P**相比，**B**始终能减少违规时间，并带来较不负面的最小间隙。这些发现表明，边界接触的持续时间更短、程度更轻，且能够更可靠地恢复至安全集。在遥操作中，**SA-N**、**SA-P**这类不含逆运动学层级安全滤波器的辅助方式，在杂乱场景中的结果往往较差（例如成功率更低、碰撞更多）；而我们的方法**SA-B** 则恢复了安全性，并维持了用户接受度。综合主观和客观标准来看，该方法的总体表现最为均衡。鉴于样本量有限，我们不对碰撞次数的两两比较作显著性判断，而是将这些模式视为一致的趋势

这与我们预先设定的假设相符：将混合指令从控制屏障函数投影到安全集，能够在提升约束满足度并维持用户满意度的同时，保持任务性能。

局限性： 将安全性视为硬约束可能导致绕行；在我们的研究中，这表现为 **SA-B** 的平均关节加加速度较高。尽管违规时间和间隙均有所减少，但这种安全性与平滑性的权衡对于接触敏感任务而言可能并不理想。我们的控制屏障函数实现是离散的，并且在动态场景中未纳入障碍物速度估计；障碍物移动时，由此产生的安全集可能过于保守。屏障函数的设计选择（例如 class-$\mathcal{K}$ 函数及其整形方式）会显著影响干预行为，且未针对不同用户或场景进行调优。最后，虽然控制屏障函数通常在速度／力矩空间中定义，但我们的遥操作系统运行于位置空间；因此，我们通过当前末端执行器位姿与共享自主目标之间的时间差分来近似任务空间速度。这种短视的逐步近似使逆运动学层能够以实时遥操作速率实施控制屏障函数约束，但可能无法捕捉更长时域结构。

未来工作：我们计划在实体硬件上进行部署，并直接测量接触停留时间以量化恢复效果；将速度观测器纳入系统，以在线更新动态控制屏障函数约束；并通过更大规模的用户研究，探究类别-$\mathcal{K}$ 选择和自适应整形对用户接受度及干预率的影响。总体而言，结果表明，基于优化的逆运动学求解器能够配备控制屏障函数约束，从而在遥操作频率下提供短视安全感知，并在杂乱环境中实现保留意图、感知约束的辅助。

参考文献

[1] M. Selvaggio、M. Cognetti、S. Nikolaidis、S. Ivaldi和B. Siciliano，“物理人机交互中的自主性：简要综述”，*IEEE*机器人与自动化快报，第6卷，第4期，第7989–7996页，2021年。[2] A. D. Dragan和S. S. Srinivasa，“共享控制的策略融合形式体系”，《国际机器人研究杂志》，第32卷，第7期，第790–805页，2013年。[3] K. Muelling、A. Venkatraman、J.-S. Valois、J. E. Downey、J. Weiss、S. Javdani、M. Hebert、A. B. Schwartz、J. L. Collinger和J. A. Bagnell，“融入自主性的遥操作及其在脑

