arXiv:2603.01727v1 [physics.flu-dyn] 2 Mar 2026

低马赫数下强变密度流动的数值方法：火焰面正则化与质量通量浸入边界法

Matheus P. Severino[a], *、Fernando F. Fachini[b]、Elmer M. Gennaro[c]、Daniel Rodríguez[d]、Leandro F. Souza[a]

[a]圣保罗大学数学与计算科学研究所，*13566-590*，圣卡洛斯 – 圣保罗，巴西[b]国家空间研究所反应流体力学研究组，*12630-000*，卡舒埃拉保利斯塔 – 圣保罗，巴西[c]圣保罗州立大学航空工程系，*13876-750*，圣若昂-达博阿维斯塔 – 圣保罗，巴西[d]马德里理工大学航空航天工程高等技术学院，*28040*，马德里 – 马德里，西班牙

摘要

层流状态下的低马赫数流动，对于给定的时间尺度，内在地具有两个特征空间尺度；或者对于给定的空间尺度，具有两个特征时间尺度。由于流动速度与声速之间存在差异，这些双重尺度相差悬殊。因此，低马赫数流动的描述面临数学和计算方面的挑战。用于可压缩流动的标准数值方法通常针对只有一个占主导地位的空间和时间尺度的问题而设计，因此需要采用预处理技术等替代方法，或使用专为低马赫数方程设计的求解器。本研究基于分步时间步进法，提出了一种适用于低马赫数流动的简化流体动力学模型。该方法适用于处理强温度梯度和热扩散，这些现象常见于燃烧系统。对于反应流动算例中因假设化学反应无限快而导致的火焰锋面不连续性，本文采用正则化过程予以处理。此外，本文扩展了浸入边界法（IBM），使其能够处理穿过边界表面的质量通量，从而可利用便捷的笛卡尔网格模拟燃料从任意几何形状燃烧器中的喷射。该数值方法采用预测-校正格式，在同位网格上进行时间积分，并通过通量插值防止数值压力振荡（“奇偶解耦”）。本文采用相关测试算例验证这些方法及其实现，结果表明其正确且稳健。

关键词：投影方法，分步法，惩罚法，同位网格，反应流，燃烧，扩散火焰

*通讯作者电子邮箱：matheus.severino@usp.br (Matheus P. Severino)、fernando.fachini@inpe.br

1. 引言

低马赫数流动的特征流速远低于声速，在自然现象和工程应用中十分常见 [1, 2]。这类流动常见于燃烧、气象学和地球物理学等领域 [3, 4]。从数学上看，这类流动的特点是马赫数较小；马赫数是压力项的一个尺度因子，用于关联流体动力学贡献与热力学贡献。低马赫数极限是一种奇异极限 [5–8], ，这意味着随着马赫数趋近于零，方程的数学性质会发生显著变化。这一特点给解析研究 [6, 9] 和数值处理 [8, 10]都带来了挑战。奇异性会在问题中引入不同的尺度——一个与快速传播的声波相关的短时间尺度，以及一个与慢得多的流体流动相关的长时间尺度 [1] –，从而导致刚性方程组。因此，标准的可压缩流动求解器在低马赫数下会变得不准确且效率低下 [11, 12]。受系统声速所限制的 Courant–Friedrichs–Lewy（CFL）条件使显式方法必须采用极小的时间步长，难以实际应用。尽管隐式方法允许采用更大的时间步长，但仍面临病态矩阵带来的挑战。

处理低马赫数流动最直接的方法，是对可压缩流动求解器应用预条件技术，以改善系统的条件数 [13]。该方法非常适用于马赫数存在显著局部变化的流动。第二种方法是采用专门用于求解低马赫数渐近方程的求解器 [1], ，因此对于纯低马赫数流动，其效率和准确性更高。在后一类方法中，人工可压缩性 [14] 和投影法（或分数时间步进法） [15, 16]尤为突出。它们最初是针对不可压缩流动这一特定情况开发的（即处于准等熵或准绝热热力学极限下的低马赫数流动 [8, 9]）。

人工可压缩性方法的策略是引入人工亚声速声波，使其传播时不影响流体速度 [17]。这种方法恢复了可压缩系统的物理—数学结构，即时间上显式、空间上局部。然而，为了进行准确的非定常模拟，通常需要采用双时间步进方法：对于每个物理时间步，在人工时间内进行子迭代（趋向稳态解） [18]。此外，人工波传播速度的选择并非易事。文献 [8], 对人工可压缩性方法进行了全面分析，包括其物理意义；关于其向非等温流动的扩展，参见文献 [17]。

投影法，也称为分步时间步进法，是一种算子分裂技术 [19]。它将原方程（算子）分解为相互独立的子方程（算子）。每个子方程分别求解，然后通过组合各子方程的解来构造原方程的解。这种方法的主要优点是，单独求解每个子方程通常比直接求解原问题简单得多，计算效率也更高，尽管它确实会引入分裂

(FernandoF. Fachini), elmer.gennaro@unesp.br（Elmer M. Gennaro），daniel.rodriguez@upm.es（Daniel Rodríguez），lefraso@icmc.usp.br（Leandro F. Souza）

误差。一种有趣的理解方式是将此方法视为分块 LU 分解 [20, 21]。这种观点阐明了其中隐含的近似，并有助于避免传统上对中间（临时）速度和压力的精度阶数及边界条件产生的困惑。与人工可压缩性方法相比，投影法的一项关键优势是能够严格保证质量守恒，无需依赖人工可压缩性参数，也无需采用双时间步进。另一方面，流体动力压力具有全局（椭圆型）特性，因此通过求解泊松方程的逆问题来计算压力，成为该方法中计算开销最大的部分。

浸入边界法（IBM）是一种数值技术，旨在利用便捷的正交网格模拟涉及复杂几何结构的流体流动。该方法最初于20世纪70年代提出，用于模拟血液流经心脏瓣膜 [22], 。浸入边界法已被广泛认可为解决流固耦合问题的一种灵活有效的方法 [23]。从根本上说，该方法将体积力项纳入守恒方程 [24]。对该强迫项的具体定义和处理方式，使浸入边界法形成了不同的方法类别，例如连续力施加法和离散力施加法 [25]。顾名思义，连续力施加法在离散化守恒方程之前加入强迫项，因此不依赖数值格式。相反，离散力施加法在离散化之后施加强迫项，因此依赖于特定的数值实现。在连续力施加法中，惩罚法（或罚函数法）将浸入体建模为多孔介质 [24–27], ，其中强迫项起阻尼力的作用 [26]。该方法最初用于模拟多孔介质中的自然对流 [28]。随着渗透率趋于零，多孔结构逐渐接近不透水固体。惩罚法可视为反馈法的一个子类 [24], ，反馈法最初于[29]提出。从物理角度看，反馈法中的强迫项是阻尼振子 [24, 25, 30]。

一项重大挑战在于如何恰当地模拟各种现象。模型应能有效捕捉所需的物理特性，同时保持简洁，以便进行有见地的解读。面对这一挑战，本研究旨在采用简化的公式，提出一种适用于低马赫数流体动力学的模型，以处理强温度梯度和热能扩散。为此，我们采用低马赫数反应流模型，并假设化学反应速度远快于特征流速，或者等效地，采用 Burke–Schumann 极限（或动力学） [31]。在此假设下，反应物浓度和系统能量可用耦合函数——混合分数和过剩焓——来描述；这些函数在计算域中传输，且不发生化学反应[32–36]。这种方法可用于扩散火焰的数值研究，后文将作详细介绍。

尽管形式上进行了简化，无限薄火焰仍带来数值挑战。具体而言，由于燃料子域和氧化剂子域中的行为不同，某些系数和导数在火焰处呈现不连续。为避免与不连续性相关的数值振荡，本文提出了针对这些属性的正则化过程。此外，本文还通过引入质量通量，创新性地应用浸入边界法，从而拓展了该方法的传统用途。具体来说，采用惩罚浸入边界法来规定圆柱形燃烧器的燃料喷射，以及燃烧器表面上所有变量的条件。除了如前所述具有明确的物理解释之外，选择惩罚法还因为其具有形式上的收敛性结果

[37, 38]。

时间积分采用预测-校正格式，并结合投影法；事实证明，该方法在处理强温度梯度方面效率很高 [39]。为防止速度与压力之间发生奇偶解耦，在用于空间离散的同位网格上采用通量插值方法。

下文将按如下结构展开：第2节详细阐述物理假设及相关数学模型；第3节概述数值方法并讨论相关细节；第4节介绍相关测试算例，以验证数值模型及其计算实现；最后，第5节总结研究结果。

2. 物理建模与数学建模

本节概述低马赫数反应流建模所依据的物理假设及相应的数学描述。

2.1. 一般模型

考虑一种密度为 $\hat{\rho}$ 的流体，以速度 $\hat{\boldsymbol{v}} := [\hat{v}_1,\ \hat{v}_2,\ \hat{v}_3]^T$ 流动，压力为 $\hat{p}$，温度为 T。该流体由 N 种化学组分构成，其中第 n 种组分的质量分数为 $Y_n := \hat{\rho}_n/\hat{\rho}$，其中 ρ_n 是第 n 种组分的密度，适用于$n = 1,\ \ldots,\ N$。通常，这些变量同时取决于时间 $\hat{t}$ 和位置 $\hat{\boldsymbol{x}} := [\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_3]^T$。请注意，抑扬符号（$\hat{\cdot}$）表示有量纲量。

该系统在浮力作用下的动力学可由以下一组（有量纲）偏微分方程描述，这些方程表示守恒的物理定律 [40]:

$$\partial_{\hat{t}}\hat{\rho} + \hat{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\hat{\rho}\hat{\boldsymbol{v}}) = 0, \tag{1}$$

$$\partial_{\hat{t}}\left(\hat{\rho}\hat{\boldsymbol{v}}\right) + \hat{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \left(\hat{\rho}\hat{\boldsymbol{v}}\hat{\boldsymbol{v}}\right) = -\hat{\boldsymbol{\nabla}}\hat{p} + \hat{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} + \left(\hat{\rho} - \hat{\rho}_c\right)\hat{\boldsymbol{g}}, \tag{2}$$

$$\partial_{\hat{t}}\left(\hat{\rho}\hat{Y}_n\right) + \hat{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \left(\hat{\rho}\hat{\boldsymbol{v}}\hat{Y}_n\right) = \hat{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \left(\hat{\rho}\hat{D}_n\hat{\boldsymbol{\nabla}}\hat{Y}_n\right) + \hat{\omega}_n, \tag{3}$$

$$\partial_{\hat{t}}\left(\hat{\rho}\hat{h}\right) + \hat{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \left(\hat{\rho}\hat{\boldsymbol{v}}\hat{h}\right) = \partial_{\hat{t}}\hat{p} + \left(\hat{\boldsymbol{v}} \cdot \hat{\boldsymbol{\nabla}}\right)\hat{p} - \hat{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \hat{\boldsymbol{q}} + \hat{\boldsymbol{\nabla}}\hat{\boldsymbol{v}} : \hat{\boldsymbol{\tau}} - \sum_{n=1}^{N} \Delta\hat{h}_n^0\hat{\omega}_n, \tag{4}$$

并辅以一个状态方程。

$\hat{\ }\hat{\ }$ 采用常规记号，其中 $\partial_{\hat{t}}$、$\boldsymbol{\nabla}$ 和 $\boldsymbol{\nabla}\cdot$ 分别表示（有量纲的）时间偏导数、梯度和散度算子。此外，$\hat{\boldsymbol{v}}\hat{\boldsymbol{v}}$ 是并矢积 $\hat{\boldsymbol{v}} \otimes \hat{\boldsymbol{v}}$的并置表示，$\hat{\boldsymbol{\tau}}$ 为黏性应力张量，$\hat{\rho}_c$ 为描述浮力的特征密度，$\hat{\boldsymbol{g}} := -\hat{g}\boldsymbol{e}_{x_2}$（其中 $\boldsymbol{e}_{x_2} := [0, 1, 0]^T$）为重力加速度，$\hat{D}_n$为混合物中第 n 个组分的质量扩散系数，$\hat{\omega}_n := \sum_m \hat{\omega}_{n,m}$ 为化学源项$\hat{}$（其中$\hat{\omega}_{n,m}$ 是第 n 个组分由第 m 个反应产生的比生成速率），$h := \int_{\hat{T}_{ref}}^{\hat{T}} \hat{c}_p d\hat{T}$（参考温度为$\hat{}$ T_{ref}）为显热焓，而 $\Delta\hat{h}_n^0$为第 n 个组分的标准生成焓。

注意，混合物的比热（$\hat{c}_v$ 和$\hat{c}_p$）由各组分比热的加权平均表示，即 $\hat{c}_v := \sum_{n=1}^{N} \hat{c}_{v,n} \hat{Y}_n$ 和$\hat{c}_p := \sum_{n=1}^{N} \hat{c}_{p,n} \hat{Y}_n$。此外，虽然质量分数（$Y_n$）本质上是无量纲的，但也用抑扬符标记，以便与 Y_n区分；后者表示其按特征值归一化后的形式。

黏性应力张量（$\hat{\boldsymbol{\tau}}$）由纳维-泊松定律给出，即

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} := \hat{\mu} \left[\hat{\boldsymbol{\nabla}} \hat{\boldsymbol{v}} + \left(\hat{\boldsymbol{\nabla}} \hat{\boldsymbol{v}} \right)^T - \frac{2}{3} \left(\hat{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \hat{\boldsymbol{v}} \right) \boldsymbol{I} \right] + \hat{\zeta} \left(\hat{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \hat{\boldsymbol{v}} \right) \boldsymbol{I}, \tag{5}$$

其中，$\hat{\mu}$ 为剪切黏度，ζ 为体积黏度（或容积黏度）。此外，能量通量（$\hat{\boldsymbol{q}}$）由下式确定：

$$-\hat{\boldsymbol{q}} := \hat{\kappa} \hat{\boldsymbol{\nabla}} \hat{T} - \hat{\rho} \sum_{n=1}^{N} \hat{h}_n \hat{D}_n \hat{\boldsymbol{\nabla}} \hat{Y}_n \tag{6}$$

右侧第一项对应于热传导的傅里叶定律，第二项则对应于具有不同焓（热容）的组分扩散。在此定义中，$\hat{\kappa}$ 为混合物的热导率，h_n 为第 n 种组分的显热焓。此外，质量扩散通量由菲克定律给出，且未明确计入辐射产生的热能通量。

2.2. 其他假设

假设气体混合物表现为完全气体，因此采用“理想气体定律”：

$$\hat{p} = \hat{\rho} \hat{T} \hat{R} / \hat{W}, \tag{7}$$

其中，$\hat{R}$ 为通用气体常数，$\hat{W} := 1/(\sum_{n=1}^{N} \hat{Y}_n / \hat{W}_n)$为混合物的（平均）摩尔质量，记第 n 种组分的摩尔质量为 W_n。

采用幂律表示输运系数的温度依赖性[41]。具体而言，根据普朗特数 Pr 的定义：$= \hat{\mu}/(\hat{\kappa}/\hat{c}_p)$，以及第 n 个组分的路易斯数 Le_n：$= [\hat{\kappa}/(\hat{\rho}\hat{c}_p)]/D_n$，可得关系式 $\hat{\mu}/\,\mathrm{Pr} = \hat{\rho} D_n \mathrm{Le}_n = \hat{\kappa}/\hat{c}_p$ 成立，其中

$$\frac{\hat{\kappa}}{\hat{c}_p} = \hat{A} \left(\frac{\hat{T}}{\hat{T}^*} \right)^{\sigma} \tag{8}$$

其中 $A := 2.58 \times 10^{-5}\,\mathrm{kg/(m \cdot s)}$，且 $\sigma := 0.7$，参考温度为 $\hat{T}^* = 298\,\mathrm{K}$。或者，也可以采用萨瑟兰定律 [42]。

假设所有组分的比热相同，即 $\hat{c}_v = \hat{c}_{v,i} = \hat{c}_{v,j}$ 以及 $\hat{c}_p = \hat{c}_{p,i} = \hat{c}_{p,j}$ 对于每个 $i, j \in \{1, \ldots, N\}$均成立。因此，式（6）中能量通量的第二项为零 [40, 41]。此外，对于量热完全气体（定比热），显热焓可表示为 $\hat{h} = \hat{c}_p \hat{T}$。

燃烧通过燃料与氧化剂之间不可逆的一步全局反应来建模，其符号表示如下：

$$\mathrm{F} + \hat{s}\mathrm{O} \rightarrow (1 + \hat{s})\mathrm{P} \qquad - \Delta \hat{h}^0, \tag{9}$$

ˆs 表示以质量计的化学计量系数，即，若要使一单位燃料（“F”）质量发生反应——生成$1+$ ˆs单位产物（“P”）质量并释放热量 Δˆh^0 ——则需要ˆs 单位的ˆ氧化剂（“O”）质量。与质量分数（Y_n）的情况类似，需要强调的是，参数ˆs 是无量纲的。不过，为了将其与无量纲化过程中得到的归一化版本（s）区分开来，这里为它加上了帽号。因此，令 $n=1$ 表示燃料， $n=2$表示氧化剂， $n=3$表示产物，

$$\hat{\omega}_n \coloneqq c_n\,\hat{\omega}_1 \tag{10}$$

其中，对于惰性的第 n 个组分（即，对于 $n\neq 1,\ 2,\ 3$），且 $c_1=1$, $c_2=$ ˆs和 $c_3=-(1+$ ˆ$s)$, 因为 ˆ$\omega_1=$ ˆ$\omega_2/$ˆ$s=-$ˆ$\omega_3/(1+$ ˆ$s)$。此外，根据定义， $\sum_{n=1}^{N}\Delta$ˆh_n^0 ˆ$\omega_n=$ ˆ$\omega_1\sum_{n=1}^{N}c_n\Delta$ˆ$h_n^0=\Delta$ˆ$h^0$ˆ$\omega_1$。此外，反应速率由阿伦尼乌斯方程描述，即，

$$\hat{\omega}_1=\hat{\rho}\hat{B}\hat{Y}_1\hat{Y}_2 e^{-\hat{E}/(\hat{R}\hat{T})} \tag{11}$$

其中 $\hat{B}$ ˆ是指前因子，而 E 是该化学反应的活化能 .

