arXiv:2603.01711v1 [math.NT] 2 Mar 2026

黎曼ζ函数在临界线上的大偏差与矩的下界

LOUIS-PIERRE ARGUIN 和 NATHAN CREIGHTON

Abstract. 在 [AB24] 关于黎曼ζ函数在高度 T 处（临界线之外）的研究基础上，我们证明了临界线上实值大偏差的无条件下界，其阶为 $V \sim \alpha \log\log T$，对任意 $\alpha > 0$. 均成立。这为黎曼ζ函数分数阶矩已知最优的无条件下界提供了另一种证明，该下界由 [HS22] 给出。大偏差的下界与 [AB23], 对范围 $0 < \alpha < 2$. 证明的上界具有相同的数量级。

Contents

1. 引言 1 1.1. 主要结果 2 1.2. q 方面的结果 3 1.3. 证明的组织 3 1.4. 记号 4 2. 证明方法 4 2.1. 部分和及其限制 4 2.2. 定理 1.1 的证明 6 3. 命题 2.2 的证明 8 3.1. 事件 $G_{\mathscr{J}}$ 8 的近似 3.2. 实部部分和的扭曲矩 10 3.3. 估计受限期望 12 附录 A. 二阶和四阶扭曲平滑因子公式 21 附录 B. Steinhaus 模型中的概率 24 参考文献 25

1. Introduction

自塞尔伯格中心极限定理 [Sel46] 关于 $\log \zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)$以来，黎曼ζ函数在临界线 $\mathrm{Re}\ s = 1/2$ 上的取值分布一直是解析数论中的一个重要课题。特别值得关注的是，高斯行为在超出标准差量级 $\sqrt{\log\log T}$之后能在多大程度上持续。[Rad11] 中的定理 2 指出，对于 $\log|\zeta(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t)|$ 的偏差，直至 $(\log\log T)^{\frac{3}{5}}$，水平集的测度满足相同的渐近关系。然而，方差量级上的分布范围决定了黎曼ζ函数的矩的增长。这促使我们研究该范围内水平集的测度。

[1]关键词：黎曼ζ函数、水平集、大偏差、随机游走、随机矩阵理论[2]MSC2000：主分类 11M06，次分类 11M50、60G50、60G70、60B20

1.1. 主要结果。 我们证明了黎曼ζ函数在临界线上的水平集测度在量级 $\sqrt{\log\log T}$. 处的一个下界

定理 1.1. 设 $\alpha > 0$ 且 $V \sim \alpha$双对数 T. 那么，对于充分大的 T，有

$$\frac{1}{T}\left|\left\{t \in [0,T] : \log\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\right| > V\right\}\right| \geq K_\alpha \int_V^\infty \frac{e^{-\frac{y^2}{\log\log T}}}{\sqrt{\log\log T}}\mathrm{d}y, \tag{1.1}$$

其中常数 K_α 满足

$$K_\alpha \gg \left(C\alpha^2\log\alpha\right)^{-\alpha^2}, \tag{1.2}$$

当 $\alpha \to \infty$时，对于某个绝对常数 C，有。

在 $0 < \alpha < 2$范围内， [AB23] 无条件地证明了一个相差至多一个常数的匹配上界。借助 Soundararajan [Sou09], 开创的、将矩分解为水平集测度上的积分的方法，我们重新得到 [HS22] 和 [RS12], 中证明的所有分数阶矩下界，且常数相同。

推论 1.2. 设 $\alpha > 0$ 为任意正实数，且 T 充分大。那么，对于上述的K_α ，

$$\int_0^T |\zeta(1/2+\mathrm{i}t)|^{2\alpha}\mathrm{d}t \gg K_\alpha T\left(\log T\right)^{\alpha^2}. \tag{1.3}$$

在 [Sou09], Soundararajan 提到：我们的证明表明，对 $2k^{th}$ 矩的主要贡献来自 t 使得 $\zeta(1/2+\mathrm{i}t)$ 的大小为$(\log T)^k$，且该集合的测度约为 $T/(\log T)^{k^2}$。定理 1.1 证实了这一看法：这一范围内的取值确实以足够高的测度出现，从而产生这些矩。即使相应的矩界已知，仍需更多工作来逆转矩的分解，并得到关于水平集测度的结果。由分数阶矩的下界出发，Soundararajan 需要黎曼猜想才能得到上界，以及 [Sou09 中推论 B] 的如下下界大偏差结果：

$$\mathrm{meas}\left\{t \in [0,T] : \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\right| \geq (\log T)^k\right\} \geq T(\log T)^{-k^2+o(1)}. \tag{1.4}$$

定理 1.1 的主要目的是消除对黎曼猜想的依赖，并将其改进为得到无条件的高斯衰减，但我们更进一步，得到了在推论 1.2 中恢复矩界所需的常数。

请注意，在 [AB24], 中，作者针对实部为 $\sigma_0 = \frac{1}{2} + \frac{\delta(\alpha)}{\log T}$，的临界线外偏移位置，给出了大偏差的一个下界，其中参数 $\delta(\alpha)$ 足够大。通过凸性论证，这足以恢复临界线上的矩界，尽管常数 $\gg (C\alpha^{36}\log\alpha)^{-\alpha^2}$ 更大。相比之下，定理 1.1 将结果重新归于临界线上的大偏差，其常数与矩下界目前已知的最优结果中的常数相同。 [Rad11] 中的猜想 2 预言，事实上，定理 1.1 中取值范围的大偏差所对应的常数，与 Keating 和 Snaith 关于矩的猜想 [KS00] 中的常数一致。更确切地说，该常数应为算术因子 a_α 与几何因子 g_α 的乘积。正如 $\alpha \to \infty$ 所示，这些因子的表现类似于（ [CG01],[HR11]）

$$a_\alpha = (\log\alpha)^{-\alpha^2}\exp(O(\alpha^2)), \qquad g_\alpha = \alpha^{-\alpha^2}\exp(O(\alpha^2)). \tag{1.5}$$

The 常数 K_α 大约比这一猜想值大一倍。

1.2. 关于 q方面的结果。 该证明方法可以推广到许多其他L函数族，在这些函数族中，可以对两个不同的扭曲矩进行界估计：对低阶矩给出下界，对高阶矩给出上界。例如，可以利用该方法给出原始狄利克雷 L函数中心值大偏差的下界。为此，我们不再使用黎曼ζ函数的扭曲二阶矩和四阶矩，而是使用具有相同大模数的偶原始特征的 L函数中心值的扭曲二阶 [IS99],[BPRZ20] 矩和四阶 [Zac19] 矩。这得到以下定理。

定理 1.3。 设 $\alpha > 0$、 q 为大素数，且 $W \sim \alpha \log\log q$. 则

$$\frac{1}{\varphi^+(q)} \left| \left\{ \chi \text{ even primitive modulo } q : \log \left| L\left(\frac{1}{2}, \chi\right) \right| \geq W \right\} \right| \geq K_\alpha \int_W^\infty \frac{e^{-\frac{y^2}{\log\log q}}}{\sqrt{\log\log q}} \mathrm{d}y, \tag{1.6}$$

其中常数 K_α 满足方程(1.2)中的界。

这与 [AC25, 定理 1.1] 中证明的上界相符。 $0 < \alpha < 1$. 在[IS99, 第 7], 节中证明，当 q模数较大时，在偶本原特征中，有正比例的中心 L值为 $\gg (\log q)^{-\frac{1}{2}}$（因此不为零）。通过使用柯西-施瓦茨不等式比较中心值的一阶与二阶磨光矩，他们得出结论：若没有正比例的大中心值，这些结果就不可能同时成立。这一思路贯穿定理 1.1 的证明；我们以 Paley-Zygmund 不等式的形式使用柯西-施瓦茨不等式（见 [Roc24, 第 2.3 节.1]）。该不等式指出，对于具有有限二阶矩的非负随机变量 Z 以及参数 $0 < \delta < 1$，有

$$\mathbb{P}\left(Z \geq \delta \mathbb{E}\left[Z\right]\right) \geq (1-\delta)^2 \frac{\mathbb{E}[Z]^2}{\mathbb{E}[Z^2]}. \tag{1.7}$$

定理 1.3 与大固定模数下中心 L值的中心极限定理相符，参见例如 [Das22, 定理 4.2.1]。与推论 1.2 一样，这给出了固定模数下中心狄利克雷 L值所有正分数阶矩的下界。

推论 1.4。 设 q 为一个较大的素数， $\alpha > 0$ 为任意正实数。那么，对于方程 (1.2) 中的 K_α,

$$\frac{1}{\varphi^+(q)} \sum_{\chi \text{ even primitive mod } q} \left| L\left(\frac{1}{2}, \chi\right) \right|^{2\alpha} \gg K_\alpha \left(\log q\right)^{\alpha^2}. \tag{1.8}$$

1.3. 证明的组织。 定理 1.1 的证明依赖于 [ABR20], 的递归方案，如同 [AB23] 与 [AB24] 中那样。该方法通过在临界线上进行适当的磨光，用狄利克雷多项式的实部来逼近 $\log|\zeta|$ 。为了计算此类多项式的大矩，我们需要限制相应的部分和。这一点在第 2.1 节中有详细说明。为了在临界线上得到尖锐的下界，我们对磨光后的 ζ使用 Paley-Zygmund 不等式。该界随后通过计算扭曲的二阶矩与四阶矩得出，参见命题 2.2。这是本文技术性最强的部分，因为要改进常数，必须使用倾斜概率测度。命题 2.2 在第 3 节中证明。其中一个要素是命题 3.5，它

给出 ζ 之矩的精确估计，其扭曲并非来自一个狄利克雷多项式，而是来自一个狄利克雷多项式实部的多项式。这一辅助结果的证明见附录A。附录 B 汇集了证明中所需的随机 Steinhaus 模型的矩的结果。

1.4. 记号。 本文中，我们假设 t在区间 $[0,T]$ 上均匀分布，并将 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{E}$ 分别记作相应的期望。

我们不特别说明定理 1.1 中的绝对常数 C。因此，对于正函数 f 和 g，我们写作 $f \ll_\alpha g,$ 表示：对每个固定的 α，都存在一个常数 $C(\alpha)$，使得对所有充分大的 T，有 $f \le C(\alpha)g,$ 此外还存在一个绝对常数 $k,$ 使得对所有充分大的 $\alpha,$ 有

$$C(\alpha) \le \exp(k\alpha). \tag{1.9}$$

接着，我们用 $f \asymp_\alpha g$ 表示 $f \ll_\alpha g \ll_\alpha f.$

1.5. 致谢。 L.-P. Arguin 获得了 NSF DMS 2153803 和 EPSRC EP/Z535990/1 的资助。N. Creighton 获得了 EPSRC资助项目EP/W524311/1 的资助。N. Creighton 感谢 Madhurpana Das 的鼓励，并感谢她提供了自己的论文，其中包含关于一系列 L-函数的中心极限定理结果。两位作者都感谢 Jon Keating 在整个项目期间给予的鼓励，并感谢 Jad Hamdan 对先前稿件所做的细致审阅。为实现开放获取，作者已对本次投稿所产生的任何作者接受稿（AAM）版本采用知识共享署名（CC BY）公共版权许可

2. Method of Proof

2.1. 部分和及其限制。 本节将解释 [AB23], [AB24] 和 [AC25]中所考虑的部分和。为了控制 ζ的对数，我们对 $\eta > 0$ 定义如下部分和：

$$S^{(1)}(\eta,t) = \sum_{\log\log p<\eta} \frac{1}{p^{\frac12+it}}, \qquad S^{(2)}(\eta,t) = \sum_{\log\log p<\eta} \frac{1}{2p^{1+2it}}. \tag{2.1}$$

于是，$\log \zeta(\frac12 + it)$ 的组合近似式（舍弃平方以上素数幂所产生的有界贡献）为：

$$S(\eta,t) = S^{(1)}(\eta,t) + S^{(2)}(\eta,t). \tag{2.2}$$

我们预计，$S(\eta,\ t)$ 的大小将主要受到 $S^{(1)}(\eta,\ t)$的影响。上述各和中所考虑的最大素数将达到

$$T^* = T^{\frac{1}{\mathscr{R}(\alpha^2+1)}}, \tag{2.3}$$

对于某个较大的绝对常数 $\mathscr{R}$。如第2.2节将说明的那样，T^* 的选取取决于我们能够利用倾斜次数的最优选取$k_{j,\mathbf{u}}$ 在公式（3.8）中控制其分布的那些最大素数。我们无法证明，若直至 $p \le T^*$的增长在双对数尺度上服从线性增长，则对于大小为 V的大偏差，这种情形有机会持续到$p \le T$，因为我们对 T^*. 之外的素数没有任何控制。该证明转而表明，若直至 $p \le T^*$ 的部分和显著大于 V，比如说

$$V^* = V + \mathscr{A}(\alpha+1) \tag{2.4}$$

对于某个较大的常数 $\mathscr{A}$, 则log $\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\right|$的“完整和”有很大概率不会降到 V以下。由于我们必须在 T^*处而非 T处截断，并且目标是大小为 V^* 而非 V的部分和，我们并不期望这能为常数K_α给出一个精确值。

我们在双对数尺度上的值 n_j处将素数区间 $p \le T^*$ 划分开来，，并研究这些区间上的部分和

$$\mathscr{P}_j = \{p \text{ prime: } \log\log p \in [n_{j-1}, n_j)\}. \tag{2.5}$$

