arXiv:2603.01785v1 [econ.EM] 2 Mar 2026

有限理性的信息几何：采用双曲与椭圆量子几何的熵正则化选择

Anders Karlstr¨om，Christer Persson瑞典皇家理工学院

2026年3月3日

摘要

有限理性模型涵盖多种形式体系。其中两种突出的软化选择范式是类量子（QL）模型和熵正则化（ER）模型。前者利用希尔伯特空间振幅解释情境效应和顺序效应；后者包括理性疏忽，通过增加信息成本来修正期望效用。本文构建了一个统一的信息几何框架，在该框架中，这两类模型可视为概率单纯形上同一底层几何结构的不同体现。

从开单纯形 Δ^{n-1}上的Fisher–Rao几何出发，我们提出最小作用理性（LAR），将其作为决策动力学的变分原理：先在振幅（平方根）坐标中表述，再提升至未归一化振幅的余切相空间 $N := T^*\mathbb{R}^n$ 。提升后的结构带有典范辛形式，并且根据底层的Hes-$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$essian数据，具有典范的抛物K¨ahler（中性）结构。在线性评价函数的情形下，$V = S + F$满足 $\widehat{S}^\top = \widehat{S}$ 和 $\widehat{F}^\top = -\widehat{F}$时，提升后的动力学分解为两个通道：由 S 生成的评价（势函数）通道 $\widehat{\quad}$，以及由 F生成的比较（共效用）通道；后者拓展了Fishburn类型的斜对称双线性遗憾。在特殊的零残差拉格朗日叶上，流具有紧凑的分裂复数（薛定谔型）表示，而可观测的选择概率则通过双曲型玻恩归一化获得。

当潜在的提升动力学被还原为 Fisher–Rao 单纯形上的认知运动时，就会出现有限理性行为。由此诱导的单纯形偏好一形式，相对于 Fisher–Rao 度量，具有规范的恰当／互补分解：一个可积的效用分量 dU ，以及一个无散度的共效用分量；其曲率 $d\beta$衡量偏好由此产生的路径依赖（整体效应）。通过投影和依赖情境的读出，潜在结构会进一步损失，使诱导的单纯形过程通常呈现情境性，并产生顺序效应、对全概率定律的违反，以及类似干涉的项；这些都是底层理性流的系统性映现。

最后，我们展示如何通过加入额外的建模输入——K¨ahler 极化（等价于复拉格朗日特征丛可容许性限制）——从同一个实辛相空间导出标准的复（椭圆型）量子动力学。这一限制以投影哈密顿演化取代完整的哈密顿方程。从这个意义上说，幺正量子动力学并非原初公设，而是对底层最小作用量框架的一种自洽限制。

1 引言

有限理性模型通常通过概率选择而非确定性选择来描述行为。在离散选择中，这类行为由概率向量 $q = (q_1, \ldots\ldots, q_n) \in \Delta^{n-1}$表示，它既可解释为 Luce（1959）意义上的随机选择规则，也可解释为对 n 结果的冯·诺伊曼–摩根斯特恩彩票（冯·诺伊曼和摩根斯特恩，1944年）。两种颇具影响力的范式以截然不同的方式建立在这一表示之上。类量子认知（QL）模型通过振幅和情境投影来表示行为，而熵正则化（ER）模型则直接在单纯形上推导出平滑的概率选择规则。本文旨在说明，信息几何 为这些方法提供了一个自然的共同框架。此外，我们还表明，ER 模型所依据的同一几何提升也会典范地导出一种双曲型 （分裂符号）类量子结构。

类量子认知（QL）模型将认知状态描述为（通常为复数）希尔伯特空间中的一个振幅——可以是态矢量，也可以是密度算符。思考过程和情境变化由幺正映射（或更一般的完全正映射）表示，而选择概率则根据玻恩规则得出（例如，Aerts（1995）；Busemeyer 等（2006）；Aerts（2009）；Busemeyer 和 Bruza（2012）；Yearsley 和 Busemeyer（2016）；Yearsley（2017））。由于情境投影和可观测量不必满足对易关系，类量子模型能够自然地产生有限理性的若干经验特征，例如情境效应、顺序效应，以及偏离经典全概率定律的现象（例如，Khrennikov（2005）；Khrennikov 和 Haven（2009）；Bruza 等（2009）；Pothos 和 Busemeyer（2013）；Haven 和 Khrennikov（2016））。从这一视角来看，有限理性反映的是一种情境化、非交换的演算，而非对某个底层经典效用模型的噪声扰动。[1]

熵正则化（ER）模型直接在单纯形上给出平滑的概率选择规则。一个典型例子是理性疏忽模型，其中决策者在确定性效用与信息成本之间进行权衡。当信息成本为香农熵时，就会得到 Luce–logit（softmax）规则；而更一般的变分表述则允许采用范围更广的信息成本（Sims, 2003; Matˇejka and McKay, 2015）。更广泛地说，将概率选择、熵与最小信息联系起来的信息论思想，以多种形式见于计量经济学和心理学文献中。[2] 在所有这些情况下，所得到的选择规则都体现了偏好与信息成本之间的平衡。

尽管量子彩票（QL）模型与熵正则化（ER）模型通常被视为不同的范式，但二者在信息几何中有着共同的解释。在 ER 模型一侧，熵惩罚和指数族结构源自 Fisher–Rao统计流形上的凸对偶（$\Delta^{n-1}_{>0}$，g_F）。[3] 在 QL 模型一侧，经过由 $\rho_k = \sqrt{q_k}$ 给出的振幅重新参数化后，会出现一种密切相关的几何结构 $q \mapsto \rho$。该映射将单纯形内部映射为单位球面上的正正交象限，将 g_F （按比例缩放）拉回为圆度量，并使振幅描述处于量子力学几何表述中熟知的标准辛／哈密顿框架之内（Kibble, 1979; Heslot, 1985; Brody and Hughston, 2001; Goyal, 2010; Reginatto and Hall, 2012; Reginatto, 2013; Molitor, 2012; Caticha, 2021）。在这种重新参数化下，期望效用成为振幅的二次型（Aerts 等人，2018），而概率动力学则可通过振幅上的诱导动力学加以分析。

我们的出发点是这一共同的信息几何基础。我们为决策动力学提出一个局部的最小作用量理性(LAR)原则，其精神源自对

[1]这里的“量子”标签指的是对希尔伯特空间情境性和干涉的运用，而非声称神经组织中存在微观量子计算（deBarros 和 Suppes，2009）。[2]例如，参见 McFadden（1974）；Snickars 和 Weibull（1977）；Luce（2003）。[3]关于数学心理学中 Fisher–Rao几何的阐述，参见 Ly 等人（2017）。

偏好的微分方法 (Machina, 1982; Russell, 1991)，以及认知建模中相关的最小作用量方案（参见 Betti and Gori (2016); Fox and Kotelba (2018)），但该原则应用于振幅层面，而不是直接作用于单纯形。在每个状态下，实现速度是偏好余向量场所指定的偏好方向的度量投影（投影所依据的是振幅嵌入诱导的 Fisher–Rao几何）。在线性情形下，这会导出未归一化振幅$\dot{\hat{\rho}} = \widehat{V}\hat{\rho}$的演化，其中生成元可规范地分解为 $\widehat{V} = \widehat{S} + \widehat{F}$，其中 $\widehat{S}^{\top} = \widehat{S}$（评价通道）和 $\widehat{F}^{\top} = -\widehat{F}$（共效用/旋转通道）。

从振幅过渡到其余切提升，可在 $\mathbb{R}^{2n} \cong T^{*}\mathbb{R}^{n}$ 上得到一个环境一阶哈密顿系统。提升的Fisher–Rao结构在该空间上规范地诱导出平坦的仿K¨ahler几何（中性度量、辛形式和乘积结构）。在一个特殊的零残差扇区（其中最小作用量投影约束得到精确满足）上，动力学可表示为分裂复数（双曲）薛¨定型表述。

这种仿埃尔米特提升足以再现若干通常归因于类量子模型的特征。它产生双曲玻恩型读出，允许非交换可观测量，并生成相位敏感性、干涉图样和情境效应，而无需假设存在复希尔伯特空间。此外，双曲几何提供了一个规范的中性二次指标，其演化遵循带有非负源项的精确平衡定律，从而依据最小作用量残差的累积量来组织各个阶段。

尽管类量子模型通常以复希尔伯特空间表述，但人们常常承认（有时也会采用）实值表述已能捕捉情境—投影结构的核心，无需诉诸复相位（例如 Bruza 等人，2009）。本文构建的抛物 K¨ahler 框架为这类实值表述提供了有原则的基础：它直接从经典的 Fisher–Rao 决策动力学推导出真正的双曲（分裂号差）量子几何，同时也与双曲量子力学的早期研究相衔接（Khrennikov，2000）。在这一观点下，后文使用的分裂复数记号只是对底层实几何的一种便捷封装，而不是对椭圆（复）量子模型的近似。

具有相干（幺正）演化的类量子模型构成了类量子文献中另一条不同且同样重要的脉络（例如 Busemeyer 等人，2009、2020）。我们在第§4节展示，在我们的框架中，这种椭圆（黎曼／复）量子动力学只有在额外引入相干性条件后才会出现：必须施加一项可容许性限制，以选出与辛结构相容的全纯拉格朗日扇区（即一种极化），从而使投影动力学在相应的复状态空间上成为幺正演化。

本文其余部分安排如下。第2节从三个几何要素出发，在概率单纯形上构建最小作用理性：Fisher–Rao可辨识性、偏好余向量场以及最小作用变分原理。第3节将这一结构提升至 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的环境振幅模型：我们推导出二次LAR拉格朗日量、相应的哈密顿系统、其典范的抛物-K¨ahler几何，以及在特定零残差扇区上的分裂复数（双曲）薛定谔表示。第4节进而说明，如何通过施加极化可容许性限制得到标准的（椭圆）量子几何，并明确指出，在何种意义上，保持相干性的幺正动力学是提升理论的一种特殊情况。第5节回到行为学含义，分析抛物-K¨ahler提升如何系统地组织偏离期望效用的现象。第6节总结全文，并探讨未来研究方向。

2 最小作用理性原理

本节首先明确构成本文所采用的理性原则的三个基础假设。每项假设都单独刻画一个特定的几何要素：

(i) 彩票的相近重新分配之间的可辨识性 概念，(ii) 定义于此类重新分配之上的评价性（偏好）结构，以及 (iii) 一项变分 原则。

2.1 可辨识性

我们将有限结果集 $\{1,\dots,n\}$ 上的彩票视为基本的可观测对象，并用概率向量表示。因此，我们考虑开概率单纯形

$$\mathcal{M} := \Delta^{n-1}_{>0} = \Big\{\, q=(q_1,\dots,q_n)\in\mathbb{R}^n \;\Big|\; q_i>0,\ \sum_{i=1}^{n} q_i = 1 \,\Big\},$$

它是仿射超平面 $\{q\in\mathbb{R}^n:\ \sum_i q_i=1\}$ 中的光滑嵌入子流形，维数为 $n-1$。其闭包为闭单纯形

$$\Delta^{n-1} = \Big\{\, q\in\mathbb{R}^n \;\Big|\; q_i\ge 0,\ \sum_{i=1}^{n} q_i = 1 \,\Big\},$$

因此， $\mathcal{M}$ 是 Δ^{n-1} 的内部。对于每个 $q\in\mathcal{M}$ ，切空间均可自然地识别为余维一子空间

$$T_q\mathcal{M} = \Big\{\, v\in\mathbb{R}^n \;\Big|\; \sum_{i=1}^{n} v_i = 0 \,\Big\}.$$

