arXiv:2603.01747v1 [math.NT] 2 Mar 2026

雅各布天梯与由哈代-李特尔伍德公式（1921年）生成的费马-怀尔斯定理的等价形式

扬·莫泽

Abstract. 本文证明，哈代与李特尔伍德在其奠基性论文 [2] 中提出的、已有105年历史的引理18，能够生成例如一个连续统集合的新 ζ费马-怀尔斯定理等价形式。

1. Introduction

1.1. 我们回顾一下，哈代与李特尔伍德已证明（见 [2], 定理B）如下基本不等式:

$$N_0(T+U)-N_0(T)>KU,\ T>T_0, \tag{1.1}$$

其中，$N_0(T)$表示函数$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$的零点数，$0<t<T$，且

$$U=T^a,\ a>\frac{1}{2},\ K=K(a),\ T_0=T_0(a). \tag{1.2}$$

估计式 (1.1) 的证明基于引理18，参见 [2], 第 305 页:

$$J=\int_T^{T+U}\mathcal{J}^2\mathrm{d}t=\pi\sqrt{2\pi}HU+\mathcal{O}\left(\frac{U}{\ln T}\right), \tag{1.3}$$

其中

$$\mathcal{J}=\mathcal{J}(t,H)=\int_t^{t+H}X(u)\mathrm{d}u, \tag{1.4}$$

$$X(t)=-\frac{t^{\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{4}\pi t}}{\frac{1}{4}+t^2}\Xi(t), \tag{1.5}$$

and

$$T^a<U<T^b,\ a>\frac{1}{2},\ 0<H<T^c. \tag{1.6}$$

将 (1.6) 中的第一个不等式与 (1.2) 中的等式比较，其中 c为正且充分小。

最后，哈代与李特尔伍德指出[1] 如下：正如 *(5.5)* 中所观察到的，我们并未充分利用引理*18*。不过，完整的引理本身似乎颇有价值，将来或许能派上用场。

注 1. 本文将在105年后证明哈代与李特尔伍德的这一预言：他们的引理18能够生成例如连续统集合个新的 ζ费马-怀尔斯定理等价形式。

Key words and phrases. 黎曼ζ函数。[1]参见 [2],第 315 页。

1.2. 接下来，让我们回顾公式[2]

$$Z(t) = -2\pi^{\frac{1}{4}} \frac{\Xi(t)}{(\frac{1}{4}+t^2)|\Gamma(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2})|}. \tag{1.7}$$

从 (1.5) 和 (1.7) 中消去 $\Xi(t)$，可得

$$X(t) = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}\pi t} \left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}\right)\right| Z(t), \tag{1.8}$$

以及斯特林公式

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}\right)\right| \sim \sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{4}\pi t} \left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{4}},\ t\to\infty \tag{1.9}$$

即可推出这一结果。

注 2。 这体现了 Hardy-Littlewood $X(t)$ 函数与黎曼的 $Z(t)$ 函数之间的联系：

$$X(t) \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{4}} Z(t),\ t\to\infty. \tag{1.10}$$

这两个函数将在我们的公式中同时出现。此外，在复杂公式中，我们用 $\sqrt{2\pi^3}$ 代替 $\pi\sqrt{2\pi}$。

注 3. 公式 (1.5) 可由 [2] 第 289 页最后一行中的第三项与第四项相等得出。不过，在第三项中，我们必须补上负号，因为

$$s = \frac{1}{2}+it \ \Rightarrow\ s(s-1) = -\left(\frac{1}{4}+t^2\right).$$

1.3. 本文得到了由 Hardy-Littlewood 公式 (1.3) 生成的如下泛函：

$$\begin{aligned}&\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{\rho}\left\{\int_{[x\rho]^1}^{[x\rho+\frac{(2\pi^3)^{\frac{1}{2\alpha}}}{a}]^1} Z^2(t)\mathrm{d}t\right\}^{-\alpha} \times \\ &\int_{(x\rho)^{1/a}}^{(x\rho)^{1/a}+x\rho}\left[\int_t^{t+a^{-\alpha}(\ln x\rho)^\alpha} X(u)\mathrm{d}u\right]^2 \mathrm{d}t = x\end{aligned} \tag{1.11}$$

对每个固定的 $x>0,\ a>\frac{1}{2},\ \alpha>0$，其中

$$[G]^1 = \varphi_1^{-1}(G). \tag{1.12}$$

在特殊情形下

$$x \to \frac{x^n+y^n}{z^n},\ x,y,z,n\in\mathbb{N},\ n\geq 3 \tag{1.13}$$

[2]参见 [26],第 79 页。

对于费马有理数，我们有如下结果： ζ-条件

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{\rho}\left\{\int_{[\frac{x^n+y^n}{z^n}\rho]^1}^{[\frac{x^n+y^n}{z^n}\rho+\frac{(2\pi^3)^{\frac{1}{2\alpha}}}{a}]^1} Z^2(t)\mathrm{d}t\right\}^{-\alpha}\times \tag{1.14}$$
$$\int_{(\frac{x^n+y^n}{z^n}\rho)^{1/a}}^{(\frac{x^n+y^n}{z^n}\rho)^{1/a}+\frac{x^n+y^n}{z^n}\rho}\left[\int_t^{t+a^{-\alpha}(\ln\frac{x^n+y^n}{z^n}\rho)^\alpha} X(u)\mathrm{d}u\right]^2\mathrm{d}t\neq 1$$