检查点 n_j 定义如下。令 $\mathscr{J}$ 为满足 $\log_{\mathscr{J}+2} T >$1000。的最大整数。对于缩放因子，$\mathbf{s} = 10^6$，我们对 $1 \le j \le \mathscr{J}$ 设定

$$n_j = \log\log T^* - \mathbf{s}\left(\log_{j+2} T - \log_{\mathscr{J}+2} T\right), \quad T_j = e^{e^{n_j}} = T^{\frac{1}{\mathscr{R}(\alpha^2+1)}\frac{\log^{\mathbf{s}}_{\mathscr{J}+1}}{\log^{\mathbf{s}}_{j+1}}}. \tag{2.6}$$

注意，$T_{\mathscr{J}} = T^*$。对于小素数，我们令 $\mathscr{P}_0$ 为满足 log log p 位于.....之间的素数集合

$$n_{-1} = -100, \quad \text{and} \quad n_0 = \frac{\log_4 T}{1000}.$$

对于 $0 \le j \le \mathscr{J}$ 的步骤 n_j，我们定义

$$S_j(t) = \mathrm{Re}(S(n_j, t)), \tag{2.7}$$

即为在区间端点处取值的方程 (2.2) 中定义的部分和的实部。对于 $1 \le j \le \mathscr{J}$，这些部分和应表现得像随机游走。有鉴于此，我们将证明，对于大多数满足 log|$\zeta(1/2+\mathrm{i}t)$|> V^* 的 t 值，部分和 $S_j(t)$ 应落在双对数尺度上的一条直线附近的一个小窗口内，该直线对应素数，且其近似斜率为

$$\kappa^* = \frac{V^*}{n_{\mathscr{J}}}. \tag{2.8}$$

更准确地说，为了控制 $\mathscr{P}_0$ 中的小素数，我们取平滑因子

$$M_0(t) = \sum_{p|n \Rightarrow p \in \mathscr{P}_0} \frac{\mu(n)}{n^{\frac{1}{2}+\mathrm{i}t}}, \tag{2.9}$$

以及限制条件

$$G_0 = \left\{|M_0(t)|^2 \in [L_0, U_0]\right\}, \tag{2.10}$$

with

$$L_0 = \exp\left(-2\kappa^* n_0\right) \text{ and } U_0 = \exp\left(-2\kappa^* n_0 + n_0^{\frac{2}{3}}\right). \tag{2.11}$$

这些界确定了 $|M_0(t)|^2 \approx \exp(-2S_0(t))$ 的一个区间；在给定 $S_{\mathscr{J}}(t) > V^*$ 的条件下，该区间具有较大的概率。

为得到精确估计，对 $S_j(t)$、 $j \ge 1$ 的限制必须取决于 $|M_0(t)|^2$ 的值。因此，我们将行走剩余部分的近似梯度定义为

$$\kappa[z] = \frac{V^* - z}{n_{\mathscr{J}} - n_0}, \ z > 0. \tag{2.12}$$

对于 $1 \le j \le \mathscr{J}$， n_j 处部分和的屏障由下式给出

$$\begin{aligned} L_j(z) &= z + \kappa[z](n_j - n_0) - 10^4 \log_{j+2} T, \\ U_j(z) &= z + \kappa[z](n_j - n_0) + 10^4 \log_{j+2} T. \end{aligned} \tag{2.13}$$

为了得到一个可供求和的离散区间集合，我们将区间 $[L_0, U_0]$ 划分为长度为 Δ_0^{-1}的区间，其中

$$\Delta_0 = e^{100 \max\{\alpha,1\} n_0}. \tag{2.14}$$

给定一个取值为 $|M_0(t)|^2$ 且位于 $[L_0, U_0]$中的值，我们将部分和一直到 T^* 均为良好的事件定义为

$$G_{\mathscr{J}} = G_0 \cap \left\{ S_j(t) \in [L_j\left(\mathfrak{n}\Delta_0^{-1}\right), U_j\left(\mathfrak{n}\Delta_0^{-1}\right)] \quad \forall 1 \le j \le \mathscr{J}, \quad \text{where } \mathfrak{n} = \lfloor -\Delta_0 \log |M_0(t)| \rfloor \right\}. \tag{2.15}$$

此后，我们将省略 $L_j(z)$ 和 $U_j(z)$ 对起点 z的隐式依赖，因为只有在 n_1 处，大 T时才可能出现显著偏差。

对于 $1 \le j \le \mathscr{J}$，我们将平滑因子设为：

$$M_j(t) = \sum_n \frac{e_j(n)}{n^{\frac{1}{2}+it}}, \tag{2.16}$$

其中，若 $p|n \Rightarrow p \in \mathscr{P}_j$，则 $e_j(n) = \mu(n)$，且 $\Omega_j(n) \le 5\alpha^2(n_j - n_{j-1})^{10^5}$,；否则为零。完整的平滑因子为

$$M(t) = \prod_{j=0}^{\mathscr{J}} M_j(t). \tag{2.17}$$

该狄利克雷多项式的长度为 $\ll T^{\frac{1}{1000}}$，其中（2.3）中的 $\mathscr{R}$ 取值足够大。事实将表明，对于 $\mathscr{P}_0$，其中的小素数而言，我们并不具备很强的高斯行为，因此扭曲必须较长，且平滑因子 M_0 不能截断。相反，对于较大的 j，平滑因子必须较短，以产生较短的扭曲；但这是允许的，因为素数相位表现出更强的高斯行为。对位于屏障中的部分和进行严格控制，就对应于对平滑因子的逐点界。

引理 2.1。 对于 $t \in G_{\mathscr{J}}$，我们有 $|M(t)|^2 \asymp_\alpha e^{-2L_{\mathscr{J}}}$.

证明。 该证明源于修改平滑因子每个区段 $M_j(t)$ 上的逐点界，这些逐点界来自 [ABR20 中的引理 23]，并以良事件 $G_{\mathscr{J}}$. 为条件。将这些逐点界在所有区间 $\mathscr{P}_j$（其中 $0 \le j \le \mathscr{J}$）上相乘，即可完成证明。□

2.2. 定理 1.1 的证明。 我们假设 $\alpha \ge 1$。对该方法稍作调整，即可得到关于 $K_\alpha \asymp 1$ 的界，其中 $\alpha \to 0^+$。从这里开始，为简化记号，我们省略 ζ 和 M 对 t 的隐含依赖。在事件 $G_{\mathscr{J}}$上进行限制后，我们得到 $\mathbb{P}(\log|\zeta| > V)$的如下下界。

$$\mathbb{P}\left(\{\log|\zeta| > V\} \cap G_{\mathscr{J}}\right) = \mathbb{P}(|\zeta|^2 > e^{2V} | G_{\mathscr{J}}) \cdot \mathbb{P}(G_{\mathscr{J}}) \ge \mathbb{P}(|\zeta M|^2 > e^{2(V - L_{\mathscr{J}})} | G_{\mathscr{J}}) \cdot \mathbb{P}(G_{\mathscr{J}} \tag{2.18}$$

利用 Paley-Zygmund 不等式 (1.7) 可以得到条件概率的一个下界：

$$\mathbb{P}(|\zeta M|^2 > e^{2(V - L_{\mathscr{J}})} | G_{\mathscr{J}}) \ge (1-\delta)^2 \frac{\mathbb{E}[|\zeta M|^2 | G_{\mathscr{J}}]^2}{\mathbb{E}[|\zeta M|^4 | G_{\mathscr{J}}]}, \tag{2.19}$$

其中

$$\delta = \frac{\exp(2V - 2L_{\mathscr{J}})}{\mathbb{E}[|\zeta M|^2 | G_{\mathscr{J}}]}. \tag{2.20}$$

根据 $T_{\mathscr{J}}$ 以及光滑因子的定义，我们预期事件 $G_{\mathscr{J}}$，它仅依赖于素数 $p \le T_{\mathscr{J}}$，将与光滑化值 $|\zeta M|^2$. 去相关。因此我们应当有上述结果为

$$(1-\delta)^2 \frac{\mathbb{E}\left[|\zeta M|^2\right]^2}{\mathbb{E}\left[|\zeta M|^4\right]} \asymp_\alpha \frac{(\log T_{\mathscr{J}})^2}{(\log T)^2} (1-\delta)^2 \gg_\alpha 1.$$

为了确保 $\delta < 1$，由于 $L_{\mathscr{J}} = V^* - O(1)$，我们需要取 V^* 略大于 V。

尚需估计 $\mathbb{P}(G_{\mathscr{J}})$。这里，我们可以借助于所有区间 $\mathscr{P}_j$上各素数处随机变量之和的分布的高斯近似结果，其方法是如 [AB24]中那样用多项式逼近示性函数。所得高斯近似结果对区间 $\mathscr{P}_j$，在 $j \ge 1$，时渐近成立，但对于 $\mathscr{P}_0$，中的小素数，我们还会得到来自方程 (1.5)的算术因子 a_α 。因此我们预期:

$$\mathbb{P}(G_{\mathscr{J}}) \asymp_\alpha a_\alpha \frac{e^{-\frac{V^{*2}}{\log\log T_{\mathscr{J}}}}}{\sqrt{\log\log T_{\mathscr{J}}}} \asymp_\alpha a_\alpha e^{-2\alpha^2\log\alpha + (2\mathscr{A}+4\gamma)\alpha^2} \cdot \frac{e^{-\frac{V^2}{\log\log T}}}{\sqrt{\log\log T}}. \tag{2.21}$$

然而，我们无法直接将示性函数$\mathbf{1}(G_{\mathscr{J}})$用作扭曲并转向随机 Steinhaus 模型，而必须改为将这些限制转化为狄利克雷多项式。事件 $G_{\mathscr{J}}$ 与塞尔伯格中心极限定理所预示的、大小为 $\sqrt{\log\log T}$ 的典型偏差相比极为罕见，因此，用于检测大偏差所需的狄利克雷多项式次数非常高。这意味着我们必须在相对较小的素数处截断部分和，才能得到适用均值定理的可接受扭曲。在[AB24], 中，这种截断发生在 T^{1/α^m} 处，其中幂次 m 远大于 2，因而导致更差的常数。然而，由于我们采用倾斜，而非仅仅依赖处处接近 1 的示性函数，因此可以使用较短的多项式，从而能够将素数控制到 $T_{\mathscr{J}} = T^{\mathscr{R}(\alpha^2+1)}$。下一节将证明下面的命题，其中给出了 $\mathbb{P}(G_{\mathscr{J}})$ 的界以及所需的期望。

命题 2.2。 对于 (2.15) 中的事件 $G_{\mathscr{J}}$，我们有

$$\mathbb{P}(G_{\mathscr{J}}) \asymp_\alpha (e^{-\gamma}\alpha^2\log\alpha)^{-\alpha^2} \frac{e^{-\frac{V^{*2}}{\log\log T}}}{\sqrt{\log\log T}}, \tag{2.22}$$

$$\mathbb{E}\left[|\zeta M|^2 \mathbf{1}\left(G_{\mathscr{J}}\right)\right] \asymp_\alpha (e^{-\gamma}\alpha^2\log\alpha)^{-\alpha^2} \frac{e^{-\frac{V^{*2}}{\log\log T}}}{\sqrt{\log\log T}} \ \textit{and} \tag{2.23}$$

$$\mathbb{E}\left[|\zeta M|^4 \mathbf{1}\left(G_{\mathscr{J}}\right)\right] \ll_\alpha (e^{-\gamma}\alpha^2\log\alpha)^{-\alpha^2} \frac{e^{-\frac{V^{*2}}{\log\log T}}}{\sqrt{\log\log T}}. \tag{2.24}$$

将期望 (2.22) 和 (2.23) 代入方程 (2.20)，注意到 $L_{\mathscr{J}} = V^* - O(1)$，并回想约定 (1.9)，可得

$$\delta \le \exp\left(2V - 2V^* + O\left(\alpha\right)\right). \tag{2.25}$$

因此，只需选择如 (2.4) 中所示的 $V^* = V + O(\alpha)$，即可确保 $\delta \le e^{-1}$。定理 1.1 的证明至此完成。

3. Proof of Proposition 2.2

命题 2.2 的证明基于以下方法：用在狄利克雷多项式实部处取值的多项式来近似良事件 $G_{\mathscr{J}}$ 的示性函数，并研究这些量的扭曲矩。我们将在第 3.1 节和第 3.2 节回顾这些工具。

3.1. 事件的近似 $G_{\mathscr{J}}$。

我们将区间 $[L_j, U_j]$ 划分为长度为 Δ_j^{-1} 的子区间，其中

$$\Delta_j = \left\lfloor \log_{j+1}^{10} T \right\rfloor. \tag{3.1}$$

从方程 (3.19) 可以看出，Δ_j 不能取大得多。关键观察是，Δ_j 不会随 α增长，这使我们能够将用于示性函数的狄利克雷多项式保持得较短。

为了得到下界，我们需要将屏障内的区域划分为若干区间的并集；对于每个 j，这些区间都包含在 $[L_j, U_j]$ 中。而为了得到上界，我们需要确保该并集覆盖$[L_j, U_j]$。因此，我们定义用于上界的集合 $\mathfrak{I}^+$ 以及用于下界的集合 $\mathfrak{I}^-$ 。我们取 $\mathfrak{I}^{\pm}$ 为满足以下条件的元组集合 $(u_0, ..., u_{\mathscr{J}})$：

- $u_j \Delta_j \in \mathbb{Z}$ 对每个 j,
- $u_0 \in [L_0 \mp \Delta_0^{-1}, U_0 \pm \Delta_0^{-1}]$ 并且
- $-\frac{1}{2}\log u_0 + \sum_{m=1}^{j} u_m \in [L_j \mp \Delta_j^{-1}, U_j \pm \Delta_j^{-1}]\ \forall 1 \le j \le \mathscr{J}$.