为形式化“可辨识性”，我们赋予彩票一种感知度量。具体而言，我们将彩票提升到单位球面上，利用球面几何提供的规范距离概念，再将此距离拉回到单纯形上。令 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的欧几里得内积， $\|x\| := \sqrt{\langle x,\ x\rangle}$ 为其范数。给定任意非零的 未归一化振幅 $\tilde\rho\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$，令

$$\rho := \frac{\tilde\rho}{\|\tilde\rho\|}\in\mathbb{S}^{n-1}, \qquad \mathbb{S}^{n-1} := \{\,\rho\in\mathbb{R}^n : \|\rho\| = 1\,\}.$$

我们通过逐分量平方读取可观测彩票，

$$q_i = \rho_i^2 = \frac{\tilde\rho_i^{\,2}}{\|\tilde\rho\|^2} \qquad (i=1,\dots,n),$$

等价地，通过光滑满射

$$\pi:\mathbb{S}^{n-1}\to\Delta^{n-1}, \qquad \pi(\rho) = (\rho_1^2,\dots,\rho_n^2) = \rho^{\odot 2},$$

其中 $x^{\odot 2}$ 表示逐分量平方。映射 π 不区分符号：对于 $q\in\mathcal{M}$ ，纤维 $\pi^{-1}(q)$由满足 $s=\mathrm{diag}(\pm1)$ 的 2^n 符号选择 $\rho\mapsto s\rho$ 组成；而在面上，当某些分量为零时，同一作用量会产生退化。对于彩票上的几何构造，选择到非负正交象限中的典范平方根截面会比较方便

$$\overline{\mathbb{S}}^{n-1}_{+} := \{\,\rho\in\mathbb{S}^{n-1} : \rho_i\ge 0\ \forall i\,\}, \qquad \iota:\Delta^{n-1}\to\overline{\mathbb{S}}^{n-1}_{+}, \qquad \iota(q) = \sqrt{q} := (\sqrt{q_1},\dots,\sqrt{q_n}),$$

使得 $\pi\circ\iota = \mathrm{id}_{\Delta^{n-1}}$。在内部 $\mathcal{M}$ ， ι 的限制是光滑的，并映射到开正交象限

$$\mathbb{S}^{n-1}_{+} := \{\,\rho\in\mathbb{S}^{n-1} : \rho_i>0\ \forall i\,\}.$$

我们强调， ι 仅作为光滑提升（等价地，作为一个微分同胚 $\iota\colon \mathcal{M} \to \mathbb{S}_+^{n-1}$，其逆映射为 $\pi|_{\mathbb{S}_+^{n-1}}$），用于表达单纯形层面的几何对象；它不会限制底层归一化振幅 $\tilde{\rho}/\|\tilde{\rho}\|$的符号模式，该符号模式仍不受约束。

令 $g_{\mathbb{S}}$ 表示由 $\langle\cdot,\cdot\rangle$在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上诱导的圆度量，并令 $d_{\mathbb{S}}$ 为相应的测地距离。对角符号翻转 $s = \mathrm{diag}(\pm 1) \in O(n)$ 在 $(\mathbb{S}^{n-1}, g_{\mathbb{S}})$ 上作为等距变换作用，因此任意符号截面 $q \mapsto s\sqrt{q}$ 都会在 $\mathcal{M}$上诱导相同的拉回度量。

我们现在公设，彩票之间的感知距离是其在球面上的平方根提升之间的角距离，允许整体缩放。

假设1 (可辨识性 **(A1))**。 固定常数 $c > 0$，并将彩票 q、$q' \in \Delta^{n-1}$ 之间的感知距离定义为

$$d_{\mathrm{perc}}(q, q') := c\, d_{\mathbb{S}}\big(\iota(q), \iota(q')\big) = c\, \arccos\Big(\big\langle \iota(q), \iota(q')\big\rangle\Big) = c\, \arccos\Big(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{q_i q_i'}\Big).$$

由于 ι 是单射， d_{perc} 是球面测地距离在嵌入集合 $\iota(\Delta^{n-1}) \subset \mathbb{S}^{n-1}$上的限制，因此是 Δ^{n-1} 上的度量。此外，由于 $\iota(\Delta^{n-1}) \subset \mathbb{S}_+^{n-1}$，故有$0 \le d_{\mathrm{perc}}(q, q') \le c\pi/2$。

上述定义在 Δ^{n-1}上提供了一个全局感知度量。在内部 $\mathcal{M}$，我们通过对提升 ι求微分，将其无穷小化细化为局部可辨识张量。由于当某些坐标趋近于零时，平方根映射会变得奇异，因此这一细化仅在 $\mathcal{M}$ 上成立；如果轨迹接触边界，则必须分段理解。

注释1（边界接触：分段的内部解读）。 映射 $q \mapsto \sqrt{q}$ 在 $\mathcal{M}$上光滑，但当某些 $q_i \to 0$时会变得奇异。因此，从 $d\iota$ 导出的所有微分恒等式都应理解为在 $\mathcal{M}$ 上成立；如果轨迹到达边界，则应在每个开放时间区间内分段解读，在这些区间中 q（t）保持在某个固定面的相对内部（限制于活跃坐标）。切换时刻采用单侧极限；不施加其他边界规则。

对于 $q \in \mathcal{M}$ 和 v， $w \in T_q\mathcal{M}$，记 $\rho = \iota(q) = \sqrt{q}$,对 $q_i = \rho_i^2$求微分得到 $dq_i = 2\rho_i\, d\rho_i$，因此

$$d\rho_i(v) = \frac{v_i}{2\rho_i}, \qquad \big(\iota^* g_{\mathbb{S}}\big)(q)[v, w] = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} \frac{v_i w_i}{q_i}.$$

由此可得

$$\iota^* g_{\mathbb{S}} = \tfrac{1}{4}\, g_F, \qquad g_F(q)[v, w] := \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i w_i}{q_i} \quad \text{for all } v, w \in T_q\mathcal{M},$$

其中， g_F 是定义在 $\mathcal{M}$上的Fisher–Rao度量。因此，彩票上的诱导局部可辨识性度量（相差常数因子 $1/4$）就是Fisher–Rao度量；我们将 g_F 视为与A1相关联的典范单纯形层张量。

假设1中的常数 c 确定距离的整体单位；在无穷小尺度下，诱导二次型与 $\iota^* g_{\mathbb{S}}$成正比，即 $T_q\mathcal{M}$ 上的 $c^2\, \iota^* g_{\mathbb{S}} = \frac{c^2}{4}\, g_F$。具体而言， g_F 通过因子 $1/q_i$对稀有结果的扰动赋予更大权重，并在 Δ^{n-1} 的边界处变为奇异，因此我们采用 $\mathcal{M}$的内部，以构建光滑的黎曼几何。

最后，对于任意光滑轨迹 $t \mapsto q(t) \in \mathcal{M}$，提升曲线 $\rho(t) := \iota(q(t)) \in \mathbb{S}_+^{n-1}$是一个辅助几何提升，并满足

$$\|\dot{q}(t)\|_{g_F}^2 = 4\, \|\dot{\rho}(t)\|_{g_{\mathbb{S}}}^2.$$

注 2。 在心理物理学中，同一个局部可辨识性 指标由 $v \mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i^2/q_i$ 在 $T_q\mathcal{M}$ 上的二次型建模（等价地，在 $\iota(q) = \sqrt{q}$ 条件下为 $v \mapsto \|d\iota_q(v)\|_{g_{\mathbb{S}}}^2$）；参见（Stevens，1957；Sakitt，1973；Siomopoulos，1975）。本文采用信息论术语，其中 Fisher–Rao度量 g_F 衡量局部统计可辨识性。

2.2 偏好余向量场

正如 Russell (1991) 已经强调的，微分几何为偏好提供了一种自然的语言：边际评价由余向量场（即 1-形式）编码。在我们的框架中，该$\widehat{}$余向量场由作用于潜在振幅的固定偏好算子 $V \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$诱导。

设 $g_{\mathbb{S}}$ 为振幅球面 $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 上由欧几里得内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$诱导的圆度量。对 $\rho \in \mathbb{S}^{n-1}$ 记作

$$Q_\rho := I - \rho\rho^\top$$

到切空间上的正交投影

$$T_\rho\mathbb{S}^{n-1} = \{\eta \in \mathbb{R}^n : \langle \rho, \eta \rangle = 0\}.$$

（球面）偏好余向量是一个 1-形式 $\bar{\alpha}^{\mathbb{S}} \in \Omega^1(\mathbb{S}^{n-1})$，它为每个无穷小调整 $\eta \in T_\rho\mathbb{S}^{n-1}$ 赋予瞬时评价得分 $\bar{\alpha}_\rho^{\mathbb{S}}(\eta) \in \mathbb{R}$。我们将注意力限于$\widehat{}$环境–算子类：固定 $V \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$并定义

$$\bar{\alpha}_\rho^{\mathbb{S}}(\eta) = \langle \eta,\, Q_\rho\, \widehat{V}\rho \rangle, \qquad \eta \in T_\rho\mathbb{S}^{n-1}. \tag{1}$$

由于 $\eta \perp \rho$，我们有 $\langle \eta,\ Q_\rho\widehat{V}\rho\rangle = \langle \eta,\ \widehat{V}\rho\rangle$。因此 $\bar{\alpha}^{\mathbb{S}}$ 是切向量场的 $g_{\mathbb{S}}$–音乐对偶

$$X_{\widehat{V}}(\rho) := Q_\rho\, \widehat{V}\rho \in T_\rho\mathbb{S}^{n-1}, \qquad \bar{\alpha}^{\mathbb{S}} = g_{\mathbb{S}}(X_{\widehat{V}}, \cdot). \tag{2}$$

在此类中，$\bar{\alpha}^{\mathbb{S}}$ 在平移 $\widehat{V} \mapsto \widehat{V} + \lambda I$下保持不变，因为 $Q_\rho(\lambda\rho) = 0$。因此在球面层级上，只有$\widehat{}$类 $[V] \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)/(\mathbb{R} \cdot I)$是可观测的；方便时，我们通过施加$\mathrm{tr}\left(\widehat{V}\right) = 0$来固定一个代表元。

可观测彩票位于内部单纯形上

$$\mathcal{M} = \Delta_{>0}^{n-1} = \Big\{ q \in \mathbb{R}_{>0}^n : \sum_{i=1}^{n} q_i = 1 \Big\}.$$

我们用其正平方根表示 $q \in \mathcal{M}$

$$\iota : \mathcal{M} \to \mathbb{S}_+^{n-1}, \qquad \iota(q) = \rho = \sqrt{q},$$

从而 $\rho_i = \sqrt{q_i}$ 且$\sum_i \rho_i^2 = 1$。将 $\bar{\alpha}^{\mathbb{S}}$ 限制到开集 $\mathbb{S}_+^{n-1}$并沿 ι拉回，得到彩票上的边际偏好余向量：

$$\mathcal{T} : \mathrm{End}(\mathbb{R}^n) \to \Omega^1(\mathcal{M}), \qquad \mathcal{T}(\widehat{V}) := \beta := \iota^*\big(\bar{\alpha}^{\mathbb{S}}\big|_{\mathbb{S}_+^{n-1}}\big).$$

此处 ι 仅用作光滑提升（等价地，即 $\mathcal{M}$ 与$\mathbb{S}_+^{n-1}$的微分同胚等同）；它并不约束任何潜在振幅轨迹的符号模式。

分解

$$\widehat{V} = \widehat{S} + \widehat{F}, \qquad \widehat{S}^\top = \widehat{S}, \qquad \widehat{F}^\top = -\widehat{F}.$$

$\widehat{}$下文证明的核心结构性事实是，S 在 $\mathcal{M}$上诱导出一个恰当（效用）分量，而 F 则诱导出一个纯循环分量，该分量在Fisher–Rao几何中是余恰当的。

假设 2（偏好结构）。 决策者对振幅球面上无穷小变化的即时评估，由一种环境算子型球面1–形式编码：

(A2) 存在一个固定的 $\widehat{V} \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$，使得对于任意 $\rho \in \mathbb{S}^{n-1}$ 和 $\eta \in T_\rho \mathbb{S}^{n-1}$，

$$\bar{\alpha}^{\mathbb{S}}_\rho(\eta) = \langle \eta,\, Q_\rho \widehat{V} \rho \rangle, \qquad Q_\rho := I - \rho\rho^\top.$$