这些关于化学反应的假设，结合平均摩尔质量恒定的假设（$W=$ 恒定）——即，整个计算域中的流体是均匀混合物——，使得系统动力学可以仅用两种组分来描述：燃料（Y_1）和氧化剂（Y_2）[33]。

考虑到前述假设，为便于后续讨论，将用 F（表示燃料）和 O（表示氧化剂）替代数值下标，使其记号更具提示性。

2.3. 无量纲化

用下标“c”表示特征值，可得到无量纲量：

$$\begin{array}{lll}
t\coloneqq \hat{t}/\hat{t}_c & , & \boldsymbol{x}\coloneqq \hat{\boldsymbol{x}}/\hat{l}_c \\
\rho\coloneqq \hat{\rho}/\hat{\rho}_c & , & \boldsymbol{v}\coloneqq \hat{\boldsymbol{v}}/\hat{v}_c \\
T\coloneqq \hat{T}/\hat{T}_c & , & p\coloneqq \hat{p}/\hat{p}_c \\
Y_F\coloneqq \hat{Y}_F/\hat{Y}_{F,c} & , & Y_O\coloneqq \hat{Y}_O/\hat{Y}_{O,c} \\
D_F\coloneqq \hat{D}_F/\hat{D}_{F,c} & , & D_O\coloneqq \hat{D}_O/\hat{D}_{O,c} \\
\mu\coloneqq \hat{\mu}/\hat{\mu}_c & , & \zeta\coloneqq \hat{\zeta}/\hat{\mu}_c \\
\kappa\coloneqq \hat{\kappa}/\hat{\kappa}_c & , & c_p\coloneqq \hat{c}_p/\hat{c}_{p,c}=1 \\
s\coloneqq \hat{s}\hat{Y}_{F,c}/\hat{Y}_{O,c} & , & \Delta h^0\coloneqq \Delta\hat{h}^0\hat{Y}_{F,c}/(\hat{c}_{p,c}\hat{T}_c) \\
\boldsymbol{g}\coloneqq \hat{\boldsymbol{g}}/\hat{g}_c=-\boldsymbol{e}_{x_2} & &
\end{array} \tag{12}$$

由此可得无量纲算子：

$$\partial_t\coloneqq \hat{t}_c\partial_{\hat{t}}\quad ,\quad \boldsymbol{\nabla}\coloneqq \hat{l}_c\hat{\boldsymbol{\nabla}}\quad ,\quad \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\coloneqq \hat{l}_c\hat{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\cdot} \tag{13}$$

在这些附加假设和定义下，该系统由以下一组无量纲方程描述：

$$\mathrm{St}\,\partial_t\rho+\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0, \tag{14}$$

$$\mathrm{St}\,\partial_t(\rho\boldsymbol{v})+\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v})=-\frac{1}{\widetilde{\mathrm{M}}^2}\boldsymbol{\nabla}p+\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pe}}\boldsymbol{\nabla}\cdot\tau+\frac{1}{\mathrm{Fr}^2}(1-\rho)\,\boldsymbol{e}_{x_2}, \tag{15}$$

$$\mathrm{St}\,\partial_t\left(\rho Y_F\right)+\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\rho\boldsymbol{v}Y_F\right)=\frac{1}{\mathrm{Pe}\,\mathrm{Le}_F}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\kappa\boldsymbol{\nabla}Y_F\right)+\mathrm{Da}\,\omega_F, \tag{16}$$

$$\mathrm{St}\,\partial_t\left(\rho Y_O\right)+\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\rho\boldsymbol{v}Y_O\right)=\frac{1}{\mathrm{Pe}\,\mathrm{Le}_O}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\kappa\boldsymbol{\nabla}Y_O\right)+s\,\mathrm{Da}\,\omega_F, \tag{17}$$

$$\mathrm{St}\,\partial_t\left(\rho T\right)+\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\rho\boldsymbol{v}T\right)=\frac{\gamma-1}{\gamma}\left[\partial_t p+\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)p+\widetilde{\mathrm{M}}^2\,\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pe}}\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}:\boldsymbol{\tau}\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Pe}}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\kappa\boldsymbol{\nabla}T\right)-\Delta h^0\,\mathrm{Da}\,\omega_F, \tag{18}$$

以及状态方程:

$$p=\rho T, \tag{19}$$

其中 $\mathrm{St}\coloneqq\left(\hat{}\,l_c/\hat{}\,v_c\right)/\hat{}\,t_c$ 为斯特劳哈尔数，$\mathrm{Pr}\coloneqq\hat{}\,\mu_c/\left(\hat{}\,\kappa_c/\hat{}\,c_{p,c}\right)$ 为普朗特数，$\mathrm{Pe}\coloneqq\hat{}\,l_c\hat{}\,v_c/[\hat{}\,\kappa_c/\left(\hat{}\,\rho_c\hat{}\,c_{p,c}\right)]$ 为佩克莱数，$\mathrm{Fr}\coloneqq\hat{}\,v_c/\left(\hat{}\,g_c\hat{}\,l_c\right)^{1/2}$ 为弗劳德数，$\mathrm{Le}_\eta\coloneqq[\hat{}\,\kappa_c/\left(\hat{}\,\rho_c\hat{}\,c_{p,c}\right)]/\hat{}\,D_\eta$ 为组分 $\eta\in\{F,O\}$ 的路易斯数，$\mathrm{Da}\coloneqq\left(\hat{}\,l_c/\hat{}\,v_c\right)/[\hat{}\,Y_{O,c}\hat{}\,Be^{-}\hat{}\,E/\left(\hat{}\,R\hat{}\,T\right)]^{-1}$ 为达姆科勒数，$\gamma\coloneqq\hat{}\,c_{p,c}/\hat{}\,c_{v,c}$ 为绝热指数，$\widetilde{\mathrm{M}}\coloneqq\gamma^{1/2}\mathrm{M}$ 与马赫数 $\mathrm{M}\coloneqq\hat{}\,v_c/\left(\gamma\hat{}\,p_c/\hat{}\,\rho_c\right)^{1/2}$ 成正比。

此外，黏性应力张量（$\boldsymbol{\tau}$）现在表示为

$$\boldsymbol{\tau}=\kappa\left[\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}+\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}\right)^T-\frac{2}{3}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right)\boldsymbol{I}\right]+\zeta\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right)\boldsymbol{I}, \tag{20}$$

在此背景下，需要强调的是，每个方程中对流与扩散的相对强度均表示为佩克莱数（Pe）的比例。此外，无量纲输运系数为

$$\kappa=\mu=\rho D_\eta=T^\sigma \tag{21}$$

其中 $\sigma=0.7$ 和 $\eta\in\{F,O\}$。

此后，$\mathrm{St}\coloneqq1$，表示 $\hat{}\,t_c$ 是停留时间（即 $\hat{}\,t_c\coloneqq\hat{}\,l_c/\hat{}\,v_c$）。

2.4. 低马赫数极限

由于声学时间尺度与对流时间尺度之间存在巨大差异，低马赫数下的流动模拟对计算流体力学（CFD）构成了重大挑战。在此类流态中，声速比特征流速高出数个数量级，由此形成多尺度问题，使数值建模更加复杂。这种现象普遍存在于自然系统（例如大气流动或生物流动）以及工程应用（例如冷却流动和反应流）中；要同时解析声学相互作用与整体流体运动，就需要采用计算密集型技术来确保精度和稳定性。

为应对这一挑战，本节推导守恒方程的低马赫数渐近极限。通过系统地分离占主导地位的物理过程，

利用渐近分析，将守恒方程形式化简，以消除（瞬时）声学效应，同时保留对流和扩散动力学。这种方法解耦了低马赫数流动中固有的不同尺度，得到一个既忠实反映底层物理、又能实现计算可行模拟的简化系统。

在推导低马赫数方程时，对每个因变量采用多尺度展开技术，将其表示为马赫数 [1, 43] 的幂次。

定义快时间尺度，

$$\xi := \frac{\hat{t}}{\hat{l}_c/(\hat{p}_c/\hat{\rho}_c)^{1/2}} = \frac{t}{\widetilde{\mathrm{M}}} \tag{22}$$

该时间尺度与声波的传播有关，因变量展开为 $\widetilde{\mathrm{M}}$ 的幂级数，并表示为两个时间尺度（t 和 ξ）及一个空间尺度（$\boldsymbol{x}$）的函数：

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x}, t; \widetilde{\mathrm{M}}) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(\boldsymbol{x}, t, \xi) + \widetilde{\mathrm{M}}\,\boldsymbol{\mathcal{A}}_1(\boldsymbol{x}, t, \xi) + \widetilde{\mathrm{M}}^2\,\boldsymbol{\mathcal{A}}_2(\boldsymbol{x}, t, \xi) + \mathcal{O}\left(\widetilde{\mathrm{M}}^3\right), \tag{23}$$

其中 $\boldsymbol{\mathcal{A}} := [\rho, \boldsymbol{v}, p, Y_F, Y_O, T]^T$ 是状态向量。

因此，对于给定的位置（$\boldsymbol{x}$）和修正马赫数（$\widetilde{\mathrm{M}}$），时间导数由流动变化项（$\partial/\partial t$）和声波传播项（$\widetilde{\mathrm{M}}^{-1}\,\partial/\partial\xi$）组成。数学表示为：

$$\partial_t \boldsymbol{\mathcal{A}}|_{\boldsymbol{x},\widetilde{\mathrm{M}}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\widetilde{\mathrm{M}}}\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\left[\boldsymbol{\mathcal{A}}_0 + \widetilde{\mathrm{M}}\,\boldsymbol{\mathcal{A}}_1 + \widetilde{\mathrm{M}}^2\,\boldsymbol{\mathcal{A}}_2 + \mathcal{O}\left(\widetilde{\mathrm{M}}^3\right)\right] \tag{24}$$

推导低马赫数方程时，需要将此展开代入方程，并在声波周期（$\mathrm{C_a}$）内，对质量、组分和能量的一阶方程以及动量的二阶方程进行积分。请注意，这只捕捉了声波对平均速度场（$\boldsymbol{v}_0$）的净影响，该影响体现在平均速度张量（$\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_0 := \mathrm{C_a}^{-1}\int_0^{\mathrm{C_a}} \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_0 d\xi$）中，详见 ~~[1, 43]~~。另一种做法是考虑声学空间尺度，而非声学时间尺度 [3]。

通过将平均速度张量（$\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_0$）近似为平均速度的张量（$\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_0$），可以完全消除声学的影响，~~最终~~得到零马赫数极限[44], ，这相当于在展开中仅考虑流动时间尺度 [1, 5, 44, 45]，，即：

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x}, t; \widetilde{\mathrm{M}}) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(\boldsymbol{x}, t) + \widetilde{\mathrm{M}}\,\boldsymbol{\mathcal{A}}_1(\boldsymbol{x}, t) + \widetilde{\mathrm{M}}^2\,\boldsymbol{\mathcal{A}}_2(\boldsymbol{x}, t) + \mathcal{O}\left(\widetilde{\mathrm{M}}^3\right). \tag{25}$$

本文将研究零马赫数方程。将式（25）代入方程（14）–（21），可得以下零阶方程：

$$\partial_t \rho_0 + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho_0 \boldsymbol{v}_0) = 0, \tag{26}$$

$$\partial_t(\rho_0 \boldsymbol{v}_0) + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho_0 \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_0) = -\boldsymbol{\nabla} p_2 + \frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pe}}\boldsymbol{\nabla}\cdot\tau_0 + \frac{1}{\mathrm{Fr}^2}(1-\rho_0)\,\boldsymbol{e}_{x_2}, \tag{27}$$

$$\partial_t(\rho_0 Y_{F,0}) + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho_0 \boldsymbol{v}_0 Y_{F,0}) = \frac{1}{\mathrm{Pe}\,\mathrm{Le}_F}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\kappa_0 \boldsymbol{\nabla} Y_{F,0}) + \mathrm{Da}\,\omega_{F,0}, \tag{28}$$

$$\partial_t\left(\rho_0 Y_{O,0}\right)+\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\rho_0\boldsymbol{v}_0 Y_{O,0}\right)=\frac{1}{\mathrm{Pe}\,\mathrm{Le}_O}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\kappa_0\boldsymbol{\nabla}Y_{O,0}\right)+\mathrm{Da}\,s\omega_{F,0}, \tag{29}$$

$$\partial_t\left(\rho_0 T_0\right)+\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\rho_0\boldsymbol{v}_0 T_0\right)=\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{dp_0}{dt}+\frac{1}{\mathrm{Pe}}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\kappa_0\boldsymbol{\nabla}T_0\right)-\mathrm{Da}\,\Delta h^0\omega_{F,0}, \tag{30}$$

$$p_0=\rho_0 T_0, \tag{31}$$

其中 $\kappa_0 \coloneqq \kappa(T_0)$，且

$$\boldsymbol{\tau}_0=\kappa_0\left[\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0+\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0\right)^T-\frac{2}{3}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}_0\right)\boldsymbol{I}\right] \tag{32}$$

注意，与体积粘性压力对应的项——即方程 (20) 右端的第二项——并未明确纳入方程 (32)。在低马赫数极限下，流体动力压力与体积粘性压力可以合并，因为二者都会以体积（各向同性）膨胀的形式对应力作出贡献，但不会影响能量平衡或热力学状态。详细讨论见 [46]。

零阶压力 (p_0) 可与热力学压力对应，而二阶压力 (p_2) 可与流体动力压力对应。这种对应关系是合理的，因为它们在动量方程和状态方程中的量级相同，这一点可从它们表示为单位阶项看出。

此外，动量方程还给出了对 p_0 的约束，

$$\boldsymbol{\nabla}p_0=0, \tag{33}$$

这意味着 $p_0 = p_0(t)$，即热力学压力会瞬时传播至整个系统。

为清晰起见，此后仅保留热力学压力的零阶指标（即 p_0）。

2.5. 火焰片近似

对于反应速率显著超过流率变化的情形（即 Da $\gg 1$），反应物不可能在计算域内共存。在对流项与反应项贡献量级相当的前提下（即 Da $Y_F Y_O \sim 1$），可以确定 $Y_F Y_O \sim \mathrm{Da}^{-1}$。因此，当 Da 趋于无穷时，$Y_F Y_O$ 趋于零，这意味着在计算域的每一点上 $Y_F = 0$ 或 $Y_O = 0$。于是，一个无限薄的反应区（称为“火焰面”或“火焰表面”）将燃料子域（其中 $Y_F \neq 0$ 且 $Y_O = 0$）与氧化剂子域（其中 $Y_F = 0$ 且 $Y_O \neq 0$）分隔开来。同时，在火焰表面上，两种反应物的浓度均为零（$Y_F = 0$ 且 $Y_O = 0$）。

火焰片近似最初由 Burke & Schumann 在一篇开创性论文中提出，该论文首次对扩散（非预混）火焰理论进行了形式化表述 [31]。在这一 Burke–Schumann 极限（或动力学）下，可以采用施瓦布–泽尔多维奇–利尼安表述 [32–36]来描述非等扩散反应流，其中耦合函数在无反应的情况下输运。这些函数称为混合分数（Z）和过剩焓（H），其方程取代了组分方程和能量方程。

将式 (29) 乘以 Le_O / Le_F 后，从式 (28) 乘以 S 的结果中相减，可得关于 $Z \coloneqq SY_F - Y_O + 1$ 的方程:

$$\partial_t (\rho Z) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v} Z) = \frac{1}{\mathrm{Le}\,\mathrm{Pe}} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\kappa \boldsymbol{\nabla} Z) \tag{34}$$

其中 $S \coloneqq s\mathrm{Le}_O$ / Le_F是广义化学计量系数，并且

$$\mathrm{Le}(Z) \coloneqq (\mathrm{Le}_F - \mathrm{Le}_O)\theta(Z-1) + \mathrm{Le}_O, \tag{35}$$

其中 θ 为 Heaviside 阶跃函数。请注意，根据这种混合分数定义（经过重新缩放），火焰始终位于等值曲线 $Z = 1$上。

类似地，将乘以 Le_F的式 (28)、乘以 Le_O的式 (29)，以及乘以 $(S+1)/Q$的式 加在一起，可得关于 $H \coloneqq (S+1)T/Q + Y_F + Y_O$ 的方程: (30)

$$\partial_t (\rho H) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v} H) = \frac{S+1}{Q} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp_0}{dt} + \frac{1}{\mathrm{Pe}} \left[\boldsymbol{\nabla} \cdot (\kappa \boldsymbol{\nabla} H) + \mathrm{N}\, \boldsymbol{\nabla} \cdot (\kappa \boldsymbol{\nabla} Z) \right] \tag{36}$$

其中 $Q \coloneqq \Delta h^0 / \mathrm{Le}_F$是广义释放热量，并且

$$\mathrm{N}(Z) \coloneqq (\mathrm{N}_F - \mathrm{N}_O)\theta(Z-1) + \mathrm{N}_O, \tag{37}$$

其中 $\mathrm{N}_F \coloneqq (1 - \mathrm{Le}_F)/(S\mathrm{Le}_F)$，且 $\mathrm{N}_O \coloneqq (\mathrm{Le}_O - 1)/\mathrm{Le}_O$。

要闭合系统，还缺少一个关于热力学压力 (p_0) [47]的方程。将式 (36) 左端（LHS）重新写成原始变量，并利用状态方程 (31) 确定 LHS 中的压力项，同时考虑混合分数方程 (34) 以及式 (37) 中函数 N 的定义，可得

$$\frac{dp_0}{dt} = \frac{\gamma}{V} \left\{ \frac{Q}{S+1} \frac{1}{\mathrm{Pe}} \int_V \left[\boldsymbol{\nabla} \cdot (\kappa \boldsymbol{\nabla} H) + \mathscr{N}\, \boldsymbol{\nabla} \cdot (\kappa \boldsymbol{\nabla} Z) \right] dV - p_0 \int_V (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v})\, dV \right\} \tag{38}$$

即， p_0 作为常微分方程的解得到，其计算域体积为 V。显然， $\mathscr{N}$与N具有相同的行为，

$$\mathscr{N}(Z) \coloneqq (\mathscr{N}_F - \mathscr{N}_O)\theta(Z-1) + \mathscr{N}_O, \tag{39}$$

但其中 $\mathscr{N}_F \coloneqq -1/S$ 且 $\mathscr{N}_O \coloneqq 1$。

根据系统边界，可能有两种简化:

（i）对于封闭系统，

$$p_0 \int_V \frac{1}{T} dV = \int_V \rho dV = m, \tag{40}$$

即，由于总质量（m）随时间保持不变，因此可在区域体积（V）上对状态方程积分，得到 p_0；并且

（ii）对于开放系统，

$$p_0 = \frac{\hat{p}_0}{\hat{p}_c} = 1, \tag{41}$$

即，热力学压力由大气压力决定，因为其影响会从边界瞬时传递到整个计算域。

因此，只有对于半封闭系统，即开放程度随时间变化的系统（例如内燃机气缸），才需要直接使用方程（38）。

2.6. 最终模型

总而言之，考虑浮力效应并采用火焰面近似（无限快化学反应）的低马赫数化学反应流，可通过以下无量纲方程组进行数学描述：

$$\partial_t \rho + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0, \tag{42}$$

$$\partial_t (\rho \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{\nabla} p + \frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pe}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{\mathrm{Fr}^2} (1-\rho) \boldsymbol{e}_{x_2}, \tag{43}$$

$$\rho \partial_t Z + \rho \left(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right) Z = \frac{1}{\mathrm{Le}\,\mathrm{Pe}} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\kappa \boldsymbol{\nabla} Z), \tag{44}$$

$$\rho \partial_t H + \rho \left(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right) H = \zeta d_t p_0 + \frac{1}{\mathrm{Pe}} \left[\boldsymbol{\nabla} \cdot (\kappa \boldsymbol{\nabla} H) + \mathrm{N}\, \boldsymbol{\nabla} \cdot (\kappa \boldsymbol{\nabla} Z) \right], \tag{45}$$

其中 $\zeta := (S+1)(\gamma-1)/(\gamma Q)$，$d_t p_0 := dp_0/dt$，黏性应力张量（$\boldsymbol{\tau}$）采用（简化的）纳维-泊松定律建模

$$\boldsymbol{\tau} = \kappa \left[\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v})^T - \frac{2}{3} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) \boldsymbol{I} \right], \tag{46}$$