接下来我们需要理解这些增量

$$Y_j = S_j - S_{j-1}, \qquad 0 \le j \le \mathscr{J}. \tag{3.2}$$

我们根据这些量的取值进行划分

$$Z_j = \begin{cases} |M_0|^2 & j = 0, \\ Y_j & 1 \le j \le \mathscr{J}. \end{cases} \tag{3.3}$$

我们将取值 Z_j 与部分和 S_j 联系起来，如下所示:

(3.4)
$$\cup_{\mathbf{u}\in\mathfrak{I}^-}\{Z_j \in [u_j, u_j + \Delta_j^{-1}]\forall j\} \subset \left\{|M_0|^2 \in [L_0, U_0 + \Delta_0^{-1}],\ S_j \in [L_j, U_j + \Delta_j^{-1}],\ 1 \le j \le \mathscr{J}\right\},$$

and

(3.5)
$$\cup_{\mathbf{u}\in\mathfrak{I}^+}\{Z_j \in [u_j, u_j + \Delta_j^{-1}]\forall j\} \supset \{|M_0|^2 \in [L_0 + \Delta_0^{-1}, U_0],\ S_j \in [L_j + \Delta_j^{-1}, U_j],\ 1 \le j \le \mathscr{J}\}.$$

左侧的事件对于不同的元组而言基本上互不相交$\mathbf{u} \in \mathfrak{I}^{\pm}$. 因此我们观察到

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathbf{u}\in\mathfrak{I}^-} \mathbb{E}\left[|\zeta M|^2 \mathbf{1}(Z_j \in [u_j, u_j + \Delta_j^{-1}]\forall 0 \le j \le \mathscr{J})\right] \\ \le &\mathbb{E}\left[|\zeta M|^2 \mathbf{1}(G_{\mathscr{J}})\right] \\ \le &\sum_{\mathbf{u}\in\mathfrak{I}^+} \mathbb{E}\left[|\zeta M|^2 \mathbf{1}(Z_j \in [u_j, u_j + \Delta_j^{-1}]\forall 0 \le j \le \mathscr{J})\right]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

为了给每个期望取界，必须将示性函数转换为狄利克雷多项式。首先，我们必须进行倾斜，以缩短狄利克雷多项式所需的长度，从而得到一个可由命题 3.5 处理的扭曲。

处理大偏差的一种标准方法是引入指数倾斜，使相应的取值在倾斜测度下变得典型。为了改进常数，我们采用多项式倾斜，这更适合应用狄利克雷多项式均值定理。这种倾斜有效地降低了用于模拟示性函数的狄利克雷多项式所需的次数。

我们首先计算每个 $u \in \mathfrak{I}^-$. 的下界。$\mathbb{E}\left[|\zeta M|^2 \mathbf{1}(Z_j \in [u_j, u_j + \Delta_j^{-1}] \forall 0 \le j \le \mathscr{J})\right]$，我们不再计算，而是将部分和乘以区间 $\mathscr{P}_j$，每个部分和都取一个依赖于以下数值的幂：

$$z_{-1} = 0, \quad z_j = -\frac{1}{2}\log u_0 + \sum_{k=1}^{j} u_k, \quad 0 \le j \le \mathscr{J}. \tag{3.7}$$

我们考虑倾斜期望 $\mathbb{E}\left[|\zeta M|^2 \prod_{j=0}^{\mathscr{J}} Y_j^{2k_{j,\mathfrak{u}}} \mathbf{1}(Z_j \in [u_j + \Delta_j^{-a}, u_j + \Delta_j^{-1}])\right]$，其中

$$k_{j,\mathfrak{u}} = \lfloor \kappa^*(z_j - z_{j-1}) \rfloor, \quad \text{for } 0 \le j \le \mathscr{J}. \tag{3.8}$$

因此，$k_{j,\ \mathfrak{u}} = \lfloor \kappa^* u_j \rfloor$ 对于 $1 \le j \le \mathcal{J}$，以及 $k_{0,\ \mathfrak{u}} = \lfloor -\frac{\kappa^*}{2}$对数 $u_0 \rfloor$。如果我们有接近给定目标区间 $\mathfrak{u} \in \mathfrak{I}^{\pm}$ 的数值，那么以下关键引理表明，我们可以将倾斜的取值精确到相差 $\asymp_\alpha$ 个因子的范围内。

引理 3.1. 设 $\mathfrak{u} \in \mathfrak{I}^{\pm}$ 和 $c_{-1}, c_0, ..., c_{\mathscr{J}}$ 为满足以下条件的实数

- $c_{-1} = 0$
- $|c_j - z_j| \le 100$ 对每个 $0 \le j \le \mathscr{J}$.

则 $\prod_{j=0}^{\mathscr{J}} (c_j - c_{j-1})^{2k_{j,\ \mathfrak{u}}} \asymp_\alpha \mathfrak{c}_{\mathfrak{u}}$，其中

$$\mathfrak{c}_{\mathfrak{u}} = \prod_{j=0}^{\mathscr{J}} (z_j - z_{j-1})^{2k_{j,\mathfrak{u}}}. \tag{3.9}$$

证明。 通过对矩进行泰勒展开，我们得到 (3.10
)

$$\prod_{j=0}^{\mathscr{J}} \left(\frac{c_j - c_{j-1}}{z_j - z_{j-1}}\right)^{2k_{j,\mathfrak{u}}} = \exp\left(\sum_{j=0}^{\mathscr{J}} 2k_{j,\mathfrak{u}} \left(\frac{c_j - z_j - (c_{j-1} - z_{j-1})}{z_j - z_{j-1}} + O\left(\frac{1}{(z_j - z_{j-1})^2}\right)\right)\right).$$

由公式（3.8），可知总误差项为

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{\mathscr{J}} \frac{2k_{j,\mathfrak{u}}}{(z_j - z_{j-1})^2}\right) = \exp(O(1)), \tag{3.11}$$

因此，我们可以将上述商界定为

$$\exp\left(O(1) + \sum_{j=0}^{\mathscr{J}-1} (c_j - z_j)\left(\frac{2k_{j,\mathfrak{u}}}{z_j - z_{j-1}} - \frac{2k_{j+1,\mathfrak{u}}}{z_{j+1} - z_j}\right) + \frac{2k_{\mathscr{J},\mathfrak{u}}\left(c_{\mathscr{J}} - z_{\mathscr{J}}\right)}{z_{\mathscr{J}} - z_{\mathscr{J}-1}}\right). \tag{3.12}$$

由公式（3.8）可得 $k_{j,\mathbf{u}} = \kappa^*(z_j - z_{j-1}) + O(1)$，对于 $0 \le j \le \mathscr{J}$，因此这就是

$$\exp\left(O(1) + 2\kappa^*\left(c_{\mathscr{J}} - z_{\mathscr{J}}\right) + \sum_{j=0}^{\mathscr{J}-1} O\left(\frac{1}{z_j - z_{j-1}} + \frac{1}{z_{j+1} - z_j}\right)\right) = \exp(O(1+\kappa^*)). \tag{3.13}$$

这可以接受为一个 $\asymp_\alpha$ 因子，因为 $\kappa^* \to \alpha$ 当 $T \to \infty$. □

根据以下引理，[AB24] 中的每个区间的指示函数都可以用多项式近似。

引理 3.2（见 [AB24]中的引理 2）。对于所有 $X > 100$，当 Δ 充分大且 $a > 2$时，存在次数小于 $100X\Delta^{3a}$ 的多项式 $\mathscr{D}^+$和 $\mathscr{D}^-$，其 l^{th}系数的绝对值不超过 $\frac{(2\pi)^l}{l!}\Delta^{2a(l+2)}$ 使得对于 $|x| \le X$，有

$$\mathbf{1}\left(x \in \left[0, \Delta^{-1}\right]\right)\left(1 - e^{-\Delta^{a-2}}\right) \le |\mathscr{D}^+(x)|^2 \le \mathbf{1}\left(x \in \left[-\Delta^{-a}, \Delta^{-1} + \Delta^{-a}\right]\right) + e^{-\Delta^{a-2}}. \tag{3.14}$$

and

$$\mathbf{1}\left(x \in \left[\Delta^{-a}, \Delta^{-1} - \Delta^{-a}\right]\right)\left(1 - e^{-\Delta^{a-2}}\right) \le |\mathscr{D}^-(x)|^2 \le \mathbf{1}\left(x \in \left[0, \Delta^{-1}\right]\right) + e^{-\Delta^{a-2}}. \tag{3.15}$$

只要固定 a 的取值，它就不会对证明产生任何定性影响；至多会影响公式（1.2）中的常数 C。我们将始终取 $a = 5$。

在 [AB24]，中，无需对扭曲矩给出精确的上界来得到概率的下界，因此柯西-施瓦茨不等式给出的界已足够。但当通过倾斜来恢复公式（1.2）中所示形式的常数时，情况便不再如此。因此，有必要控制远离区间 $[L_j, U_j]$ 的点所作的贡献，这归结为对 $\mathscr{D}^{\pm}(y)$ 在 $|y|$ 较大时的增长给出一个界。下面的简单引理给出了 $|y| \ge X$时 $\mathscr{D}^{\pm}(y)$ 的一个充分界。

引理 3.3. 若 X 和 Δ 充分大且 $|y| \ge X$，则

$$\left|\mathscr{D}^{\pm}(y)\right| \le |2y/X|^{100X\Delta^{3a}}. \tag{3.16}$$

证明。将引理 3.2 中关于 $\mathscr{D}^{\pm}$ 的系数界代入可得

$$\left|\mathscr{D}^{\pm}(y)\right| \le \sum_{l=0}^{100X\Delta^{3a}} \frac{(2\pi)^l}{l!}\Delta^{2a(l+2)}|y|^l = \sum_{l=0}^{100X\Delta^{3a}} \frac{(2\pi)^l}{l!}\Delta^{2a(l+2)}|X|^l\left|\frac{y}{X}\right|^l.$$

由于 $|y| \ge X$，我们可以对最后一项取界，从而将上式写为

$$\le \left|\frac{y}{X}\right|^{100X\Delta^{3a}} \Delta^{4a} \sum_{l=0}^{100X\Delta^{3a}} \frac{(2\pi)^l}{l!}\Delta^{2al}X^l \le \left|\frac{y}{X}\right|^{100X\Delta^{3a}} \Delta^{4a}\exp(2\pi\Delta^{2a}X), \tag{3.17}$$

这由截断指数泰勒级数得到。对于充分大的 X 和 Δ，这就是

$\le |2y/X|^{100X\Delta^{3a}}$. □

3.2. 实部部分和的扭曲矩。 本节沿用 [Cre25]。受如下想法启发：不同区间上的部分和的行为应当彼此去相关，我们定义了 α-可分离扭曲。每个区间所需的素因子数量随 α增长，因此我们必须在较小的素数处截断，以保持狄利克雷多项式的总长度较短。下面的定义适用于在实部部分和 Y_j处取值的多项式 $\mathscr{D}^{\pm}$ 的乘积。

定义 3.4。 我们称 Q 是 α-可分离的，如果它具有如下形式

$$Q(t)=\sum_{\substack{p|mn\Rightarrow\log\log p\le n_{\mathscr{J}}\\ \Omega_0(mn)\le\log^{\frac{1}{100}}T\\ \Omega_j(mn)\le\alpha^2(n_j-n_{j-1})^{10^4}\forall 1\le j\le\mathscr{J}}}\frac{a(n,m)}{n^{\frac12+it}m^{\frac12-it}},\tag{3.18}$$

其中，对于所有 $n,m,a(n,m)=a(m,n)$。这里，$\Omega_l(n)$ 表示 n中属于 $\mathscr{P}_l$的素因子个数（计重数）。

条件 $a(n,m)=a(m,n)$确保当 t 为实数时，$Q(t)$ 也是实数。此外，α-可分多项式的长度至多为:

$$e^{e^{n_0}\log^{\frac{1}{100}}T}\cdot\prod_{j=1}^{\mathscr{J}}T_j^{\alpha^2(n_j-n_{j-1})^{10^4}}=T^{\sum_{j=1}^{\mathscr{J}}\frac{\alpha^2(n_j-n_{j-1})^{10^4}\log^s_{\mathscr{J}+1}T}{\mathscr{R}(\alpha^2+1)\log^s_{j+1}T}+o(1)}\le T^{\frac{1}{1000}},\tag{3.19}$$