(A2′) 将 $\widehat{V} = \widehat{S} + \widehat{F}$分解为 $\widehat{S}^\top = \widehat{S}$和 $\widehat{F}^\top = -\widehat{F}$。映射到 $\rho \in \mathbb{S}^{n-1}$后，只有诱导出的切向分量在行为上相关（即与 $\bar{\alpha}^{\mathbb{S}}$相关），也就是说

$$\bar{\alpha}^{\mathbb{S}}_\rho(\eta) = \langle \widehat{V}\rho, \eta \rangle \qquad (\eta \in T_\rho \mathbb{S}^{n-1}),$$

等价地

$$\bar{\alpha}^{\mathbb{S}} = \big((Q_\rho \widehat{V} \rho)^\top d\rho\big)\big|_{T\mathbb{S}^{n-1}} \quad (or\ (\widehat{V}\rho)^\top d\rho\big|_{T\mathbb{S}^{n-1}}).$$

形式 $\bar{\alpha}^{\mathbb{S}}$ 在加性平移 $\widehat{V} \mapsto \widehat{V} + \lambda I$ 下保持不变（因为 $Q_\rho \rho = 0$），因此只有$\widehat{\ }$等价类 $[V] \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)/(\mathbb{R}\cdot I)$ 是可观测的。在方便时，我们采用无迹约定$\mathrm{tr}\Big(\widehat{V}\Big) = 0$（等价地，$\mathrm{tr}\Big(\widehat{S}\Big) = 0$）。

由切向性可立即得出 (A2) 与 (A2′) 等价：若 $\eta \in T_\rho \mathbb{S}^{n-1}$，则 $Q_\rho \eta = \eta$，因此

$$\bar{\alpha}^{\mathbb{S}}_\rho(\eta) = \langle \eta,\, Q_\rho \widehat{V}\rho \rangle = \langle Q_\rho \eta,\, \widehat{V}\rho \rangle = \langle \eta,\, \widehat{V}\rho \rangle,$$

所以 $\bar{\alpha}^{\mathbb{S}} = (\widehat{V}\rho)^\top d\rho = (Q_\rho \widehat{V}\rho)^\top d\rho$。

注 3（边界接触：分层单纯形解读）。 可观测彩票由未归一化振幅 $\tilde{\rho} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 通过 $q_i = \tilde{\rho}_i^2 / \|\tilde{\rho}\|^2$ 读出（等价地，对于 $\rho = \tilde{\rho}/\|\tilde{\rho}\| \in \mathbb{S}^{n-1}$，$q = \pi(\rho) = \rho^{\odot 2}$）。后文引入的振幅层级动力学是针对未归一化振幅 $\tilde{\rho} \in \mathbb{R}^n$表述的。因此，穿越坐标超平面 $\tilde{\rho}_i = 0$ 对振幅动力学而言并不奇异；这仅意味着读出 $q_i = \tilde{\rho}_i^2/\|\tilde{\rho}\|^2$ 触及边界。不过，平方根坐标图 $q \mapsto \sqrt{q}$ 和 Fisher–Rao 张量仅在 Δ^{n-1}某个面的相对内部上光滑。因此，通过 $d\iota$ 或 g_F导出的任何单纯形层级微分恒等式都应作分段解读：对于轨迹 $q(t)$，取任意一个支撑$J = \{i :\ q_i(t) > 0\}$ 保持不变的开时间区间 I。在 I 上，我们将 $q_J(t)$视为低维内部单纯形 $\Delta^{|J|-1}_{>0}$（活跃坐标）中的一点，并在此应用所有公式。切换时刻（某些$q_i(t) = 0$时）按单侧极限处理；不另行施加边界规则。对于依赖于 $H^1(\mathbb{S}^{m-1}) = 0$ 的陈述（例如下文的余恰当部分），活跃集必须满足 $|J| \geq 3$；当$|J| = 2$ 时，可能会出现调和余项。

命题1（单纯形上的效用与共效用场）。 令 $\mathcal{M} = \Delta^{n-1}_{>0}$并假设 $n \geq 3$。以下陈述均在 $\mathcal{M}$ 上理解；当轨迹触及边界时，则如第*3*节所述，在每个固定支撑区间上分段理解。令 $\beta = \mathcal{T}(\widehat{V}) \in \Omega^1(\mathcal{M})$ 为由 $\widehat{V} \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$诱导的边际偏好余向量，并将 $\widehat{V} = \widehat{S} + \widehat{F}$分解为 $\widehat{S}^\top = \widehat{S}$和 $\widehat{F}^\top = -\widehat{F}$。定义

$$\beta^{\widehat{S}} := \mathcal{T}(\widehat{S}), \qquad \beta^{\widehat{F}} := \mathcal{T}(\widehat{F}), \qquad so\ that \qquad \beta = \beta^{\widehat{S}} + \beta^{\widehat{F}}.$$

于是：

1. 效用（恰当部分）。存在一个光滑势函数

$$U(q) := \tfrac{1}{2}(\sqrt{q})^\top \widehat{S}\, \sqrt{q} \tag{3}$$

使得 $\beta^S = dU$。

2. 共效用（余恰当部分）。关于 $\mathcal{M}$ 上的 ***Fisher–Rao***度量 g_F （以及在满足条件 *3* 的每个固定支撑面 $\sim$ 上），存在 $\gamma \in \Omega^2(\mathcal{M})$ 使得 $\beta^F = \delta_{g_F}\gamma$。等价地，

$$\beta = dU + \delta_{g_F}\gamma.$$

定义 $\mathcal{U} := dU$ 和 $\mathcal{R} := \beta - \mathcal{U}$。

证明。在 $\mathcal{M}$ 上，平方根映射 $\iota(q) = \rho = \sqrt{q}$ 是光滑的，并将 $\mathcal{M}$ 同胚映射到开集 $\iota(\mathcal{M}) = \mathbb{S}^{n-1}_+ \subset \mathbb{S}^{n-1}$。在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上，记

$$\bar{\alpha}^{\mathbb{S}} = (\widehat{V}\rho)^\top d\rho = (\widehat{S}\rho)^\top d\rho + (\widehat{F}\rho)^\top d\rho =: \bar{\alpha}^{\widehat{S}} + \bar{\alpha}^{\widehat{F}}.$$

$\sim$ $\sim$ $\sim$ $\sim$沿 ι 拉回到 $\mathcal{M}$，得到 $\beta^S = \iota^*\bar{\alpha}^S$ 和 $\beta^F = \iota^*\bar{\alpha}^F$。

效用部分。令 $\Phi(\rho) := \frac{1}{2}\rho^\top \widehat{S}\rho$ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上。由于 $\widehat{S}$ 是对称的，因此 $d\Phi = (\widehat{S}\rho)^\top d\rho = \bar{\alpha}^{\widehat{S}}$。于是 $\beta^{\widehat{S}} = d(\Phi \circ \iota) = dU$，其中 $U(q) := \frac{1}{2}(\sqrt{q})^\top \widehat{S}\sqrt{q}$。

共效用部分。若 $\widehat{F}^\top = -\widehat{F}$，则 $X(\rho) := \widehat{F}\rho$ 在圆球面上为 Killing，因而散度-$\sim$ $\sim$自由，故其对偶 1-形式 $\bar{\alpha}^F = g_{\mathbb{S}}(X, \cdot)$ 是余闭的：$\delta_{g_{\mathbb{S}}}\bar{\alpha}^F = 0$。对于 $n \geq 3$，$H^1(\mathbb{S}^{n-1}) = 0$，故由$\sim$ $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的霍奇理论，存在 $\psi \in \Omega^2(\mathbb{S}^{n-1})$ 使得 $\bar{\alpha}^F = \delta_{g_{\mathbb{S}}}\psi$。将此恒等式限制到开子集 $\iota(\mathcal{M}) = \mathbb{S}^{n-1}_+ \subset \mathbb{S}^{n-1}$，并沿 ι 拉回。由于 $\iota : (\mathcal{M}, \iota^* g_{\mathbb{S}}) \to (\mathbb{S}^{n-1}_+, g_{\mathbb{S}})$ 是等距映射，余微分与限制形式上的拉回可交换，即 $\iota^*(\delta_{g_{\mathbb{S}}}\psi) = \delta_{\iota^* g_{\mathbb{S}}}(\iota^*\psi)$。利用 $g_F = 4\,\iota^* g_{\mathbb{S}}$ 以及 $\lambda > 0$ 的缩放法则 $\delta_{\lambda g} = \lambda^{-1}\delta_g$，我们得到

$$\beta^{\widehat{F}} = \iota^*\bar{\alpha}^{\widehat{F}} = \delta_{\iota^* g_{\mathbb{S}}}(\iota^*\psi) = \delta_{g_F}\big(4\,\iota^*(\psi|_{\mathbb{S}^{n-1}_+})\big).$$

$\sim$因此 $\beta^F = \delta_{g_F}\gamma$ 与 $\gamma := 4\,\iota^*(\psi|_{\mathbb{S}^{n-1}_+})$。

□

注 4 （与其他算子模型的比较）。在这一静态的认知层面，式（3）中的势函数U 编码了一种基于算子的期望效用泛函，其评估形式为二次期望，这与 La Mura（2009）的射影期望效用（***PEU***）以及 Aerts 等人（2018）的量子期望效用框架相同。我们的方法在潜在层面上不同于这些$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$模型：在这一层面，我们保留完整的分解 $V = S + F$，并在后文发展的$\widehat{\ }$（分裂）复数提升中，将反对称部分 F 认定为第3节和第4节中底层（抛物）/K¨ahler 几何的分裂复数或复数部分。具体而言，下文的例 2 将进一步讨论 PEU，参见第3.1节。

在结束对偏好结构的讨论之前，先将潜在偏好算子的对称$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$部分与反对称部分区分开来，并讨论当诱导出的边际协向量通过平方根坐标图表示在 $\mathcal{M}$上时，它们所发挥的不同行为作用，这很有帮助。

从对称分量 $\widehat{S}^\top = \widehat{S}$ 开始，在该线性提升类中，诱导出的单纯形偏好场是恰当的：它具有如下势函数

$$U(q) = \tfrac{1}{2}\,(\sqrt{q})^\top \widehat{S}\,\sqrt{q} = \tfrac{1}{2}\sum_{i,j}\widehat{S}_{ij}\sqrt{q_i q_j}.$$

$\widehat{\ }$该表达式关于振幅（概率的平方根）是二次的。当 S 为对角时，它化为标准的加性期望效用形式 $U(q) = \sum_i u_i q_i$，其中 $u_i = \frac{1}{2}\widehat{S}_{ii}$，从而恢复 $\sim$

经典效用。更一般地，非对角元素表示备选项之间的成对评价耦合，其权重由信念振幅而非概率给出。从这个意义上说，对称势提供了加性效用的一种规范的成对相互作用扩展；在平方根坐标图中，这些恰好是算子诱导的效用势（在一个加性常数的意义下唯一，该常数反映了 $\mathbb{R}\cdot I$ 规范自由度）：根据命题 1(1)，$\mathcal{T}(S) = dU$。

相比之下，反对称部分 $\widehat{F}$ 对效用量通道作出贡献，而是产生环流。在振幅球面上，它诱导出无散度的 Killing 场 $X_{\widehat{F}}(\rho) = \widehat{F}\rho$，其对偶 1-形式 $\bar{\alpha}^{\widehat{F}}(\rho) = (\widehat{F}\rho)^{\top} d\rho$ 是余闭的。此外，对于任意一对振幅状态 $\rho, \rho' \in \mathbb{S}^{n-1}$，它定义了反对称双线性形式

$$R(\rho, \rho') := \rho^{\top}\widehat{F}\,\rho', \qquad R(\rho, \rho') = -R(\rho', \rho).$$