机接口控制的操作”，《自主机器人》，第41卷，第1401–1422页，2017年。[4] H. J. Jeon、D. P. Losey和D. Sadigh，“基于学习潜在动作的共享自主”，arXiv预印本 arXiv:2005.03210，2020年。[5] D. Gopinath、S. Jain和B. D. Argall，“辅助机器人技术中共享自主的人在回路优化”，IEEE机器人与自动化快报，第2卷，第1期，第247–254页，2016年。[6] P. Song、P. Li、E. Aertbeli¨en和R. Detry，“Robot Trajectron：基于轨迹预测的机器人操作共享控制”，见2024年IEEE国际机器人与自动化会议（ICRA）。IEEE，2024年，第5585–5591页。[7] U. Atan、V. R. Bharadwaj和C. Jiang，“辅助机器人操作中基于技能的共享自主的概率推断方法”，IEEE机器人与自动化快报，第10卷，第9期，第9518–9525页，2025年。[8] S. Javdani、S. S. Srinivasa和J. A. Bagnell，“通过事后优化实现共享自主”，《机器人科学与系统：在线会议录》，第2015卷，第10–15 607页，2015年。[9] S. Javdani、H. Admoni、S. Pellegrinelli、S. S. Srinivasa和J. A. Bagnell，“面向遥操作与团队协作的事后优化共享自主”，《国际机器人研究杂志》，第37卷，第7期，第717–742页，2018年。[10] S. Nikolaidis、Y. X. Zhu、D. Hsu和S. Srinivasa，“共享自主中的人机相互适应”，见2017年ACM/IEEE国际人机交互会议论文集，2017年，第294–302页。[11] M. Khoramshahi和A. Billard，“物理人机交互中任务适应的动力系统方法”，《自主机器人》，第43卷，第927–946页，2019年。[12] M. Allenspach、M. Pantic、R. Girod、L. Ott和R. Siegwart，“工业人机交互中的任务适应：利用黎曼运动策略”，arXiv预印本 arXiv:2406.17333，2024年。[13] A. Gottardi、S. Tortora、E. Tosello和E. Menegatti，“基于改进势场的机器人遥操作共享控制”，《IEEE人机系统汇刊》，第52卷，第3期，第410–422页，2022年。[14] O. Khatib，“机械臂与移动机器人的实时避障”，《国际机器人研究杂志》，第5卷，第1期，第90–98页，1986年。[15] ——，“机器人机械臂运动与力控制的统一方法：操作空间公式”，《IEEE机器人与自动化杂志》，第3卷，第1期，第43–53页，2003年。[16] J. Nakanishi、R. Cory、M. Mistry、J. Peters和S. Schaal，“操作空间控制：理论与实证比较”，《国际机器人研究杂志》，第27卷，第6期，第737–757页，2008年。[17] N. D. Ratliff、J. Issac、D. Kappler、S. Birchfield和D. Fox，“黎曼运动策略”，arXiv预印本 arXiv:1801.02854，2018年。[18] C.-A. Cheng、M. Mukadam、J. Issac、S. Birchfield、D. Fox、B. Boots和N. Ratliff，“RMP流：用于自动运动策略生成的计算图”，载于《机器人学算法基础 XIII》：第13届机器人学算法基础研讨会论文集13。施普林格，2020年，第441–457页。[19] D. Rakita、H. Shi、B. Mutlu和M. Gleicher，“CollisionIK：一种用于生成具有环境碰撞规避的机器人运动的逐时刻位姿优化方法”，见2021年IEEE机器人与自动化国际会议（ICRA）。IEEE，2021年，第9995–10 001页。[20] Y. Wang、P. Praveena、D. Rakita和M. Gleicher，“RangedIK：一种面向范围目标任务的基于优化的机器人运动生成方法”，见2023年IEEE机器人与自动化国际会议（ICRA）。IEEE，2023年，第9700–9706页。[21] A. D. Ames、J. W. Grizzle和P. Tabuada，“基于控制障碍函数的二次规划及其在自适应巡航控制中的应用”，见第53届IEEE决策与控制会议。IEEE，2014年，第6271–6278页。[22] A. D. Ames、X. Xu、J. W. Grizzle和P. Tabuada，“面向安全关键系统的基于控制障碍函数的二次规划”，《IEEE自动控制汇刊》，第62卷，3876，2016年 8，3861 第 页 – 。[23] A. D. Ames、S. Coogan、M. Egerstedt、G. Notomista、K. Sreenath和P. Tabuada，“控制障碍函数：理论与应用”，见2019年第18届欧洲控制会议（ECC）。Ieee，2019年，第3420–3431页。[24] B. Xu和K. Sreenath，“动态无人机的安全遥操作，通过控制障碍函数”，载于《2018年IEEE机器人与自动化国际会议（ICRA）》。IEEE，2018年，第7848–7855页。[25] D. Zhang、R. Tron和R. P. Khurshid，“触觉反馈可提升共享自主遥操作中的人机一致性和用户满意度”，载于《2021年IEEE机器人与自动化国际会议（ICRA）》，2021年，第3306–3312页。[26] D. Zhang、G. Yang和R. P. Khurshid，“通过控制障碍函数实现无人机的触觉遥操作”，《IEEE触觉学汇刊》，第13卷，第1期，第109–115页，2020年1月。[27] W. Qin、H. Yi、Z. Fan和J. Zhao，“基于控制障碍函数、带交互力约束的遥操作触觉共享控制框架”，《传感器》，第25卷，第2期，2025年。 [在线]。