此外，路易斯数（Le）和 N 的以下分段定义用于描述差异扩散：

$$\mathrm{Le}(Z) := (\mathrm{Le}_F - \mathrm{Le}_O)\theta(Z-1) + \mathrm{Le}_O, \tag{47}$$

and

$$\mathrm{N}(Z) := (\mathrm{N}_F - \mathrm{N}_O)\theta(Z-1) + \mathrm{N}_O\,. \tag{48}$$

该系统还结合了理想气体定律

$$p_0 = \rho T, \tag{49}$$

来描述热力学状态，并通过幂律表征输运系数的温度依赖性

$$\kappa = T^\sigma \tag{50}$$

其中 $\sigma = 0.7$。

混合分数（Z）和过剩焓（H）变量的方程已为方便起见表示为非散度（或非守恒）形式。特别是，为计算

正则化温度导数，如第3.5节所述。所建模的系统自然受特定初始条件和边界条件的约束，这些条件将在第4节中逐案加以说明。

与相关研究相比，所提出的模型在更简化的燃烧公式中，还考虑了浮力以及优先扩散或差异扩散的影响。

3. 数值方法

流体动力学变量的演化采用分步时间步进法（或投影法） [48],，该方法由 [10, 49]提出。Chorin [15]和 Témam [16], 首先引入了这一方法，前者基于 Ladyzhenskaya 分解定理（或 Helmholtz–Hodge 分解） [48, 50]提出了一种优雅的诠释。具体而言，分步时间步进法将压力项与其他动量项形式上分离，因此构成一种算子分裂技术 [19]。Perot [20, 21]提出，可以将这一方法理解为分块 LU 分解，这一见解颇具启发性。这种视角阐明了其基本假设，并回应了关于中间（临时）速度和压力场的边界条件，以及时间精度降低等长期存在的问题。压力椭圆方程用于施加速度散度约束（即压力充当拉格朗日乘子） [20]。通常会对速度散度施加非齐次约束（与热压缩性有关），而在不可压缩极限下，该约束可简化为齐次约束 [9]。

通过空间离散（直线法）将偏微分方程转换为常微分方程系统 [51, 52], ，从而能够灵活地使用时间积分器。因此，时间推进采用预测校正法。预测阶段采用二阶 Adams–Bashforth 格式 [53], ，并加入压力校正步骤以确保质量守恒。类似地，校正阶段采用二阶 Adams–Moulton 格式 [53], ，同样包含压力校正步骤。将多步法结合使用——预测阶段采用显式方法（Adams–Bashforth 方法），校正阶段采用隐式方法（Adams–Moulton 方法）——是一种成熟的方法，且已用于相关研究[49, 54]。在两个阶段中，压力均通过求解泊松方程计算，如前所述，这也是该方法最主要的计算开销。

物理域离散为同位网格。算子的空间离散基于中心近似，并引入辅助通量，以避免非物理的压力振荡。这种振荡称为“奇偶解耦” [10, 55] （或“棋盘格现象”），其产生原因是：当所有变量都在相同位置计算时，系统无法以同等精度守恒质量与动量。

3.1. 时间离散

上标用于表示时间。过去的已知数值（t_{n-m}）和当前的已知数值（t_n）分别用上标“$n-m$”和“n”表示，其中 $t_{n-m} := t_n - m\Delta t$，整数 m 和时间步 Δt。未来时刻的未知值、预测值和校正值 $t_{n+1} := t_n + \Delta t$ 依次用上标“$*$”和“$n+1$”表示。

3.1.1. 预测阶段

(i) 混合分数的估计值 (Z^*) 根据公式（44），利用已知时刻 t_n 和 t_{n-1}的数值计算，即

$$\frac{Z^* - Z^n}{\Delta t} = \frac{3}{2}\text{Res}_Z(\rho^n, \boldsymbol{v}^n, Z^n) - \frac{1}{2}\text{Res}_Z(\rho^{n-1}, \boldsymbol{v}^{n-1}, Z^{n-1}), \tag{51}$$

其中

$$\text{Res}_Z \coloneqq \frac{1}{\rho}\left[-\rho\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)Z + \frac{1}{\text{Le}\,\text{Pe}}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\kappa\boldsymbol{\nabla}Z\right)\right] \tag{52}$$

(ii) 类似地，过剩焓 (H^*) 的预测值由公式（45）得出:

$$\frac{H^* - H^n}{\Delta t} = \frac{3}{2}\left[\text{Res}_H(\rho^n, \boldsymbol{v}^n, H^n) + f_H(\rho^n, d_t p_0|^n, Z^n)\right] - \\ - \frac{1}{2}\left[\text{Res}_H(\rho^{n-1}, \boldsymbol{v}^n, H^{n-1}) + f_H(\rho^{n-1}, d_t p_0|^{n-1}, Z^{n-1})\right], \tag{53}$$

其中

$$\text{Res}_H \coloneqq \frac{1}{\rho}\left[-\rho\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)H + \frac{1}{\text{Pe}}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\kappa\boldsymbol{\nabla}H\right)\right], \tag{54a}$$

$$f_H \coloneqq \underbrace{\frac{1}{\rho}\left[\zeta d_t p_0 + \frac{\text{N}}{\text{Pe}}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\kappa\boldsymbol{\nabla}Z\right)\right]}_{source\ term\ for\ H-equation}, \tag{54b}$$

with

$$d_t p_0|^n \approx \frac{3p_0^n - 4p_0^{n-1} + p_0^{n-2}}{2\Delta t}, \quad \text{and} \quad d_t p_0|^{n-1} \approx \frac{3p_0^{n-1} - 4p_0^{n-2} + p_0^{n-3}}{2\Delta t}. \tag{55}$$

(iii) 温度的预测值 $T^* = T(Z^*, H^*)$ 根据 Z 和 H 的定义确定（详情见第 3.5 节）。因此，密度 (ρ^*) 根据公式（49）进行预测。具体而言，

$$\rho^* = \frac{p_0^*}{T^*}. \tag{56}$$

热力学压力（p_0^*）根据系统边界，使用公式（38）、（40）或（41）计算。

（iv）在此步骤中，可以计算流体动力压力（p^*）的预测值。

动量方程，即式 (43)，可以半离散为

$$\frac{\rho^*\boldsymbol{v}^* - \rho^n\boldsymbol{v}^n}{\Delta t} = \frac{3}{2}\left[\text{Res}_{\boldsymbol{v}}(\rho^n, \boldsymbol{v}^n) + \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{v}}(\rho^n)\right] - \frac{1}{2}\left[\text{Res}_{\boldsymbol{v}}(\rho^{n-1}, \boldsymbol{v}^{n-1}) + \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{v}}(\rho^{n-1})\right] - \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{\nabla}P^*, \tag{57}$$

其中

$$\text{Res}_{\boldsymbol{v}} \coloneqq -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}) + \frac{\text{Pr}}{\text{Pe}}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\tau}, \tag{58a}$$

$$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{v}} \coloneqq \underbrace{\frac{1}{\text{Fr}^2}(1-\rho)\boldsymbol{e}_y}_{source\ term\ for\ \boldsymbol{v}-equation}. \tag{58b}$$

$$P^* \coloneqq p^*\Delta t \tag{58c}$$

对公式（57）取散度，可以得到关于压力的泊松方程，即

$$-\nabla^2 P^* = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho^*\boldsymbol{v}^*) - \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho^*\tilde{\boldsymbol{v}}), \tag{59}$$

其中

$$\frac{\rho^*\tilde{\boldsymbol{v}}}{\Delta t} \coloneqq \frac{\rho^n\boldsymbol{v}^n}{\Delta t} + \frac{3}{2}\left[\text{Res}_{\boldsymbol{v}}(\rho^n,\boldsymbol{v}^n) + \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{v}}(\rho^n)\right] - \frac{1}{2}\left[\text{Res}_{\boldsymbol{v}}(\rho^{n-1},\boldsymbol{v}^{n-1}) + \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{v}}(\rho^{n-1})\right] \tag{60}$$

最后，由连续性方程，即公式（42），

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho^*\boldsymbol{v}^*) = -\,\partial_t\rho|^* \approx -\frac{3\rho^* - 4\rho^n + \rho^{n-1}}{2\Delta t}, \tag{61}$$

本质上，该方法采用向后二阶有限差分来估计密度的时间导数。因此，通过压力强制满足质量守恒。
利用公式（60）和公式（61），可通过公式（59）确定预测压力数值（p^*）。

（v）最后，回到公式（57），可以得到速度的预测值（$\boldsymbol{v}^*$）。

3.1.2. 校正阶段

(i) 下一时间步（t_{n+1}）的混合分数（Z^{n+1}）由式（44）计算，结合预测步骤（未来）和前一时间步（当前）的数值，即

$$\frac{Z^{n+1}-Z^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\text{Res}_Z(\rho^*,\boldsymbol{v}^*,Z^*) + \frac{1}{2}\text{Res}_Z(\rho^n,\boldsymbol{v}^n,Z^n). \tag{62}$$

(ii) 类似地，过剩焓（H^{n+1}）的校正值可由式（45）推导得出：

$$\frac{H^{n+1}-H^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left[\text{Res}_H(\rho^*,\boldsymbol{v}^*,H^*) + f_H(\rho^*,d_tp_0|^*,Z^*)\right] + \\ + \frac{1}{2}\left[\text{Res}_H(\rho^n,\boldsymbol{v}^n,H^n) + f_H(\rho^n,d_tp_0|^n,Z^n)\right], \tag{63}$$

其中

$$d_tp_0|^* \approx \frac{3p_0^* - 4p_0^n + p_0^{n-1}}{2\Delta t}. \tag{64}$$

（iii）温度 $T^{n+1} = T(Z^{n+1},\ H^{n+1})$ 使用 Z和 H 的定义计算。根据公式（49），随后可得 ρ^{n+1} 的数值为

$$\rho^{n+1} = \frac{p_0^{n+1}}{T^{n+1}}, \tag{65}$$

其中，p_0^{n+1}是根据公式（38）、（40）或（41）推导得出的，视具体情况而定。

（iv）修正压力（p^{n+1}）的确定方式与预测压力（p^*）类似，即

$$\frac{\rho^{n+1}\boldsymbol{v}^{n+1} - \rho^n\boldsymbol{v}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Res}_{\boldsymbol{v}}(\rho^*, \boldsymbol{v}^*) + \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{v}}(\rho^*)\right] + \frac{1}{2}\left[\mathrm{Res}_{\boldsymbol{v}}(\rho^n, \boldsymbol{v}^n) + \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{v}}(\rho^n)\right] - \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{\nabla} P^{n+1}, \tag{66}$$

其中，P^{n+1} 是公式（58c）在校正阶段的对应形式。

对公式（66）取散度，可得压力的泊松方程，即

$$-\nabla^2 P^{n+1} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\rho^{n+1}\boldsymbol{v}^{n+1}\right) - \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\rho^{n+1}\breve{\boldsymbol{v}}\right) \tag{67}$$

其中

$$\frac{\rho^{n+1}\breve{\boldsymbol{v}}}{\Delta t} \coloneqq \frac{\rho^n\boldsymbol{v}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}\left[\mathrm{Res}_{\boldsymbol{v}}(\rho^*, \boldsymbol{v}^*) + \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{v}}(\rho^*)\right] + \frac{1}{2}\left[\mathrm{Res}_{\boldsymbol{v}}(\rho^n, \boldsymbol{v}^n) + \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{v}}(\rho^n)\right] \tag{68}$$

最后，由质量守恒方程（42）可得，

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\rho^{n+1}\boldsymbol{v}^{n+1}\right) = -\left.\partial_t\rho\right|^{n+1} \approx -\frac{3\rho^{n+1} - 4\rho^n + \rho^{n-1}}{2\Delta t}, \tag{69}$$

采用与预测阶段相同的近似。

因此，利用公式（68）和（69），可以根据公式（67）计算时刻 t_{n+1}（即 p^{n+1}）的压力数值。

(v) 根据公式（66）计算修正速度（$\boldsymbol{v}^{n+1}$）。

请注意，多步（或多点）方法需要指定多个（过去）时间点的数值，而这些数值并非总是可用。因此，建议先使用低阶版本启动模拟，再随着所需数据逐渐齐备，逐步过渡到相应的高阶版本。具体而言，对于这种情况，预测步先采用一阶亚当斯–巴什福思法（即欧拉法）。而校正步则可以继续使用相同的二阶方法。这种组合称为休恩法。

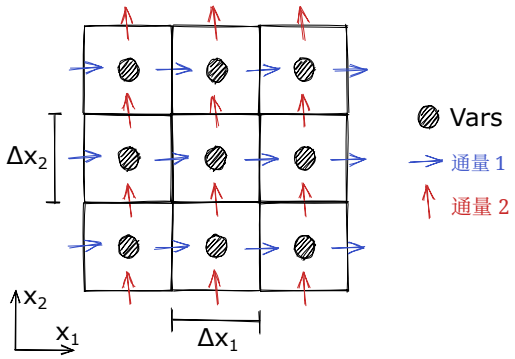


图 1：笛卡尔坐标系中的二维同位网格，x_1方向和 x_2方向的网格间距分别为 Δx_1 和 Δx_2 。每个变量均存储在网格单元中心（圆圈处），而辅助通量则定义在相应方向的单元界面处（箭头处），即水平方向（x_1）上的通量 1（F_1），以及垂直方向（x_2）上的通量 2（F_2）。

3.2. 空间离散

基本上，可以将物理域离散为规则网格、交错网格或同位网格 [55]。规则网格——所有变量都放置在同一位置——在计算实现、并行化、适应曲线坐标以及扩展到高阶格式方面具有优势。交错网格——速度分量相对于标量变量有策略地错开放置——可避免数值压力振荡，这是因为由此形成了强烈的“奇偶耦合”（即，单元界面处的通量恰当地保证了局部质量守恒）。同位网格——所有变量都位于同一点，与规则网格类似，同时辅助通量则方便地定义在该点周围，与交错网格类似——原则上兼具规则网格和交错网格的优点。

本研究采用 [55], 提出的方法，该方法旨在实现不可压缩流动中动能的离散守恒，并扩展至变密度低马赫数流，涵盖非反应 [47] 和反应 [10] 两种情形。具体而言，本研究采用笛卡尔坐标系中的同位网格，如图 1 所示。各算子采用中心有限差分格式进行离散，并通过通量插值避免数值压力振荡。

3.2.1. 插值与有限差分算子

插值算子和有限差分算子的定义如下。需要注意的是，奇数索引算子（即针对奇数 n 的算子）用于在中心点与界面之间传递数据，而偶数阶索引算子（即针对偶数 n 的算子）则将数据保留在其原始定义位置。例如，要将信息从形心传递到界面，或从界面传递到形心，都需要使用相应的奇数索引算子。若要在同一位置处理与形心或界面相对应的信息，则应调用相应的偶数阶索引算子。

也就是说，所采用的插值算子为

$$\bar{\phi}^{nx_i}\big|_{x_{i,I}} \coloneqq \frac{(x_{i,I} - x_{i,I-n/2})\phi(x_{i,I+n/2}) + (x_{i,I+n/2} - x_{i,I})\phi(x_{i,I-n/2})}{x_{i,I+n/2} - x_{i,I-n/2}}, \tag{70}$$

且有限差分算子定义为

$$\left.\frac{\delta_n \phi}{\delta_n x_i}\right|_{x_{i,I}} \coloneqq \frac{\phi(x_{i,I+n/2}) - \phi(x_{i,I-n/2})}{x_{i,I+n/2} - x_{i,I-n/2}} \tag{71}$$

两者均由非均匀网格上的泰勒级数展开推导得出。请注意，第一个索引（‘i’）表示方向（即 x_1、 x_2 或 x_3），第二个索引（‘I’）表示区域划分（或网格）索引，恒定方向除外。因此， I 既可能表示单元中心，也可能表示界面。它们在局部具有二阶精度，并可通过改变‘n’进行组合，以得到高阶近似。

3.2.2. 积分算子

同位网格（见图 1）自然地通过中间黎曼和（或中点法则）实现数值积分，因为形心处的数值代表整个单元内的数值。

因此，积分离散化为

$$\int_V \phi(x_1, x_2, x_3) dV \approx \sum_{I,J,K} \phi(x_{1,I}\ ,\ x_{2,J}\ ,\ x_{3,K}) \Delta V_{(I,J,K)} \tag{72}$$

其中， $\phi(x_{1,\ I},\ \ x_{2,\ J},\ \ x_{3,\ K})$ 是在点 $(x_{1,\ I},\ \ x_{2,\ J},\ \ x_{3,\ K})$ 处求得的 ϕ，该点对应单元的体积为 $\Delta V_{(I,J,K)}$。同样的思路也适用于二维和一维积分，其整体空间误差为二阶 [56]。

3.2.3. 离散化策略

离散化基于前文所述的算子，采用 [10, 47, 55] 提出的方法。本文仅介绍校正阶段格式。预测阶段的格式完全类似，为简洁起见，此处省略。

辅助通量定义在界面的中点，因此需要将数据从形心传递到界面。因此，应使用奇数索引算子。由式（66）和（68），以及式（70）和（71）的离散算子可得，

$$F_i^{n+1} \coloneqq \overline{\rho^{n+1} \breve{v}_i}^{1x_i} - \frac{\delta_1 P^{n+1}}{\delta_1 x_i} \tag{73}$$

与第 3.1 节中的推导不同，也可以直接从连续性方程离散化压力泊松方程。从公式（69）出发，并采用公式（73）中的辅助通量（F_i^{n+1}），可得

$$\partial_t \rho|^{n+1} + \frac{\delta_1 F_i^{n+1}}{\delta_1 x_i} = 0 \tag{74}$$

此外，可利用公式（74）计算出的 P^{n+1}，根据公式（66）求得速度分量（v_i），即

$$v_i^{n+1} = \frac{1}{\rho^{n+1}} \left(\rho^{n+1} \breve{v}_i - \frac{\delta_2 P^{n+1}}{\delta_2 x_i} \right) \tag{75}$$

请注意，此处使用了偶索引算子，因为 v_i 和 P 定义在同一网格上。对流项可由式（73）给出的辅助通量推导得出：

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) \approx \frac{\delta_1}{\delta_1 x_j}(F_j \overline{v_i}^{1x_i}), \tag{76a}$$

$$\rho v_j \frac{\partial Z}{\partial x_j} \approx \overline{F_j \frac{\delta_1 Z}{\delta_1 x_j}}^{1x_j} \tag{76b}$$

对过剩焓（H）采用与混合分数（Z）相同的处理策略。由于辅助通量和原始变量定义在不同的网格上，对流项使用了奇数索引算子。此过程使压力（质量守恒）与速度（动量守恒）之间形成强烈的“奇偶耦合”，从而避免压力场出现数值振荡；在所有变量都计算在相同位置的网格中，这种振荡很常见。

最后需要指出，与扩散现象有关的算子采用标准中心有限差分进行离散，其精度阶数与对流相关算子相同。使用奇数索引算子的组合也具有等效效果。

3.3. 泊松方程

从物理角度看，低马赫数区间内没有明确的压力边界条件，其中自然也包括不可压缩这一特殊情况。在此背景下，压力作为速度散度的约束（拉格朗日乘子），以确保质量守恒 [57]。