当限制于主截面 $\rho = \sqrt{q}$ 时，这给出彩票上相应的反对称双线性比较 $R(\sqrt{q}, \sqrt{q'})$，与这些坐标中 Fishburn 的反对称双线性（SSB）偏好形式的结构相匹配 Fishburn (1984)。因此，F 可被解释为一个连续的遗憾型场，它编码偏好强度中的非势分量，这些分量产生环流而非梯度流。这与 Russell 将遗憾视为偏好场之非保守部分的微分几何观点相一致（Russell, 1991），其中非闭分量可在回路周围产生整体效应。总之，S 通过效用势支配保守评价通道，而 F 支配一个内在的成对比较（共效用）通道，该通道可以产生路径依赖。

2.3 最小作用理性

给定假设 A2 指定的球面偏好余向量场 $\bar{\alpha}^{\mathbb{S}} \in \Omega^1(\mathbb{S}^{n-1})$，我们考虑智能体在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上状态的无穷小调整。将球面对象与彩票 $q \in \mathcal{M}$ 联系起来时，我们在主截面 $\iota(q) = \sqrt{q} \in \mathbb{S}^{n-1}_{+}$ 上对其进行求值，即采用限制 $\alpha^{\mathbb{S}} := \bar{\alpha}^{\mathbb{S}}|_{\mathbb{S}^{n-1}_{+}}$；这是一种代表性选择，不会对潜在振幅轨迹施加约束。

在 $\rho \in \mathbb{S}^{n-1}$，可容许瞬时位移是切向量 $\dot{\rho} \in T_\rho\mathbb{S}^{n-1}$。为了将此类位移与环境空间中一个（通常并非切向的）偏好方向进行比较，任取一个光滑的环境提升 $\widetilde{X}: \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$，作为余向量场的提升，其含义为

$$\bar{\alpha}^{\mathbb{S}}_\rho(\delta\rho) = \langle \delta\rho,\, \widetilde{X}(\rho)\rangle \qquad \text{for all } \rho \in \mathbb{S}^{n-1},\ \delta\rho \in T_\rho\mathbb{S}^{n-1}.$$

（此类 $\widetilde{X}$ 总是存在，且除相差一个径向项 $\lambda(\rho)\rho$ 外唯一。）令 $Q_\rho := I - \rho\rho^{\top}$ 表示到 $T_\rho\mathbb{S}^{n-1}$ 的正交投影。最小作用（最小努力）理性公设规定，实际位移是最接近 $X(\rho)$ 的可行方向：

$$\dot{\rho} = \arg\min_{\xi \in T_\rho\mathbb{S}^{n-1}} \|\xi - \widetilde{X}(\rho)\|^2 = Q_\rho\,\widetilde{X}(\rho).$$

等价地，由于对于所有 $\delta\rho \in T_\rho\mathbb{S}^{n-1}$，$Q_\rho\widetilde{X}(\rho)$ 是满足 $\langle \delta\rho, Q_\rho\widetilde{X}(\rho)\rangle = \bar{\alpha}^{\mathbb{S}}_\rho(\delta\rho)$ 的唯一切向量，因此有

$$\dot{\rho} = g_{\mathbb{S}}^{-1}\bar{\alpha}^{\mathbb{S}}_\rho \in T_\rho\mathbb{S}^{n-1}.$$

当 $\bar{\alpha}^{\mathbb{S}}$ 是由环境空间中的线性评价函数诱导时，

$$\bar{\alpha}^{\mathbb{S}}_\rho(\delta\rho) = \langle \delta\rho,\, Q_\rho\,\widehat{V}\rho\rangle = \langle \delta\rho,\, \widehat{V}\rho\rangle, \qquad \delta\rho \in T_\rho\mathbb{S}^{n-1},$$

我们可以取 $X(\rho) = V\rho$，此时最小作用量方向变为

$$\dot{\rho} = Q_\rho\,\widehat{V}\rho.$$

这定义了光滑向量场

$$X_{\widehat{V}}(\rho) := Q_\rho \widehat{V}\rho \in T_\rho \mathbb{S}^{n-1}, \tag{4}$$

我们将其称为最小作用理性（*LAR*）向量场。

假设 3 (最小作用理性（LAR）**)**。 在每个状态 $\rho \in \mathbb{S}^{n-1}$ 处，固定偏好余向量 $\bar{\alpha}^{\mathbb{S}}_\rho$ 的一个环境代表元 $\widetilde{X}(\rho) \in \mathbb{R}^n$，如上所述。无穷小调整 $\dot{\rho} \in \widetilde{T_\rho \mathbb{S}^{n-1}}$ 是通过可容许切向量对 $X(\rho)$ 进行的逐点最小二乘拟合:

$$\dot{\rho} = \arg\min_{\xi \in T_\rho \mathbb{S}^{n-1}} \|\xi - \widetilde{X}(\rho)\|^2 = Q_\rho \widetilde{X}(\rho).$$

等价地，$\dot{\rho} = g_{\mathbb{S}}^{-1} \bar{\alpha}^{\mathbb{S}}_\rho$。

将其限制在主截面 $\iota(\mathcal{M}) \subset \mathbb{S}^{n-1}_+$ 上，记 $\alpha^{\mathbb{S}} := \bar{\alpha}^{\mathbb{S}}|_{\mathbb{S}^{n-1}_+}$，并回顾诱导的单纯形偏好形式为 $\beta = \iota^* \alpha^{\mathbb{S}} \in \Omega^1(\mathcal{M})$。在 $\mathcal{M}$ 上定义 Fisher–Rao 自然梯度场 $X_{\mathcal{M}}$ 如下:

$$g_F\big(X_{\mathcal{M}}, \cdot\big) = \beta, \qquad \text{where} \qquad g_F = 4\,\iota^* g_{\mathbb{S}}.$$

于是对每个 $q \in \mathcal{M}$，都有推前关系

$$d\iota_q\big(X_{\mathcal{M}}(q)\big) = \tfrac{1}{4}\, g_{\mathbb{S}}^{-1} \alpha^{\mathbb{S}}_{\iota(q)} \;\in\; T_{\iota(q)} \mathbb{S}^{n-1},$$

即单纯形费希尔–饶梯度流是球面最小作用方向场的 ι^{-1}–像，至多相差一个因子为4的常数时间重标度。

3 余切提升与仿K¨ahler几何

上一节将最小作用理性（LAR）表述为振幅的信息几何流形上的变分原理。在本节中，我们将其改写为加倍环境空间 $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上关于振幅及其残差（动量）的等价一阶系统，并完全保持在经典信息几何框架之内。同一组方程可在分裂复代数 $\mathbb{D}$ 中表示为双曲型Schr¨odinger型方程（第3.2节）。

3.1 在 $\mathbb{R}^{2n}$中

为了从单位球面上受约束的逐点投影动力学过渡到线性空间上的无约束系统，我们用二次残差 $u = \dot{\tilde{\rho}} - \widehat{V}\tilde{\rho}$ 拉格朗日来编码LAR的最小二乘条件。给定优先的环境方向场 $V\tilde{\rho}$，定义瞬时残差 $u = T^*\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$：并惩罚其欧几里得范数。所得的一阶余切提升将在下文被证明，可在特异的零残差扇区上再现归一化振幅 $\rho = \tilde{\rho}/\|\tilde{\rho}\|$的球面LAR流。

为此，我们定义最小作用拉格朗日量

$$L(\tilde{\rho}, \dot{\tilde{\rho}}) = \tfrac{1}{2}\|\dot{\tilde{\rho}} - \widehat{V}\tilde{\rho}\|^2, \qquad \text{where } \widehat{V} = \widehat{S} + \widehat{F},\ \widehat{S}^\top = \widehat{S},\ \widehat{F}^\top = -\widehat{F}, \tag{5}$$

$\widetilde{}$定义在配备欧几里得度量的未归一化振幅 $\tilde{\rho} \in \mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ 环境空间上。除非另有说明，第 3 节中我们采用无迹约定 $\mathrm{tr}\big(\widehat{V}\big) = 0$（与第 2 节相同）。

单纯形 $\mathcal{M} = \Delta_{>0}^{n-1}$仅通过对符号不敏感的读出映射 $q(\tilde{\rho})$ 引入，该映射定义于$\tilde{\rho} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$，其形式如下：

$$q_i = \frac{\tilde{\rho}_i^2}{\|\tilde{\rho}\|^2},$$

并且，在表达单纯形层面的几何对象时，通过平方根截面 $\iota : \mathcal{M} \to \mathbb{S}_+^{n-1}$, $\iota(q) = \sqrt{q}$。对潜在振幅 $\tilde{\rho}$不施加符号限制：轨迹可以具有任意符号模式，也可以穿过坐标超平面而不影响读出。因此，Fisher–Rao几何（度量 g_F 及其导出算子）仅在读出满足 $q(t) \in \mathcal{M}$ 的区间上使用（否则按注 3 的分层意义解释），$\widetilde{\qquad\qquad}$而振幅/余切动力学则在 $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ 和 $T^*\mathcal{M} \simeq \mathbb{R}^{2n}$上是全局的。

5 的勒让德变换

$$\mathbb{F}L : (\tilde{\rho}, \dot{\tilde{\rho}}) \longmapsto (\tilde{\rho}, y), \qquad y = \partial_{\dot{\tilde{\rho}}} L = \dot{\tilde{\rho}} - \widehat{V}\tilde{\rho},$$

是超正则的，因此是一个微分同胚。此外，Poincar´e–Cartan 形式 $\theta_L = y^\top d\tilde{\rho}$满足 $\omega_L = -d\theta_L$，且拉回恒等式

$$(\mathbb{F}L)^*\Omega = \omega_L, \qquad \Omega = d\tilde{\rho}^i \wedge dy_i,$$

$\widetilde{\qquad}$ $\widetilde{\qquad}$ $\widetilde{\qquad}$其中 Ω 是 $T^*\mathcal{M}$ 上的典范辛 2–形式，这表明 $\mathbb{F}L$：$(T\mathcal{M}, \omega_L) \to (T^*\mathcal{M}, \Omega)$ 是一个辛同胚。因此余变量

$$u = \dot{\tilde{\rho}} - \widehat{V}\tilde{\rho}$$

是以速度坐标表示的正则动量 y，且 $(\tilde{\rho}, y)$ 是外围相空间 $T^*\widetilde{\mathcal{M}} \simeq \mathbb{R}^{2n}$ 的达布坐标。

相应的哈密顿量

$$H(\tilde{\rho}, y) = \tfrac{1}{2}\|y\|^2 + \langle y, \widehat{V}\tilde{\rho}\rangle \tag{6}$$

生成线性哈密顿系统

$$\dot{\tilde{\rho}} = \widehat{V}\tilde{\rho} + y, \qquad \dot{y} = -\widehat{V}^\top y, \tag{7}$$

或以向量记号

$$\dot{Z} = \mathsf{A}\, Z, \qquad Z = \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ y \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} \widehat{V} & I \\ 0 & -\widehat{V}^\top \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{A}^\top J + J\mathsf{A} = 0. \tag{8}$$

因此 $\Phi_t = \exp(t\mathsf{A}) \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ 保持典范辛形式。

这一哈密顿系统的几何结构源于模型的信息几何基础。在信息几何中，指数族与混合族是对偶平坦的，因此具有 Hessian 结构（Shima，2007年；Nielsen，2020）。具体而言，概率单纯形 $\mathcal{M} = \Delta_{>0}^{n-1}$可视为坐标 q下的混合族，因此配备了平坦混合联络 $\nabla^{(m)}$ 和 Fisher–Rao 度量 g_F，后者在局部具有 Hessian 结构。具体来说，取（负）熵势 $\Phi(q) := \sum_{i=1}^n q_i \log\, q_i$，则有 $g_F = (\nabla^{(m)} d\Phi)\,|_{T\mathcal{M}}$。

平方根提升

$$\iota : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{S}_+^{n-1} \subset \mathbb{S}^{n-1} \subset \widetilde{\mathcal{M}} \simeq \mathbb{R}^n, \qquad \iota(q) = \sqrt{q},$$