在所有费马有理数构成的集合上，表达了对于每个固定的 $a>\frac{1}{2}$ 和 $\alpha>0$，费马-怀尔斯定理的下一个等价命题。

备注 4。 与此同时，我们表明，上述引理18也可以用于一个与该陈述最初用途截然不同的方向。

1.4. 本文第四部分对 A. A. 卡拉楚巴如何运用我关于方程 $Z'(t)=0$ 的研究结果作了一些评论，参见他那篇纪念 I. M. Vinogradov 九十周年的论文 [4] 。在这些评论中，我们还给出了韦伊三角和方法在相关问题中能力范围的新极其遥远的[3] 界限。我的评论基于 I. M. Vinogradov 在其专著引言中的分析 [27]。

2. Jacob's ladders: notions and basic geometrical properties

2.1. 本文采用我们在著作 [18]– [22] 中提出的以下概念：

(a) 雅各布天梯 $\varphi_1(T)$，(b) 雅各布天梯的

正向迭代

$$\varphi_1^0(t)=t,\ \varphi_1^1(t)=\varphi_1(t),\ \varphi_1^2(t)=\varphi_1(\varphi_1(t)),\dots,$$
$$\varphi_1^k(t)=\varphi_1(\varphi_1^{k-1}(t))$$

对于每个固定的自然数 k,

(c) 雅各布天梯的反向迭代

$$\varphi_1^{-1}(T)=\overset{1}{T},\ \varphi_1^{-2}(T)=\varphi_1^{-1}(\overset{1}{T})=\overset{2}{T},\dots, \tag{2.1}$$
$$\varphi_1^{-r}(T)=\varphi_1^{-1}(\overset{r-1}{T})=\overset{r}{T},\ r=1,\dots,k,$$

其中，例如，

$$\varphi_1(\overset{r}{T})=\overset{r-1}{T} \tag{2.2}$$

对于每个固定的 $k\in\mathbb{N}$以及每个充分大的 $T>0$。我们还使用了下文列出的反向迭代的性质。

$$\overset{r}{T}-\overset{r-1}{T}\sim(1-c)\pi(\overset{r}{T});\ \pi(\overset{r}{T})\sim\frac{\overset{r}{T}}{\ln\overset{r}{T}},\ r=1,\dots,k,\ T\to\infty, \tag{2.3}$$

$$\overset{0}{T}=T<\overset{1}{T}(T)<\overset{2}{T}(T)<\dots<\overset{k}{T}(T), \tag{2.4}$$

[3] I. M. Vinogradov 使用的术语。

and

$$T \sim \overset{1}{T} \sim \overset{2}{T} \sim \cdots \sim \overset{k}{T},\ T \to \infty. \tag{2.5}$$

注 5。 这些点的渐近行为

$$\{T, \overset{1}{T}, \dots, \overset{k}{T}\}$$

如下：在 $T \to \infty$ 这些点彼此无限远地分离，并且全都一起趋向无穷远。因此，这些点集的行为如同一个一维的弗里德曼–哈勃膨胀宇宙。

2.2. 提醒一下，我们已经证明[4] 几乎线性的增量存在

$$\int_{\overset{r-1}{T}}^{\overset{r}{T}} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t \sim (1-c)\overset{r-1}{T}, \tag{2.6}$$
$$r = 1, \dots, k,\ T \to \infty,\ \overset{r}{T} = \overset{r}{T}(T) = \varphi_1^{-r}(T)$$

对于 Hardy-Littlewood积分（1918）， [1]:

$$J(T) = \int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t. \tag{2.7}$$

为了完整起见，我们在此给出与雅各布天梯相关的一些基本几何性质。它们由以下序列生成

$$T \to \left\{\overset{r}{T}(T)\right\}_{r=1}^{k} \tag{2.8}$$

对于每个充分大的 $T > 0$ 和每个固定的 $k \in \mathbb{N}$，雅各布天梯的反向迭代。

$_k$性质 1。 序列 (2.8) 将线段 $[T, T]$ 划分为如下

$$|[T, \overset{k}{T}]| = \sum_{r=1}^{k} |[\overset{r-1}{T}, \overset{r}{T}]| \tag{2.9}$$

渐近等距的部分

$$\overset{r}{T} - \overset{r-1}{T} \sim \overset{r+1}{T} - \overset{r}{T}, \tag{2.10}$$
$$r = 1, \dots, k-1,\ T \to \infty.$$