对于一个足够大的绝对常数 $\mathscr{R}$，这意味着我们可以应用狄利克雷多项式均值定理来计算 $\mathbb{E}\left[Q^2\right].$。在 [Cre 25], 中，讨论了椭圆曲线二次扭曲的分布；具有相同无平方因子部分的项之间可能存在大量抵消。因此，为了在关联扭曲磨光矩时保留这些项，我们将它们归为一组。受此启发，我们将 Q^2 中的项归为一组，并利用关系 $(rm)^{it}(rn)^{-it}=m^{it}n^{-it}$，可写为

$$Q^2=\sum_{n,m}\frac{b(n,m)}{m^{\frac12+it}n^{\frac12-it}},\tag{3.20}$$

对于满足 $b(n,m)=b(m,n)$ 且 $b(n,m)=0$ if $(n,m)>1$ 的某些系数 $b(n,m)$。事实上，如果我们展开 Q^2，就得到

$$Q^2=\sum_{u,v}\frac{P(u,v)}{u^{\frac12+it}v^{\frac12-it}},\qquad P(u,v)=\sum_{\substack{n_1n_2=u\\ m_1m_2=v}}a(n_1,m_1)a(n_2,m_2).\tag{3.21}$$

如果我们 在方程 (3.21) 中约去 u和 v 的任何公因子，那么我们便有 e

$$b(n,m)=\sum_r\frac{P(rn,rm)}{r}\qquad\text{if }(n,m)=1,\text{ and 0 otherwise.}\tag{3.22}$$

注意，对于所有 n,m，都有 $|b(n,m)|\le b(1,1)$，因此积分 $\frac1T\int_0^T Q(t)^2\mathrm{d}t$ 由对角项 $b(1,1)$ 主导。事实上，当 $(u,v)=1$ 时，我们可以令 $\mathcal{C}(u,v)=\sum_r a(ru,rv)$，，从而

$$|b(n,m)|=\Big|\sum_{\substack{(u_1,v_1)=(u_2,v_2)=1\\ nv_1v_2=mu_1u_2}}\mathcal{C}(u_1,v_1)\mathcal{C}(u_2,v_2)\Big|\le\sum_{\substack{(u_1,v_1)=(u_2,v_2)=1\\ nv_1v_2=mu_1u_2}}\frac12\left(|\mathcal{C}(u_1,v_1)|^2+|\mathcal{C}(u_2,v_2)|^2\right).\tag{3.23}$$

由于求和的支撑集由互素整数构成，每一对 (u,v) 至多作为 (u_1,v_1) 出现一次，也至多作为 (u_2,v_2) 出现一次，因此上述求和至多为 $b(1,1)$。根据这些考虑，在附录 A 中证明的扭曲矩公式可写成如下形式。

命题 3.5。设 Q 是 α-可分的，且 M 如方程 (2.17) 所示。那么，取方程 (3.22) 中定义的系数 $b(c,g)$，有

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)M(t)\right|^2 Q(t)^2 \mathrm{d}t \asymp T\frac{\log T}{\log T_{\mathscr{J}}} b(1,1), \tag{3.24}$$

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)M(t)\right|^4 Q(t)^2 \mathrm{d}t \ll T\left(\frac{\log T}{\log T_{\mathscr{J}}}\right)^4 b(1,1), \tag{3.25}$$

其中隐含常数与 α.无关

3.3. 估计受限期望。我们聚焦于 (2.23) 的证明，随后在本节末尾说明证明方程 (2.22) 和 (2.24) 所需的修改。我们利用包含关系 (3.4)-(3.5) 以及引理 3.2 中的多项式 $\mathscr{D}^+$和 $\mathscr{D}^-$ 来逼近指示事件 $G_{\mathscr{J}}$。对于区间 $\mathscr{P}_0$，由于素数足够小，我们可以对不超过逐点界的任意 $|M_0|^2$ 值，将指示函数逼近目标区间，因此取

$$X_0 = \prod_{p\in\mathscr{P}_0}\left(1-\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}\right)^{-2} = (\log T)^{o(1)}. \tag{3.26}$$

对于 $1\le j\le \mathscr{J}$，我们将区间长度为 Δ_j^{-1} 的区间的指示函数逼近到大小为

$$X_j = \lceil 100\left(\alpha(n_j-n_{j-1})+10^4\log_{j+1}T\right)\rceil. \tag{3.27}$$

对于每个 j，将采用此多项式选择的多项式记作 $\mathscr{D}_j^{\pm}$，现在可知，对于任意划分 $\mathbf{u}\in\mathfrak{I}^{\pm}$，我们有：

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[|\zeta M|^2 Y_0^{2k_{0,\mathbf{u}}}\left(\mathscr{D}_0^-(|M_0|^2-u_0)^2+\epsilon_0\right)\prod_{1\le j\le\mathscr{J}} Y_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\left(\mathscr{D}_j^-(Y_j-u_j)^2+\epsilon_j\right)\mathbf{1}\left(|Y_j-u_j|\le X_j\right)\right]\\ &\le \mathbb{E}\left[|\zeta M|^2\prod_{j=0}^{\mathscr{J}} Y_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\mathbf{1}\left(Y_j\in\left[u_j,u_j+\Delta_j^{-1}\right]\right)\right]\le\\ &\mathbb{E}\left[|\zeta M|^2 Y_0^{2k_{0,\mathbf{u}}}\left(\mathscr{D}_0^+(|M_0|^2-u_0)^2+\epsilon_0\right)\prod_{1\le j\le\mathscr{J}} Y_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\left(\mathscr{D}_j^+(Y_j-u_j)^2+\epsilon_j\right)\mathbf{1}\left(|Y_j-u_j|\le X_j\right)\right].\end{aligned} \tag{3.28}$$

为方便起见，我们将 $\epsilon_j = O(e^{-\Delta_j})$ 记为截断示性函数近似所产生的误差项，该误差项可能随行而变。现在我们证明：

$$\sum_{\mathbf{u}\in\mathfrak{I}^-}\frac{1}{\mathfrak{c}_{\mathbf{u}}}\mathbb{E}\Big[|\zeta M|^2 Y_0^{2k_{0,\mathbf{u}}}\left(\left(\mathscr{D}_0^-(|M_0|^2-u_0)\right)^2+\epsilon_0\right)\prod_{1\le j\le\mathscr{J}} Y_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\left(\mathscr{D}_j^-(Y_j-u_j)^2+\epsilon_j\right)\mathbf{1}\left(|Y_j-u_j|\le X_j\right)\Big]$$

$$\gg_\alpha a_\alpha\frac{e^{-\frac{V^{*2}}{\log\log T}}}{\sqrt{\log\log T}}.$$

对 $\mathscr{D}^+$ on $\mathfrak{I}^+$ 的相应上界可用同样的方法得到，此处省略细节。

对于由素数 $p \in \mathscr{P}_0$，构成的第一个区间，我们取 X_0 足够大，使得得到逐点界 $|M_0|^2 \leq X_0$，因此狄利克雷多项式 $\mathscr{D}_0^-(|M_0|^2 - u_0)$ 始终是指示函数 $\mathbf{1}\left(|M_0|^2 \in [u_0, u_0 + \Delta_0^{-1}]\right)$. 的良好近似。对于满足 $j \geq 1$ 的区间 $\mathscr{P}_j$，我们无法将 X_j 取到足够大，同时又保持狄利克雷多项式足够短，以便使用命题 3.5。不过，借助倾斜，我们将证明这个区间仍然主导期望。我们可以利用容斥原理将方程 (3.28) 的第一行改写为：

$$\sum_{R \subset \{1,\dots,\mathscr{J}\}} (-1)^{|R|} \mathbb{E}\left[|\zeta M|^2 \prod_{0 \leq j \leq \mathscr{J}} \left(\mathscr{D}_j^-(Y_j - u_j)^2 + \epsilon_j \right) \prod_{r \in R} \mathbf{1}\left(|Y_r - u_r| > X_r\right) \right]. \tag{3.29}$$

当没有一个部分和 Y_r 偏离目标区间太远时，主导项来自 $R = \emptyset$。当 $R \neq \emptyset$ 时，我们对每个满足$j \in R$ 的区间 $\mathscr{P}_j$ 使用马尔可夫不等式，将上式表示为

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\Big[|\zeta M|^2 \prod_{0 \leq j \leq \mathscr{J}} \Big(\mathscr{D}_j^-(Y_j - u_j)^2 + \epsilon_j \Big) \Big] + \\ &\sum_{\substack{R \subset \{1,\dots,\mathscr{J}\} \\ R \neq \emptyset}} O\Big(\mathbb{E}\Big[|\zeta M|^2 \prod_{0 \leq j \leq \mathscr{J}} \left(\mathscr{D}_j^-(Y_j - u_j)^2 + \epsilon_j \right) \prod_{r \in R} \frac{|Y_r - u_r|^{2X_r}}{X_r^{2X_r}} \Big] \Big). \end{aligned} \tag{3.30}$$

现在我们使用命题 3.5 来估计上述期望。

我们需要证明，在将乘积完全展开后，该扭曲按照定义 3.4 的意义是 α-可分的。含有最多素因子的项来自 $R = \{1, \dots, \mathscr{J}\}$。因此，该扭曲相当于

$$(S_1 - S_0)^{2k_{0,\mathbf{u}}} \mathscr{D}_0^-\left(Y_0 - u_0\right)^2 \prod_{j=1}^{\mathscr{J}} Y_j^{2k_{j,\mathbf{u}}} \mathscr{D}_j^-\left(Y_j - u_j\right)^2 \left(Y_j - u_j\right)^{2k_j}.$$

扭曲中的项所含素因子的个数由 $\mathscr{P}_0$ 给出
$\Omega_0(mn) \leq 200 X_0 \Delta_0^{3a} + 2k_{0,\mathbf{u}} \leq$ 对数$^{\frac{1}{100}}$ T，而对于 $1 \leq j \leq \mathscr{J}$，$\Omega_j(mn)$ 的上界为

$$400 X_j \Delta_j^{3a} + 2k_{j,\mathbf{u}} \leq 600(100\alpha(n_j - n_{j-1} + 10^5 \log_{j+1} T) \log_{j+1}^{30a} T + 4\alpha^2(n_j - n_{j-1})) \leq \alpha^2 (n_j - n_{j-1})^{10^4},$$

当 T 充分大时。因此 Q 是 α-可分的，这使我们能够取扭曲矩。

狄利克雷多项式的均值定理及其扭曲的 mollified 类比（命题 3.5）实际上将 (2.7) 中的 p^{-it} 替换为相互独立的 Steinhaus随机变量。更确切地说，若 $\theta = (\theta_p,\ p$ 素数) 相互独立且均匀分布于 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$，则 (3.2) 中 Y_j 的类比 $j \geq 0$在 Steinhaus 模型中为

$$\mathscr{Y}_j = \sum_{p \in \mathscr{P}_j} \frac{\cos \theta_p}{p^{\frac{1}{2}}} + \frac{\cos 2\theta_p}{2p}. \tag{3.31}$$

该增量的方差恰好为

$$\sigma_j^2 = \sum_{p \in \mathscr{P}_j} \frac{1}{2p} + \frac{1}{8p^2}. \tag{3.32}$$

为了对第一段素数区间 $\mathscr{P}_0$ 得到精确的界，我们需要完整的欧拉乘积，其中包含 p 的较高次幂：

$$\mathscr{M}_0 = \prod_{p\in\mathscr{P}_0} 1 - \frac{e^{i\theta_p}}{p^{1/2}}. \tag{3.33}$$

对于定义 3.4 中的一个 α-可分多项式 $Q(t)$，我们有其在 Steinhaus 模型中对应的多项式

$$\mathcal{Q}(\theta) = \sum_{m,n} \frac{a(n,m)}{n^{\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{2}}} e^{i\theta_n}e^{-i\theta_m}, \tag{3.34}$$

其中，θ_n 由 θ_p 的取值以及 n 的素因数分解唯一地完全加性定义。二阶矩的期望由公式 (3.22) 中的对角项给出：

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{Q}(\theta)^2\right] = b(1,1). \tag{3.35}$$

根据命题 3.5 中的扭曲莫利菲尔公式，我们看到，扭曲 mollified 矩同样由该对角项主导。比较第二扭曲 mollified 矩在公式 (3.24) 中的对角项 $b(1，1)$ 与 Steinhaus 模型在公式 (3.35) 中的对角项，我们看到公式 (3.30) 为

$$\begin{aligned}
&\asymp \frac{\log T}{\log T_{\mathscr{J}}}\left(\mathbb{E}\left[\mathscr{Y}_0^{2k_{0,\mathbf{u}}}\left(\mathscr{D}_0^-(|\mathscr{M}_0|^2-u_0)^2+\epsilon_0\right)\prod_{j=1}^{\mathscr{J}}\mathscr{Y}_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\left(\mathscr{D}_j^-(\mathscr{Y}_j-u_j)^2+\epsilon_j\right)\right]+\right.\\
&\left.\sum_{\substack{R\subset\{1,\dots,\mathscr{J}\}\\ R\neq\emptyset}} O\left(\mathbb{E}\left[\mathscr{Y}_0^{2k_{0,\mathbf{u}}}\left(\mathscr{D}_0^-(|\mathscr{M}_0|^2-u_0)^2+\epsilon_0\right)\prod_{j=1}^{\mathscr{J}}\mathscr{Y}_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\left(\mathscr{D}_j^-(\mathscr{Y}_j-u_j)^2+\epsilon_j\right)\prod_{r\in R}\frac{(\mathscr{Y}_r-u_r)^{2X_r}}{X_r^{2X_r}}\right]\right)\right).
\end{aligned} \tag{3.36}$$