是一种光滑嵌入，将度量几何传输到环境振幅空间中：它满足 $\iota^* g_{\mathbb{S}} = \frac{1}{4} g_F$，其中 $g_{\mathbb{S}} = g_{\mathrm{Euc}}|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ 是圆度量。我们将 $\mathbb{S}_+^{n-1}$视为欧几里得空间 $(\mathcal{M},\ g_{\mathrm{Euc}})$ 的一个子流形$\widetilde{\qquad\qquad\qquad\qquad}$，并赋予 $\mathcal{M}$ 标准的平直（因而也是 Levi–Civita）联络 ∇^{Euc}。因此，$(\widetilde{\mathcal{M}},\ g_{\mathrm{Euc}},\ \nabla^{\mathrm{Euc}})$ 为余切/哈密顿量表述提供了一个规范的环境仿射结构，并自然地与 $(\mathcal{M},\ g_F,\ \nabla^{(m)})$ 的底层统计几何相关联。

Hessian结构的一个关键几何后果是，平坦仿射联络是给定数据的一部分。在当前设定中，这个特定联络是 $\nabla^{(m)}$ 于 $\mathcal{M}$。一般而言，切丛和余切丛上的 Sasaki型提升取决于所选联络；对于 Hessian 流形（$M,\ g,\ \nabla$），无挠平坦联络 ∇ 是预先固定的。在切丛这一侧，这构成了经典 Sasaki/Dombrowski构造及其 Hessian 改进的基础：对偶平坦或 Hessian 流形的切丛 TM 带有由（$g,\ \nabla$）诱导的典范 K¨ahler 结构，参见 Dombrowski（1962年）和 Shima（2007年）中的第2.2节，以及 Molitor（2013年）发展出的其在量子力学中的信息几何应用。本文将转而采用余切丛一侧的相应方法，沿用（Reginatto，2013年；Caticha，2021年）的做法：所选平坦联络为曲线和余向量的提升提供了一种特定方式：相对于由 ∇ 诱导的对偶联络对余向量作平行移动，从而在每一点 $\alpha \in T^*M$处定义水平子空间 $H_\alpha \subset T_\alpha(T^*M)$，它与垂直子空间 $V_\alpha := \ker d\nu_\alpha$互补，其中$\nu :\ T^*M \to M$ 是丛投影。这些子空间光滑变化，并给出典范分解

$$T(T^*M) = H \oplus V$$

分解为 ∇–水平与垂直子丛。下一引理总结它们的基本辛性质。

引理 1（水平-垂直拉格朗日结构于 T^*M）。设 M为配备无挠仿射联络 ∇的光滑流形，并设 $\nu :\ T^*M \to M$ 为丛投影。记 θ 为 T^*M 上的典范一形式，$\Omega := -d\theta$ 为其典范辛形式。设 $V := \ker d\nu \subset T(T^*M)$ 为垂直分布，并设 $H \subset T(T^*M)$ 为由 ∇ 通过对余向量的平行移动所确定的水平分布。则 V 与 H 是（$T^*M,\ \Omega$）的拉格朗日分布，它们处处横截，并且

$$T(T^*M) = H \oplus V.$$

证明。在 M上的局部坐标（x^i）及 T^*M上相应的坐标（$x^i,\ y_i$）中，典范一形式为 $\theta = y_i\, dx^i$，故$\Omega = -d\theta = -\,dy_i \wedge dx^i = dx^i \wedge dy_i$。垂直分布$V = \ker d\nu$由 $\partial/\partial y_i$张成，且由于$\Omega = dx^i \wedge dy_i$，有 $\Omega(\partial/\partial y_i,\ \partial/\partial y_j) = 0$，因此$\Omega|_V = 0$；由于$\dim V = \frac{1}{2}\dim T(T^*M)$，$V$是拉格朗日的。

具有克里斯托费尔符号 Γ_{ij}^k 的联络 ∇ 决定了水平提升

$$\frac{\delta}{\delta x^i} := \frac{\partial}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k(x)\, y_k\, \frac{\partial}{\partial y_j},$$

它们张成水平分布 H。经计算

$$\Omega\Big(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\Big) = (\Gamma_{ji}^l - \Gamma_{ij}^l)\, y_l.$$

由于 ∇无挠，$\Gamma_{ij}^l = \Gamma_{ji}^l$，因此 $\Omega|_H = 0$。此外，$\dim H = \frac{1}{2}\dim T(T^*M)$，所以 H是拉格朗日的。根据构造，$H \cap V = \{0\}$，且每个切向量都能唯一分解为水平分量和垂直分量，从而得到 $T(T^*M) = H \oplus V$。 □

引理 1 提供了辛输入：对于任意无挠仿射联络 ∇，诱导的水平分布 H 是拉格朗日的，与垂直拉格朗日 $V = \ker d\nu$互补，因此确定了典范拉格朗日分裂 $T(T^*M) = H \oplus V$。这个分裂通过设定 $K|_H = +\mathrm{id}$、 $K|_V = -\mathrm{id}$ 和 $G := \Omega(\cdot, K\cdot)$，已经定义了一个近 para–Hermitian 结构；然而，要获得严格意义上的$para–K\ddot{a}hler$ 结构，还必须满足H 的可积性（等价地， K的可积性），而这由 ∇的平坦性保证。因此，我们将讨论范围限定在 Hessian 情形：

命题 2 (Hessian 流形的余切丛超 K¨ahler 结构)。 设(M, g, ∇) 是一个 ***Hessian*** 流形，因此 ∇ 无挠且平坦。则余切丛 T^*M 具有典(G, K, Ω)超 ***Kähler*** 结构，其中

- Ω 是 T^*M上的典范辛形式，
- K是超复结构 K： $T(T^*M) \to T(T^*M)$，由 ∇–水平/垂直分裂 $T(T^*M) = H \oplus V$诱导，并且
- G 是满足$\Omega(u, v) = G(Ku, v)$ 的唯一中性度量，其中任意 $u, v \in T(T^*M)$均成立。

± 1 特征子丛 $E_\pm = \ker(K \mp \mathrm{id})$ 与 H 和 V 重合，相对于 G是极大迷向的，并给出典范拉格朗日分解

$$T(T^*M) = E_+ \oplus E_-.$$

证明。 由于 (M, g, ∇) 是 Hessian 的，仿射联络 ∇ 无挠且平坦。令 $\nu\colon T^*M \to M$ 为投影， θ 为典范一形式， $\Omega := -d\theta$ 为 T^*M 上的典范辛形式。记 $V := \ker d\nu \subset T(T^*M)$ 为垂直分布，记由余向量平行移动得到的 ∇–水平分布为 $H \subset T(T^*M)$。根据引理 1， H 和 V 是 (T^*M, Ω) 上的横截拉格朗日分布，且 $T(T^*M) = H \oplus V$。 ∇ 的平坦性意味着 H 可积，而 V 总是可积，因此 H 和 V 定义了横截拉格朗日叶状结构，且 $(T^*M, \Omega; H, V)$ 是一个双拉格朗日流形。

根据（Etayo 等人，2006，定理 6 和命题 7(b)），任意双拉格朗日流形 $(N, \omega; F_1, F_2)$ 都具有一个典范中性度量 G，以及一个几乎乘积（超复）结构 K，满足$K^2 = \mathrm{id}$；其 ± 1 特征分布是 F_1 和 F_2的切丛，并且对所有 u, v，有$G(u, v) = \omega(Ku, v)$。将此结果应用于 $N = T^*M$, $\omega = \Omega$, $F_1 = H$, $F_2 = V$，可在 T^*M 上得到中性度量 G 和几乎超复结构 K，满足

$$K|_H = \mathrm{id}, \qquad K|_V = -\mathrm{id}, \qquad \Omega(u, v) = G(Ku, v) \quad \forall u, v \in T(T^*M).$$

特别是， ± 1特征子丛

$$E_+ := \ker(K - \mathrm{id}) = H, \qquad E_- := \ker(K + \mathrm{id}) = V$$

相对于 G是极大迷向的，并给出拉格朗日分解 $T(T^*M) = E_+ \oplus E_-$。满足 $\Omega(u, v) = G(Ku, v)$ 的 G 的唯一性也见于（Etayo 等人，2006，定理 6）。 □

引理 1 只需无挠性，即可得到横截拉格朗日分解 $T(T^*M) = H \oplus V$，从而得到一个几乎超厄米结构组（G， K，Ω）。额外的“海森”假设（ ∇ 的平坦性）仅用于保证 H 可积（因而 K 也可积），从而使该结构严格来说成为超复凯勒结构。接着，命题 2 表明，一旦固定一个无挠平坦联络∇（特别是，当（M， g， ∇）为 Hessian 流形时），余切丛 T^*M 上便带有

一个典范的超复凯勒结构（G，K，Ω）。该构造仅依赖于 T^*M 上的典范辛形式 $\Omega = -d\theta$，以及 $T(T^*M) = H \oplus V$ 所给出的 ∇–水平/垂直分裂。从这个意义上说，超复结构 K 由该分裂内在确定，而 G 随后由关系 $\Omega(u, v) = G(Ku, v)$ 唯一确定。

相比之下，并不存在仅由仿射/ Hessian数据（M, g, ∇）所典范确定、且与典范辛形式Ω相容的 T^*M 上的复结构 J。当然，一旦在 T^*M上选取一个与Ω相容的可积几乎复结构 J，相伴度量 $g_J(\cdot,\cdot) := \Omega(\cdot, J\cdot)$便使（$T^*M, g_J, J, \Omega$）成为K¨ahler。关键在于，$J$是额外结构：它并非由 ∇ 或 M上的Hessian度量典范选出，而且 J 的不同选择会导致真正不同的K¨ahler提升。在此意义上，命题 2的仿–K¨ahler结构相对于海森数据是典范的，而 T^*M 上的椭圆K¨ahler结构则不是。我们将在第3.3节和第§4节中回到这一点。

接下来，将命题 2 专门应用于提升后的 Hessian 流形（$\widetilde{\mathcal{M}}, g_{\mathrm{Euc}}, \nabla^{\mathrm{Euc}}$）可在 $T^*\widetilde{\mathcal{M}} \simeq \mathbb{R}^{2n}$ 上得到典范的 para–K¨ahler 结构（G, K, Ω）。最小作用量哈密顿系统（7）是哈密顿系统；因此，其流保持典范辛形式 Ω。特别地，在当前 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的线性情形中，其生成元 A 属于 $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$。

推论1 (典范 K–分裂与欧几里得海森提升中的中性形式)。 令 (G, K, Ω)为由海森数据 $(\widetilde{\mathcal{M}}, g_{\mathrm{Euc}}, \nabla^{\mathrm{Euc}})$ 按照命题 *2* 在 $T^*\widetilde{\mathcal{M}}$ 上诱导的典范 *para–K¨ahler* 结构。则，K 的 ± 1 特征分布与水平/垂直分裂一致：

$$E_+ = H, \qquad E_- = V, \qquad K|_{E_+} = +\mathrm{id}, \quad K|_{E_-} = -\mathrm{id},$$

其中，H是 ∇^{Euc}水平分布，$V = \ker d\nu$是丛投影 ν：$T^*\widetilde{\mathcal{M}} \to \widetilde{\mathcal{M}}$的垂直分布。在 $T^*\widetilde{\mathcal{M}} \simeq \mathbb{R}^{2n}$ 上的全局达布坐标图$(\tilde\rho, y)$ 中，有

$$H = \mathrm{span}\Big\{\frac{\partial}{\partial \tilde\rho^i}\Big\}, \qquad V = \mathrm{span}\Big\{\frac{\partial}{\partial y_i}\Big\},$$

and

$$\Omega = d\tilde\rho^i \wedge dy_i, \qquad G = \sum_{i=1}^{n}\Big(d\tilde\rho^i \otimes dy_i + dy_i \otimes d\tilde\rho^i\Big).$$