性质 2。 与性质 1 同时，序列 (2.8) 将积分划分为

$$\int_T^{\overset{k}{T}} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t \tag{2.11}$$

分成这些部分

$$\int_T^{\overset{k}{T}} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t = \sum_{r=1}^{k} \int_{\overset{r-1}{T}}^{\overset{r}{T}} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t, \tag{2.12}$$

[4]见 [22],(3.4)。

这些部分渐近相等

$$\int_{\overset{r-1}{T}}^{\overset{r}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t\sim\int_{\overset{r}{T}}^{\overset{r+1}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t,\ T\to\infty. \tag{2.13}$$

显然，（2.10）可由（2.3）和（2.5）推出，因为

$$\overset{r}{T}-\overset{r-1}{T}\sim(1-c)\frac{\overset{r}{T}}{\ln\overset{r}{T}}\sim(1-c)\frac{T}{\ln T},\ r=1,\dots,k, \tag{2.14}$$

而我们的公式（2.13）则由（2.6）和（2.5）推出。

3. New ζ-functional and corresponding ζ-equivalent of the Fermat-Wiles theorem generated by the Hardy-Littlewood Lemma 18

3.1. 在.....的情形下

$$U=T^a,\ H=\ln^\alpha T,\ a>\frac{1}{2},\ \alpha>0 \tag{3.1}$$

它满足 Hardy-Littlewood 引理的假设 18[5], 其中，当然,

$$H=\ln^\alpha T<T^c,\ T\to\infty$$

对于每个固定的 $x>0$ 和 $c>0$，我们有如下公式[6]

$$\int_T^{T+T^a}\left[\int_t^{t+\ln^\alpha T}X(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t= \{1+o(1)\}\sqrt{2\pi^3}T^a\ln^\alpha T,\ T\to\infty. \tag{3.2}$$

现在，我们使用代换

$$T=\tau^{\frac{1}{a}},\ \{T\to+\infty\}\ \Leftrightarrow\ \{\tau\to+\infty\} \tag{3.3}$$

代入 (3.2)，得到此结果

$$\int_{\tau^{\frac{1}{a}}}^{\tau^{\frac{1}{a}}+\tau}\left[\int_t^{t+a^{-\alpha}\ln^\alpha\tau}X(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t= \{1+o(1)\}\sqrt{2\pi^3}a^{-\alpha}\tau\ln^\alpha\tau,\ \tau\to\infty. \tag{3.4}$$

接下来，我们在 (3.4) 的右侧使用公式[7] 的如下形式

$$\ln\tau=\frac{1+o(1)}{2l}\int_{[\tau]^1}^{[\tau+2l]^1}Z^2(t)\mathrm{d}t,\ l>0 \tag{3.5}$$

这就给出了如下公式

$$\int_{\tau^{\frac{1}{a}}}^{\tau^{\frac{1}{a}}+\tau}\left[\int_t^{t+a^{-\alpha}\ln^\alpha\tau}X(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t= \{1+o(1)\}\frac{\sqrt{2\pi^3}}{(2la)^\alpha}\tau\left(\int_{[\tau]^1}^{[\tau+2l]^1}Z^2(t)\mathrm{d}t\right)^2,\ \tau\to\infty. \tag{3.6}$$

[5]参见 (1.6)，比较 (1.2)。[6]参见 (1.3) 和 (1.4)。[7]参见 [23], (5.1)，$k=1$。

此外，我们为 $2l$ 选取该值

$$2l_1 = \frac{(2\pi^3)^{\frac{1}{2\alpha}}}{a}, \tag{3.7}$$

此后我们使用代换

$$\tau = x\rho,\ \{\tau \to +\infty\} \ \Leftrightarrow\ \{\rho \to +\infty\}, x > 0 \tag{3.8}$$

代入公式 (3.6) 中的 $l = l_1$，得到以下泛函。

定理1。

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{\rho} \left\{ \int_{[x\rho]^1}^{[x\rho + \frac{(2\pi^3)^{\frac{1}{2\alpha}}}{a}]^1} Z^2(t)\mathrm{d}t \right\}^{-\alpha} \times \int_{(x\rho)^{1/a}}^{(x\rho)^{1/a}+x\rho} \left[\int_t^{t+a^{-\alpha}(\ln x\rho)^\alpha} X(u)\mathrm{d}u \right]^2 \mathrm{d}t = x \tag{3.9}$$

对于每个固定的 $x > 0$、 $a > \frac{1}{2}$ 和 $\alpha > 0$。

3.2. 在费马有理数的特殊情形下，见 (1.13)，我们得到如下结果。

推论1.