鉴于文献中对此问题尚无共识（例如参见 [58–61]），建议避免明确定义压力的边界条件。采用带辅助通量的交错网格或同位网格时，质量通量的边界条件是已知的[62, 63]。换言之，无需像式（73）所提议的那样拆分辅助通量。因此，不需要压力或中间速度的边界条件 [20, 62, 63]。另一个结果是，相容条件 [64] 在离散层面 [65, 66] 得到满足——前提是边界条件保持一致——，并且可以保证解的存在。然而，这会导致系统不确定，因为这相当于一个受纯诺伊曼边界条件约束的问题 [64]：可能存在无穷多个解，因为给一个解加上任意常数便会得到另一个解。由于低马赫数流动只受压力梯度影响，任何解都足够，因此本研究采用增广矩阵法求得零均值解 [64, 66]。这一方法还对泊松方程 [67], 离散化所对应线性方程组的可解性条件进行正则化，以补偿离散相容条件中可能存在的残差。

计算域内的压力解可以外推至幽灵单元，从而能够在边界邻近点处计算导数，并与内部点的处理方式保持一致。

这也使得能够确定边界上的压力。具体而言，在虚单元点（例如 $I = 0$）处采用二次外推，形式如下：

$$\phi(x_{i,0}) = A\phi(x_{i,1}) + B\phi(x_{i,2}) + C\phi(x_{i,3}) \tag{77}$$

其中

$$\begin{aligned} A &:= \frac{(x_{i,2} - x_{i,0})(x_{i,3} - x_{i,0})}{(x_{i,2} - x_{i,1})(x_{i,3} - x_{i,1})}, \\ B &:= \frac{(x_{i,1} - x_{i,0})(x_{i,3} - x_{i,0})}{(x_{i,1} - x_{i,2})(x_{i,3} - x_{i,2})}, \\ C &:= \frac{(x_{i,1} - x_{i,0})(x_{i,2} - x_{i,0})}{(x_{i,1} - x_{i,3})(x_{i,2} - x_{i,3})}. \end{aligned} \tag{78}$$

请注意，这种方法等价于在首个内部点处对压力导数采用单边（二阶）有限差分。

3.4. 浸入边界法

浸入边界法（IBM）最初由 Peskin [22], 提出， [22], 提供了一种巧妙的技术，可用于模拟复杂的流体动力学问题；该方法最初应用于循环系统建模，研究流经心脏瓣膜周围的流动。这一方法是计算流体力学领域的一项重要进展，能够利用非匹配网格上的正交坐标描述复杂的流固相互作用。

Peskin 的最初方案是在（不可压缩）动量方程中加入一个强迫项，以考虑流场中浸入体的存在，这正是该方法的核心 [23]。实际上，可以在方程（43）中加入一个体积力项（$\boldsymbol{F_v}$），得到

$$\partial_t(\rho \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\nabla \cdot} (\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{\nabla} p + \frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pe}} \boldsymbol{\nabla \cdot} \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{\mathrm{Fr}^2}(1-\rho)\boldsymbol{e}_{x_2} + \boldsymbol{F_v}, \tag{79}$$

其中，$\boldsymbol{F_v} = \boldsymbol{F_v}(\boldsymbol{x},\ t)$ 会动态调整，以表示与浸入体存在相关的响应力。$\boldsymbol{F_v}$ 的具体形式取决于所采用的方法，存在多种可能性 [24, 25]。

一种巧妙的思路是将固体障碍物视为渗透率可忽略不计的多孔介质（$\hat{}K$ [length^2]），即 $0 < \hat{}K \ll 1$。这一方法最初由 Arquis 提出 [28], ，随后被称为惩罚法（或罚函数法）。鉴于其物理动机以及数学稳健性 [37, 38], ，本研究采用惩罚法，其强迫项定义如下

$$\boldsymbol{F_v} := -\chi \frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pe}\,\mathrm{Da}_{ib}} \kappa\,(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{ib}) \tag{80}$$

其中，$\chi = \chi(\boldsymbol{x},\ t)$ 是特征（或掩码）函数，$\mathrm{Da}_{ib} := \hat{}K_{ib}/\hat{}l_c^2 \ll 1$ 是浸入边界（IB）达西数，与施加的渗透率 K_{ib} 相关；而速度

$\boldsymbol{v}_{ib}$。从物理上看，$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{v}}$ 表示线性动量汇（或线性阻尼力），与 Da_{ib} 成反比，作用方向与差值 $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_{ib}$ 相反。在浸入边界法（IBM）中，它被称为惩罚项。值得注意的是，该阻尼力所做的功随 $\tilde{\mathrm{M}}^2$, 缩放，且不会对低马赫数方程中的焓产生贡献（见第 2.4 节）。

参数 Da_{ib} 至关重要：一方面，它控制着数值解向真实解的正确收敛；另一方面，它影响积分稳定性，因此需要在正确施加条件（$\mathrm{Da}_{ib}\to 0$）与放宽时间步限制（$\mathrm{Da}_{ib}\to 1$）之间取得折中。事实上，使用显式方法时，它施加了稳定性条件 $\Delta t \le c(\mathrm{Re}\,\mathrm{Da}_{ib})$（其中 c 为与具体格式有关的实数常数）。特征函数（χ）通常与 Heaviside 阶跃函数的离散形式相关联：对于流体点，其值定义为 0；对于浸入边界点，其值定义为 1。本文采用 Iwakami [26] 推导的平移特征函数。其基本思想是将物体向流体区域延伸 $(\mathrm{Da}_{ib})^{1/2}$，这对应于（无量纲）布林克曼层厚度（或布林克曼屏蔽长度），即连接流体行为与多孔介质行为的过渡区。这种方法能显著降低过渡层之后流体区内的误差。从物理上看，该方法之所以有效，似乎是因为它恰当地表征了固体的尺寸——也就是说，“有效长度”能够准确代表物体长度——这是由于过渡层从多孔介质内部转移到了流体区。从数学上看，惩罚数值解的波数与流体区内真实解对应的波数相吻合（布林克曼层内除外），如 [26] 所示。显然，网格分辨率应足以捕捉过渡区（即 $\Delta x_i \lesssim (\mathrm{Da}_{ib})^{1/2}$，对于 $i=1,\ 2,\ 3$）。

与动量强迫类似，通过定义惩罚项，可以一致地对浸没物体施加边界条件——分别针对混合分数（F_Z）和过剩焓（F_H）。

$$F_Z \coloneqq -\chi \frac{1}{\mathrm{Le}\,\mathrm{Pe}\,\mathrm{Da}_{ib}} \kappa \left(Z - Z_{ib}\right) \tag{81}$$

and

$$F_H \coloneqq -\chi \frac{1}{\mathrm{Pe}\,\mathrm{Da}_{ib}} \kappa \left(H - H_{ib}\right), \tag{82}$$

其中，Z_{ib} 和 H_{ib} 分别是物体表面上 Z 和 H 的条件。

惩罚项采用与第 3 节中其他强迫项相同的二阶格式进行离散。此外，对于物体向外喷出质量的情况，必须在连续性方程中添加质量源项 $S_m = S_m\left(t,\ \boldsymbol{x}\right)$，使其与施加的速度相一致。具体而言，

$$\partial_t \rho + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho \boldsymbol{v}) = S_m \tag{83}$$

这　　实际上将计入压力泊松方程的强迫项中　　.

这种惩罚法遵循量纲一致的强迫项推导，因为物理系统的数学模型应始终包含物理上一致的项。即使仅出于纯数值目的，各项本身也具有物理意义。忽视这一原则会使结果难以解释，更严重时可能导致模拟发散或非物理解。

3.5. 火焰正则化

尽管形式上得到简化，无限薄火焰意味着火焰表面两侧（燃料与氧化剂子域）的物性存在间断。这对有限差分（强形式）尤为关键：间断会在时间推进过程中导致数值振荡，也可能妨碍后处理，或将其用作进一步分析（例如稳定性分析）的基流。这是因为有限差分方法的基础是泰勒级数展开，而泰勒级数展开要求函数在展开点处无限可微，因而必须连续。

为解决这一问题，我们对 Heaviside函数（θ）应用正则化技术；该函数原本用于描述这些性质的行为。该方法采用 Heaviside函数（θ_ε）的正则化变体，使火焰附近的燃料与氧化剂子域之间，在厚度为 ε 的区域内实现平滑的性质过渡。具体而言，方法涉及使用 [68]

$$\theta_\varepsilon(Z - Z_{st}) := \frac{1 + \tanh[k(Z - Z_{st})]}{2} \tag{84}$$

它在 $Z_{st} = 1$ 附近（即化学计量混合物水平附近，该水平代表火焰）发挥作用，连续地连接火焰两侧的性质。

正则化参数 k 控制有效支撑。通过为 $k := [1/(2\varepsilon)]\ \ln[(1 - \text{tol})/\text{tol}]$, 确定合适的数值，使其在 $Z = \pm\varepsilon$ 时能在指定容差（tol）范围内收敛至 θ。tol 的适当取值取决于空间截断误差。

因此，正则化系数 Le_ε、N_ε 和 $\mathscr{N}_\varepsilon$ 表示为

$$\text{Le}_\varepsilon(Z) = (\text{Le}_F - \text{Le}_O)\theta_\varepsilon(Z - 1) + \text{Le}_O \tag{85a}$$
$$\text{N}_\varepsilon(Z) = (\text{N}_F - \text{N}_O)\theta_\varepsilon(Z - 1) + \text{N}_O \tag{85b}$$
$$\mathscr{N}_\varepsilon(Z) = (\mathscr{N}_F - \mathscr{N}_O)\theta_\varepsilon(Z - 1) + \mathscr{N}_O \tag{85c}$$

除这三个系数外，火焰处的温度导数也不连续。可采用以下步骤来规避这一问题：

（i）利用 H 和 Z 的定义来写出 $T = T$（Z, H），即

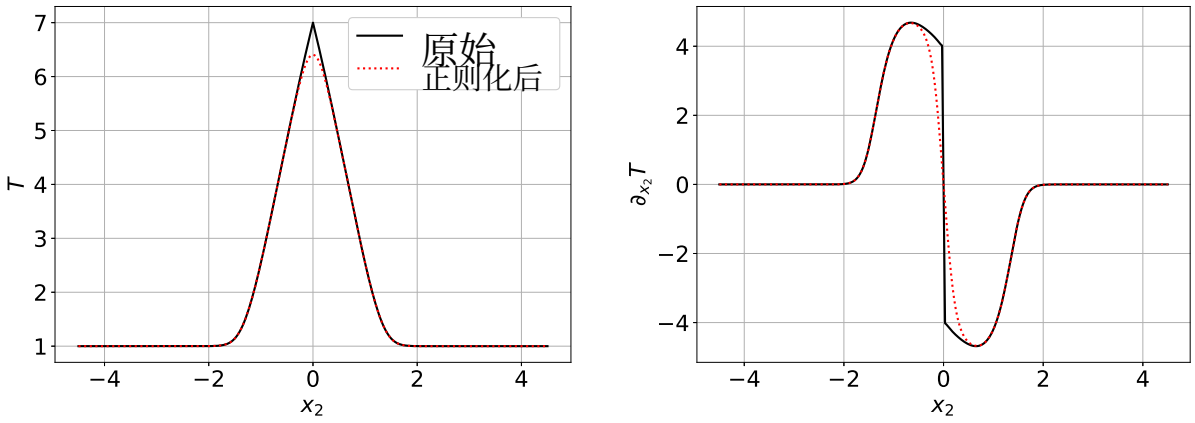
$$T = \frac{Q}{S + 1}\,[F + H] \tag{86}$$

其中，$F = F$（Z）定义为

$$F(Z) := \begin{cases} (1 - Z)/S, & \text{for } Z > 1 \\ (Z - 1), & \text{for } Z \le 1 \end{cases} \tag{87}$$

(ii) 识别出不连续性位于 F 的导数中

$$F'(Z) = \begin{cases} -1/S, & \text{for } Z > 1 \\ 1, & \text{for } Z \le 1 \end{cases} \tag{88}$$



(a) (b)

图 2：平面逆流扩散火焰中，原始与正则化后的温度 (a) 及温度导数穿过火焰的剖面对比。

因此，对其应用正则化：

$$F'(Z) = (-1/S - 1)\,\theta_\varepsilon(Z-1) + 1 \tag{89}$$

因此，正则化后的 F 可通过积分恢复，即：

$$F_\varepsilon(Z) = \int_1^Z \left[-\left(1/S + 1\right)\theta_\varepsilon(z-1) + 1\right] dz \tag{90}$$

或者，显式地写为：

$$F_\varepsilon(Z) = \frac{1}{2S}\left[-(S+1)\frac{\ln\{\cosh[k(Z-1)]\}}{k} + (S-1)(Z-1)\right]. \tag{91}$$

注意，这使得从火焰位置开始的 F_ε 具有正确的斜率，但不能保证其数值水平正确，而该水平会随厚度 ε变化。为调整数值水平，必须平移 F_ε，使其满足边界处的数值，这自然意味着最大温度会降低。

因此，正则化后的温度（T_ε）可表示为

$$T_\varepsilon = \frac{Q}{S+1}\left[F_\varepsilon + H\right] \tag{92}$$

图 2 展示了平面逆流扩散火焰法向方向上的温度及其变化量的原始剖面与正则化剖面的对比。为简化记号，下文将省略正则化属性中的指标“ε”。

3.6. 边界条件

边界条件采用虚单元法实现，该方法由第 3.2.1 节中的算子推导而来。例如，要在左边界（$I = 1/2$）施加条件 $\Phi = \Phi(x_i,\ t)$，虚单元 $\phi(x_{i,\ 0})$ 的适当数值可按如下方式设定：

对于狄利克雷条件。

$$\phi(x_{i,0}) = 2\Phi - \phi(x_{i,1}), \tag{93}$$

此时，虚拟点与第一个内部点之间的间距相同（即，镜像虚拟单元）。

对于诺伊曼条件。

$$\phi(x_{i,0}) = -(x_{i,1} - x_{i,0})\Phi + \phi(x_{i,1}) \tag{94}$$

对于周期性条件。

$$\phi(x_{i,0}) = \phi(x_{i,N_{x_1}-1}) \tag{95}$$

其中，N_{x_i} 是 i方向分区中的最后一个索引，同时也表示一个虚拟单元。

对于外推条件。

$$\phi(x_{i,0}) = A\phi(x_{i,1}) + B\phi(x_{i,2}) + C\phi(x_{i,3}) \tag{96}$$

其系数与式 (78) 中所定义的相同。

3.7. 计算实现

数值模型以过程式方式用 Fortran90 进行计算实现，用于顺序执行。压力泊松方程通过 MUMPS [69]，求解，以保证稳健性和效率；MUMPS 是一个公共领域的并行稀疏直接求解器，采用多前沿法求解大型线性方程组 [70]。后处理在 Python 3 中进行。

4. 数值实验

就本研究而言，三维案例只会增加不必要的复杂性。因此，本节重点讨论低马赫数下恒密度（不可压缩）和变密度流的二维测试案例模拟，涵盖有化学反应（燃烧）和无化学反应的情况。这些数值实验经过精心选择，用于检验所提数值方法的不同方面，既突出其能力，也揭示其局限性。为保持一致性，后处理采用精度与所提方法相当（或更高）的离散算子（用于微分、插值、积分等）。这种方法可避免引入额外误差。

4.1. 预备知识

收敛阶（b）由 [71] 给出

$$b = \frac{\ln\left(E_m / E_{m+1}\right)}{\ln\left(\delta\right)} \tag{97}$$

其中，E_m 是索引为 m 的网格的绝对（标量）误差或范数（向量）误差，δ 是从较粗网格（m）到较细网格（$m+1$）的细化比。或者，对于恒定的细化比，可以直接利用三个细化层级（m、$m+1$ 和 $m+2$）的解（f）估计收敛阶，而无需精确解。事实上，

$$b = \ln\left(\frac{f_m - f_{m+1}}{f_{m+1} - f_{m+2}}\right) / \ln\left(\delta\right) \tag{98}$$

由理查森外推得到。

对于较细网格，网格收敛指数（GCI）的形式为

$$\mathrm{GCI} \coloneqq F_s \frac{|\epsilon|}{\delta^a - 1} \tag{99}$$

其中，$\epsilon \coloneqq \left(f_m - f_{m+1}\right) / f_{m+1}$，$F_s$ 是“安全系数”，此处取为 1.25。

对于前两个不可压缩算例，扩散项系数被显式地改写为雷诺数的倒数，即使用 $\mathrm{Re} \coloneqq \mathrm{Pe}/\mathrm{Pr}$。在恒定密度情形下不存在热能通量，因此这种改写有助于进行直接的物理解释。

在表格及其他提及中，受篇幅限制，数值仅给出少数小数位；然而，计算始终以双精度进行。

4.2. 泰勒–格林涡

该构型用于验证流体动力学变量积分的精度。它还可用于讨论分数时间步（或投影）方法，其中一些概念常被误解。

考虑定义在有量纲周期正方形区域$[0, 2\pi]^2$中的瞬态不可压缩流动。泰勒–格林涡被提出作为研究层流-湍流转捩的解析工具 [72]。事实上，层流状态存在闭式解：

$$v_1(x_1, x_2, t) = \sin(2\pi x_1)\cos(2\pi x_2)\exp\left(-\frac{8\pi^2}{\mathrm{Re}}t\right), \tag{100}$$

$$v_2(x_1, x_2, t) = -\cos(2\pi x_1)\sin(2\pi x_2)\exp\left(-\frac{8\pi^2}{\mathrm{Re}}t\right), \tag{101}$$

$$p(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4}\left[\cos(4\pi x_1) + \cos(4\pi x_2)\right]\exp\left(-\frac{16\pi^2}{\mathrm{Re}}t\right), \tag{102}$$

以无量纲速度分量和压力表示。特征值基于初始状态，即 $L_c \coloneqq 2\pi\,\mathrm{m}$（涡旋波长）、$\hat{}v_c \coloneqq 1\,\mathrm{m/s}$（初始最大速度分量）、$\hat{}\,t_c \coloneqq \hat{}L_c / \hat{}v_c$ 和 $\hat{}p_c \coloneqq \hat{}\rho_c \hat{}v_c^2$，其中 $\hat{}\rho_c$ 为给定值。

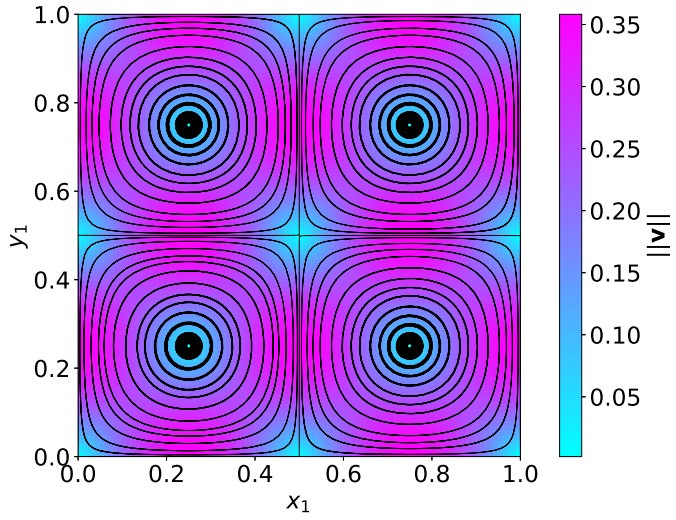


图3: 在 $t \approx 1.3$ 处泰勒–格林涡的流线。浅色（深色）表示局部速度较低（较高） .