$\widetilde{\mathcal{M}}$相应的中性二次型 Q：$T^*\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ 为

$$Q(\tilde\rho, y) := G_{(\tilde\rho,y)}\big((\tilde\rho, y), (\tilde\rho, y)\big) \quad \textit{(using the translation identification } T_{(\tilde\rho,y)}\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{R}^{2n}\textit{)} = 2\langle\tilde\rho, y\rangle. \tag{9}$$

证明。 由于 ∇^{Euc} 是 $\widetilde{\mathcal{M}} \subset \mathbb{R}^n$上的标准平坦无挠联络，其克里斯托费尔符号在全局坐标图（$\tilde\rho^i$）中均为零。因此，水平提升为 $\delta/\delta\tilde\rho^i = \partial/\partial\tilde\rho^i$，从而 H =张成$\{\partial/\partial\tilde\rho^i\}$，而 V =ker $d\nu$ =张成$\{\partial/\partial y_i\}$。命题 2 将 K定义为 $K|_H$ = +id和$K|_V$ = –id，因此 $E_+ = H$ 且 $E_- = V$。

在达布坐标图中，$\theta = y_i\, d\tilde\rho^i$，因此 $\Omega = -d\theta = d\tilde\rho^i \wedge dy_i$。度量 G由 $\Omega(u, v) = G(Ku, v)$ 确定；结合 $K|_H = +\mathrm{id}$ 和 $K|_V = -\mathrm{id}$，可得 $G = \sum_i(d\tilde\rho^i \otimes dy_i + dy_i \otimes d\tilde\rho^i)$。最后，$Q(\tilde\rho, y) = G((\tilde\rho, y), (\tilde\rho, y)) = 2\langle\tilde\rho, y\rangle$（在平移识别 $T_{(\tilde\rho,y)}\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{R}^{2n}$ 下），并且根据定义有 $\Lambda = Q \circ z$。 □

$\widetilde{\mathcal{M}}$有了推论1给出的规范 K–分解 $T(T^*\mathcal{M}) = E_+ \oplus E_-$，我们便在相应的 K–适配（Witt）坐标 $(z_+, z_-) = (\tilde\rho, y)$ 上，重写最小作用量哈密顿系统 $T^*\widetilde{\mathcal{M}} \simeq \mathbb{R}^{2n}$；在平移识别下，分布 E_+ 和 E_- 为

分别由 $\partial/\partial z_+^i$ 和 $\partial/\partial z_{-i}$张成。这揭示了该动力学是一个受剪切扰动的分块流，其中剪切将 E_- 混入 E_+，并由此得到中性坐标$\Lambda(t) = 2\langle z_+(t),\ z_-(t)\rangle$的单调性恒等式：

命题3（最小作用量提升的维特形式与剪切分解）。 在推论*1*的 K–适配坐标 $(z_+, z_-) = (\tilde{\rho}, y)$ 中，最小作用量哈密顿系统 (7) 呈现维特形式

$$\dot{z}_+ = \widehat{V} z_+ + z_-, \qquad \dot{z}_- = -\widehat{V}^\top z_-. \tag{10}$$

等价地，其生成元可分解为

$$\mathsf{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \widehat{V} & 0 \\ 0 & -\widehat{V}^\top \end{pmatrix}}_{\mathsf{A}_{\mathrm{pu}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathsf{A}_{\mathrm{sh}}}, \tag{11}$$

其中 A_{pu} 与 K 对易（因此保持 $E_\pm$），而 A_{sh} 是一个幂零剪切（$\mathsf{A}_{\mathrm{sh}}^2 = 0$），将$E_-$ 映射到 E_+。特别地，零残差叶 $\{z_- = 0\}$ 是不变的。

此外，中性坐标 $\Lambda(t) = 2\langle z_+(t),\ z_-(t)\rangle$ 满足

$$\dot{\Lambda}(t) = 2\|z_-(t)\|^2 = 2\|y(t)\|^2 \ \geq\ 0. \tag{12}$$

命题*3*的证明。 我们从方程（8）开始。采用 K–适配分解 $TN = E_+ \oplus E_-$及其相应坐标 $z_+ = \tilde{\rho}$, $z_- = y$ （参见推论1），这正是（10）。接下来，将 A 分解为其分块对角部分和严格上三角部分，

$$\mathsf{A} = \mathsf{A}_{\mathrm{pu}} + \mathsf{A}_{\mathrm{sh}}, \qquad \mathsf{A}_{\mathrm{pu}} = \begin{pmatrix} \widehat{V} & 0 \\ 0 & -\widehat{V}^\top \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{A}_{\mathrm{sh}} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

这是 A 的典范分块分解。剪切部分 A_{sh} 是幂零的（$\mathsf{A}_{\mathrm{sh}}^2 = 0$），并满足 $\mathsf{A}_{\mathrm{sh}}(E_-) \subset E_+$ 和 $\mathsf{A}_{\mathrm{sh}}(E_+) = \{0\}$，即它将 E_- 映射到 E_+ 中。此外，在这些 K– 适配坐标下，在 $E_+ \oplus E_-$ 上有 $K = \mathrm{diag}(I,\ -I)$。由于 A_{pu} 是分块对角的，它与 K 对易，因此保持 E_+ 和 E_- 不变。零残差叶的不变性可直接由（10）推出：若 $z_-(t_0) = 0$，则 $\dot{z}_-(t_0) = -\widehat{V}^\top z_-(t_0) = 0$，从而 $z_-(t) \equiv 0$。

最后，对于 $\Lambda(t) := 2\langle z_+(t),\ z_-(t)\rangle = 2\langle \tilde{\rho}(t),\ y(t)\rangle$，对其求导并使用（7）：

$$\dot{\Lambda} = 2\big(\langle \dot{\tilde{\rho}}, y\rangle + \langle \tilde{\rho}, \dot{y}\rangle\big) = 2\big(\langle \widehat{V}\tilde{\rho} + y,\ y\rangle + \langle \tilde{\rho},\ -\widehat{V}^\top y\rangle\big).$$

混合项相互抵消，因为 $\langle \widehat{V}\tilde{\rho},\ y\rangle = \langle \tilde{\rho},\ \widehat{V}^\top y\rangle$，于是得到 $\dot{\Lambda} = 2\|y\|^2$，即式 (12)。 □

注5（关于实极化）。 $N = T^*\mathcal{M}$ 上的 para–K¨ahler 结构（$G, K,\ \Omega$）可典范地确定一个双拉格朗日分解

$$TN = E_+ \oplus E_-, \qquad E_\pm = \ker(K \mp \mathrm{id}),$$

因此，在双曲（副）理论中，几何结构内建有一个特殊的实 极化，即可积拉格朗日分布 E_+ （等价地说，是由 E_+–叶构成的拉格朗日叶状结构）。在 N 上的全局达布坐标图 $z = (\tilde{\rho},\ y)$ 中，零残差集

$$\Sigma_0 := \{(\tilde{\rho}, y) : y = 0\}$$

是经过原点（零截面）的 E_+ Σ_0 $T\Sigma_0 =$叶。特别地， 是拉格朗日的，且 $E_+|_{\Sigma_0}$ Σ_0 $\dot{y} = -\widehat{V}^\top y$ $y\ t\ \equiv 0$ 。此外，它在提升流下保持不变，因为只要． $\rightsquigarrow y(t_0) = 0$，就有 ( )。在 Σ_0 上，动力学闭合为 $\dot{\tilde{\rho}} = V\tilde{\rho}$，而诱导的单纯形过程则通过归一化读出，

$$q(t) = \frac{\tilde{\rho}(t)^{\odot 2}}{\|\tilde{\rho}(t)\|^2} \qquad (\tilde{\rho}(t) \neq 0).$$

在将其与（抛物）几何量子化模板联系起来时，我们会回到这一点，并将其与第§4节椭圆（K¨ ahler）情形中真正所需的额外的极化数据进行对比。

下文中，我们使用相对于不变零截面的壳上/壳外术语$\Sigma_0 = \{y = 0\}$. 如果一条轨迹完全包含于 Σ_0 中，则称其为在壳上，等价地，在所考虑的区间内， $y(t) \equiv 0$ 。如果它不局限于 Σ_0，则称其为壳外，等价地，至少在某个时刻， $y(t) \neq 0$。因此，壳外轨迹通常不会局限于E_+-叶丛的某个固定叶面，因为余变量 y 通常会发生演化。

现在我们已经可以在零残差叶上定义抛物量子比特模型:

推论2 （抛物量子比特模型）。 在命题*3*的坐标（z_+, z_-） = （$\tilde{\rho}, y$）中，零残差叶

$$\Sigma_0 := \{(\tilde{\rho}, y) :\ y = 0\}$$

是不变的。在 Σ_0 上，提升动力学简化为零截面上的线性振幅方程

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) = \widehat{V}\,\tilde{\rho}(t), \qquad \widehat{V} = \widehat{S} + \widehat{F}, \qquad \widehat{S}^\top = \widehat{S}, \quad \widehat{F}^\top = -\widehat{F}, \tag{13}$$

并且，对于任意非零初始条件 $\tilde{\rho}(0) \neq 0$ ，有

$$\tilde{\rho}(t) = e^{t\widehat{V}}\,\tilde{\rho}(0). \tag{14}$$

定义归一化因子

$$\mathcal{Z}(t) := \|\tilde{\rho}(t)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\rho}_i(t)^2, \tag{15}$$

以及单纯形读出

$$q_i(t) := \frac{\tilde{\rho}_i(t)^2}{\mathcal{Z}(t)} \quad (\tilde{\rho}(t) \neq 0), \qquad q(t) \in \Delta^{n-1}. \tag{16}$$

此外，在满足 $\tilde{\rho}_i(t) \neq 0$ 对所有 i 均成立的任意区间上， $q(t) \in \mathcal{M} = \Delta^{n-1}_{>0}$。

证明。 Σ_0 的不变性可由 (10) 中的 $\dot{y} = -\widehat{V}^\top y$ 立即得出。在 Σ_0 上，有 $\dot{\tilde{\rho}} = \widehat{V}\tilde{\rho}$，因此 $\tilde{\rho}(t) = e^{tV}\tilde{\rho}(0)$。若 $\tilde{\rho}(0) \neq 0$，则对所有有限的 t， $\tilde{\rho}(t) \neq 0$，因为 e^{tV} 可逆，所以 $\mathcal{Z}(t) = \|\tilde{\rho}(t)\|^2 > 0$。因此， $q_i(t) = \tilde{\rho}_i(t)^2/\mathcal{Z}(t) \geq 0$，且 $\sum_i q_i(t) = 1$，故对所有有限的 t， $q(t) \in \Delta^{n-1}$ 。

我们使用闭单纯形 Δ^{n-1} ，因为读出映射

$$\tilde{\rho} \ \longmapsto\ q = \frac{\tilde{\rho}^{\odot 2}}{\|\tilde{\rho}\|^2}$$

对所有 $\tilde{\rho} \neq 0$ 均有定义，并且当某个坐标 $\tilde{\rho}_i(t)$ 为零时，可能达到边界点。这些 边界时刻不会影响壳上振幅动力学 $\dot{\tilde{\rho}} = V\tilde{\rho}$ 的良定性，也不会影响 $\mathcal{Z}(t)$ 的正性。

□

接下来，我们可以在以下两个例子中将理性疏忽（RI）和射影期望效用（PEU）识别为特例:

例1 （标准熵正则化/理性疏忽作为对角LAR情形）. 设生成元为纯对称的，$\widehat{V} = S \in \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^n)$，并带有 $F = 0$。振幅动力学

$$\dot{\tilde{\rho}}_t = \widehat{S}\,\tilde{\rho}_t \quad \Rightarrow \quad \tilde{\rho}_T = e^{T\widehat{S}}\tilde{\rho}_0$$