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{\rho} \left\{ \int_{[\frac{x^n+y^n}{z^n}\rho]^1}^{[\frac{x^n+y^n}{z^n}\rho + \frac{(2\pi^3)^{\frac{1}{2\alpha}}}{a}]^1} Z^2(t)\mathrm{d}t \right\}^{-\alpha} \times \int_{(\frac{x^n+y^n}{z^n}\rho)^{1/a}}^{(\frac{x^n+y^n}{z^n}\rho)^{1/a}+\frac{x^n+y^n}{z^n}\rho} \left[\int_t^{t+a^{-\alpha}(\ln \frac{x^n+y^n}{z^n}\rho)^\alpha} X(u)\mathrm{d}u \right]^2 \mathrm{d}t = \frac{x^n+y^n}{z^n} \tag{3.10}$$

对于每个固定的费马有理数以及每个固定的 $a > \frac{1}{2}$ 和 $\alpha > 0$。

因此，以下定理成立。

定理2. ζ条件

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{\rho} \left\{ \int_{[\frac{x^n+y^n}{z^n}\rho]^1}^{[\frac{x^n+y^n}{z^n}\rho + \frac{(2\pi^3)^{\frac{1}{2\alpha}}}{a}]^1} Z^2(t)\mathrm{d}t \right\}^{-\alpha} \times \int_{(\frac{x^n+y^n}{z^n}\rho)^{1/a}}^{(\frac{x^n+y^n}{z^n}\rho)^{1/a}+\frac{x^n+y^n}{z^n}\rho} \left[\int_t^{t+a^{-\alpha}(\ln \frac{x^n+y^n}{z^n}\rho)^\alpha} X(u)\mathrm{d}u \right]^2 \mathrm{d}t \neq 1 \tag{3.11}$$

在所有费马有理数的集合上，对每个固定的$a > \frac{1}{2}$和每个固定的 $\alpha > 0$，表达了费马–怀尔斯定理的新 ζ等价形式。 –

注 6. 由于符号

$$\{(a, \alpha) :\ a > \frac{1}{2}, \alpha > 0\}$$

取遍连续统集合时，公式 (3.11) 表示费马-怀尔斯定理的一族新的 ζ等价形式，其数量构成连续统集合。

4. Remarks on A. A. Karatsuba's use of my results on eq. $Z'(t) = 0$ in his paper dedicated to the 90th. anniversary of I. M. Vinogradov

谨此提醒，我们在论文 [24]中得到了新型泛函以及相应的 ζ费马-怀尔斯定理等价物。这些结果基于我们关于函数 $Z'(t)$的渐近公式（1981），见 [12], (2)、(16)——第二个公式。

注 7。仅这一事实就足以说明，有必要对 A. A. 卡拉楚巴在其论文[4]中如何使用我关于方程 $Z'(t) = 0$ 的原始结果，作几点评论。

我们后续论述的结构如下。首先，提醒读者：
(a) 我们关于方程 $Z'(t) = 0$, [12]的基本公式。(b) 我们根据上述公式得到的原始结果。(c) I. M. Vinogradov 对该方法可能性的怀疑

d

关于三角和，参见 [27], 第 13 页。(d) 关于 A. A. 卡拉楚巴在其论文 [4] 中运用我们结果的一些评论。

4.1. 提醒一下，黎曼定义了实值函数

$$Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right), \tag{4.1.1}$$

其中[8]

$$\vartheta(t) = -\frac{t}{2}\ln\pi + \operatorname{Im}\ln\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{t}{2}\right) = \frac{t}{2}\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right). \tag{4.1.2}$$

接下来，令

$$S(a,b) = \sum_{0<a\le n<b\le 2a} n^{it},\ b \le \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \tag{4.1.3}$$

为一个初等三角和。我们在论文 [12]，中得到了新的渐近公式 (2) 和 (16)：若

$$|S(a,b)| < A(\Delta)\sqrt{a}t^{\Delta},\ 0 < \Delta \le \frac{1}{6}, \tag{4.1.4}$$

then

$$\sum_{T\le\bar{t}_{2\nu}\le T+H} Z'(\bar{t}_{2\nu}) = -\frac{1}{4\pi}H\ln^2\frac{T}{2\pi} + \mathcal{O}(T^{\Delta}\ln^2 T), \tag{4.1.5}$$
$$\sum_{T\le\bar{t}_{2\nu+1}\le T+H} Z'(\bar{t}_{2\nu+1}) = \frac{1}{4\pi}H\ln^2\frac{T}{2\pi} + \mathcal{O}(T^{\Delta}\ln^2 T),$$

其中数列

$$\{\bar{t}_{\nu}\}_{\nu=1}^{\infty} \tag{4.1.6}$$

由以下条件定义

$$\vartheta(\bar{t}_{\nu}) = \pi\nu + \frac{\pi}{2}, \tag{4.1.7}$$

[8]参见 [25],(35)、(44)、(62)，比较 [26],第 98 页。

此外

$$H = T^{\Delta}\psi(T), \tag{4.1.8}$$

其中，函数 $\psi(T)$ 是一个递增至 $+\infty$ 的函数（递增速度可以任意缓慢）。

注释 8。此处只需令 $\psi(T) = \ln T$，即

$$H = T^{\Delta}\ln T. \tag{4.1.9}$$

于是，我们公式 (4.1.5) 的证明基于以下内容[9]