下文将在 $t_{ref} = \mathrm{Re}/(8\pi^2) \approx 1.3$ 时刻，对 $\mathrm{Re} = 100$ 情况下的数值结果和解析结果进行比较；该时刻对应速度的特征衰减时间，与黏性效应有关。经过这段时间后，速度大小降低至原来的 e^{-1}，如图 3 所示。对于压力场，黏性衰减速度快一倍。

边界条件。 整个边界均为周期性边界。

初始条件。 由 $t = 0$ 处的精确解给出。

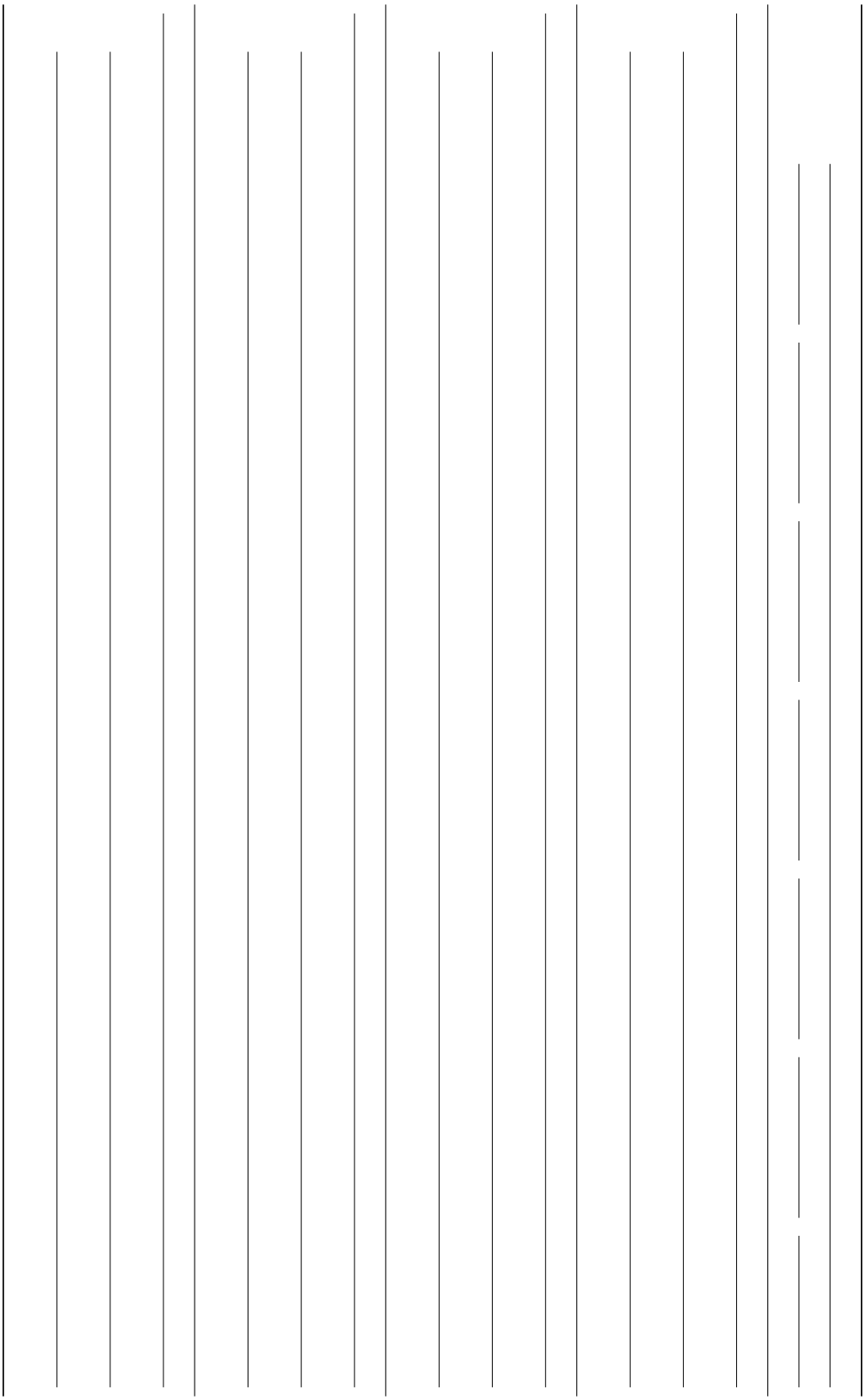
4.2.1. 空间精度

与前文讨论一致，当解进入渐近收敛区后，所有变量均达到理论收敛率（二阶）；如表1所示，这一情况从网格分辨率为 80×80 开始出现。此外，正如预期，流动对称性清晰地体现在速度水平分量（v_1）和垂直分量（v_2）的误差中，最终两者的误差非常接近。

此外，正如前文所强调的，这项分析中最值得关注的是压力（p）的行为。为此，我们仔细选取了 Δt 的数值。值得注意的是，对于最精细的网格，采用最大的时间步长时，压力收敛阶会降低，因为时间误差会与空间误差累积，这一点在 $\Delta t \sim (\Delta x)^2$时尤为明显。随着$\Delta t$ 减小，空间误差逐渐占据主导地位，理论阶也随之恢复。为突出这一区别，我们还分析了区间 $[t - \Delta t, t]$内的时间平均压力（$\bar{p}$）：

$$\bar{p}(x_1, x_2, t) = \frac{\exp(\alpha \Delta t) - 1}{\alpha \Delta t} p \tag{103}$$

其中 $\alpha := 16\pi^2/$雷诺数。与瞬时压力不同，$\bar{p}$ 始终遵循理论收敛阶，即使采用最大的时间步长也是如此，如表1所示。



由此得出的结论是，离散压力在时间上无条件地具有一阶精度，但对此需要作一些澄清：投影法中的压力并不是“瞬时变量”。相反，如前所述，它是作为一种约束（拉格朗日乘子）产生的，用于在大小为 Δt 的时间间隔内保证与连续性方程的一致性，因而实际上表现为该时间间隔内的时间平均压力。根据中值定理，若将其解释为某一特定时刻的瞬时值，就会引入 $\mathcal{O}(\Delta t)$ 的误差。

若要以二阶精度描述瞬时离散压力，可以参考文献 [73] 中提出的修正方法。

4.2.2. 时间精度

通常无法在显式（或半显式）方法中单独考察时间误差。空间误差占主导地位，并通过稳定性条件（例如 CFL约束）与时间误差相耦合： $\Delta t \leq C(\Delta x)^2,$ ，其中 C为一个实数且依赖于具体方法的常数。

一种潜在的变通方法涉及统计误差建模：对误差（E）进行参数化——例如 $E = C_t(\Delta t)^{p_t} + C_x(\Delta x)^{p_x} + C_y(\Delta y)^{p_y}$，其中实系数为（$C_t, C_x, C_y$）、幂次为（$p_t, p_x, p_y$）——，构建一组在空间与时间分辨率上均衡的模拟，并通过非线性回归分离时间与空间贡献。然而，这需要大量模拟。

本方法借助预测-校正时间积分规避了这一挑战。局部截断误差使用预测解与校正解之间瞬时差值的 L^2范数进行量化。 L^2范数充当高阶空间误差滤波器，有助于分离时间误差。虽然时间平均（时间上的低通滤波器）可以抑制与空间离散误差相关的高频时间伪影，但在此处并无必要。

表2综合了时间分析的结果。时间步长根据网格分辨率选取为（$\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \Delta t_4$）$= 10^{-3}\cdot(4, 2, 1, 0.5)$； $10^{-3}\cdot(2, 1, 0.5, 0.25)$； $10^{-4}\cdot(4, 2, 1, 0.5)$； $10^{-4}\cdot(1, 0.5, 0.25, 0.125)$，分别对应于从较粗到较细的网格。再次注意，垂直速度分量与水平速度分量的误差预期相等，这源于流动对称性。所有变量均呈现三阶局部截断误差，与该方法 [51]预期的（全局）二阶时间精度一致。由于时间推进过程中的误差累积，全局精度降低一阶，其尺度关系为（$t_{total}/\Delta t$）（Δt）^{3} $\sim$ （Δt）^{2}, ，其中 t_{total} 为模拟的最终时间。

请注意，该分析不依赖于获取精确参考解。相反，它通过计算预测变量值与校正变量值之间的差异来估计局部误差——这些量本来就是在每个时间步计算的。这种误差估计策略还可用于在自适应时间步进方法中动态调整时间步长。

误差阶应高于浮点系统的精度（此处采用双精度）。选用分辨率更高的网格（400×400）来展示这一局限。对于 Δt_4 这一情况，离散误差超过了机器精度，导致收敛阶被人为降低。

表2：时间收敛性分析。

Grid	Var.	误差				局部阶数		
		Δt_1	Δt_2	Δt_3	Δt_4	$\Delta t_{1\to2}$	$\Delta t_{2\to3}$	$\Delta t_{3\to4}$
50×50	p	2.546×10^{-9}	3.173×10^{-10}	3.960×10^{-11}	4.946×10^{-12}	3.00	3.00	3.00
	v_1	2.858×10^{-9}	3.562×10^{-10}	4.445×10^{-11}	5.552×10^{-12}	3.00	3.00	3.00
	v_2	2.858×10^{-9}	3.562×10^{-10}	4.445×10^{-11}	5.552×10^{-12}	3.00	3.00	3.00
100×100	p	3.202×10^{-10}	3.996×10^{-11}	4.991×10^{-12}	6.236×10^{-13}	3.00	3.00	3.00
	v_1	3.537×10^{-10}	4.415×10^{-11}	5.516×10^{-12}	6.892×10^{-13}	3.00	3.00	3.00
	v_2	3.537×10^{-10}	4.415×10^{-11}	5.516×10^{-12}	6.892×10^{-13}	3.00	3.00	3.00
200×200	p	2.561×10^{-12}	3.200×10^{-13}	3.999×10^{-14}	4.998×10^{-15}	3.00	3.00	3.00
	v_1	2.823×10^{-12}	3.528×10^{-13}	4.409×10^{-14}	5.511×10^{-15}	3.00	3.00	3.00
	v_2	2.823×10^{-12}	3.528×10^{-13}	4.409×10^{-14}	5.511×10^{-15}	3.00	3.00	3.00
400×400	p	4.001×10^{-14}	5.001×10^{-15}	6.251×10^{-16}	7.831×10^{-17}	3.00	3.00	3.00
	v_1	4.409×10^{-14}	5.512×10^{-15}	6.894×10^{-16}	8.683×10^{-17}	3.00	3.00	2.99
	v_2	4.410×10^{-14}	5.511×10^{-15}	6.894×10^{-16}	9.126×10^{-17}	3.00	3.00	2.92

注： 误差基于函数在时刻 $t=1.3$ 的 L_2 范数；局部阶数 指时间离散方法的局部截断阶数。

4.3. 泰勒–库埃特流

选择此问题作为虚拟实验室来测试浸入边界法（IBM）。此外，该问题还存在精确解，可供比较。

ˆ 考虑两个同心圆柱之间的流动，其中内半径为 R_1 （以角速度 ˆ ω_1 旋转），外半径为 R_2 （静止，$\omega_2=0$）。图4展示了示意图。

无量纲变量由下式给出：

$$r \coloneqq \frac{\hat{r}}{\hat{d}} \quad \text{and} \quad v_\theta \coloneqq \frac{\hat{v}_\theta}{\hat{\omega_1}\hat{R}_1}, \quad \text{for} \quad \hat{R}_1 \le \hat{r} \le \hat{R}_2 \tag{104}$$

ˆ ˆ ˆ 其中 $d \coloneqq R_2 - R_1$ 为环隙，ˆ v_θ 为方位角速度。

无量纲方位角速度（v_θ）的通解由下式给出：

$$v_\theta(r) = \frac{\eta}{1-\eta^2}\left[\frac{1}{r(1-\eta)} - r(1-\eta)\right], \tag{105}$$

ˆ ˆ 以半径比 $\eta \coloneqq R_1/R_2$表示。

取 $\eta = \frac{1}{2}$ (- $\hat{R}_2 = 2\hat{R}_1$ 和 $\hat{d} = \hat{R}_1$),

$$v_\theta(r) = \frac{4-r^2}{3r} \quad \text{for} \quad 1 \le r \le 2$$

其在笛卡尔坐标系下表示为

$$\boldsymbol{v}(x_1,x_2) = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{x_1^2+x_2^2} - 1\right)\begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad \text{for} \quad 1 \le (x_1^2+x_2^2) \le 4$$

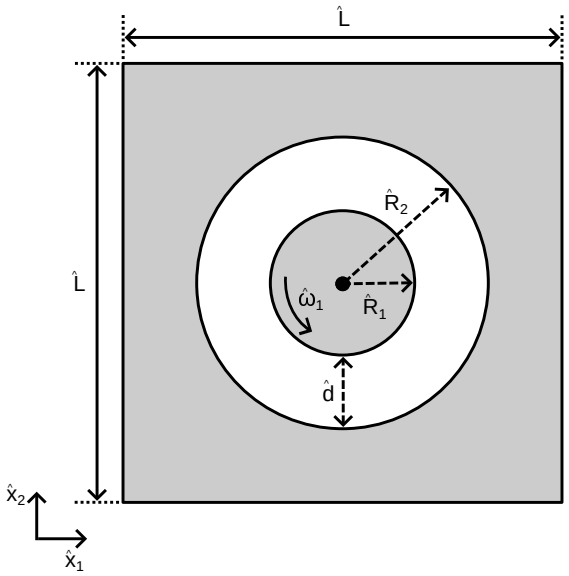


图 4：泰勒–库埃特流的轴对称表示。

*Boun*边界条件。整个边界采用周期性条件，以避免人为干扰 s.

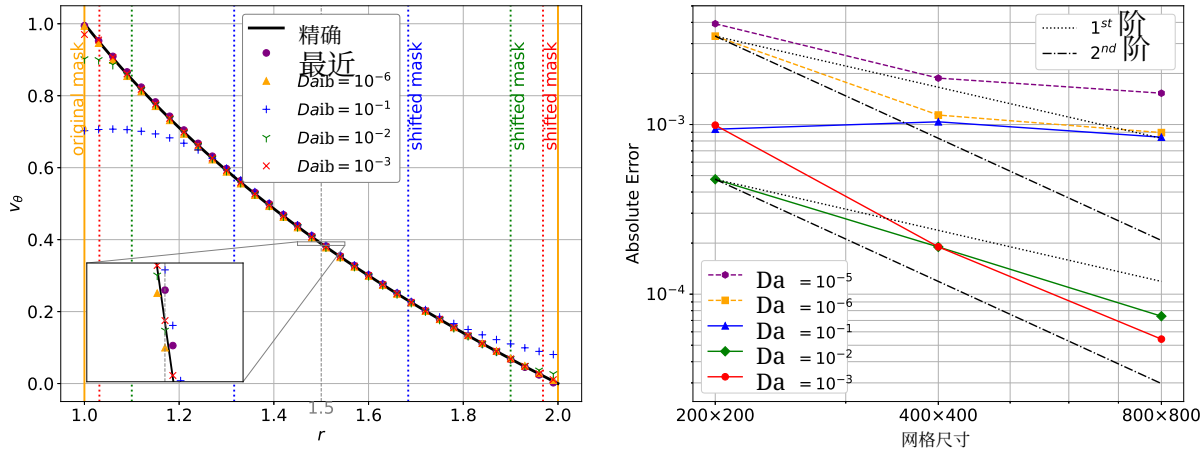
初始条件。 由精确解给出。

4.3.1. 惩罚解的精度

针对不同浸入边界（IB）达西数（$\mathrm{Da}_{ib} = 10^{-1}$，$10^{-2}$和 10^{-3}）、采用平移特征（或掩膜）函数得到的惩罚解，与精确解、直接强制法的最近点实现 [74], 以及采用原始掩膜函数、IB 达西数小得多（$\mathrm{Da}_{ib} = 10^{-6}$）的惩罚解进行了比较，以供参照。此外，还对采用平移掩膜函数和原始掩膜函数的情形开展了网格收敛性研究。

研究结果简要呈现在图5中，针对雷诺数 $= 1$：图5a给出了 $\theta = \pi/4$处方位角速度的比较，以检验两个速度分量（v_i 对于 $i = 1$，2）；图5b则概括了惩罚解的网格收敛性研究。具体而言，绝对误差基于整个环形区域内（即对每个 $\theta \in [0, 2\pi]$ ）速度分量 v_2的精确解与数值解之差的L^2范数。 v_1分量的误差几乎相同（由于对称性）。雷诺数 $= 10$ 的结果与 $Re = 1$的结果在视觉上无法区分，因此无需另行展示。

采用平移掩膜函数（即固体到流体界面的延伸）得到的惩罚解，是对精确解的最佳描述——对于 $\mathrm{Da}_{ib} = 10^{-2}$ 和 $\mathrm{Da}_{ib} = 10^{-3}$ 而言——但各自的过渡区除外；图 5a 中以竖直点线标出了这些过渡区。另一方面，采用原始掩膜函数得到的惩罚解（图 5a 中的竖直实线），即使 IB 达西数小了几个数量级（即 $\mathrm{Da}_{ib} = 10^{-6}$），其精度仍不及采用平移掩膜函数得到的解。这是由于其惩罚误差 [37, 38], 所致；图 5b 中虚线趋于饱和表明了这一点。随着网格加密，惩罚误差逐渐超过空间离散误差，成为主导误差。



(a) (b)

图5：惩罚解精度（a）及收敛阶（b）的对比，适用于 Re $= 1$。Re $= 10$ 下的表现与此处所示几乎无法区分，因此为清晰起见省略。

根据图 5b，采用平移特征函数得到的惩罚解随着 Da_{ib} 增大，误差减小，收敛阶也有所提高。$\mathrm{Da}_{ib} = 10^{-3}$在网格加密下渐近达到二阶收敛（首个网格分辨率不足以恰当捕捉过渡区），而 $\mathrm{Da}_{ib} = 10^{-2}$ 则呈现中间收敛阶（介于一阶和二阶之间）。对于 $\mathrm{Da}_{ib} = 10^{-1}$，误差在 $\mathcal{O}(10^{-3})$处趋于饱和，表明强迫项刚性不足——也就是说，多孔介质变得过于容易渗透。这一行为表明存在一个最优 Da_{ib}：在恢复理论空间收敛率的同时，尽可能减少对网格加密的限制；因为沿延伸的固体区域应满足条件 $\Delta x_i < \mathrm{Da}_{ib}^{1/2}$。尽管如此，对这一最优值的正式论证将留待后续研究。