投影到单纯形上为

$$q_k(T) = \frac{\tilde{\rho}_{T,k}^2}{\sum_j \tilde{\rho}_{T,j}^2} = \frac{\left[(e^{T\widehat{S}}\tilde{\rho}_0)_k\right]^2}{\tilde{\rho}_0^\top e^{2T\widehat{S}}\tilde{\rho}_0}, \qquad (\widehat{S} = \widehat{S}^\top), \tag{17}$$

其中 $q_k(0) = \tilde{\rho}_{0,k}^2 / \sum_j \tilde{\rho}_{0,j}^2$ 为先验。对于一般（非对角）的 $\widehat{S}$，这将在单纯形上产生由完整算子 S 所决定的耦合^指数倾斜。

在对角（选择可分）情形中 $\widehat{S} = \mathrm{diag}(\theta_1, \dots, \theta_n)$，我们得到

$$\tilde{\rho}_{T,k} = e^{T\theta_k}\tilde{\rho}_{0,k}, \qquad q_k(T) = \frac{q_k(0)\, e^{2T\theta_k}}{\sum_j q_j(0)\, e^{2T\theta_j}}.$$

在标准熵正则化/理性疏忽选择中，后验具有如下形式

$$q_k(\beta) = \frac{q_k(0)\, e^{\beta v_k}}{\sum_j q_j(0)\, e^{\beta v_j}},$$

作为线性加熵目标函数的最大化解（关于信息论的综述，参见 Harr´e (2021) 和 Buckley等人 (2017)）。令 $v_k = \theta_k$ 和 $\beta = 2T$相等，对角LAR便能复现标准熵正则化/理性疏忽后验。从信息几何的角度看，单纯形（在 $\Delta_{>0}^{n-1}$上）上的相应连续时间流，是按照 Amari和Nagaoka (2000) 的定义，由线性泛函$q \mapsto \sum_k \theta_k q_k$ 生成的Fisher–Rao自然梯度流。在对角情形下，这一自然梯度与标准的复制子动力学 相一致（仅相差一个常数时间缩放因子），其收益为 θ_k（Harper, 2009; Sandholm, 2010）。

例 2 （PEU 与期望效用理论）。 射影期望效用（PEU）（La Mura, 2009）用射线 $[\psi] \subset \mathbb{R}^n$ 表示彩票，并通过齐次二次型对其进行评估

$$U_{\mathrm{PEU}}(\psi) = \psi^\top W \psi, \qquad W = W^\top, \qquad \psi \sim \lambda\psi \ (\lambda > 0).$$

假设采用示例 1 中纯评估型的 LAR 动力学，

$$\widehat{V} = \widehat{S} \in \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^n), \quad \widehat{F} = 0, \qquad \tilde{\rho}_T = e^{T\widehat{S}}\tilde{\rho}_0, \qquad q_k(T) = \frac{\tilde{\rho}_{T,k}^2}{\sum_j \tilde{\rho}_{T,j}^2}.$$

^假设最大特征值 $\lambda^\star$ 的 S 是单重的，其对应的特征向量 $w^\star \neq 0$ 满足$\backsim Sw^\star = \lambda^\star w^\star$，并假设 $\langle w^\star | \tilde{\rho}_0 \rangle \neq 0$。那么振幅射线在射影意义下收敛，

$$[\tilde{\rho}_T] \to [w^\star] \quad \text{as } T \to \infty, \qquad \text{hence} \qquad q(T) \to q^\star, \ \ q_k^\star := \frac{(w^\star)_k^2}{\sum_j (w^\star)_j^2},$$

其中，$(w^\star)_k$ 表示 $w^\star$ 在选择（标准）基下的第 k个分量。因此，对称 LAR 的大–T（max–plus／热带）极限会选出一个规范的射影状态 $[w^\star]$ 以及一个由此诱导的极限彩票 $q^\star$，该彩票位于单纯形上，从而提供与 S 相关联的自然 PEU 对象。

在对角（选择可分）子情形 $S=\mathrm{diag}(\theta_1,\dots,\theta_n)$中，若存在唯一最大化项 $\theta_{k^\star}=\max_k \theta_k$，则有 $w^\star = e_{k^\star}$，因此 $q(T) \to \delta_{k^\star}$，由此恢复确定性期望效用理论（EUT）的选择。此外，若 $W = \mathrm{diag}(u_k)$ 且 $\mathcal{Z}(T) := \sum_j \tilde{\rho}_{T,j}^2$，则

$$U_{\mathrm{PEU}}(\tilde{\rho}_T) = \sum_k u_k \tilde{\rho}_{T,k}^2 = \mathcal{Z}(T) \sum_k u_k q_k(T),$$

因此，PEU 评估振幅射线 $[\tilde{\rho}_T]$，而 EUT 评估由单纯形上的彩票 $q(T)$ 所诱导的期望效用 $\sum_k u_k q_k(T)$（在对角情形下，两者仅相差齐次比例因子 $\mathcal{Z}(T)$）。

对于对称但非对角的 S，式（17）中的映射 $q(T)$ 仍由相同的振幅演化 $\tilde{\rho}_T = e^{T\widehat{S}}\tilde{\rho}_0$ 给出，但现在取决于完整算子 $\widehat{S}$（因而取决于选择基中 $\tilde{\rho}_0$ 的所有分量）。特别是，在选择基下，它通常无法简化为逐坐标的指数倾斜

$$q_k(T) \propto q_k(0)\exp\{\eta v_k\} \qquad (\text{for full–support } q(0) \in \mathcal{M}).$$

对于任意单个向量 $v \in \mathbb{R}^n$。等价地，当且仅当 S 在选择基下同时对角化时，才能恢复对角 ER/RI 形式；否则，非对角元素会混合坐标，并使评价基发生旋转，从而在各个备选项之间引入真正的情境耦合。因此，在同一个 LAR 模型中，对角（选择可分离）情形再现了经典的熵正则化／RI 后验，而非对角对称生成元则会产生类量子（QL）模型所特有的、具有情境性、类似干涉且对顺序敏感的选择概率扭曲。从这个意义上说，ER/RI 和 QL 是同一信息几何动力学框架的两种情形。

总而言之，我们现在已经在实数倍增空间 $\mathbb{R}^{2n}$ 中得到了动力学方程（10）。这种实数表述最为直接，因为它将线性代数对偶空间明确呈现出来，并使典范分裂度量一目了然；不过，用不同的代数语言重新表示同一系统往往更有优势。由于倍增空间具有自然的分裂符号，在第3.2节引入分裂复数 $\mathbb{D}^n$ 表示法十分方便，由此可推导出一个（分裂）旁施勒丁格方程。这也将使我们能够在第3.3节将其与 $\mathbb{C}^n$ 中的标准复数表示进行清晰比较。

3.2 In $\mathbb{D}$：双曲施勒丁格方程

在导出了 $N = T^*\widetilde{\mathcal{M}} \simeq \mathbb{R}^{2n}$ 上提升的最小作用量运动方程（参见（7））后，我们现在来说明，零残差叶上的无剪切动力学如何具有内禀的分裂复数表示。在这种表示中，典范 Witt 分解由 $\mathbb{D}$ 的幂等元编码，而壳上流则呈现为紧凑的双曲施勒丁格形式。

我们仍处于全局达布坐标图（$\tilde{\rho}$，y）$\in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ 上的 $N = T^*\widetilde{\mathcal{M}}$，其典范辛形式为

$$\Omega = d\tilde{\rho}^i \wedge dy_i.$$

根据命题3，平坦欧几里得 para–K¨ahler 结构确定了一个 para–复端同态 K，其 Witt 分解为 $T(T^*\mathcal{M}) = E_+ \oplus E_-$, $E_\pm = \ker(K \mp \mathrm{id})$，且提升后的最小作用量流是线性的，其生成元为

$$\dot{Z} = \mathsf{A}Z, \qquad \mathsf{A} = \mathsf{A}_{\mathrm{pu}} + \mathsf{A}_{\mathrm{sh}}, \tag{18}$$

其中 A^{pu} 保持 Witt 分裂（与 K对易），而 A_{sh} 是一个将E_-剪切到 E_+中的幂零剪切映射。在 K–适配坐标 $(z_+, z_-) = (\tilde{\rho}, y)$ 中，零残差叶 $\Sigma_0 = \{z_- = 0\}$是不变的，且在 Σ_0 上，动力学约化为解耦维特演化

$$\dot{z}_\pm = (\widehat{F} \pm \widehat{S})\, z_\pm, \qquad \text{with } z_- \equiv 0, \tag{19}$$

这正是由分裂复数（双曲）薛¨定谔形式自然编码的机制。

为了看出这一点并内在地封装（19），我们使用分裂复代数 $\mathbb{D} = \{a + bj \mid a,\ b \in \mathbb{R},\ \ j^2 = +1\}$ 及其幂等元$e_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm j)$，它们满足 $je_\pm = \pm e_\mp$并给出一对完备的正交投影。[4] 这些代数投影算子对应于维特投影$P_\pm = \frac{1}{2}(\mathrm{id} \pm K)$到 $E_\pm$上，从而将实直和 $E_+ \oplus E_- \cong \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ 等同于自由$\mathbb{D}$–模 $\mathbb{D}^n$。因此，任意维特态（z_+，z_-）都可以编码为分裂复数状态

$$\Psi_{\mathbb{D}} := z_+ e_+ + z_- e_- \in \mathbb{D}^n.$$

作为实向量空间来看，配备中性度量 G 的 $\mathbb{R}^{2n}$ 是一个克赖因空间；分裂复数表示只是将同一仿埃尔米特几何改写为模的形式。

在零残差叶上，引入如下超双曲厄米哈密顿算子会很方便

$$\widehat{H}_{\mathbb{D}} = \widehat{S} + j\,\widehat{F} \in \mathrm{End}(\mathbb{D}^n), \qquad \widehat{H}_{\mathbb{D}}^{\#} = \widehat{H}_{\mathbb{D}},$$

其中 $(\cdot)^{\#}$ 表示分裂共轭转置，即 $(a + bj)^{\#} := a - bj$ 且 $\widehat{A}^{\#} := (\widehat{A}^{\#(\text{entrywise})})^{\top}$。于是，(19) 中的两个实方程可合并为紧凑的超双曲薛定谔方程

$$\dot{\Psi}_{\mathbb{D}} = j\,\widehat{H}_{\mathbb{D}}\,\Psi_{\mathbb{D}}, \qquad \widehat{H}_{\mathbb{D}}^{\#} = \widehat{H}_{\mathbb{D}}. \tag{20}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$将 (20) 投影到 $e_\pm$ 上可恢复维特分量，因为 $je_\pm = \pm e_\pm$ 意味着 $\dot{z}_\pm = (F \pm S) z_\pm$。在零残差叶之外，完整的提升动力学 (7) 可视为超双曲薛定谔演化，并辅以幂零剪切项 A_{sh}，即从 E_-到 E_+ 的强迫项；该项恰好在 Σ_0上消失。在此表述中，$\widehat{H}_{\mathbb{D}}$ 是超双曲厄米的，($\widehat{H}_{\mathbb{D}})^{\#} = \widehat{H}_{\mathbb{D}}$，因此 $(j\widehat{H}_{\mathbb{D}})^{\#} = -\,j\widehat{H}_{\mathbb{D}}$。因此，传播子

$$U(t) := \exp\!\Big(j\widehat{H}_{\mathbb{D}}\, t\Big)$$

是拟幺正的，$U(t)^{\#}U(t) = I$，并且在 Σ_0 上的无剪切壳上流中保持诱导的拟厄米（Krein）配对 $\langle \Psi, \Phi \rangle_{\mathbb{D}} := \Psi^{\#}\Phi$（等价地，其实部 $G = \mathrm{Re}\langle \cdot,\ \cdot \rangle_{\mathbb{D}}$）。因此，分裂复数的封装提供了一种简洁的描述，其中双曲薛定谔形式恰好在零残差叶上成立。