公式 1。

$$Z'(t) = -2\sum_{n<\sqrt{\frac{t}{2\pi}}}\frac{1}{\sqrt{n}}(\vartheta - \ln n)\sin(\vartheta - t\ln n) + \mathcal{O}(t^{-1/4}\ln t), \tag{4.1.10}$$

我们已将其变换为

公式 2.

$$\begin{gathered} Z'(t) = -2\sum_{n<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{P_0}{n}\sin(\vartheta - t\ln n) + \mathcal{O}(T^{-1/4}\ln T), \\ t\in[T, T+H],\ H\in(0, \sqrt[4]{T}],\ P_0 = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}. \end{gathered} \tag{4.1.11}$$

注 9. 因子

$$\ln\frac{P_0}{n},\ n < P_0 \tag{4.1.12}$$

黎曼振子的振幅中的这一因子，在公式 (4.1.11) 中至关重要，因为它使我们能够在估计相应的和时消去小分母[10]。

4.2. 下面列出我们的结果。

(A) 本文的主要 **定理** [12] 由公式 (4.1.5) 得出：如果

$$|S(a,b)| < A(\Delta)\sqrt{a}t^{\Delta},\ 0<\Delta\le\frac{1}{6}, \tag{4.2.1}$$

那么方程有一个奇数阶根

$$Z'(t) = 0 \tag{4.2.2}$$

在区间[11]

$$(T, T+T^{\Delta}\ln T), \tag{4.2.3}$$

参见 [12], (2) – (4)。

(B) 例如，关于 Kolesnik指数的情形，参见 [6]

$$\Delta = \frac{35}{216} + \epsilon \tag{4.2.4}$$

我们有如下结论。

---

[9]参见 [12],(10)，以及证明(17)– (39)。[10]比较 [12],(57) – (64)。[11]比较(4.1.8)和(4.1.9)。

推论1。区间

$$(T, T + T^{35/216+\epsilon}) \tag{4.2.5}$$

包含方程 (4.2.2) 的奇数阶根，其中 $\epsilon > 0$ 任意小， [12], (6)。

注记 10。 A. Kolesnik 的指数 $35\ 216$ 仅使指数 $1\ 6$提升了 2.8%。

(C) 在林德勒夫¨假设下，我们有[12]

$$|S(a, b)| < A(\epsilon)\sqrt{a}t^{\epsilon}, \tag{4.2.6}$$

对于每个充分小的 $\epsilon > 0$，即我们有如下结论。

推论2。 在林德勒夫¨假设下，区间

$$(T, T + T^{\epsilon} \ln T) \tag{4.2.7}$$

包含方程 (4.2.2) 的奇数阶根。

备注 11。 这意味着，林德洛夫猜想不仅使 (4.2.5) 中的 Kolesnik 指数提升了 100%，还使该指数所有可能的进一步改进也提升了 100%。

(D) 接下来，令 $N_0'(T_0)$ 表示方程 (4.2.2) 在区间 (0， T) 内的根数。我们得到如下结果。

推论3。 在林德洛夫猜想成立的条件下，我们有如下估计

$$N_0'(T + T^{\tau}) - N_0'(T) > A(\tau, \epsilon)T^{\tau-\epsilon},\ 0 < \epsilon < \tau, \tag{4.2.8}$$

其中 τ 是任意小的固定数。

4.3. 接下来，我们回顾 I. M. Vinogradov 对三角和方法（H. Weyl 的魏尔和）可能性的怀疑。

也就是说，I. M. Vinogradov 在其专著的引言中 [27]分析了三角和方法在估计渐近公式中的余项 $R(N)$方面的可能性[13]

$$\pi(N) - \int_2^N \frac{\mathrm{d}x}{\ln x} = R(N), \tag{4.3.1}$$

其中:

(a) Vall´ée–Poussin 的原始结果

$$R(N) = \mathcal{O}(Ne^{-c\sqrt{\ln N}}), \tag{4.3.2}$$

(b) H. Weyl 的结果

$$R(N) = \mathcal{O}(Ne^{-c_1\sqrt{\ln N \ln\ln N}}), \tag{4.3.3}$$

(c) I. M. Vinogradov 的结果

$$\begin{aligned} &R(N) = \mathcal{O}(Ne^{-c_3\lambda(N)\ln^{0.6} N}), \\ &\lambda(N) = (\ln\ln N)^{-0.2}. \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

[12]参见 [3],第 89 页。
[13]参见 [27],第 13 页。

然而，在黎曼猜想成立的前提下，可得以下估计（H. von Koch（1901），[5]）

$$R(N) = \mathcal{O}(\sqrt{N}\ln N), \tag{4.3.5}$$

而这一个与(4.3.4)相距极其遥远。

与此相联系　鉴于这一事实，I. M. Vinogradov提出了这一评　ark:

显然，若仅利用*H. Weyl*估计的某些改进，而不利用ζ函数理论中进一步的重要进展，要想在求解确定 $R(N)$ 项的阶这一问题时取得任何实质性进展，并进而求出 $R(N) = \mathcal{O}(N^{1-\gamma})$ $\gamma = 0.000001$，是非常困难的。

在以下各小节中，我们就A. A. 卡拉楚巴的论文 [4]中使用（或不使用）我们关于方程 $Z'(t) = 0$ 的原始结果的方式作若干评述。

4.4. A. A. 卡拉楚巴注意到，见 [4], 第305页：在此我证明一个关于 $Z^{(k)}(t)$ 的零点的新定理，该定理在情形 $k = 0$、1下改进了相应的*J. Moser*的结果。

注12. 然而，A. A. 卡拉楚巴的断言是不正确的，因为：

(a) 我们的定理（主要结果）在论文 [4],中被完全忽略，它对参数 $\Delta \in (0, 1/6]$ 是一般性的，其结构如下：若(4.2.1)，则(4.2.3)具有相应性质。(b) A. A. 卡拉楚巴从我们在 [12] 中的结果里只选取了我们一般定理的一个例，即仅推论1，见(4.2.4)和(4.2.5)，但没有该推论的假设。(c) 其次，A. A. 卡拉楚巴并未证明该估计

$$|S(a,b)| < A_1\sqrt{a}t^{1/12}, \tag{4.4.1}$$

因此，他关于该区间性质的结果

$$(T, T + T^{1/12}\ln T) \tag{4.4.2}$$

与我们的结果（莫泽和科列斯尼克）推论1并无直接联系。

(d) 当然，我们的推论 2^{14}立即将 A. A. 卡拉楚巴在（4.4.2）中的指数$1\ 12$ 提高了100%（基于林德洛夫¨猜想）；更重要的是：对所有满足条件（4.2.1）的此类 Δ，也能提高100%。

4.5. 我们的定理与推论2还有另一个目的。

注 13. 也就是说，它为我们的问题中初等三角和的估计能否改进提供了一种检验。这种检验当然类似于 I. M. Vinogradov 的分析，见第4.3小节。

例：

(a) 设以下估计

$$|S(a,b)| < B_1\sqrt{a}t^{0.01} \tag{4.5.1}$$

或许成立，但尚未实现。

[14]参见 (4.2.7) 和注11。

（b）这一假设立即引出了例如以下问题：何时才能实现这一估计

$$|S(a,b)| < B_2\sqrt{a}t^{\omega}, \quad \omega = 0.000\ 000\ 001? \tag{4.5.2}$$

注 14. 我们看到，能够导出林德勒夫猜想的初等三角和的改进极限，与所有已达到的估计相距甚远 。这与 I. M. Vinogradov 的情形完全类似，参见 (4.3.4) 和 (4.3.5)。

4.6. 现在，我们考察黎曼猜想对区间改进极限的影响

$$(T, T + T^{\Delta}\ln T) \tag{4.6.1}$$

具有相应性质。具体而言，J. E. Littlewood 在黎曼猜想成立的假设下，得到了如下估计，见 [7],第 237 页:

$$\gamma'' - \gamma' < \frac{A}{\ln\ln\gamma'},\ \gamma' \to \infty \tag{4.6.2}$$

对于每一对相邻零点

$$\frac{1}{2} + i\gamma',\ \frac{1}{2} + i\gamma'',\ \gamma' < \gamma'' \tag{4.6.3}$$

函数 $\zeta(s)$ 的零点。由此立即可得（在我们的语境中），每个区间

$$\left(\gamma', \gamma' + \frac{A}{\ln\ln\gamma'}\right) \tag{4.6.4}$$

含有函数 $Z'(t)$的一个奇数阶零点。

注 15。关于黎曼猜想，区间

$$\left(T, T + \frac{2A}{\ln\ln T}\right),\ T \to \infty \tag{4.6.5}$$

含有函数 $Z'(t) = 0$的一个奇数阶零点。当然，仅凭初等三角和 $S(a, b)$ 对区间 (4.6.1) 加以改进，来达到极限 (4.6.5)，大概只是刘易斯·卡罗尔《爱丽丝梦游仙境》中的一种幻想.....