还需指出，在浸入边界方法的背景下，[75] 中描述的直接强迫技术——在拉格朗日位置与欧拉位置之间传递属性——与本方法结合时表现出明显的数值不稳定性。该不稳定性似乎表现为对物体区域内出口条件的强烈敏感性。对于绕圆柱体流动的情况，出口海绵层只能起到部分缓解作用。需要开展专门研究，才能彻底理解这一问题。

4.4. 热驱动腔体

热驱动腔体是变密度求解器的标准测试案例 [68]。特别是在自然对流背景下 [54, 76]。将使用 [77] 的基准解作为参考——该基准解采用全可压缩纳维–斯托克斯求解器，并基于高分辨率网格计算。

ˆ 考虑一个边长为 L 的差分加热方腔，如图 6 所示。左壁和右壁分别保持在不同的温度 T_H 和 T_C，且满足 $T_H > T_C$。水平壁面完全绝热，即通过这些壁面的热能通量为零。

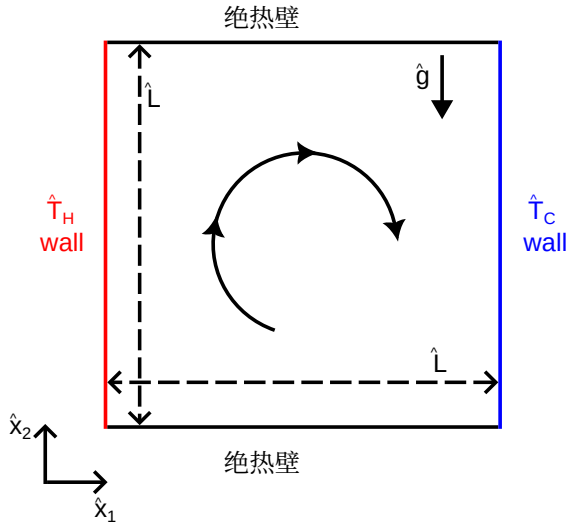


图6：面积为ˆL^2的封闭方腔在热驱动流作用下的示意图。左壁保持在ˆ ˆ ˆ温度 T_H，右壁保持在 T_C，且 $T_H > T_C$。水平壁面视为绝热。

F对于浮力驱动流，定义瑞利数（Ra）是很有意义的。也就是说 y,

$$\mathrm{Ra} := \mathrm{Pr}\,\frac{\hat{g}_c\hat{\rho}_c^2\left(\hat{T}_H - \hat{T}_C\right)\hat{l}_c^3}{\hat{T}_c\hat{\mu}_c^2}, \tag{106}$$

它表示对流与热扩散（或热传导）之间的相对重要性。事实上，瑞利数 $\gg 1$（瑞利数 $\ll 1$）条件表明流动主要由对流（热传导）主导。因此，它类似于自然对流情形下的佩克莱数（Pe），其中流动由密度梯度诱导。

ˆ ˆ ˆ特征温度为平均温度，即 $T_c := (T_H + T_C)/2$，由此可将无量纲温差定义为

$$\epsilon := \frac{\hat{T}_H - \hat{T}_C}{2\hat{T}_c} \tag{107}$$

注意，它量化了温度对流场的影响，而这种影响与浮力效应并无直接关系 [77]。因此，随着 ϵ增大，布oussinesq近似不再成立，而本方法能够处理任意温差（在数值稳定性极限范围内）。为加以说明，此处将考虑温差的最大数值（即$\epsilon = 0.6$）。

可根据垂直壁面自然对流的解导出特征速度 [78]：ˆ$v_c := \mathrm{Ra}^{1/2}$ ˆμ_c/(ˆρ_cˆl_c)，其中 ˆμ_c: = ˆμ(ˆT_c)、 ˆρ_c := ˆρ(ˆT_c) 且 ˆ l_c := ˆL [77]。由此还可导出参考流体动力压力，其尺度为 ˆ p_c := ˆρ_cˆv_c^2。因此，可以将瑞利数 (Ra) 与佩克莱数 (Pe) 联系起来，关系为 [68]

$$\mathrm{Pe} = \mathrm{Pr}\,\mathrm{Ra}^{1/2} \tag{108}$$

此外，弗劳德数 (Fr) 可表示为 [68]

$$\mathrm{Fr} = (\mathrm{Pr}\, 2\epsilon)^{1/2} \tag{109}$$

为进行一致的比较，Pr $= 0.71$、 $\gamma = 1.4$，并采用萨瑟兰定律 [42] 来模拟输运系数，即，

$$\kappa(T) = T^{3/2}\frac{1+C}{T+C}\,, \tag{110}$$

^ ^ ^ 其中 $C := C/T_c$， $C = 110.5$K 表示与物质相关的常数，在此为：空气。

初始（特征）热力学状态由 $p_{0,c} = 1$ 与 $T_c = 1$ 参数对 ϵ 指定，

$T_c = (\epsilon)$ 和 $p_c = (\epsilon)$ 结合参数对 ϵ 瑞利数 ϵ)，即可充分描述系统的完整状态。事实上，流体动力学条件由瑞利数给定，而无量纲温度 $T_H = (1+\epsilon) = 1.6$ 和 $T_C = (1-\epsilon) = 0.4$ 则隐含在 ϵ 中。

概括而言，对于封闭区域，热力学压力（p_0）的演变如下（见第 2)

$$p_0 = \frac{m}{\int\limits_V T^{-1} dV} \tag{111}$$

其中， m 是初始（无量纲）质量，为一常数。

最后，在“传热”问题中，采用努塞尔数（Nu）来进行分析既方便又具有代表性。该数值用于量化流体运动相较于单纯热传导对热能传递的增强作用。其局部形式定义为

$$\mathrm{Nu}(x_2) := \frac{1}{2\epsilon}\left(\mathrm{Pe}\,\rho v_1 T - \kappa\frac{\partial T}{\partial x_1}\right) \tag{112}$$

其空间平均值（沿垂直剖面）则定义为

$$\overline{\mathrm{Nu}} := \int\limits_{x_2=0}^{x_2=1} \mathrm{Nu}\, dx_2 \tag{113}$$

边界条件。 对于 $Q = S + 1$的简便选取，

$$v_1 = v_2 = Z = H - (T_H + 1) = 0 \quad , \quad \text{on the left wall } (x_1 = 0); \tag{114a}$$

$$v_1 = v_2 = Z = H - (T_C + 1) = 0 \quad , \quad \text{on the right wall } (x_1 = 1); \tag{114b}$$

$$v_1 = v_2 = Z = \frac{\partial H}{\partial x_2} = 0 \quad , \quad \text{on the horizontal walls } (x_2 = 0 \text{ and } x_2 = 1). \tag{114c}$$

初始条件。一个静止的系统，处于平均温度（$T = 1$）下，由均匀、非反应性气体混合物（空气）组成，

$$v_1 = v_2 = Z = H - 2 = 0 \quad , \quad \text{at } t = 0 \tag{115}$$

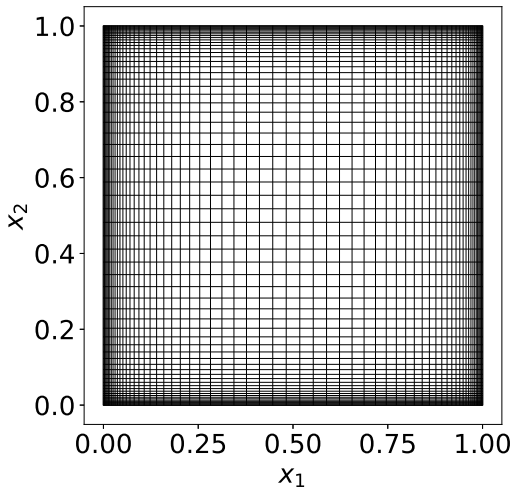


图 7：单位正方形的非均匀间距网格，边界附近的分辨率提高了 21 倍。

通过将 (Ra ε) $=$ (10^n，0。6) 条件下、 $n \in\{2,7\}$的结果与 [77]的结果进行比较来验证。这两个案例分别代表扩散和对流相对贡献最高的两个极端情况。因此，中间情况（即 $n \in \{3,4,5,6\}$）并未提供额外信息，故予以省略。请注意，在这两个案例中，流动均处于稳态。本文将热力学压力的时间导数（p_0）至少小到与 10^{-6}相当时视为稳态。事实上，由于其具有“全局性”， p_0 适合用于监测全局收敛情况，包括稳态、网格分辨率及其他相关因素。

4.4.1. 网格收敛性研究

表 3：Ra $= 10^2$ 时的网格收敛性研究。

Grid	max(Δ_{x_i})	p_0	GCI	GCI比
64×64	0.019 59	0.957 52	–	–
96×96	0.013 03	0.957 44	0.009%	–
144×144	0.008 68	0.957 40	0.004%	2.236
216×216	0.005 78	0.957 38	0.002%	2.241

收敛阶（a）估算为 $a = 1.99$，使用式（98）中最精细网格的数值，细化比为 $\delta = 1.5$；GCI 为网格收敛指数，定义见式（99）。在非均匀网格上计算，例如 min(Δ_{x_i}) $=$ max(Δ_{x_i})/2 for $i = 1$，2。

表4：瑞利数 $= 10^7$的网格收敛性研究。

Grid	max(Δ_{x_i})	p_0	GCI	GCI比
64×64	0.035 73	0.919 90	–	–
96×96	0.023 72	0.921 38	0.170	–
144×144	0.015 77	0.922 08	0.080	2.126
216×216	0.010 49	0。922 40	0.037	2.180

收敛阶（a）使用式（98）中最精细网格的数值估算为 $a = 1.92$，细化比为 $\delta = 1.5$；GCI 即网格收敛指数，定义见式（99）。在非均匀网格上计算，例如 min(Δ_{x_i}) $=$ max(Δ_{x_i})/21，其中 $i = 1$，2。

为提高数值效率，模拟采用非均匀网格，并在壁面附近聚集网格点。事实上，可以使用双曲正切变换对边界区域的分辨率进行加密，该变换定义为

$$\tilde{x}_i = \frac{1 + \tanh\left[\alpha\left(x_i - 1/2\right)\right]}{2\tanh\left(\alpha/2\right)}, \tag{116}$$

适用于各个方向（即 $i = 1$,2）。实常数 α 控制网格聚集强度。当$\alpha \to 0$时，该变换趋于恒等变换。随着 α 增大，网格点在区域边界附近的聚集程度更加显著。通过数值计算确定参数 α，以达到指定的间距比（例如，间距比为 10 表示边界处的分辨率提高十倍）。

如上文所述，该分析基于流体动力压力（p_0）。表 3 和表 4 汇总了瑞利数 Ra $= 10^2$ 和 10^7, 两种情况的网格收敛性研究结果。两个方向采用相同的网格划分（$i = 1, 2$），内部区域的 max(Δ_{x_i}) $= m$min(Δ_{x_i})，瑞利数 Ra $= 10^2$时为 $m = 2$，瑞利数 Ra $= 10^7$时为 $m = 21$。两种情况均采用四种网格分辨率，从 64×64 到 216×216，细化比为 $\delta = 1.5$。瑞利数 Ra $= 10^7$ 的情况在边界附近的网格点聚集更为显著（内部区域分辨率的 21 倍），因为要准确描述薄热边界层内部的变化，也就是捕捉壁面附近的强梯度，需要更高的分辨率。结果表明，其收敛阶与二阶方法相符。此外，可以看出，采用仅在所需区域加密的非均匀网格对提高计算效率十分重要。自由度相对较少，结果却与参考文献中的结果非常接近，下一节将对此进行介绍。

4.4.2. 结果比较

这项验证分为三个层次。第一层是对流线和等温线进行可视化，以作较为定性的检验。图 8 展示了两种情况（Ra $= 10^2$ and 10^7）。第二层考察相关属性的局部剖面。由于这些数据仅以图形形式提供，因此使用适当的工具 [79] 提取。此过程不可避免地会引入不确定性，其程度取决于图像分辨率、线宽等因素，但能够系统地比较各变量的行为。图 9

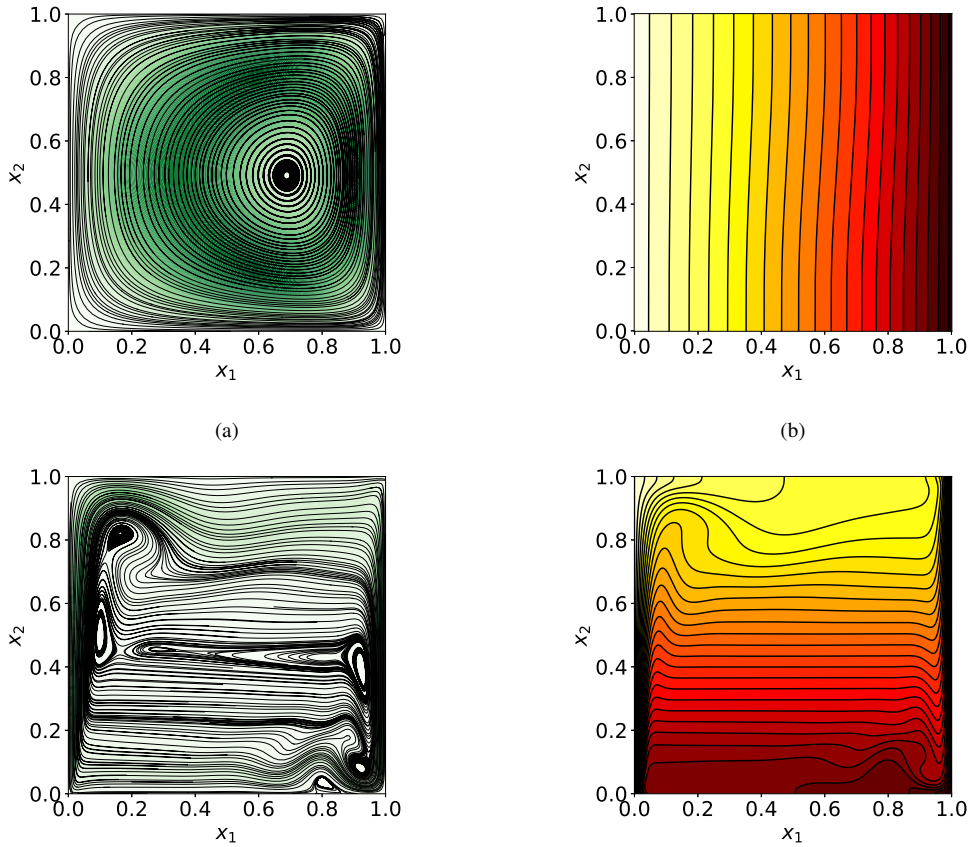


图 8：用于对案例 Ra $= 10^2$ 和 Ra $= 10^7$ 进行定性验证的流线——(a) 和 (c)——以及等温线——(b) 和 (d)——。浅色（深色）区域表示速度较低（较高）或温度较高（较低）的区域。

和图 10 分别展示了较小和较大的瑞利数下计算得到的剖面（以线条表示）与参考剖面（以标记表示）的对比。还需指出，在低马赫数极限下，流动仅对压差作出响应，这意味着只要压力梯度正确，任何解都足够。然而，为了与参考结果直接比较，必须将（流体动力学）压力调整到相同的压力基准。因此，我们将采用当前方法得到的数据进行了平移，使其与参考压力基准一致；调整时以剖面最大值和最小值的平均值为依据。第三层通过将关键（全局）参数的数值与参考文献中列出的数值进行比较，进行更严格的定量验证，结果汇总于表 5。

简而言之，计算结果与参考文献中的解在各个分析层面均一致，验证了能量传递过程建模的合理性以及代码的正确性。

4.5. 双辻火焰

此案例是对所提方法的一项完整测试。考虑一根无限长的圆柱形燃烧器，其半径为 R，以径向均匀方式喷出燃料，燃料质量分数为 $Y_{F,\,b}$

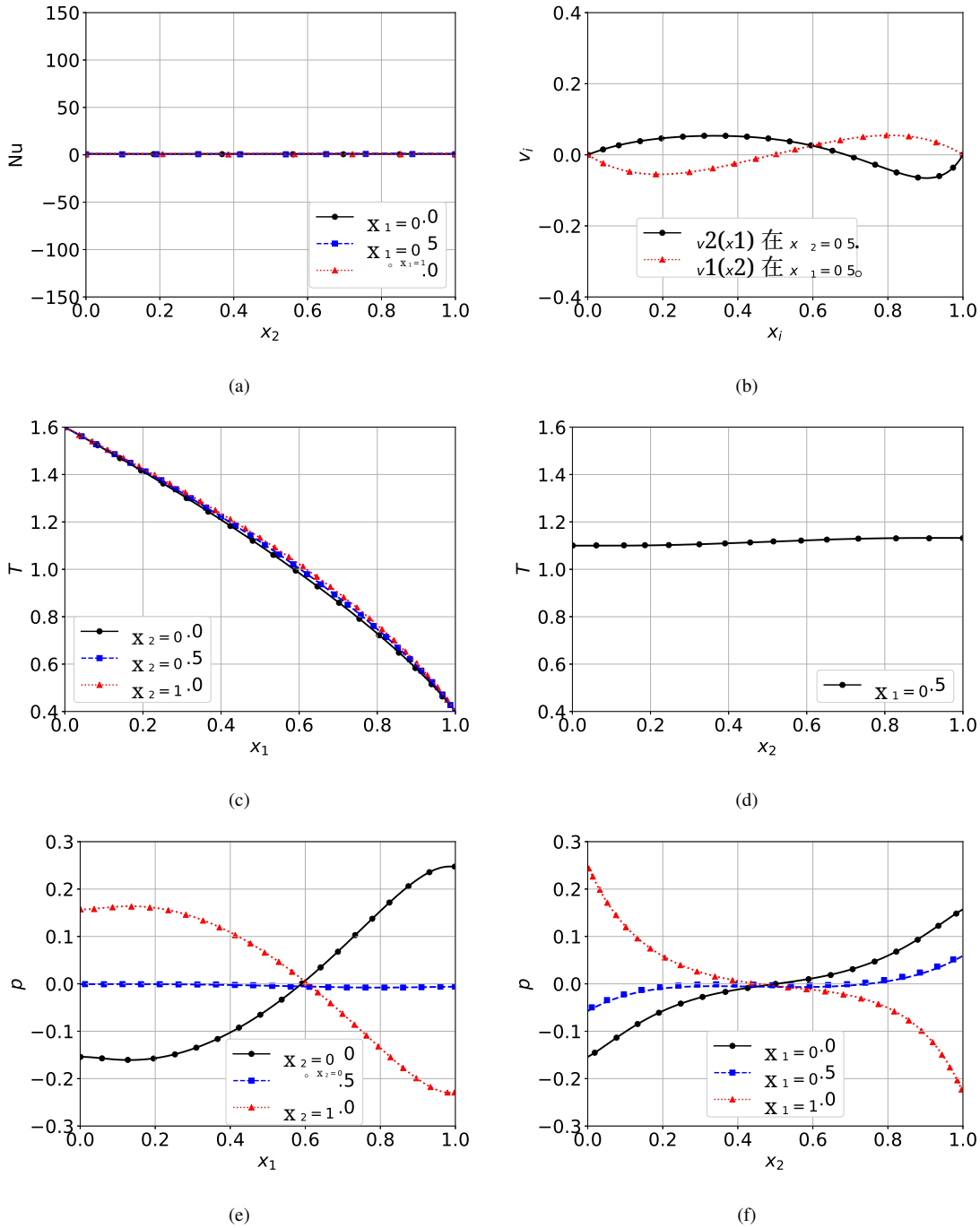


图9：局部努塞尔数 Nu (a)；垂直速度分量 v_2 和水平速度分量 v_1 (b)；温度 T 沿水平轴 (c) 和垂直轴 (d) 的分布；以及流体动力压力 p 沿水平轴 (e) 和垂直轴 (f) 的分布。线条表示在 216×216 网格上计算得到的剖面，标记表示参考剖面，适用于 Ra $= 10^2$。