网址：https://www.mdpi.com/1424 8220 25 2 405 - / / / B. He、M. Ghasemi、U. Topcu和L. Sentis，“一种用于安全人机共享自主的障碍函数对方法”，载于《2021年第60届IEEE决策与控制会议（CDC）》。IEEE，2021年，第2854–2861页。[29] D. Morton和M. Pavone，“采用操作空间控制障碍函数实现安全、任务一致性操作”，2025年。 [在线]。网址：https://arxiv.org/abs/2503 06736 。G. Maeda，“用于辅助遥操作共享控制的基元策略融合”，载于《2022年国际机器人与自动化会议（ICRA）》。IEEE，2022年，第9332–9338页。[31] S. Jain和B. Argall，“面向辅助机器人技术中共享自主的概率式人类意图识别”，《ACM人机交互汇刊》（THRI），第9卷，第1期，第1–23页，2019年。[32] M. Ewerton、O. Arenz和J. Peters，“在变化环境中借助虚拟引导混合体实现辅助遥操作”，《先进机器人学》，第34卷，第18期，第1157–1170页，2020年。[33] P. Trautman，“复杂动态环境中的辅助规划：一种概率方法”，载于《2015年IEEE系统、人类与控制论国际会议》，2015年，第3072–3078页。[34] Y.-S. Jiang、G. Warnell和P. Stone，“导航车辆中响应式共享自主的目标融合”，《AAAI人工智能会议论文集》，第35卷，第7期，第5939–5947页，2021年5月。 [在线]。网址：https: //ojs.aaai.org/index.php/AAAI/article/view/16742 M. C. Fontaine和S. Nikolaidis，“以质量多样性方法自动生成共享自主中的人机交互场景”，CoRR，卷abs/2012.04283，2020年。 [在线]。网址：https://arxiv.org/abs/2012 04283 。S. A. Bowyer、B. L. Davies和F. Rodriguez y Baena，“主动约束/虚拟夹具：综述”，《机器人学汇刊》，第30卷，第1期，第138–157页，2014年2月。 [在线]。网址：https://doi.org/10.1109/ TRO.2013.2283410[37] J.-H. Ryu、D.-S. Kwon和B. Hannaford，“采用时域无源性控制的稳定遥操作”，《IEEE机器人学与自动化汇刊》，第20卷，第2期，第365–373页，2004年。[38] S. Manschitz、B. G¨uler、W. Ma和D. Ruiken，“用于辅助遥操作的基于采样的抓取与碰撞预测”，载于《2025年IEEE机器人与自动化国际会议（ICRA）》。IEEE，2025 [ ] 2504 18186 。在线。网址：https://arxiv.org/abs/。A. A. Maciejewski和C. A. Klein，“动态变化环境中运动学冗余机械臂的避障”，《国际机器人研究杂志》，第4卷，第3期，第109–117页，1985年。 [在线]。网址：https://doi.org/10 1177 027836498500400308 。/ J. Ashkanazy、A. Spalter、J. Hays、L. Hiatt、R. Leontie和C. G. Henshaw，“通过二次规划优化实现无碰撞逆运动学（IKinQP）”，2023 [ ] 2308 15268 。在线。网址：https://arxiv.org/abs/。S. Marangoz、R. Menon、N. Dengler和M. Bennewitz，“DawnIK：用于异构多臂系统的分布式碰撞感知逆运动学求解器”，2023年。 [在线]。网址：https://arxiv.org/abs/2307 12750 。A. D. Ames、S. Coogan、M. Egerstedt、G. Notomista、K. Sreenath和P. Tabuada，“控制障碍函数：理论与应用”，CoRR，卷abs/1903.11199，2019年。 [在线]。网址：http://arxiv. org/abs/1903 11199 。D. Rakita、B. Mutlu和M. Gleicher，“RelaxedIK：实时合成精准且可行的机械臂运动”，载于《机器人学：科学与系统》，第14卷。匹兹堡，宾夕法尼亚州，2018年，第26–30页。[44] J. Bradbury、R. Frostig、P. Hawkins、M. J. Johnson、C. Leary、D. Maclaurin、G. Necula、A. Paszke、J. VanderPlas、S. Wanderman-Milne和Q. Zhang，“JAX：Python+NumPy程序的可组合变换”，2018年。 [在线]。网址：http://github. com/jax-ml/jax

[45]F. L. Ferretti、D. Ferigo、C. Sartore、A. Croci、O. G. Younis、S. Traversaro和D. Pucci，“通过物理一致的可微仿真实现硬件加速形态优化”，2025年。 [在线]。网址：https://github.com/ami-iit/jaxsim [46] K. Tracy、T. A. Howell和Z. Manchester，“Diffpills：针对胶囊体和填充多边形的可微碰撞检测”，2022年。 [在线]。网址：https://arxiv.org/abs/2207 00202 。D. Kraft，“算法：用于最优控制计算的TOMP—Fortran模块”，《*ACM*数学软件汇刊》，第20卷，第262–281页，1994年。[48] J. Pan、S. Chitta、D. Manocha、F. Lamiraux、J. Mirabel、J. Carpentier、L. Montaut、等，“Coal：灵活碰撞库的扩展”，https://github.com/coal-library/coal，2015—2024年。[49] S. G. Hart和L. E. Staveland，“NASA-TLX（任务负荷指数）的开发：实证与理论研究结果”，载于《心理学进展》。爱思唯尔，1988年，第52卷，第139–183页。