4.7. 接下来可由注15推出如下结论。

注 16。关于黎曼猜想，我们有以下性质:

(a) 区间

$$\left(T, T + \frac{1}{\ln\ln\ln T}\right) \tag{4.7.1}$$

至少包含

$$\left[B_3\frac{\ln\ln T}{\ln\ln\ln T}\right] = k_1(T) \tag{4.7.2}$$

该函数的奇数阶零点

$$Z^{(1)}(t),\ t \in \left(T, T + \frac{1}{\ln\ln\ln T}\right). \tag{4.7.3}$$

（b）当然，区间（4.7.1）包含该函数的一个奇数阶零点

$$Z^{(k_1(T))}(t) \tag{4.7.4}$$

仅由初等的罗尔定理。

接下来，让我们回顾A. A. 卡拉楚巴的结果，见 [4], 第63页，推论2：对每一个 $\epsilon > 0$ ，存在 $k_0(\epsilon) > 0$ ，使得区间

$$(T, T + T^{\epsilon}) \tag{4.7.5}$$

包含该函数的奇数阶零点

$$Z^{(k)}(t),\ t \in (T, T + T^{\epsilon}),\ k > k_0(\epsilon). \tag{4.7.6}$$

注 17. 若将(4.7.5)与(4.7.1)相比较，并将(4.7.6)与(4.7.4)相比较，则得到如下映射

$$\begin{aligned} &T^{\epsilon} \searrow \frac{1}{\ln\ln\ln T}, \\ &k \nearrow \left[B_3 \frac{\ln\ln T}{\ln\ln\ln T}\right] = k_1(T). \end{aligned} \tag{4.7.7}$$

我们看到，黎曼猜想产生了不可达的极限

$$\frac{1}{\ln\ln\ln T},\ \left[B_3 \frac{\ln\ln T}{\ln\ln\ln T}\right] = k_1(T) \tag{4.7.8}$$

基于对魏尔和估计的改进，A. A. 卡拉楚巴的 (4.7.5) 和 (4.7.6) 也得到了改进。这一结论也与 I. M. Vinogradov 在第4.3小节中的分析相符。

因此，我们给出以下结论。

定理 3。 黎曼猜想推出如下极限估计：在每个无穷小区间内

$$\left(T, T + \frac{1}{\ln\ln\ln T}\right),\ T \to \infty \tag{4.7.9}$$

所有函数的奇数阶零点都密集分布

$$\begin{aligned} &Z^{(k)}(t),\ t \in \left(T, T + \frac{1}{\ln\ln\ln T}\right), \\ &k = 1, 2, \ldots, \left[B_3 \frac{\ln\ln T}{\ln\ln\ln T}\right], \end{aligned} \tag{4.7.10}$$

见 (4.7.1) – (4.7.4)。

4.8. A. A. 卡拉楚巴在其论文 [4], 第52页中谈到他的引理 5 时写道：我没有在文献中找到类似的论述，因此引用如下.....

注释 18。 这一说法与实际情况不符，因为:

(a) 他的引理 5 在 $k = 0$ （第二个方程）的情形下给出如下结果

$$Z^{(1)}(t) = -2 \sum_{n \le \sqrt{\frac{t}{2\pi}}} \frac{\vartheta'(t) - \ln n}{\sqrt{n}} \sin(\vartheta(t) - t\ln n) + \mathcal{O}(t^{-1/4}\ln^2 t), \tag{4.8.1}$$

而这个结果与我的公式 (4.1.10) 几乎完全相同，只是误差项稍好一些

$$\mathcal{O}(t^{-1/4}\ln t).$$

(b) 我们的公式 2，见 (4.1.11)，包含一个新的基本因子

$$\ln\frac{P_0}{n} = \left(\ln\frac{P_0}{n}\right)^1. \tag{4.8.2}$$

(c) 我于 1979 年初（1979年1月30日）将论文 [12] 寄给 Acta Arithmetica，同时也寄给了 A. A. 卡拉楚巴。(d) 当然，我们的论文 [12] 也包含公式 (4.1.10) 的完整证明，见 [12], (17) – (39)。

注 19。也就是说：

(a) A. A. 卡拉楚巴的引理 5 是对我最初公式 (4.1.10) 的推广。(b) 他在 [4], 第 59 页给出的相应公式，仅是对[15]的推广

$$\left(\ln\frac{P_0}{n}\right)^1 \to \cdots \to \left(\ln\frac{P_0}{n}\right)^k$$

我们原始公式 (4.1.11)。

4.9. 基于对哈代与李特尔伍德（1918年和1921年）的经典结果所作的重要改进，以及对蒂奇马什假设的证明（1934年），我受邀参加在莫斯科举行的国际会议。会议于1981年9月14日至19日举办，以纪念 I. M. Vinogradov 九十岁诞辰。

备注 20。 这次会议将我的研究与 A. A. 卡拉楚巴的研究联系在了一起，具体如下：

(a) 我作了报告，列举了1976年至1981年间取得的主要结果，见本文中的 [17], comp. [8] – [16] 。(b) A. A. 卡拉楚巴发表了……，见 [4], 这是他沿着我的研究方向发表的系列论文中的第一篇；我把论文单行本以及已获准发表的论文手稿都寄给了他。

注释 21。 我们的学术职位如下：

(c) A. A. 卡拉楚巴是正教授，也是莫斯科斯捷克洛夫研究所的成员。(d) 我曾任讲师，没有学术学位（1966 – 1990），期间独自研读哈代与李特尔伍德、蒂奇马什、英厄姆，以及当然还有塞尔伯格关于黎曼ζ函数的著作。