利用不相交区间中与素数相关的随机变量之间的独立性，我们可以将该和表示为：

$$\begin{aligned}
&\asymp\frac{\log T}{\log T_{\mathscr{J}}}\mathbb{E}\left[\mathscr{Y}_0^{2k_{0,\mathbf{u}}}\left(\mathscr{D}_0^-(|\mathscr{M}_0|^2-u_0)^2+\epsilon_0\right)\right]\times\\
&\prod_{j=1}^{\mathscr{J}}\left(\mathbb{E}\left[\mathscr{Y}_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\left(\mathscr{D}_j^-(\mathscr{Y}_j-u_j)^2+\epsilon_j\right)\right]+O\left(\mathbb{E}\left[\mathscr{Y}_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\left(\mathscr{D}_j^-(\mathscr{Y}_j-u_j)^2+\epsilon_j\right)\frac{(\mathscr{Y}_j-u_j)^{2X_j}}{X_j^{2X_j}}\right]\right)\right).
\end{aligned} \tag{3.37}$$

现在只需给出这些期望各自的界。我们先计算涉及小素数的第一项。

命题 3.6. 与第一段素数区间 $\mathscr{P}_0$ 相对应的期望有如下界：

$$\mathbb{E}\left[\mathscr{Y}_0^{2k_{0,\mathbf{u}}}\left(\mathscr{D}_0^-(|\mathscr{M}_0|^2-u_0)^2+\epsilon_0\right)\right]\geq\mathbb{E}\left[\mathscr{Y}_0^{2k_{0,\mathbf{u}}}\mathbf{1}(|\mathscr{M}_0|^2\in[u_0,u_0+\Delta_0^{-1}])\right]\exp\left(O\left(\Delta_0^{-\frac{1}{4}}\right)\right). \tag{3.38}$$

命题 *3.6* 的证明. 我们沿用 [AB24], 第 3.2 节中的证明，其中许多上界都可以转化为渐近公式。由于 $|\mathscr{M}_0|^2 \le X_0$ 逐点成立，引理 3.2 中的多项式可在整个范围内逼近示性函数。公式 (3.15) 现在给出：

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\mathscr{Y}_0^{2k_{0,\mathbf{u}}}\left(\mathscr{D}_0^-(|\mathscr{M}_0|^2-u_0)^2+\epsilon_0\right)\right] \ge \left(1-e^{-\Delta_0^{a-2}}\right)\times\\ &\mathbb{E}\left[\mathscr{Y}_0^{2k_{0,\mathbf{u}}}\left(\mathbf{1}(|\mathscr{M}_0|^2\in[u_0+\Delta_0^{-a},u_0+\Delta_0^{-1}-\Delta_0^{-a}])+\epsilon_0\right)\right],\end{aligned}\tag{3.39}$$

重新调整误差项 $\epsilon_0 = O\left(e^{-\Delta_0}\right)$后。注意，由 [AB24], 中的公式 (67) 可知，并回顾公式 (2.14) 中的 $\Delta_0 = e^{100\alpha n_0}$，可得

$$\mathbb{P}(|\mathscr{M}_0|^2\in[u_0,u_0+\Delta_0^{-\frac{3}{2}}]) \ge \Delta_0^{-\frac{3}{2}}\exp(-2n_0) \gg \Delta_0 e^{-\Delta_0^{a-2}},\tag{3.40}$$

因此，我们得到的不是公式 (68)，而是：

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left(\mathscr{D}_0^-(|\mathscr{M}_0|^2-u_0)^2+\epsilon_0\right)\mathscr{Y}_0^{2k_{0,\mathbf{u}}}\right] =\\ &\exp\left(O\left(\Delta_0^{-\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\left[\mathscr{Y}_0^{2k_{0,\mathbf{u}}}\right]\right)\right)\right)\mathbb{E}\left[\mathscr{Y}_0^{2k_{0,\mathbf{u}}}\mathbf{1}(|\mathscr{M}_0|^2\in[u_0+\Delta_0^{-1},u_0+2\Delta_0^{-1}])\right].\end{aligned}\tag{3.41}$$

利用 (B.7) 对矩 $\mathbb{E}[\mathscr{Y}_0^{2k_{0,\mathbf{u}}}]$, 进行界定，可得

$$\mathbb{E}\left[\left(\mathscr{D}_0^-(|\mathscr{M}_0|^2-u_0)^2+\epsilon_0\right)\mathscr{Y}_0^{2k_{0,\mathbf{u}}}\right] = \exp\left(O\left(\Delta_0^{-\frac{1}{4}}\right)\right)\mathbb{E}\left[\mathscr{Y}_0^{2k_{0,\mathbf{u}}}\mathbf{1}(|\mathscr{M}_0|^2\in[u_0,u_0+\Delta_0^{-1}])\right]).\tag{3.42}$$

□

式 (3.37) 中与近似 $\mathscr{D}_j^{\pm}$ 相关的期望，即对截至 $p \le T_j$ 的部分和的示性函数的近似（其中 $j \ge 1$），要复杂得多。这是因为命题 3.5 对扭曲长度的限制意味着，我们无法取足够长的狄利克雷多项式，来近似 $\mathscr{Y}_j$. 所有可能取值对应的示性函数。显然，cos (θ_p) 的分布关于 0 对称；也就是说，不考虑示性函数的限制时，游走在 n_{j-1}时从区间 $[L_{j-1},U_{j-1}]$跃至 n_j时的 $[L_j,U_j]$，其幅度约为 $\alpha(n_j-n_{j-1})$，发生的可能性与下跌 $-\alpha(n_j-n_{j-1})$.大致相同。因此，示性函数的近似范围必须显著超出这一范围，这也支持了公式 (3.27) 中 X_j 的选取。由于随机变量 $\mathscr{Y}_j$ 可能不在目标区间的范围 X_j 内，而 $\mathscr{D}_j^-$ 在该范围内类似于示性函数，我们必须使用马尔可夫不等式来证明这些较大的取值不太可能出现。由此得到以下命题。

命题 3.7。 设$(\mathscr{N}_j, 1 \le j \le \mathscr{J})$ 为均值0 、方差为σ_j^2 的独立高斯随机变量，其中方差如(3.32)所给。我们有

$$\mathbb{E}\left[\mathscr{Y}_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\left(\mathscr{D}_j^-(\mathscr{Y}_j-u_j)^2+\epsilon_j\right)\frac{(\mathscr{Y}_j-u_j)^{2X_j}}{X_j^{2X_j}}\right] \ll \frac{\mathbb{E}\left[\mathscr{N}_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\mathbf{1}(\mathscr{N}_j\in[u_j,u_j+\Delta_j^{-1}])\right]}{2^{X_j}}.\tag{3.43}$$

$$\mathbb{E}\left[\mathscr{Y}_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\left(\mathscr{D}_j^-(\mathscr{Y}_j-u_j)^2+\epsilon_j\right)\right] = \mathbb{E}\left[\mathscr{N}_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\mathbf{1}(\mathscr{N}_j\in[u_j,u_j+\Delta_j^{-1}])\right]\left(1+O\left(\Delta_j^{-\frac{1}{4}}\right)\right).\tag{3.44}$$

证明。 我们从不等式 (3.43) 开始，这是其中最复杂的一步。期望主要由满足 $|\mathscr{Y}_j - u_j| > X_j$. 的区域决定。在这里，关于 $\mathscr{D}_j^-$ 的信息很少；当取值如此大时，它不再能近似区间的指示函数。在 [ABR20] 的第 7.3 节中，这些大值是通过柯西-施瓦茨不等式处理的。然而，这会破坏倾斜，最终使我们无法在定理 1.1 中得到良好的常数。相反，对于多项式 $\mathscr{D}^{\pm}$. 的这类大输入，我们利用系数的界，并使用引理 3.3

(3.43) 的左边是

$$
\begin{aligned}
(3.45) \qquad =&\mathbb{E}\left[\mathscr{Y}_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\left(\mathscr{D}_j^-(\mathscr{Y}_j-u_j)^2+\epsilon_j\right)\frac{(\mathscr{Y}_j-u_j)^{2X_j}}{X_j^{2X_j}}\mathbf{1}(|\mathscr{Y}_j-u_j|<X_j)\right]+\\
&\mathbb{E}\left[\mathscr{Y}_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\left(\mathscr{D}_j^-(\mathscr{Y}_j-u_j)^2+\epsilon_j\right)\frac{(\mathscr{Y}_j-u_j)^{2X_j}}{X_j^{2X_j}}\mathbf{1}(|\mathscr{Y}_j-u_j|\geq X_j)\right].
\end{aligned}
$$

第一个期望可以忽略不计，这一点在我们转而证明方程 (3.44) 时可以验证。对于第二个期望，我们可以利用引理 3.3 将其界为

$$
(3.46) \qquad \ll \mathbb{E}\left[\mathscr{Y}_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\left(\frac{2(\mathscr{Y}_j-u_j)}{X_j}\right)^{200X_j\Delta_j^{3a}}\frac{(\mathscr{Y}_j-u_j)^{2X_j}}{X_j^{2X_j}}\right].
$$

通过加上一个非负量，我们可以将其界为:

$$
(3.47) \qquad \leq \frac{1}{2^{2X_j}}\mathbb{E}\left[\mathscr{Y}_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\left(\frac{2(\mathscr{Y}_j-u_j)}{X_j}\right)^{2r_j}+\mathscr{Y}_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\left(\frac{2(\mathscr{Y}_j+u_j)}{X_j}\right)^{2r_j}\right],
$$

其中 $r_j = X_j + 100X_j\Delta_j^{3a}$。这一展开现在的好处在于，它只涉及 $\mathscr{Y}_j$ 的偶数阶矩，且系数为正。利用引理 B.2，以及 $\mathscr{N}_j$ 的分布的对称性，我们看到这至多为:

$$
(3.48) \qquad \frac{1}{2^{2X_j}}\mathbb{E}\left[\mathscr{N}_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\left(\frac{2(\mathscr{N}_j-u_j)}{X_j}\right)^{2r_j}+\mathscr{N}_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\left(\frac{2(\mathscr{N}_j+u_j)}{X_j}\right)^{2r_j}\right]=\frac{1}{2^{2X_j-1}}\mathbb{E}\left[\mathscr{N}_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\left(\frac{2(\mathscr{N}_j+u_j)}{X_j}\right)^{2r_j}\right].
$$

我们回顾如下高斯矩:

$$
(3.49) \qquad \mathbb{E}\left[\mathscr{N}_j^{2k_{j,\mathbf{u}}+2r_j}\right]=\sigma_j^{2(k_{j,\mathbf{u}}+r_j)}\frac{(2k_{j,\mathbf{u}}+2r_j)!}{2^{k_{j,\mathbf{u}}+2r_j}(k_{j,\mathbf{u}}+r_j)!}, \qquad \mathbb{E}[\mathscr{N}_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}]=\sigma_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\frac{(2k_{j,\mathbf{u}})!}{2^{k_{j,\mathbf{u}}}k_{j,\mathbf{u}}!},
$$

其中方差 σ_j^2 由方程(3.32)给出。平移高斯矩的闵可夫斯基不等式现在给出:

$$
(3.50) \qquad \frac{1}{2^{2X_j-1}}\mathbb{E}\left[\mathscr{N}_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\left(\frac{2(\mathscr{N}_j+u_j)}{X_j}\right)^{2r_j}\right]\leq\sigma_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\frac{(2k_{j,\mathbf{u}})!}{2^{k_{j,\mathbf{u}}+2X_j-1}k_{j,\mathbf{u}}!}\times\left(\frac{2\left(\sqrt{2\sigma_j^2(k_{j,\mathbf{u}}+r_j)}+u_j\right)}{X_j}\right)^{2r_j}.
$$

我们必须将此与方程 (3.43) 中的上界进行比较，即

$$
(3.51) \qquad \frac{\int_{u_j}^{u_j+\Delta_j^{-1}} z^{2k_{j,\mathbf{u}}}e^{-\frac{z^2}{2\sigma_j^2}}\mathrm{d}z}{2^{X_j}\sqrt{2\pi}\sigma_j}.
$$

由于 $z \in [u_j, u_j + \Delta_j^{-1}]$，被积函数为

$$u_j^{2k_{j,\mathbf{u}}} e^{-\frac{u_j^2}{2\sigma_j^2}} \exp\left(2k_{j,\mathbf{u}} \log(1 - \frac{u_j - z}{u_j}) + \frac{u_j^2 - z^2}{2\sigma_j^2}\right) = \tag{3.52}$$

$$u_j^{2k_{j,\mathbf{u}}} e^{-\frac{u_j^2}{2\sigma_j^2}} \exp\left((u_j - z)(\frac{u_j + z}{2\sigma_j^2} - \frac{k_{j,\mathbf{u}}}{u_j}) + O\left(\frac{k_{j,\mathbf{u}}\Delta_j^{-2}}{u_j^2}\right)\right)$$

$$\geq \frac{1}{2} u_j^{2k_{j,\mathbf{u}}} e^{-\frac{u_j^2}{2\sigma_j^2}}.$$

对于最后一个界，我们利用了根据公式（2.13），$\frac{u_j+z}{2\sigma_j^2} = \kappa^* + O(1)$，以及这样一个事实：$k_{j,\mathbf{u}}$ 根据公式（3.8）也是 $\kappa^* + O(1)$。因此，公式（3.43）中的上界大于：

$$\frac{u_j^{2k_{j,\mathbf{u}}} e^{-\frac{u_j^2}{2\sigma_j^2}}}{2^{X_j+1}\Delta_j\sqrt{2\pi}\sigma_j}. \tag{3.53}$$