速度大小为 $\hat{u}_b$，位于由平面冲击射流形成的气氛中心；这些射流构成氧化剂对向流，其质量分数为 $Y_{O,\infty}$，应变率为 $\hat{a}$。该设置

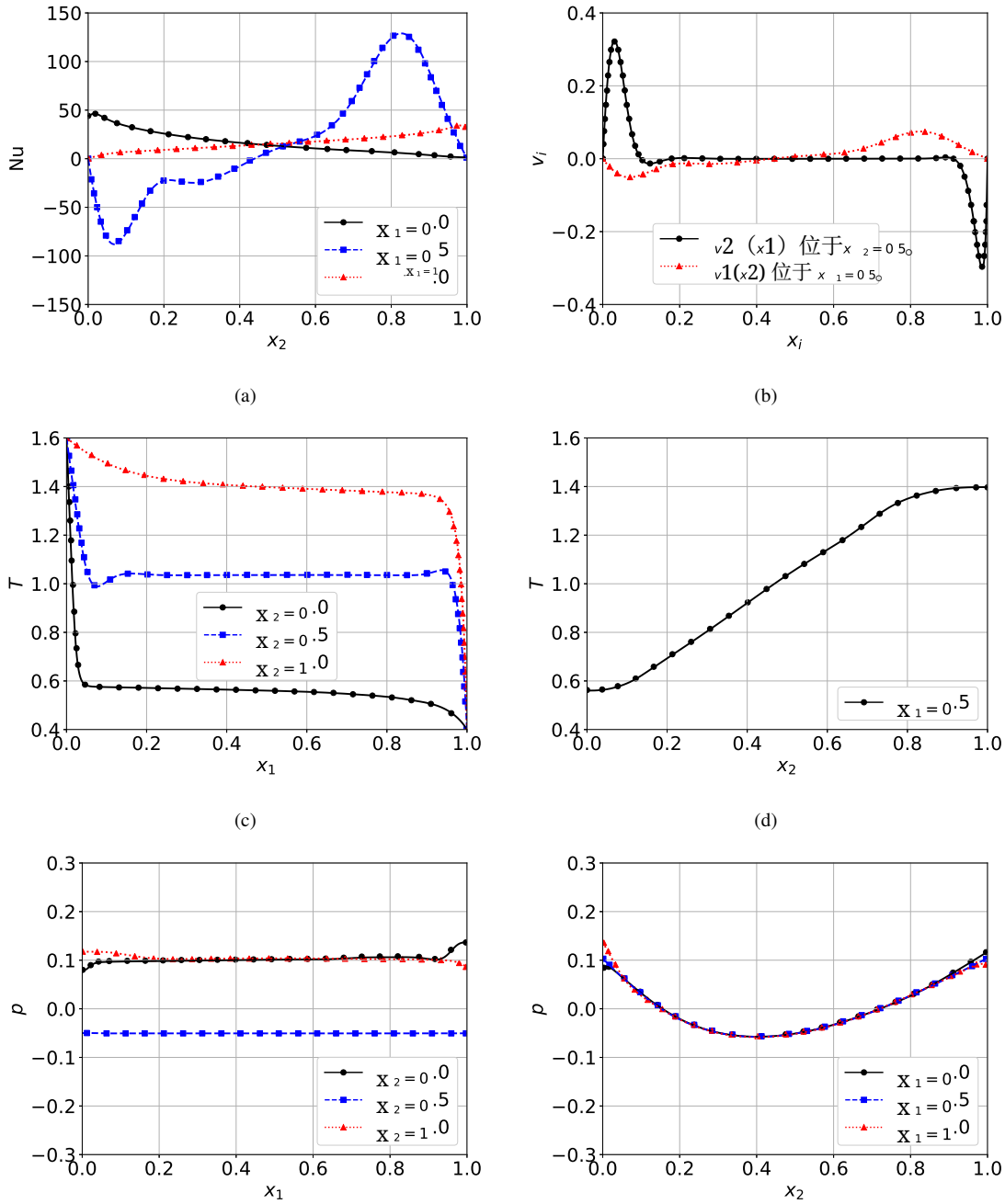


图10：局部努塞尔数 Nu 的剖面 (a)；竖直方向 v_2 与水平方向 v_1 的速度分量 (b)；温度 T 沿水平轴 (c) 和竖直轴 (d) 的分布；以及流体动力压力 p 沿水平轴 (e) 和竖直轴 (f) 的分布。线条表示在 216×216 网格上计算得到的剖面，标记表示参考剖面，对应瑞利数 $= 10^7$。

被称为双Tsuji燃烧器，由此产生的火焰称为双Tsuji火焰

表 5：全局性质比较。

Ra	数据类型	p_0	$\overline{\mathrm{Nu}}_L$	$\overline{\mathrm{Nu}}_M$	$\overline{\mathrm{Nu}}_R$
10^2	计算值	0.95738	0.9787	0.9787	0.9786
	参考文献	0.95736	0.9787	0.9787	0.9787
10^7	计算值	0.92245	16.248	16.241	16.222
	参考文献	0.92263	16.241	16.241	16.240

在非均匀间距网格（216 × 216）上进行的模拟，各情形近壁面处的网格点聚集程度不同：瑞利数 $= 10^2$为2:1，瑞利数 $= 10^7$为21:1。Nu_A 表示左（$A = L$）、中（$A = M$）和右（$A = R$）壁面处的空间平均努塞尔数。参考文献数据来自 [77]。

[80, 81].

双重迁火焰同时表现出对向流和并流扩散火焰的特征，并在其空间分布上于这些行为之间平滑过渡 [80, 82]。因此，它们可被视为一种“广义火焰”，在单一构型中涵盖了不同流动条件下火焰的特征。这使其成为验证反应流模拟数值方法的理想测试案例。此外，带有径向喷射的圆柱形燃烧器引入了几何复杂性，需要适当的技术才能在正交网格上表示此类构型。事实上，为实现这一点，采用了第3.4节所述的带质量通量的浸入边界法（IBM）。

为考虑燃烧器的径向燃料喷射，在连续性方程中加入线性质量源（S_m），并与燃料喷射速度保持一致。更具体地说，

$$S_m(x_1, x_2) \coloneqq \chi \frac{\rho_b U_b}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}, \tag{117}$$

以及径向喷射速度

$$v_{ib_j}(x_1, x_2) \coloneqq \frac{U_b}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}} x_j \tag{118}$$

对于 $j = 1,2$。燃烧器处的混合分数（Z_{ib}）和过剩焓（H_{ib}）由下式给出

$$Z_{ib} = S + 1 \quad , \quad H_{ib} = (S + 1)/Q + 1 \tag{119}$$

在接下来的讨论中，若无明确说明，则采用以下参数：$\mathrm{Pr} = 0.71$、$\mathrm{Pe} = 71$（或 $\mathrm{Re} = 100$）、$U_b = 0.1$、$S = 14.89$、$Q = 4.17$、$\mathrm{Le}_F = 0.97$、$\mathrm{Le}_O = 1.11$，以及 $\mathrm{Da}_{ib} = 10^{-4}$ 和 $\varepsilon = 0.5$。

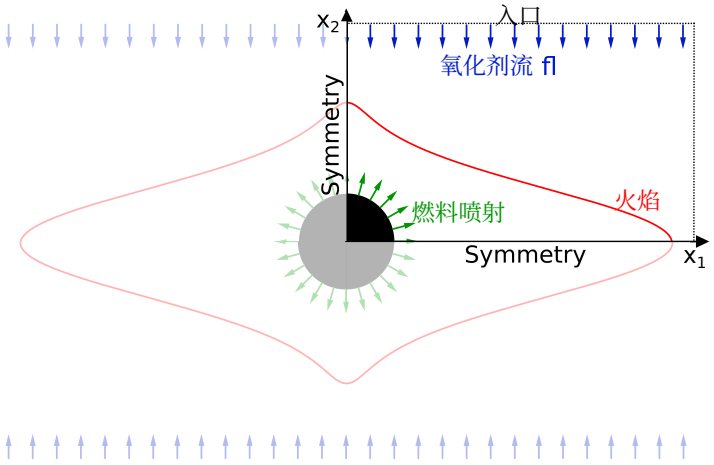


图11：双Tsuji燃烧器示意图：一根无限长的圆柱体（以二维形式表示），从中心向外均匀径向喷射燃料，置于相互冲击的氧化剂流中（平面无约束对向流）。根据对称性，先验上，第一象限即可完整表示整个系统。

边界条件。

$$v_1 = \partial_{x_1} v_2 = \partial_{x_1} Z = \partial_{x_1} H = 0 \quad , \quad \text{on the vertical symmetry axis } (x_1 = 0); \tag{120a}$$

$$\partial_{x_2} v_1 = v_2 = \partial_{x_2} Z = \partial_{x_2} H = 0 \quad , \quad \text{on the horizontal symmetry axis } (x_2 = 0); \tag{120b}$$

$$v_1 - x_1 = v_2 + x_2 = Z - Z_\infty = H - H_\infty = 0 \quad , \quad \text{at the inlet } (x_2 \to \infty) \tag{120c}$$

$$\partial_{x_1} v_1 = \partial_{x_1} v_2 = \partial_{x_1} Z = \partial_{x_1} H = 0 \quad , \quad \text{at the outlet } (x_1 \to \infty). \tag{120d}$$

其中 $Z_\infty := 0$ 和 $H_\infty := (S+1)/Q + 1$。

对于开放域（如本算例），在整个计算域内保持全局质量守恒可能具有挑战性。由于本研究的范围并不直接涉及边界条件，因此按上文定义施加简单的流出外推。随后监测全局质量守恒，并在必要时对出口通量进行均匀修正。

初始条件。时间积分从势流 [80, 82] 开始：

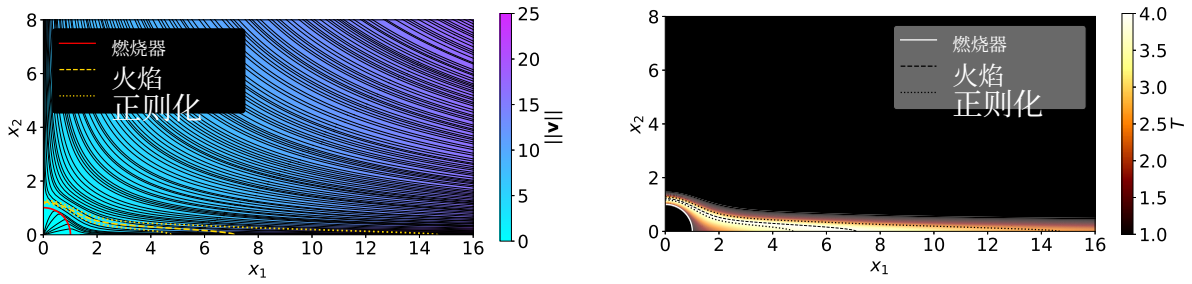
$$v_1(x_1, x_2) = \quad x_1 \left[1 - \frac{(x_1^2 - 3x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^3} + \frac{U_b}{x_1^2 + x_2^2} \right]; \tag{121a}$$

$$v_2(x_1, x_2) = -x_2 \left[1 + \frac{(3x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^3} - \frac{U_b}{x_1^2 + x_2^2} \right], \tag{121b}$$

以及针对 Z 和 H [80]的渐近解，并进行了修改以纳入喷射效应：

$$Z(x_1, x_2) = \left[\frac{1 + U_b/w_F^2}{(x_1/w_F)^2 + U_b/w_F^2} \right]^{1/2} \exp\left(-x_2^2/2\right) \tag{122a}$$

$$H(x_1, x_2) = \left[\frac{S+1}{Q}(T_F - 1) - 1 \right] Z + \frac{S+1}{Q} + 1 \tag{122b}$$



(a) (b)

图 12：流线 ，并以速度大小表示（a），以及双Tsuji燃烧器的温度场。浅 t（深）色区域表示低（高）速度或高（低）温度。

其中， w_F和 T_F分别是参考文献中估算的火焰宽度（在 x_1轴上的位置）和温度。

4.5.1. 稳态解

图 12 展示了流动拓扑、速度和温度。由于冲击流的影响，速度和温度的显著变化局限于停滞区（overx_2 轴）以及 x_1 轴附近。其他线条分别表示圆柱表面（实线）、火焰位置（虚线）和火焰正则化厚度（位于点线之间）。

4.5.2. 计算域尺寸依赖性

表 6：计算域收敛性研究。

参数	数值	h_F	Δh_F(%)	w_F	Δw_F(%)
L_{x_1}	10	1.219 69	–	7.132 64	–
	15	1.219 04	-0.053	7。108 68	-0.337
	20	1.219 00	-0.004	7.107 06	-0.023
	水平收敛 (L_x			$_2$ $= 10$)	
L_{x_2}	10	1.219 00	–	7.107 06	–
	15	1.220 72	0.141	7。120 96	0.195
	20	1。221 56	0.069	7.128 79	0.110
	垂直收敛（L_x			$_1$ $= 20$)	

Δ：相对于前一个计算域尺寸的相对变化。

将 L_{x_1} 和 L_{x_2} 分别视为（水平方向） x_1方向和（垂直方向） x_2方向上的数值计算域尺寸。针对计算域 $[0, L_{x_1}] \times [0, L_{x_2}]$生成非均匀网格，其中 $L_{x_i} = 20\,(i = 1,\ 2)$，分辨率为 700×700。最精细的区域位于对称轴周围，两个方向上的网格间距均小至 $\Delta x_i = 5 \times 10^{-3}$ （即 $i = 1,$ 2）。也就是说，燃烧器区域的网格最为精细。最粗的区域位于出口附近，

水平方向间距为 Δx_1；垂直方向间距则位于入口周围，为 Δx_2，其中 $\Delta x_i \approx 0.1$对应 $i = 1$，2。通过选取这一初始网格的子集，考虑以下子域长度来进行计算域尺寸依赖性测试：水平方向上，$L_{x_1} = 10$，15 和 20，对应 $L_{x_2} = 10$；垂直方向上，$L_{x_2} = 10$，15 和 20，对应 $L_{x_1} = 20$。选取水平轴（w_F）和垂直轴（h_F）上的火焰位置作为监测参数，依次记为火焰宽度和高度。如表6所示，水平计算域从 $L_{x_1} = 15$增大到 20 后，火焰宽度的最大相对变化为 $\Delta w_F \approx -0.02$%，高度的最大相对变化为 $\Delta h_F \approx -0.004$%。垂直计算域从 $L_{x_2} = 15$减小到 10 时，火焰宽度的最大相对变化为 $\Delta w_F = -0.19$%，高度的最大相对变化为 $\Delta h_F = -0.14$%，表6中也观察到了这一结果。鉴于偏差较小且呈现出收敛趋势，计算域尺寸取 $L_{x_1} = 20$和 $L_{x_2} = 10$，可确保由计算域截断引起的边界效应对相关参数的影响不超过 0.2%。这满足严格的计算域尺寸收敛准则，因此后续所有模拟均采用该计算域。

4.5.3. 参数依赖性

表7：参数收敛性研究。

参数	数值	h_F	Δh_F(%)	w_F	Δw_F(%)
Da_{ib}	$1.6 \cdot 10^{-4}$	1.212 61	–	7。215 02	–
	$8 \cdot 10^{-5}$	1。221 25	0.707	7.071 52	-2.029
	$4 \cdot 10^{-5}$	1。225 75	0.367	6.998 39	-1.045
ε	0.9	1.218 78	–	7.125 82	–
	0.5	1。219 01	-0.019	7.106 95	0.265
	0.1	1.219 13	-0.010	7.088 65	0.258

Δ：相较于前一个参数值的相对变化。

此处考察 IB 达西数 (Da_{ib}) 和火焰正则化厚度 (ε) 的影响。

IB 达西数。 根据泰勒–库埃特流的讨论（参见第 4.3 节），$\mathrm{Da}_{ib} = 10^{-4}$ 是一个不错的起点。此外，还测试了 $\mathrm{Da}_{ib} = 1.6 \cdot 10^{-4}$，$8 \cdot 10^{-5}$ 和$4 \cdot 10^{-5}$。表 7 的第一部分汇总了结果。在该区间内，解对 Da_{ib} 的变化不太敏感，最大变化为 2%。

火焰正则化。 火焰正则化可方便地在混合分数的化学计量水平（即 $Z = 1$）附近进行，而不是直接围绕火焰的空间位置进行（参见第 3.5 节）。这种方法简化了数学建模和数值实现，但无法先验地精确控制正则化厚度，如图 12 中由点线界定的区域所示。尽管如此，根据表 7 后半部分中 $\varepsilon = 0.1$,0.5 和 0.9 的结果，该方法已证明具有良好的效率和足够的精度，并且对正则化厚度（ε）不太敏感。

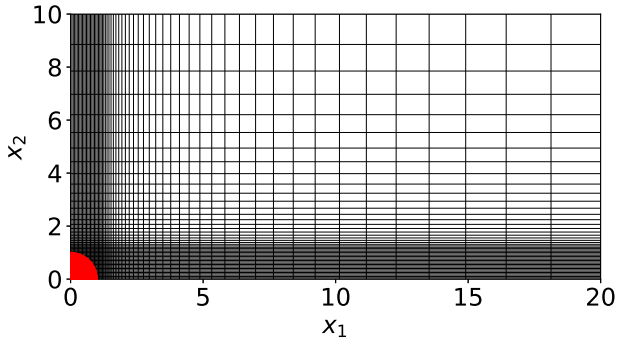


图13：双Tsuji燃烧器模拟所用网格拓扑示意图。圆柱形燃烧器以原点处的实心圆表示。

4.5.4. 网格分辨率依赖性

表8：网格收敛性研究。

分辨率	h_F	Δh_F(%)	w_F	Δw_F(%)
600×480	1。219 01	–	7。106 95	–
900×720	1。218 97	-0.003	7。106 83	-0.002