注释 22。 直到1989年捷克斯洛伐克共产主义政权垮台后，我才凭借我的论文蒂奇马什离散方法的演进，直接获得最高学术学位科学博士，页码为 I – XIV、1 – 236（俄文），未出版。对此，我感谢斯特凡·施瓦茨教授（科学博士）的善意倡议；他是半群理论的共同创始人，也是期刊*Semigroup Forum*编委会成员。

我谨此感谢 Michal Demetrian 在我研究雅各布天梯期间给予我的精神支持。

[15]参见（4.8.2）。

References

[1] G.H. Hardy, J.E. Littlewood，关于黎曼ζ函数理论及素数分布理论的贡献，《数学学报》41 (1), 119 – 196, (1918). [2] G.H. Hardy, J.E. Littlewood，黎曼ζ函数在临界线上的零点，《数学札记》10, 283–317, (1921). [3] A. A. 卡拉楚巴， *Basic analytic number theory*，施普林格出版社，1992. [4] A. A. 卡拉楚巴，关于黎曼ζ函数在临界线上的相邻零点之间的距离，斯捷克洛夫数学研究所学报，157, 49–63, (1981), (俄文). [5] H. von Koch，论素数的分布，《数学学报》24, 159–181, (1901). [6] A. Kolesnik，论狄利克雷 L函数的阶，《太平洋数学杂志》，82, 159–182, (1979). [7] J. E. Littlewood, 关于黎曼ζ函数的两则札记，《剑桥哲学学会会刊》，22, 234 242, 1924- ( ). [8] J. Moser，黎曼ζ函数理论中的某个和，《算术学报》31, 31-43, (1976), (俄文). [9] J. Moser，关于黎曼ζ函数理论中 Hardy和Littlewood定理的一个结果，《算术学报》31, 45-51, (1976), (俄文). [10] J. Moser， [9], 的补遗，《算术学报》35, 403–404, (1979), (俄文). [11] J. Moser，证明黎曼ζ函数理论中的Titchmarsh猜想，《算术学报》36, 147–156, (1980), (俄文). [12] J. Moser，关于方程 $Z'(t) = 0$的根，《算术学报》40, 79–89, (1981), (俄文). [13] J. Moser，对 [8]–[10], 的勘误，《算术学报》40, 97–107, (1981), (俄文). [14] J. Moser，关于黎曼ζ函数理论中的 Hardy和Littlewood引理，《夸美纽斯大学数学学报》，42(43), 7–26, (1983), (俄文). [15] J. Moser，加强关于函数$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$零点密度的 Hardy-Littlewood定理，《夸美纽斯大学数学学报》，42(43), 41-50, (1983), (俄文). [16] J. Moser，改进 Hardy和Littlewood关于函数 $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$零点密度的定理，《算术学报》43, 21–47, (1983), (俄文). [17] J. Moser，黎曼-西格尔公式的一些推论，斯捷克洛夫数学研究所学报，163, 183 1983–185, ( ), (俄文). [18] J. Moser，《雅各布天梯与 Hardy-Littlewood 积分近乎精确的渐近表示》，《数学札记》 88, (2010), 414-422, arXiv: 0901.3937. [19] J. Moser，《雅各布天梯、Hardy-Littlewood积分的结构及一类新的非线性积分方程》，斯捷克洛夫研究所会刊276 (2011), 208-221, arXiv: 1103.0359. [20] J. Moser，雅各布天梯、反向迭代以及由黎曼 $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$函数生成的 L_2-正交系统新无限集，arXiv: 1402.2098v1. [21] J. Moser，雅各布天梯、Hardy-Littlewood积分近乎线性的增量的存在性以及新型乘法定律，arXiv: 2304.09267. [22] J. Moser，雅各布天梯、Hardy-Littlewood积分（1918）的近乎线性增量及其与塞尔伯格公式（1946）和费马-怀尔斯定理的关系，arXiv: 2312.12085.[23] J. Moser，雅各布天梯、傅里叶正交系的 ζ变换（2014）以及费马-怀尔斯定理等价形式的新无限集，arXiv: 2507.06724v1.[24]J. Moser，雅各布天梯，我们的渐近公式（1981）与方程$Z'(t) = 0$ 相关，可作为费马-怀尔斯定理新 ζ等价形式及其他若干结果的基础，arXiv: 2509.17626.[25] C. L. Siegel， ¨关于解析数论遗稿的论述，《数学、天文学与物理学史料与研究》，B辑：研究，2, 45–80, (1932). [26] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*，牛津，克拉伦登出版社，1951.[27] I. M. Vinogradov, *The method of trigonometric sums in the number theory*，科学出版社，莫斯科，1981.

Department of Mathematical Analysis and Numerical Mathematics, Comenius Uni-versity, Mlynska Dolina M105, 842 48 Bratislava, SLOVAKIA*Email address*: jan.mozer@fmph.uniba.sk