利用斯特林近似，我们有

$$\sigma_j^{2k_{j,\mathbf{u}}} \frac{(2k_{j,\mathbf{u}})!}{2^{k_{j,\mathbf{u}}} k_{j,\mathbf{u}}!} \ll \left(\frac{\sigma_j^2 k_{j,\mathbf{u}}}{e}\right)^{k_{j,\mathbf{u}}} \tag{3.54}$$

$$\ll e^{-\frac{u_j^2}{2\sigma_j^2}} u_j^{2k_{j,\mathbf{u}}} e^{\frac{u_j^2}{2\sigma_j^2} - k_{j,\mathbf{u}}} \left(\frac{2\sigma_j^2 k_{j,\mathbf{u}}}{u_j^2}\right)^{k_{j,\mathbf{u}}}$$

$$\ll e^{-\frac{u_j^2}{2\sigma_j^2}} u_j^{k_{j,\mathbf{u}}} e^{\frac{U_j - L_{j-1}}{2\sigma_j^2}(U_j - L_{j-1} - 2\kappa^*\sigma_j^2)} \left(\frac{u_j(L_j - U_{j-1})}{2\sigma_j^2 k_{j,\mathbf{u}}}\right)^{-k_{j,\mathbf{u}}}.$$

由于根据公式（3.27），$X_j \gg k_{j,\alpha}^{\mathbf{u}}$，我们可知

$$k_{j,\mathbf{u}} < \frac{r_j \kappa^*}{\exp(10^4)}, \quad U_j - L_{j-1} < \frac{r_j}{\exp(10^4)}, \tag{3.55}$$

因此，公式（3.50）中的贡献为

$$\ll \frac{\Delta_j \sigma_j}{2^{X_j}} \mathbb{E}\left[\mathscr{N}_j^{2k_{j,\mathbf{u}}} \mathbf{1}(\mathscr{N}_j \in [u_j, u_j + \Delta_j^{-1}])\right] \tag{3.56}$$

$$\left(\left(\frac{u_j(L_j - U_{j-1})}{2\sigma_j^2 k_{j,\mathbf{u}}}\right)^{-\frac{\kappa^*}{\exp(10^4)}} e^{\frac{U_j - L_{j-1} - 2\kappa^*\sigma_j^2}{\exp(10^4)\sigma_j^2}} \left(\frac{\sqrt{2\sigma_j^2(k_{j,\mathbf{u}} + r_j)} + u_j}{X_j}\right)^2\right)^{r_j}.$$

由方程 (2.13) 和 (3.8)，我们可知

$$\left(\frac{u_j(L_j - U_{j-1})}{2\sigma_j^2 k_{j,\mathbf{u}}}\right)^{-\frac{\kappa^*}{\exp(10^4)}} \leq \left(1 + \frac{10^5 \log_{j+1} T}{\sigma_j^2 \kappa^*}\right)^{\frac{\kappa^*}{\exp(10^4)}} \leq 1.1, \tag{3.57}$$

而 $e^{\frac{U_j - L_{j-1} - 2\kappa^*\sigma_j^2}{\exp(10^4)\sigma_j^2}} \leq 2.$

最后，根据方程 (3.27) 中 X_j 的取值，我们看到，对于 T 充分大的情形，

$$X_j > 20\left(\sqrt{2\sigma_j^2(k_{j,\mathbf{u}}+r_j)}+(U_j-L_{j-1}+1)\right), \tag{3.58}$$

因此，(3.50) 中的最后一项为 $\leq 2^{-r_j}$。于是，

$$\mathbb{E}\left[\mathscr{N}_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\left(\frac{2(\mathscr{N}_j+u_j)}{X_j}\right)^{2r_j}\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathscr{N}_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\mathbf{1}(\mathscr{N}_j\in[u_j,u_j+\Delta_j^{-1}])\right]2^{-X_j-r_j},$$

当 T 足够大时，其中我们用到了 $\sqrt{n_j-n_{j-1}}\leq 2^{\frac{n_j-n_{j-1}-1}{2}}$.。这就完成了 (3.43) 的证明。

现在我们证明方程 (3.44)。期望可以分为两种情况：$\mathbf{1}(|\mathscr{Y}_j-u_j|\leq X_j)$ 和 $\mathbf{1}(|\mathscr{Y}_j-u_j|>X_j)$。对于 $\mathscr{D}^-$ 的下界，显然可以舍去第二个期望，因为它非负。不过我们仍对其进行估计，因为在处理 $\mathscr{D}^+$ 时，为了得到上界需要用到它，而这对于 Paley-Zygmund 不等式中的四阶矩是必要的。

第一个期望 $\mathbb{E}\left[\mathscr{Y}_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\left(\mathscr{D}_j^-(\mathscr{Y}_j-u_j)^2+\epsilon_j\right)\mathbf{1}(|\mathscr{Y}_j-u_j|\leq X_j)\right]$ 的处理方式与命题 3.6 的证明相同，将其表示为：

$$\mathbb{E}\left[\mathscr{Y}_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\mathbf{1}(\mathscr{Y}_j\in[u_j,u_j+\Delta_j^{-1}])\right]\exp\left(O\left(\Delta_j^{-\frac{1}{4}}\right)\right). \tag{3.59}$$

当 $\mathscr{Y}_j$ 限制在区间 $[u_j,u_j+\Delta_j^{-1}]$ 内时，$\mathscr{Y}_{,j}^{2k_j\ \mathbf{u}}$ 的紧界足以进行高斯比较，如 [AB24 引理 8] 对于 $j\geq 1$ 所述，从而将其改写为

$$\mathbb{E}\left[\mathscr{N}_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\mathbf{1}(\mathscr{N}_j\in[u_j,u_j+\Delta_j^{-1}])\right]\left(1+O\left(\Delta_j^{-\frac{1}{4}}+\epsilon_j\Delta_j\log_{j+2}T\right)\right). \tag{3.60}$$

最后，我们可以用 $\mathbf{1}(|\mathscr{Y}_j-u_j|>X_j)$ 给出该期望的界：

$$\mathbb{E}\left[\mathscr{Y}_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\left(\mathscr{D}_j^-(\mathscr{Y}_j-u_j)^2+\epsilon_j\right)\mathbf{1}(|\mathscr{Y}_j-u_j|>X_j)\right]\leq\mathbb{E}\left[\mathscr{Y}_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\left(\mathscr{D}_j^-(\mathscr{Y}_j-u_j)^2+\epsilon_j\right)\frac{(\mathscr{Y}_j-u_j)^{2X_j}}{X_j^{2X_j}}\right], \tag{3.61}$$

对此，我们应用 (3.43)。

现在可以给出 (3.37) 中所有期望的界。利用命题 3.7，主项为

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[|\zeta M|^2\,Y_0^{2k_{0,\mathbf{u}}}\left(\mathscr{D}_0^-(Y_0-u_0)^2+\epsilon_0\right)\prod_{1\leq j\leq\mathscr{J}}Y_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\left(\mathscr{D}_j^-(Y_j-u_j)^2+\epsilon_j\right)\mathbf{1}\left(|Y_j-u_j|\leq X_j\right)\right]\\ &\gg\frac{\log T}{\log T_{\mathscr{J}}}\mathbb{E}\left[\mathscr{Y}_0^{2k_{0,\mathbf{u}}}\mathbf{1}(|\mathscr{M}_0|^2\in[u_0,u_0+\Delta_0^{-1}])\right]\mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{\mathscr{J}}\mathscr{N}_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\mathbf{1}(\mathscr{N}_j\in[u_j,u_j+\Delta_j^{-1}])\right].\end{aligned} \tag{3.62}$$

利用引理 3.1，我们可得

$$\frac{1}{\mathfrak{c}_{\mathbf{u}}}\mathbb{E}\left[|\zeta M|^2 Y_0^{2k_{0,\mathbf{u}}}\left(\mathscr{D}_0^-(Y_0-u_0)^2+\epsilon_0\right)\prod_{1\le j\le \mathscr{J}} Y_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\left(\mathscr{D}_j^-(Y_j-u_j)^2+\epsilon_j\right)\mathbf{1}\left(|Y_j-u_j|\le X_j\right)\right] \tag{3.63}$$
$$\gg_\alpha \frac{\log T}{\log T_{\mathscr{J}}}\mathbb{E}\left[\left(\frac{\mathscr{Y}_0}{z_0}\right)^{2k_{0,\mathbf{u}}}\mathbf{1}(|\mathscr{M}_0|^2\in[u_0,u_0+\Delta_0^{-1}])\right]\mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{\mathscr{J}}\mathbf{1}(\mathscr{N}_j\in[u_j,u_j+\Delta_j^{-1}])\right],$$

其中，为方便起见，我们令 $z_0=-\frac{1}{2}\log u_0$.

先对高斯变量 $\mathscr{N}_j$ with $j\ge 1$ 进行计算，最容易处理这个期望。对于固定的 $u_0^*\in[L_0,U_0]$，我们对所有组合求和$\mathbf{u}=(u_0,\ldots\ldots,u_{\mathscr{J}})$ in $\mathfrak{I}^-$，得到：

$$\sum_{\mathbf{u}\in\mathfrak{I}^-;u_0=u_0^*}\frac{1}{\mathfrak{c}_u}\mathbb{E}\left[|\zeta M|^2 Y_0^{2k_{0,\mathbf{u}}}\left(\mathscr{D}_0^-(Y_0-u_0^*)^2+\epsilon_0\right)\prod_{1\le j\le \mathscr{J}} Y_j^{2k_{j,\mathbf{u}}}\left(\mathscr{D}_j^-(Y_j-u_j)^2+\epsilon_j\right)\mathbf{1}\left(|Y_j-u_j|\le X_j\right)\right] \tag{3.64}$$
$$\gg \mathbb{E}\left[\left(\frac{\mathscr{Y}_0}{z_0^*}\right)^{2k_{0,\mathbf{u}}}\mathbf{1}(|\mathscr{M}_0|^2\in[u_0^*,u_0^*+\Delta_0^{-1}])\right]\mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{\mathscr{J}}\mathbf{1}\left(z_0^*+\sum_{l=1}^{j}\mathscr{N}_l\in[L_j,U_j]\right)\right],$$

其中 $z_0^*=-\frac{1}{2}\log u_0$，由于 $k_{0,\mathbf{u}}=\lceil\kappa^* z_0^*\rceil$ 与 $u_1,\ldots\ldots,u_{\mathscr{J}}$相互独立，这里对记号略作滥用是合理的

利用倾斜和屏障，对第二个期望中的正态变量求期望是一个简单的练习：

$$\asymp_\alpha \mathbb{P}\Big(z_0^*+\sum_{l=1}^{\mathscr{J}}\mathscr{N}_l\in[L_{\mathscr{J}},U_{\mathscr{J}}]\Big), \tag{3.65}$$

由于 $\sum_{l=1}^{\mathscr{J}}\mathscr{N}_l$是方差为 $\sigma^2=\sum_{p\in\cup_{j=1}^{\mathscr{J}}\mathscr{P}_j}\frac{1}{2p}+\frac{1}{4p^2}$的中心高斯分布，上式为

$$\asymp_\alpha \int_{L_{\mathscr{J}}}^{\infty}\frac{e^{-\frac{(z-z_0^*)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma}\mathrm{d}z\asymp_\alpha \frac{e^{\frac{-\left(L_{\mathscr{J}}-z_0^*\right)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma}.$$

现在，我们必须协调 (3.64) 中的两个随机变量 $\mathscr{Y}_0$ 和 $\mathscr{M}_0$，以计算期望。首先，我们需要将多项式倾斜 $\mathscr{Y}^{2k_{0,0}}$ $^{\mathbf{u}}$ 转换为指数倾斜。注意：

$$-\log|\mathscr{M}_0|=\sum_{k\ge1}\sum_{p\in\mathscr{P}_0}\frac{\cos k\theta_p}{p^{\frac{k}{2}}}\quad\in[\mathscr{Y}_0-10,\mathscr{Y}_0+10], \tag{3.66}$$

通过对求和中带有 $k\ge3$ 的项进行逐点界定。该范围足够小，使得我们可以通过泰勒展开将倾斜转化为指数：

$$\left(\frac{\mathscr{Y}_0}{z_0^*}\right)^{2k_{0,\mathbf{u}}}\asymp_\alpha \exp\left(2k_{0,\mathbf{u}}\left(\frac{\mathscr{Y}_0}{z_0^*}-1\right)\right). \tag{3.67}$$

将此与方程(3.65)和(3.66)结合，可得方程(3.64)中界的右端为

$$\frac{e^{\frac{-\left(L_{\mathscr{J}}-z_0^*\right)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma}\mathbb{E}\Big[\exp\left(2k_{0,\mathbf{u}}\left(\frac{\mathscr{Y}_0}{z_0^*}-1\right)\right)\mathbf{1}\left(|\mathscr{M}_0|^2\in\left[e^{-2z_0^*},e^{-2z_0^*}+\Delta_0^{-1}\right]\right)\Big]. \tag{3.68}$$