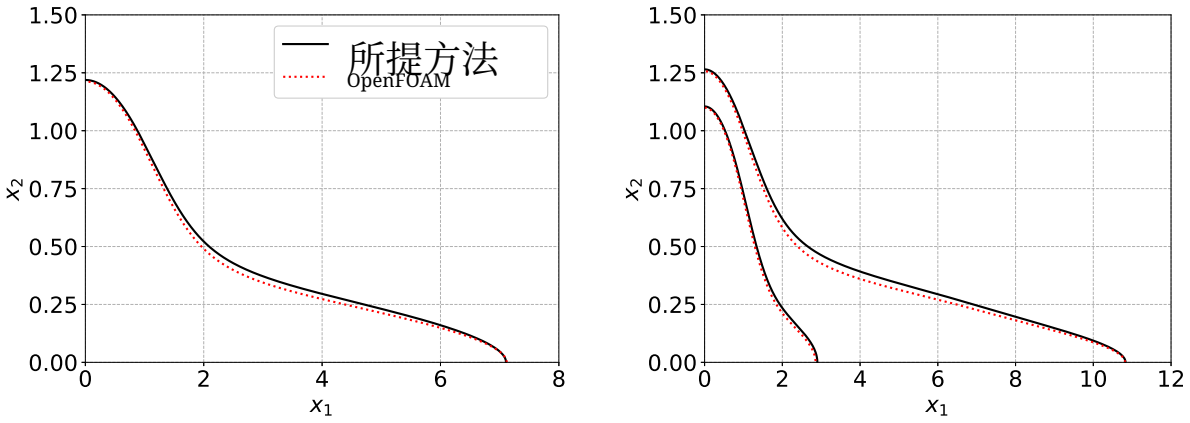
Δ：相对于前一网格分辨率的相对变化。

在这种情况下，最强的梯度集中在停滞区、圆柱体上游以及火焰面周围。因此，采用具有可变细化的网格，如图 13 所示，在这些区域提高分辨率。结果汇总于表 8 中。从 600×480到 900×720的相对变化量非常小，表明结果在渐近意义下已经收敛。

4.5.5. OpenFOAM 对比

将本方法得到的结果与 OpenFOAM 8 的结果进行了比较。在 OpenFOAM 模拟中采用了第 2 节中相同的假设。由于标准库中没有此功能，因此实现了输运系数的幂律。此外，使用 reactingLeFoam 求解器 [83], , 为完整甲烷反应中的每种组分 (i) 指定了恒定的路易斯数 (Le_i) [41]中指定的数值。

如图 14 所示，所得火焰形状和等温线具有非常好的一致性。预期会存在一些细微偏差，这些偏差可归因于各求解器所采用数值方法的固有差异（例如空间离散和算子离散、火焰正则化过程以及圆柱体的表示方式）。因此，所提方法的适用性和准确性得到了确立。



(a) (b)

图14：所提方法与 OpenFOAM 模拟得到的火焰形状 (a) 和等温线 $T = 3$ (b) 的比较。

5. 结论

本文提出了一种稳健的数值方法，用于模拟从不可压缩流动到强变密度流动的低马赫数流动，既适用于无燃烧情况，也适用于有燃烧情况。该数值方法基于对原始偏微分方程组进行变换：通过空间离散化，将其转化为一组常微分方程（直线法）。因此，可以对其应用预测-校正格式，并使用分数时间步（或投影）方法耦合压力和速度。该方法通过求解压力的泊松方程实现压力计算；当采用交错网格或同位网格并定义辅助通量时，该方程的边界条件继承自界面通量。预测（校正）阶段采用二阶 Adams–Bashforth（Adams–Moulton）时间格式。方程在同位网格上采用中心有限差分进行空间离散，并通过对辅助通量进行插值，专门设计为产生强烈的“奇偶耦合”。针对火焰片近似引起的不连续性问题，提出了一种火焰性质正则化技术以减轻该问题。该技术的一项新特征是基于温度导数进行正则化，因为奇异性正是由温度导数有效产生的，而不是像经典方法那样直接基于温度进行正则化。另一项重要贡献是将浸入边界法（IBM）扩展到考虑来自浸入体表面的质量通量，这自然要求在连续性方程中加入质量源项。通过选取不同条件下的测试算例，重点考察该方法的不同方面，验证了其能力及局限性。具体而言，利用泰勒–格林涡测试了投影法的正确性和准确性。通过泰勒–库埃特流分析了 IBM，从而对惩罚法及相关参数的选择得出了有价值的结论。在差分加热方腔中验证了处理强密度梯度和热能输运的能力。最后，采用包括速度、混合分数和过剩焓的 IBM、组分质量输运、差异优先扩散以及火焰正则化在内的各种方法组合，并使用

双Tsuji火焰。在对本研究进行全面讨论后，可以得出结论：所提出的数值方法稳定、高效且准确。

利益冲突声明

作者声明不存在潜在利益冲突。

致谢

谨以本文纪念阿马布尔·利尼安教授。

本研究部分由圣保罗研究基金会（FAPESP，巴西）资助。项目编号：2021/09246-9、2021/10689-2 和 2022/14361-4。本研究部分由巴西国家科学技术发展委员会（CNPq）资助，项目编号：307922/2019-7、161887/2021-0 和 301607/2025-7；本研究部分由巴西高等教育人员提升协调会（CAPES）资助，财务代码：001。D.R. 感谢 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 及欧盟 FEDER（资助方 ID：10.13039/501100011033）的资助，项目编号 PID2024-157642MB-I00。研究使用了工业应用数学科学中心（CeMEAI）的计算资源，该中心由 FAPESP 资助（项目编号 2013/ 07375-0）。

参考文献

[1] B. Müller，纳维–斯托克斯方程的低马赫数渐近分析，载于：《漂浮、流动、飞行》，施普林格，1998年，第97–109页。[2] S. Glegg，W. Devenport，《低马赫数流动的气动声学：基础、分析与测量》，学术出版社，2017年。[3] R. Klein，基于低马赫数渐近分析的戈东诺夫型格式的半隐式扩展 I：一维流动，计算物理学杂志 121 (2) (1995) 213–237。[4] N. Happenhofer，H. Grimm-Strele，F. Kupka，B. Löw-Baselli，H. Muthsam，低马赫数求解器：提升适用性，计算物理学杂志 236 (2013) 96–118。[5] A. Majda，《多个空间变量中的可压缩流体流动与守恒律系统》，第53卷，施普林格，1984年。[6] T. Alazard，完整纳维–斯托克斯方程的低马赫数极限，《理性力学与分析档案》180 (2006) 1–73。[7] T. Alazard，低马赫数流动与燃烧，SIAM 数学分析杂志 38 (4) (2006) 1186–1213。[8]J. R. Clausen，用于显式模拟不可压缩流动的人工可压缩性熵阻尼形式，《物理评论E》87 (2013) 013309。doi:10.1103/PhysRevE.87.013309。[9] T. Alazard，低马赫数极限短期课程，《离散与连续动力系统：S辑》1 (3) (2008) 365–404。

[10] B. Lessani，M. V. Papalexandris，具有强温度梯度和燃烧的变密度流的时间精确计算，计算物理学杂志 212 (1) (2006) 218–246。[11] C. Wall，C. D. Pierce，P. Moin，一种用于分辨低马赫数流动中声波的半隐式方法，计算物理学杂志 181 (2) (2002) 545–563。[12] I. Keshtiban，F. Belblidia，M. Webster，低马赫数流动的可压缩流动求解器——综述，《国际流体数值方法杂志》23 (2004) 77–103。[13] E. Turkel，计算流体力学中的预处理技术，《流体力学年度评论》31 (1999) 385–416。[14] A. J. Chorin，一种求解不可压缩黏性流动问题的数值方法，计算物理学杂志 2 (1) (1967) 12–26。[15] A. J. Chorin，纳维–斯托克斯方程的数值解，《计算数学》22 (104) (1968) 745–762。[16] R. Temam，关于用分步法逼近纳维–斯托克斯方程的解（I），《理性力学与分析档案》32 (1969) 135–153。[17]D. Dupuy，A. Toutant，F. Bataille，强非等温低马赫数流动的人工可压缩性方法，《物理评论E》103 (2021) 013314。doi:10.1103/PhysRevE.103.013314。[18] P. Madsen，H. Schäffer，关于人工可压缩性的讨论，《海岸工程》53 (1) (2006) 93–98。[19] S. MacNamara，G. Strang，算子分裂，载于：R. Glowinski，S. J. Osher，W. Yin（编），《通信、成像、科学与工程中的分裂方法》，施普林格国际出版，Cham，2016年，第95–114页。[20] J. Perot，分步法分析，计算物理学杂志 108 (1) (1993) 51–58。[21] J. Perot，关于分步法的评论，计算物理学杂志 121 (1) (1995) 190–191。[22] C. S. Peskin，心脏瓣膜周围的流动模式：一种数值方法，计算物理学杂志 10 (2) (1972) 252–271。[23]C. S. Peskin，浸入边界法，《数值学报》11 (2002) 479–517。doi:10.1017/S0962492902000077。[24] R. Verzicco，浸入边界方法：历史视角与未来展望，《流体力学年度评论》55 (2023) 129–155。doi:https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-120720-022129。[25] R. Mittal，G. Iaccarino，浸入边界方法，《流体力学年度评论》37 (2005) 239–261。doi:https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743。[26] W. Iwakami，Y. Yatagai，N. Hatakeyama，Y. Hattori，一种减小体积惩罚法误差的新方法，《计算物理通讯》16 (5) (2014) 1181–1200。doi:10.4208/cicp.220513.070514a。[27] M. Specklin，Y. Delauré，一种基于惩罚法的锐浸入边界法及其在运动边界和湍流旋转流动中的应用，《欧洲力学杂志——B/流体》70 (2018) 130–147。doi:https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2018.03.003。[28] E. Arquis，J.-P. Caltagirone，关于某一界面附近的水动力条件

流体介质-多孔介质界面：在自然对流中的应用，《巴黎科学院报告》II辑 299 (1) (1984).[29]D. Goldstein, R. Handler, L. Sirovich, 用外力场模拟无滑移流动边界，计算物理学杂志 105 (2) (1993) 354–366. doi:https://doi.org/10.1006/jcph.1993.1081.[30] G. Iaccarino, R. Verzicco, 用于湍流模拟的浸入边界技术，《应用力学评论》56 (3) (2003) 331–347. doi:10.1115/1.1563627.[31] S. P. Burke, T. E. W. Schumann, 扩散火焰，国际燃烧研讨会 (1948) 2–11.[32] Y. B. Zeldovich, G. I. Barenblatt, V. B. Librovich, G. M. Makhviladze, 燃烧与爆炸数学理论，Consultants Bureau，纽约，1985.[33] A. Liñán, 扩散火焰的结构，载于：M. Onofri, A. Tesei (编)，燃烧理论的流体动力学方面，Longman Scientific & Technical，哈洛，埃塞克斯，1991，第 11–29 页.[34] F. F. Fachini, 准稳态液滴燃烧的解析解，《燃烧与火焰》116 (1) (1999) 302–306.[35] F. F. Fachini, A. Liñán, F. A. Williams, 低燃料空气化学计量比下液滴燃烧火焰历程理论，《美国航空航天学会杂志》37 (11) (1999) 1426–1435.[36] F. F. Fachini, 多组分燃料扩散火焰的扩展施瓦布-泽尔多维奇公式，《国际传热传质杂志》50 (2007) 1035–1048.[37] P. Angot, C.-H. Bruneau, P. Fabrie, 一种用于在不可压缩黏性流中考虑障碍物的惩罚方法，《数值数学》81 (4) (1999) 497–520.[38]G. Carbou, P. Fabrie, 黏性不可压缩流惩罚方法的边界层，《微分方程进展》8 (12) (2003) 1453–1480. doi:10.57262/ade/1355867981.[39]M. Kooshkbaghi, B. Lessani, 一种同位网格投影法，用于在一般曲线坐标中精确计算低马赫数变密度流，《国际流体数值方法杂志》72 (3) (2013) 301–319. doi:https://doi.org/10.1002/fld.3734.[40] T. Poinsot, D. Veynante, 理论与数值燃烧，AFNIL，2022.[41] M. D. Smoke, V. Giovangigli，预混与非预混测试问题的公式，载于：M. D. Smooke (编)，《甲烷-空气火焰的简化动力学机理与渐近近似：专题卷》，施普林格柏林海德堡，柏林，海德堡，1991，第 1–28 页. doi:10.1007/BFb0035363.[42] W. Sutherland, Lii. 气体黏度与分子力，《伦敦、爱丁堡和都柏林哲学杂志与科学杂志》36 (223) (1893) 507–531. doi:10.1080/14786449308620508.[43] S. Schochet，低马赫数流动的数学理论，《ESAIM：数学建模与数值分析》39 (3) (2005) 441–458.[44] A. Majda, J. Sethian，零马赫数燃烧方程的推导与数值求解，《燃烧科学与技术》42 (3-4) (1985) 185–205.[45] G. I. Sivashinsky，封闭空间内火焰传播的流体动力学理论，《宇航学报》6 (5-6) (1979) 631–645。

[46] M. V. Papalexandris，斯托克斯假设对低马赫数流动的适用性，《连续介质力学与热力学》32 (4) (2020) 1245–1249.[47] F. Nicoud，低马赫数流动的守恒高阶有限差分格式，计算物理学杂志 158 (1) (2000) 71–97.[48] F. Maria Denaro，Helmholtz–Hodge 分解在具有一般边界条件的不可压缩流投影方法中的应用，《国际流体数值方法杂志》43 (1) (2003) 43–69.[49] H. N. Najm, P. S. Wyckoff, O. M. Knio，反应流的半隐式数值格式：I. 刚性化学反应，计算物理学杂志 143 (2) (1998) 381–402.[50] J. Bladel，有限区域中的亥姆霍兹定理，第 440 卷，Midwestern Universities Research Association, 1958.[51] E. Hairer, S. P. Nørsett, G. Wanner，常微分方程求解 I：非刚性问题，第 2 版，施普林格，柏林，1993.[52] R. J. LeVeque，常微分方程与偏微分方程的有限差分方法：稳态问题与时变问题，工业与应用数学学会 (SIAM)，费城，宾夕法尼亚州，2007.[53] J. H. Ferziger, M. Peri´c，计算流体动力学方法，施普林格，2002.[54] A. Tyliszczak，封闭腔体中低马赫数流动的高阶紧致格式投影法，《国际传热与流体流动数值方法杂志》24 (5) (2014) 1141–1174.[55] Y. Morinishi, T. S. Lund, O. V. Vasilyev, P. Moin，不可压缩流动的完全守恒高阶有限差分格式，计算物理学杂志 143 (1) (1998) 90–124.[56] F. Moukalled, L. Mangani, M. Darwish，计算流体力学中的有限体积法：结合 OpenFOAM® 和 Matlab 的进阶导论，《流体力学及其应用》第 113 卷，施普林格，Cham，瑞士，2016. doi:10.1007/978-3-319-16874-6.[57] K. Rajagopal，关于“压力”概念的评述，《非线性力学国际杂志》71 (2015) 165–172.[58] P. M. Gresho, R. L. Sani，关于不可压缩纳维–斯托克斯方程的压力边界条件，《国际流体数值方法杂志》7 (10) (1987) 1111–1145.[59] D. Rempfer，关于不可压缩纳维–斯托克斯问题的边界条件，《应用力学评论》59 (3) (2006) 107–125.[60] R. L. Sani, J. Shen, O. Pironneau, P. M. Gresho，非定常不可压缩纳维–斯托克斯方程的压力边界条件，《国际流体数值方法杂志》50 (6) (2006) 673–682.[61] D. Rempfer，关于 Sani 等人论文的两点评论，《国际流体数值方法杂志》56 (10) (2008) 1961–1965.[62] J. Kim, P. Moin，分步法在不可压缩纳维–斯托克斯方程中的应用，计算物理学杂志 59 (2) (1985) 308–323.[63] Y. Zang, R. L. Street, J. R. Koseff，一种用于曲线坐标中非定常不可压缩纳维–斯托克斯方程的非交错网格分步法，计算物理学杂志

计算物理 114 (1) (1994) 18–33。[64] M. Yoon、G. Yoon、C. Min，关于求解由带诺伊曼边界条件的泊松方程引起的奇异系统，《科学计算杂志》69 (2016) 391–405。[65] S. Abdallah，使用非交错网格求解带诺伊曼边界条件的压力泊松方程，I，《计算物理学杂志》70 (1) (1987) 182–192。[66] W. D. Henshaw，重叠网格上不可压缩纳维–斯托克斯方程的四阶精度方法，《计算物理学杂志》113 (1) (1994) 13–25。[67]C. Pozrikidis，关于离散泊松–诺伊曼问题正则化的一则注记，《计算物理学杂志》172 (2) (2001) 917–923。doi:https://doi.org/10.1006/jcph.2001.6857。[68]J. Gutiérrez-Jorquera、F. Kummer，低马赫数框架下扩散火焰的全耦合高阶间断伽辽金方法，《国际流体数值方法杂志》94 (4) (2022) 316–345。[69] P. R. Amestoy、I. S. Duff、J.-Y. L’Excellent、J. Koster，MUMPS：一种通用分布式内存稀疏求解器，载于：应用并行计算国际研讨会，施普林格，2000，第121–130页。[70] P. R. Amestoy、I. S. Duff、J.-Y. L’Excellent，多前沿并行分布式对称与非对称求解器，《应用力学与工程中的计算方法》184 (2-4) (2000) 501–520。[71] P. J. Roache，《计算科学与工程中的验证与确认》，第895卷，Hermosa，阿尔伯克基，新墨西哥州，1998。[72] G. I. Taylor、A. E. Green，大涡旋产生小涡旋的机制，《伦敦皇家学会会刊：A辑——数学与物理科学》158 (895) (1937) 499–521。doi:10.1098/rspa.1937.0036。[73] D. L. Brown、R. Cortez、M. L. Minion，不可压缩纳维–斯托克斯方程的高精度投影方法，《计算物理学杂志》168 (2) (2001) 464–499。[74] E. Fadlun、R. Verzicco、P. Orlandi、J. Mohd-Yusof，用于三维复杂流动模拟的浸入边界有限差分组合方法，《计算物理学杂志》161 (1) (2000) 35–60。[75]M. Uhlmann，一种用于模拟颗粒流的直接强制浸入边界法，《计算物理学杂志》209 (2) (2005) 448–476。doi:https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.03.017。[76] H. Paillere、C. Viozat、A. Kumbaro、I. Toumi，面向自然对流问题的低马赫数模型比较，《传热与传质》36 (6) (2000) 567–573。[77] J. Vierendeels、B. Merci、E. Dick，大水平温差方腔自然对流传热问题的基准解，《国际传热与流体流动数值方法杂志》13 (8) (2003) 1057–1078。[78] F. M. White，《黏性流体流动》，麦格劳-希尔，1974。[79] A. Rohatgi，Webplotdigitizer (2024)。网址：https://automeris.io[80] M. P. Severino、M. S. Donini、F. F. Fachini，反向流与并流状态之间连续几何变化的扩散火焰数学建模，《应用数学建模

学》106 (2022) 659–681。doi:10.1016/j.apm.2022.01.019。[81]F. F. Fachini、R. P. Bianchin、M. P. Severino、V. M. Sauer，双Tsuji扩散火焰：尺度分析，《燃烧科学与技术》 (2025) 1–15 doi:10.1080/00102202.2025.2582155。[82]M. P. Severino、M. S. Donini、F. F. Fachini，极低应变率流场中的扩散火焰动力学：从瞬态一维状态到稳态二维状态，《燃烧理论与建模》25 (5) (2021) 861–888。doi:10.1080/13647830.2021.1957155。[83] B. Tekgül、H. Kahila，reactingLeFoam，由芬兰阿尔托大学开发 (2020)。网址：https://github.com/blttkgl/reactingLeFoam