利用这一点、方程 (3.66)、 $L_{\mathscr{J}}$ 的定义，以及由指示函数给出的 $|\mathscr{M}_0|^2$ 的限制，上式可化简为

$$\asymp_\alpha \exp\left(-2k_{0,\mathbf{u}}\right)\frac{e^{-\frac{(V^*-z_0^*)^2}{n_{\mathscr{J}}-n_0}}}{\sqrt{n_{\mathscr{J}}-n_0}}\cdot\mathbb{E}[\exp\left(-2\kappa^*\log|\mathscr{M}_0|\right)\mathbf{1}(|\mathscr{M}_0|^2\in[e^{-2z_0^*},e^{-2z_0^*}+\Delta_0^{-1}])], \tag{3.69}$$

为计算期望，注意随机变量 (θ_p， p prime) 在倾斜测度下仍相互独立：

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\bullet\right]=\frac{\mathbb{E}\left[\bullet\exp\left(-2\kappa^*\log|\mathscr{M}_0|\right)\right]}{\mathbb{E}\left[\exp\left(-2\kappa^*\log|\mathscr{M}_0|\right)\right]},$$

$\widetilde{}$ $\widetilde{}$，相应地，事件 A 的倾斜概率定义为 $\mathbb{P}(A)=\mathbb{E}\left[\mathbf{1}(A)\right]$. 接下来，使用变量

$$R_0=\log|\mathscr{M}_0|+\kappa^*n_0. \tag{3.70}$$

期望变为

$$e^{2\kappa^{*2}n_0}\mathbb{E}\left[\exp\left(-2\kappa^*R_0\right)\right]\cdot\widetilde{\mathbb{P}}\left(R_0\in[\kappa^*n_0-z_0^*,\kappa^*n_0-z_0^*+\delta_0]\right), \tag{3.71}$$

其中增量

$$\delta_0=\delta_0(z_0^*,\Delta_0)=\log\left(1+\Delta_0^{-1}e^{2z_0^*}\right)$$

由于映射，变化较为平缓 在方程 (3.70) 中。利用引理 12，我们有 e

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-2\kappa^*R_0\right)\right]\asymp_\alpha a_\alpha e^{\gamma\alpha^2}e^{-\kappa^{*2}n_0}. \tag{3.72}$$

由于我们进行了倾斜以偏向该范围，因此很容易在每个 z_0^* 处近似 (3.71) 中的 $\mathbb{P}$-概率，参见 ABR20，引理 18], ，该引理使我们能够用一个高斯分布的随机变量来近似每个素数处独立变量之和。在映射 (3.70) 下，条件 $u_0^*\in[L_0,U_0]$ 变为 $R_0\in\left[0,n_0^{\frac{2}{3}}/2\right]$.将此结果代入方程 (3.69)，并对区间 $p\le T_0$ 和 $p\in$ 上的高斯卷积进行计算（T_0， $T_{\mathscr{J}}$] 我们得到：

$$\mathbb{E}\left[|\zeta M|^2\mathbf{1}\left(G_{\mathscr{J}}\right)\right]\asymp_\alpha a_\alpha e^{\gamma\alpha^2}\frac{e^{-\frac{V^{*2}}{\log\log T_{\mathscr{J}}}}}{\sqrt{\log\log T_{\mathscr{J}}}}. \tag{3.73}$$

将 V^* 和 $T_{\mathscr{J}}$的定义代入即可得到方程 (2.23)。

公式 (2.22) 和 (2.24) 的证明类似。对于 (2.24)，我们按照公式 (2.23) 的证明计算四阶扭曲矩，步骤与公式 (3.28) 类似，但在通过公式（3.25）的四阶扭曲平滑矩转到 Steinhaus 模型时，用公式（3.25）代替公式 (3.24)。与此同时，对于公式 (2.22)，在上述证明中用狄利克雷多项式均值定理代替公式 (3.24)，即可得到公式 (2.22)，从而完成命题 2.2 的证明。□

注。我们认为，凭借我们的方法，截断 $T^* = T^{\mathscr{P}_{(\alpha^2+1)}}$ 已是最优，因此常数 K_α 无法改进到超出公式（1.2）所示的形式。为说明这一点，设 $P_j(S_j - S_{j-1})$ 表示任意一个可能的狄利克雷多项式，用以表示倾斜以及区间 $\mathscr{P}_j$ 上的限制。在我们的证明中，我们取倾斜依赖于区间 $\mathbf{u} \in \mathfrak{I}^{\pm}$. 这里，$P_j(S_j - S_{j-1}) = (S_j - S_{j-1})^{2k_j} \cdot {}_{\mathbf{u}}D_j^{\pm}((S_j - S_{j-1}) - u_j)^2$, 这有利于出现与区间 $\mathscr{P}_j$ 上的部分和相符、并落在相关边界内的跳跃。现在我们论证必有

$$\deg P_j \gg \alpha^2(n_j - n_{j-1}). \tag{3.74}$$

现在，我们考虑不同的 $S_j - S_{j-1}$取值范围对期望 $\mathbb{E}\left[|P_j(S_j - S_{j-1})|\right]$ 的贡献。为了良好近似概率，即我们仍处于屏障以内的概率，较大的贡献必须来自 $S_j - S_{j-1} \approxeq u_j$的情形。然而，由于高斯衰减，$S_j - S_{j-1}$ 取较小值的可能性更高，因此 P_j 必须具有较高次数，才能使该区间主导期望。

更具体地说，对于区间 $\mathscr{P}_j$ 和 $y \approx {}^{\alpha}{}_{(n_j - n_{j-1})}{}_2$（例如）中目标增量里的 $x \approx u_j$，~~我们应~~有

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{n_j - n_{j-1}}}}{\sqrt{n_j - n_{j-1}}} \int_x^{x+\Delta_j^{-1}} P_j(z)\mathrm{d}z \gg \frac{e^{-\frac{y^2}{n_j - n_{j-1}}}}{\sqrt{n_j - n_{j-1}}} \int_y^{y+\Delta_j^{-1}} P_j(z)\mathrm{d}z. \tag{3.75}$$

高斯因子的比值近似为 $e^{-3\alpha^2 (n_j - n_{j-1})/4}$. 我们使用平移切比雪夫多项式的基底 $\left\{T_n\left(\frac{z'-\alpha}{\left(n_j - n_{j-1}/2\right)(n_j - n_{j-1})/100}\right)\right\}$，~~对于多项式~~ $\mathfrak{F}_j(z') = \int_{z'}^{z'+\Delta_j^{-1}} P_j(z)\mathrm{d}z$，并利用这些切比雪夫多项式的（平移）正交关系，将该基底下的系数与.....联系起来

$$\sup_{y \approx \frac{\alpha(n_j - n_{j-1})}{2}} \mathfrak{F}_j(y).$$

因此，利用当 x 接近目标跳跃时 $\mathfrak{F}_j(x)$ 的逐点界，可以证明用于扭曲的任何此类多项式的最小次数必须满足 (3.74)。

Appendix A. Second and fourth twisted mollifier formulae

命题 *3.5* 的证明。我们先证明公式 (3.24)。在 [HBC85], 中，考虑了 ζ函数与一个狄利克雷多项式的绝对值平方相乘后的扭曲矩:

$$I = \int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2 \left|A\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2 \mathrm{d}t, \qquad A(s) = \sum_{m \le M} a(m) m^{-s}, \tag{A.1}$$

其中 $a(m) \ll_\epsilon m^\epsilon$. 他们证明了以下定理。

定理A.1（[HBC85] 中的定理 1）。

$$I = T \sum_{h,k \le M} \frac{a(h)\overline{a(k)}}{[h,k]} \left(\log \frac{T(h,k)}{2\pi[h,k]} + 2\gamma - 1\right) + \mathscr{E}, \tag{A.2}$$

其中 $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2$，其中 $\mathscr{E}_1 \ll_B T(\log T)^{-B}$ 对任意 $B > 0$ 以及对任意 $\epsilon > 0$的 $\mathscr{E}_2 \ll_\epsilon M^2 T^\epsilon$.

该 相同的证明表明，如果我们将平滑因子的系数定义为使得 at

$$M(t)=\sum_{n}\frac{u(n)}{n^{s}}, \tag{A.3}$$

且 Q 是 α-可分离的，那么 $\int_0^T |\zeta M|^2\, Q(t)^2 \mathrm{d}t$ 是

$$T\sum_{c,g} b(c,g) \sum_{\substack{m=cf,n=gh\\ p|fh\Rightarrow p\in\mathscr{P}_j}} \frac{u(f)u(h)}{[m,n]}\left(\log\frac{T[m,n]}{2\pi(m,n)}+2\gamma-1\right)+O(T\log^{-100(\alpha^2+1)}Tb(1,1)). \tag{A.4}$$

证明公式 (3.24) 的计算与 [AC25] 中定理 1.5 的证明类似：使用 Rankin 技巧，放宽平滑因子系数的支集在每个区间内允许的素因子数量限制，并以相同方式处理对数，然后计算无约束的和。我们按照 [AC25] 中定理 1.5 的证明拆分对数，将其表示为

$$TI_1(\mathbf{b})+Tb(1,1)O\left(I_2(\mathbf{b})\right)+O(T\log^{-100(\alpha^2+1)}Tb(1,1)), \tag{A.5}$$

其中

$$I_1(\mathbf{b})=\sum_{c,g}\frac{b(c,g)}{[c,g]}\left(\log\left(\frac{T[c,g]}{2\pi(c,g)}\right)+2\gamma-1\right)\sum_{\substack{m=cf,n=gh\\ p|fh\Rightarrow p\in\mathscr{P}_j}}\frac{u(f)u(h)[c,g]}{[m,n]} \tag{A.6}$$

and

$$I_2(\mathbf{b})=\sum_{\substack{p|cg\Rightarrow p\le T_{\mathscr{J}}\\ \Omega_0(cg)\le\log^{\frac{1}{100}}T\\ \Omega_j(cg)\le\alpha^2(n_j-n_{j-1})^{10^4}\forall 1\le j\le\mathscr{J}\\ (c,g)=1}}\frac{1}{[c,g]}\left|\sum_{\substack{m=cf,n=gh\\ p|fh\Rightarrow p\in\mathscr{P}_j}}\frac{u(f)u(h)[c,g]}{[m,n]}\log\left(\frac{[m,n](c,g)}{(m,n)[c,g]}\right)\right|. \tag{A.7}$$

我们在以下引理中给出这些和的界：

引理 A.2. 如上所定义的量 $I_1(\mathbf{b})$ 和 $I_2(\mathbf{b})$ 满足以下界：

$$I_1(\mathbf{b})\asymp\frac{\log T}{\log T_{\mathscr{J}}}b(1,1),\qquad I_2(\mathbf{b})\ll 1. \tag{A.8}$$

结合这些界并将其代入公式 (A.5)，即可完成公式 (3.24) 的证明。我们首先通过处理内层求和来计算 $I_1(\mathbf{b})$

$$\sum_{\substack{m=cf,n=gh\\ p|fh\Rightarrow p\in\mathscr{P}_j}}\frac{u(f)u(h)[c,g]}{[m,n]} \tag{A.9}$$

由公式 (A.6) 得。这个和可拆分为：

$$\prod_{0\le j\le\mathscr{J}}C_j^{(1)}(c_j,g_j),\quad \text{where } c=\prod_{0\le j\le\mathscr{J}}c_j,\quad g=\prod_{0\le j\le\mathscr{J}}g_j \tag{A.10}$$

其中 $p|c_jg_j \Rightarrow p \in \mathscr{P}_j$，以及

$$C_j^{(1)}(w,z) = \sum_{\substack{m=wf, n=zh \\ p|fh \Rightarrow p\in\mathscr{P}_j}} \frac{u(f)u(h)[w,z]}{[m,n]}, \tag{A.11}$$

当 $(w,z) = 1, p|wz \Rightarrow p \in \mathscr{P}_j$ 且 $\Omega_j(wz) \leq 2\alpha^2(n_j - n_{j-1})^{10^4} \forall 1 \leq j \leq \mathscr{J}$ 时。在区间 $\mathscr{P}_0$ 内，平滑因子没有经过截断，因此

$$C_0^{(1)}(w,z) = \sum_{\substack{m=wf, n=zh \\ p|fh \Rightarrow p\in\mathscr{P}_0}} \frac{\mu(f)\mu(h)[w,z]}{[m,n]}. \tag{A.12}$$

受广义冯·曼戈尔特函数的启发（例如参见 [GPY09]），我们看到，对于任意素数集合 $\mathscr{P}$ 和 $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，如果某些整数 u 和 v 的素因子都包含在 $\mathscr{P}$中，那么

$$\sum_{\substack{m=uf \\ n=vh \\ p|fh \Rightarrow p\in\mathscr{P}}} \frac{\mu(f)\mu(h)[u,v]}{[m,n]} \log^r\left(\frac{[u,v]}{[m,n]}\right) = 0, \tag{A.13}$$

当 u 和 v 的素因数分解在重数意义下相差超过 r 个素数时。取 $\mathscr{P} = \mathscr{P}_0$ 和 $r = 0$，我们看到，$C_0^{(1)}(w, z)$ 除非 $w = z$ （它必定为 1，因为 $(w, z) = 1$），否则为零，此时由乘法性可得：

$$C_0^{(1)}(1,1) = \sum_{p|fh\Rightarrow p\in\mathscr{P}_0} \frac{\mu(f)\mu(h)}{[f,h]} = \prod_{p\in\mathscr{P}_0}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

利用 Rankin 技巧，我们可以估计项 $C_j^{(1)}(w, z)$，其中 $1 \leq j \leq \mathscr{J}$. 由于平滑因子 $M(t)$ $5\alpha^2(n_j - n_{j-1})^{10^5}$, 中所用素因子个数的指标，远大于 α-可分扭曲的支集所允许的素因子个数指标，因此，$2\alpha^2(n_j - n_{j-1})^{10^4}$, 与 [AC25] 中引理3.6的证明采用相同的方法即可。这给出：

$$I_1(\mathbf{b}) = \prod_{p\leq T_{\mathscr{J}}}(1-\frac{1}{p})\times \tag{A.14}$$

$$\sum_{\substack{c,g \\ c_0=g_0=1}} \frac{b(c,g)}{[c,g]}\left(\log\left(\frac{T[c,g]}{2\pi(c,g)}\right)+2\gamma-1\right)\prod_{1\leq j\leq\mathscr{J}}\left\{\mathbf{1}(c_j=g_j=1)+O\left(e^{-100(n_j-n_{j-1})}\right)\right\}.$$

此外，对最后的乘积应用 H¨older 不等式，可得：

$$I_1(\mathbf{b}) \asymp b(1,1)\log T\prod_{p\leq T_{\mathscr{J}}}\left(1-\frac{1}{p}\right). \tag{A.15}$$

由素数定理的一个简单推论，方程（A.15）右端可写为 $\asymp b(1,\ 1)\log T\log T_{\mathscr{J}}$，正如所要证明的。

现在我们证明界 $I_2(\mathbf{b}) \ll 1$。若我们能够去掉截断，那么方程（A.13）将表明，这个和仅在系数相差至多一个素因子的地方才有支撑，正如我们在 [AC25] 的第 3.2 节中看到的那样。事实上，Rankin 技巧的使用和求值过程与 [AC25] 中命题5的证明非常接近；再次指出，

平滑因子使用的素因子远多于扭曲项，而且我们得到的不是公式（3.168），而是：

$$|I_2(\mathbf{b})| \ll \prod_{p\le T_{\mathscr{J}}}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{j=0}^{\mathscr{J}} e^{n_j} \ll \prod_{p\le T_{\mathscr{J}}}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\log T_{\mathscr{J}} \ll 1. \tag{A.16}$$

至此，公式 (3.24) 的证明完成。公式（3.25）的证明沿用引理 9 中关于由 [ABR20]里的狄利克雷多项式的平方扭曲的第四次平滑矩的证明。将扭曲项改为一个 α-可分多项式的平方，而非良因式分解狄利克雷多项式，所需的改动只是表面上的，按照公式 (3.24) 的证明即可完成。□

Appendix B. Probabilities in the Steinhaus model

我们首先将$A_{p,\ 1}$ =cos(θ_p)$p^{-1/2}$ 和$A_{p,\ 2}$ =cos($2\theta_p$)$p^{-1}/2$ 的矩与高斯变量$N_{p,\ i} = \nu_i p^{-\frac{i}{2}} Z_{p,\ i}$的矩进行比较，其中变量$Z_{p,\ i}$是独立同分布标准高斯变量，适用于 $i = 1$, 2，且满足$\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 和 $\nu_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$。

引理 B.1. 对于 $i \in \{1, 2\}$ 和任意 $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[A_{p,i}^{2k-1}] = \mathbb{E}[N_{p,i}^{2k-1}] = 0, \tag{B.1}$$

而对于偶数阶矩，我们有如下界

$$\mathbb{E}[A_{p,i}^{2k}] \le \mathbb{E}[N_{p,i}^{2k}]. \tag{B.2}$$

引理 *B.1* 的证明。 根据分布的奇对称性，方程 (B.1) 显然成立；而对于 (B.2) 中的偶数阶矩，我们不妨设 $k \ge 2$, 因为我们构造矩时使它们在 $k = 1$. 处相等。于是我们有 $2k$ 阶矩：

$$\mathbb{E}\left[\frac{\nu_i^{2k}\cos^{2k}(i\theta_p)}{p^{ik}}\right] = \frac{\nu_i^{2k}\binom{2k}{k}}{2^k p^{ik}}. \tag{B.3}$$

但我们记得，高斯分布可以精确计算 N_p 的矩，从而得到：

$$\mathbb{E}[N_{p,i}^{2k}] = \frac{\nu_i^{2k}(2k)!}{2^k p^{ik} k!}. \tag{B.4}$$

比较方程 (B.3) 和 (B.4)，即可完成不等式 (B.2) 的证明。 □

这些界可转化为对 (3.2) 中总和 $\mathscr{Y}_j$ 的界。

引理 B.2。 设 $1 \le j \le \mathscr{J}$, $i = 1,2$, $\mathscr{S}_{j,i} = \sum_{p\in\mathscr{P}} A_{p,i}$ 和 $\mathfrak{N}_{j,i} = \sum_{p\in\mathscr{P}_j} N_{p,i}$。那么对任意 $k \in \mathbb{N}$，有

$$\mathbb{E}\left[\mathscr{S}_{j,i}^{2k-1}\right] = \mathbb{E}[\mathfrak{N}_{j,i}^{2k-1}] = 0, \tag{B.5}$$

而对于偶数阶矩，有

$$\mathbb{E}\left[\mathscr{S}_{j,i}^{2k}\right] \le \mathbb{E}[\mathfrak{N}_{j,i}^{2k}]. \tag{B.6}$$

[1]因此，若 $k \ll (n_j - n_{j-1})T_{j-1}^{\frac{100}{}}$，则

$$\mathbb{E}\left[\mathscr{Y}_j^{2k}\right] \ll \mathbb{E}[\mathscr{N}_j^{2k}] \tag{B.7}$$

方程 (3.32 中定义的方差为 σ_j^2 的中心高斯分布 $\mathscr{N}_j$)

引理 *B.2* 的证明。 同样，由于这些分布具有奇对称性，方程 (B.5) 显然成立；至于 (B.6)，我们展开幂，得到对于 $\mathbf{n} = (n_p, p \in \mathscr{P}_j)$

$$\mathbb{E}\left[\mathscr{S}_{j,i}^{2k}\right] = \sum_{\substack{n_p \geq 0, \forall p \in \mathscr{P}_j \\ \sum_{p\in\mathscr{P}_j} n_p = 2k}} \binom{2k}{\mathbf{n}} \mathbb{E}\left[\prod_{p\in\mathscr{P}_j} A_{p,i}^{n_p}\right]. \tag{B.8}$$

利用独立性，期望可拆分。根据方程 (B.1)，除非所有的 n_p 均为偶数，否则期望为零。因此，我们可以将求和写为

$$\sum_{\substack{2|n_p, \forall p \in \mathscr{P}_j \\ \sum_{p\in\mathscr{P}_j} n_p = 2k}} \binom{2k}{\mathbf{n}} \prod_{p\in\mathscr{P}_j} \mathbb{E}\left[A_{p,i}^{n_p}\right]. \tag{B.9}$$

利用方程 (B.2)，我们可以将上述求和界定为:

$$\leq \sum_{\substack{2|n_p, \forall p \in \mathscr{P}_j \\ \sum_{p\in\mathscr{P}_j} n_p = 2k}} \binom{2k}{\mathbf{n}} \prod_{p\in\mathscr{P}_j} \mathbb{E}\left[N_p^{n_p}\right]. \tag{B.10}$$

最后，我们再次利用方程 (B.1) 说明，其他包含奇数个 n_p值的选取不会对求和作出贡献，因此结果为

$$\sum_{\substack{n_p \geq 0, \forall p \in \mathscr{P}_j \\ \sum_{p\in\mathscr{P}_j} n_p = 2k}} \binom{2k}{\mathbf{n}} \prod_{p\in\mathscr{P}_j} \mathbb{E}\left[N_{p,i}^{n_p}\right] = \mathbb{E}[\mathfrak{N}_{j,i}^{2k}]. \tag{B.11}$$

现在我们来给 $\mathbb{E}\left[\left(\mathscr{S}_{j,\,1} + \mathscr{S}_{j,\,2}\right)^{2k}\right]$ 求界，以证明 (B.7)。

注意到 $\mathfrak{N}_{j,\,i} \sim N(0,\ \tau_{i,\,j}^2)$，其中

$$\tau_{i,j}^2 = v_i^2 \sum_{p\in\mathscr{P}_j} p^{-i}, \tag{B.12}$$

我们得到

$$\frac{\mathbb{E}\left[\mathfrak{N}_{j,2}^{2k}\right]}{\mathbb{E}\left[\mathfrak{N}_{j,1}^{2k}\right]} = \left(\frac{\tau_{2,j}}{\tau_{1,j}}\right)^{2k} \ll \left(T_{j-1}\log T_{j-1}(n_j - n_{j-1})\right)^{-k}. \tag{B.13}$$

由于 $\mathscr{N}_j \sim N(0,\ \tau_{1,\,j}^2 + \tau_{2,\,j}^2)$，由闵可夫斯基不等式和 (B.2) 中的界可得

$$\mathbb{E}\left[\left(\mathscr{S}_{j,1} + \mathscr{S}_{j,2}\right)^{2k}\right] \ll \left(\frac{(\tau_{1,j} + \tau_{2,j})^2}{\tau_{1,j}^2 + \tau_{2,j}^2}\right)^k \mathbb{E}[\mathscr{N}_j^{2k}] \sim \mathbb{E}[\mathscr{N}_j^{2k}], \tag{B.14}$$

[1]最后的渐近式成立，因为 $k \ll (n_j - n_{j-1})T_{j-1}^{100}$. — □

References

[AB23] L.-P. Arguin 和 E. Bailey。塞尔伯格中心极限定理的大偏差估计及其应用。国际数学研究通知，(23):20574–20612，2023。

[AB24] L.-P. Arguin 和 E. Bailey。塞尔伯格中心极限定理大偏差的下界。Mathematika，71(1)，2024年12月。

[ABR20] L.-P. Arguin、P. Bourgade 和 M. Radziwi-l-l。《Fyodorov-Hiary-Keating猜想 I》。arXiv 电子预印本，页码 arXiv:2007.00988，2020年7月。[AC25] L.-P. Arguin 和 N. Creighton。《狄利克雷 $L\zeta$ 函数在 q方面大偏差的上界》。数论杂志，273：96–158，2025年。[BPRZ20] H. Bui、K. Pratt、N. Robles 和 A. Zaharescu。《打破狄利克雷 L函数扭曲二阶矩的 1/2 屏障》。数学进展，370：107175，40页，2020年。[CG01] J. B. Conrey 和 S. M. Gonek。《黎曼ζ函数的高阶矩》。杜克数学杂志，107(3)：577–604，2001年。[Cre25] N. Creighton。《椭圆曲线二次扭曲中心 L值在方差尺度下的上尾分布》。arXiv 电子预印本，页码 arXiv:2507.08640，2025年10月。[Das22] M. Das。《塞尔伯格中心极限定理在 L函数族中的应用》。硕士论文，埃克塞特大学，2022年9月。可查阅 https://ore.exeter.ac.uk/repository/bitstream/ handle/10871/132216/DasM.pdf?[GPY09] Daniel Goldston、J´anos Pintz 和 Cem Yıldırım。《元组中的素数 I》。数学年刊，170(2)：819–862，2009年9月。[HBC85] D.R. Heath-Brown 和 J. B. Conrey。《黎曼ζ函数与狄利克雷多项式乘积的渐近均方》。克雷尔杂志，357：161–181，1985年1月。[HR11] G. A. Hiary 和 M. O. Rubinstein。《酉矩多项式系数的统一渐近公式》。伦敦皇家学会会刊A辑：数学、物理与工程科学，467(2128)：1073–1100，2011年。补充数据可在线获取。[HS22] W. Heap 和 K. Soundararajan。《重新探讨ζ函数和 L函数矩的下界》。Mathematika，68(1)：1–14，2022年。[IS99] H. Iwaniec 和 P. Sarnak。《中心点处的狄利克雷 L函数》。进展中的数论，2：941–952，1999年。[KS00] J. Keating 和 N. Snaith。《随机矩阵理论与 $\zeta(1/2+it)$》。数学物理通讯，214(1)：57–89，2000年。[Rad11] M. Radziwi-l-l。《塞尔伯格中心极限定理中的大偏差》。arXiv 电子预印本，页码 arxiv:1108.5092，2011年。[Roc24] S´ebastien Roch。《现代离散概率：基本工具包》。剑桥大学出版社，2024年1月。[RS12] M. Radziwi-l-l 和 K. Soundararajan。《ζ函数矩的连续下界和 L函数》。Mathematika，59，2012年2月。[Sel46] A. Selberg。《黎曼ζ函数理论的贡献》。数学与自然科学文献，48(5)：89–155，1946年。[Sou09] K. Soundararajan。《黎曼ζ函数的矩》。数学年刊（第2辑），170(2)：981–993，2009年。[Zac19] Rapha¨el Zacharias。《狄利克雷 L函数四阶矩的磨光》。算术学报，191(3)：201–257，2019年1月。

L.P. Arguin, Mathematical Institute, University of Oxford, UK, and Baruch College and Graduate Center, City University of New York, NY电子邮箱地址: louis-pierre.arguin@maths.ox.ac.uk

N. Creighton, Mathematical Institute, University of Oxford, UK电子邮箱地址: nathan.creighton@maths.ox.ac.uk