3.3 In $\mathbb{C}$：非厄米封装

第3.2节中的分裂复表示是 Hessian 超复 K¨ahler 提升的内禀组成部分：超复结构 K 及其 Witt 分裂属于模型的几何数据，而零残差叶上的无剪切流自然可表示为超复 Schr¨odinger 方程。尽管如此，仍可通过选取一个辅助近复结构 J（满足 $J^2 = -\mathrm{id}$），以复坐标重新表述相同的实提升方程。此类选择总是存在（例如

[4]不同领域的术语有所不同。由一个满足 $j^2 = +1$ 的单位元 j 生成的标量代数称为 *split–complex*、*hyperbolic* *double* K 或数。在微分几何中，相应的具有 $K^2 = \mathrm{id}$ 且特征子空间秩相等的自同态称为 *para–complex*结构；它与中性度量 G及相容辛形式 Ω 一起构成的三元组 $(G,\ K,\ \Omega)$ 是 *para–Kähler*。

辛流形上的 Ω 兼容结构），但它们并非规范选择，只影响对固定辛形式 Ω 的表示方式（例如通过 Ω(·, J·)），而不会改变 Ω 本身。因此，所得方程的复形式未必是酉的，而且通常无法反映其底层的超 Hermite 几何。

具体而言，在平坦的达布坐标图 $(\tilde{\rho}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上，在 $\mathbb{R}^{2n} \simeq T^*\mathcal{M}$ 我们选取使基底与纤维坐标成对的标准近复结构。定义

$$J(\tilde{\rho}, y) = (-y, \tilde{\rho}), \qquad J^2 = -\mathrm{id},$$

并通过以下方式将 $\mathbb{R}^{2n}$ 与 $\mathbb{C}^n$ 对应起来:

$$z := \tilde{\rho} + i\, y, \qquad \tilde{\rho} = \tfrac{1}{2}(z + \bar{z}), \qquad y = \tfrac{1}{2i}(z - \bar{z}). \tag{21}$$

在此对应关系下，实提升的哈密顿系统（7）

$$\dot{\tilde{\rho}} = \widehat{V}\,\tilde{\rho} + y, \qquad \dot{y} = -\,\widehat{V}^{\top} y, \qquad \widehat{V} = \widehat{S} + \widehat{F},\ \ \widehat{S}^{\top} = \widehat{S},\ \ \widehat{F}^{\top} = -\widehat{F},$$

代入（21）并整理 z 与 $\bar{z}$ 分量后，变为

$$\dot{z} = \Big(\widehat{F} - \tfrac{i}{2} I\Big) z \;+\; \Big(\widehat{S} + \tfrac{i}{2} I\Big) \bar{z}. \tag{22}$$

等价地,

$$\dot{z} = \widehat{F} z + \widehat{S} \bar{z} \;-\; \frac{i}{2}(z - \bar{z}) = \widehat{F} z + \widehat{S} \bar{z} + y, \qquad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}),$$

因此，标量项 $\pm \frac{i}{2} I$ 在 (22) 中不过是正则 $+y$ 耦合在复坐标 $z = \tilde{\rho} + iy$ 下的表示。特别地，(22) 在零残差叶之外并非复线性：它具有混合 z 与 $\bar{z}$ 的（Bogoliubov）形式。

在零残差叶 $y = 0$ 上，子空间 $y \equiv 0$ 是不变的（$\dot{y} = -\widehat{V}^{\top} y$），因此 $z = \bar{z}$，且 (22) 约化为

$$\dot{z} = (\widehat{S} + \widehat{F}) z = \widehat{V} z.$$

因此，壳上动力学变为复线性，并可写成（一般非幺正的）Schr¨odinger 形式

$$\dot{z} = -\,i\, \widehat{H}_{\mathbb{C}}\, z, \qquad \widehat{H}_{\mathbb{C}} := i\, \widehat{V} = i(\widehat{S} + \widehat{F}). \tag{23}$$

然而，只要 $\widehat{S} \neq 0$，$\widehat{H}_{\mathbb{C}}$ 便是非厄米的：事实上，一般有 $\widehat{H}_{\mathbb{C}}^{\dagger} = -\,i\,\widehat{V}^{\top} \neq \widehat{H}_{\mathbb{C}}$。在零残差叶之外（$y \neq 0$），(22) 中与 $\bar{z}$ 的耦合排除了约化为任何幺正复 Schr¨odinger 演化的可能。

这种外在复包装也清楚地说明了为什么通常的厄米范数不必守恒。沿着（22）的解对 $\|z\|^2 = z^{\dagger} z$ 求导可得

$$\frac{d}{dt}\|z\|^2 = z^{\dagger}\Big(\widehat{S} + \tfrac{i}{2} I\Big)\bar{z} + \bar{z}^{\dagger}\Big(\widehat{S} - \tfrac{i}{2} I\Big) z = 2\ \mathrm{Re}\Big(z^{\dagger}\Big(\widehat{S} + \tfrac{i}{2} I\Big)\bar{z}\Big),$$

它通常不为零。总而言之，识别 $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$ 为同一 提升实动力学提供了优雅的坐标描述，但会掩盖抛物–K¨ahler 几何：除非实生成元保持所选的近复结构 J，否则所得表示并非幺正的薛定谔演化；即使在零残差叶上，只要 $S \neq 0$，表观哈密顿量 $H_{\mathbb{C}}$ 也不是厄米的。这种对比将在第§4节中进一步阐述。

4 椭圆量子几何与 K¨ahler结构

前几节表明，最小作用理性（LAR）的提升具有一种自然的双曲量子几何解读。从信息几何（Hessian）数据出发，$\widetilde{\ }$余切提升 $N := T^*\mathcal{M}$ 自带其典范辛形式 Ω，以及一种典范的抛物–K¨ahler（抛物–厄米）方式来组织该辛空间：带有 $K^2 =$id 的乘积结构 K 将方向分成两个互补的部分，而中性度量 G 则通过下式将这种分解与辛形式联系起来

$$\Omega(u, v) = G(Ku, v).$$

这给出了一个内在的 Witt分解 $TN = E_+ \oplus E_-$，因此，双曲提升不仅表明动力学是在（N，Ω）上演化的哈密顿量动力学；它还提供了一种规范的“双扇区”几何，在这种几何中，分裂复数薛定谔图景成为一种便捷的简写（在零残差片上最为直观）。

相比之下，许多量子认知文献（例如 Busemeyer 和 Bruza（2012年））都假设采用明确的椭圆量子几何：振幅属于复希尔伯特空间，演化是幺正的。从本文的视角看，关键变化不在于辛数据（因为（N，Ω）相同），而在于用来诠释提升后几何（辛空间）的相干结构的选择。在双曲理论中，相干性由规范的抛物复数分裂（$K^2 = +$id）组织，在线性层面上导出非紧对称群

$$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(n, n) \cong \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}).$$

椭圆模型则要求一种 K¨ahler 结构（g，J，Ω），其中 $J^2 = -$id，g正定，且

$$\Omega(u, v) = g(Ju, v),$$

其线性对称群是紧致酉群

$$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(2n) \cong \mathrm{U}(n).$$

直观来说，这一点很简单：双曲结构由提升给出，而椭圆结构则意味着一种额外的建模选择：在同一个辛空间上选定一种复数意义下的正交性／相干性概念。

本节旨在明确这一额外选择，并展示如何从经典哈密顿框架中恢复标准的复（酉）量子动力学。我们不临时假设一个复结构，而是采用变分方法。从作用于（N，Ω）的哈密顿作用量出发，我们施加一项特征丛可容许性限制：要求可容许轨迹在（复化）切丛中一个特定的半维拉格朗日子丛内演化，同时将可容许变分限制在其互补的拉格朗日方向内。如下文所示，这一做法以投影演化取代完整的哈密顿方程，并等价于选择一种 K¨ahler 极化。从这个意义上说，极化并非独立的几何公设，而是在变分原理层面施加可容许性约束的辛几何表达。

4.1 椭圆量子几何

我们保留相同的提升流形 $N := T^*\widetilde{\mathcal{M}} \simeq \mathbb{R}^{2n}$ 及其典范辛形式 Ω。由于 Ω 是恰当的，存在一个在 N 上全局定义的一形式 θ，使得 $\Omega = -d\theta$。于是，任意光滑函数$H : N \to \mathbb{R}$ 都会确定一个哈密顿向量场 $X_H \in \mathfrak{X}(N)$，其定义为

$$\iota_{X_H}\Omega = dH, \tag{24}$$

等价地，积分曲线 $z(t)$ 满足 $\dot{z}(t) = X_H(z(t))$。这些曲线也可以通过变分刻画为哈密顿作用量的驻点（端点固定）：

$$\mathcal{S}[z] := \int_{t_0}^{t_1} \big(\theta(\dot{z}(t)) - H(z(t))\big)\, dt. \tag{25}$$

本节旨在说明，如何通过添加一种可容许结构来选出一个复拉格朗日扇区，从而由这一椭圆（希尔伯特空间）量子动力学得到这一相同的实哈密顿结构(N, Ω, H)。这一附加结构并非由 Ω（也非由信息几何提升）规范地确定，因此构成了真正的建模输入。

我们考虑全局达布坐标图 $(\tilde{\rho}, y) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$于 N 上，使得 $\Omega = d\tilde{\rho}^i \wedge dy_i$。在这些坐标下，我们考虑（形式上的）复化 $N_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}^{2n}$ 及其复化切丛 $TN_{\mathbb{C}} := TN \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$，并将 Ω $\mathbb{C}$按双线性方式扩展为 $\Omega_{\mathbb{C}} := \Omega \otimes 1$。固定一个复对称矩阵 $M \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{C})$，使 $\mathrm{Im}\ M$非退化，并将 $TN_{\mathbb{C}}$的常值复子丛定义为（在达布坐标中将每个纤维与 $\mathbb{C}^{2n}$ 等同），其图像为

$$L_M^{(+)} := \{(u, Mu) : u \in \mathbb{C}^n\}, \qquad L_M^{(-)} := \{(u, \bar{M}u) : u \in \mathbb{C}^n\}. \tag{26}$$

下面这个初等命题表明，这种选择给出了 $TN_{\mathbb{C}}$ 的复双拉格朗日分解。

命题 4（由 M 确定的复双拉格朗日分解）。子丛 $L_M^{(\pm)} \subset TN_{\mathbb{C}}$ 是关于 $\Omega_{\mathbb{C}}$ 的复拉格朗日。并且，$\mathrm{Im}\, M$ 非退化意味着横截性，因而得到直和分解

$$TN_{\mathbb{C}} = L_M^{(+)} \oplus L_M^{(-)}. \tag{27}$$

特别地，沿 $L_M^{(-)}$ 投影到 $L_M^{(+)}$ 上的投影算子 $\Pi_M^{(+)}$： $TN_{\mathbb{C}} \to L_M^{(+)}$ 定义良好，并且在纤维上是复线性的。

证明。对于 $u, v \in \mathbb{C}^n$ 使用标准复双线性配对 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 在 $\mathbb{C}^n$ 上（不取共轭）及其诱导公式 $\Omega_{\mathbb{C}}((a, b), (c, d)) = \langle a, d\rangle - \langle c, b\rangle$，可得

$$\Omega_{\mathbb{C}}\big((u, Mu), (v, Mv)\big) = \langle u, Mv\rangle - \langle v, Mu\rangle = \langle u, (M - M^{\top})v\rangle = 0,$$

因为 $M^{\top} = M$。因此， $L_M^{(+)}$ 是复秩为 n 的各向同性子丛，故为拉格朗日子丛；对 $L_M^{(-)}$ 也可作同样论证。如果 $(u, Mu) = (v, \bar{M}v)$，则 $u = v$ 且 $(M - \bar{M})u = 0$。由于 $M - \bar{M} = 2i\,\mathrm{Im}\ M$ 和 $\mathrm{Im}\, M$ 非退化，因此可得 $u = 0$，进而有 $L_M^{(+)} \cap L_M^{(-)} = \{0\}$。二者都是秩为 $2n$ 的复子丛，且秩均为 n，这就推出 (27)。由于该分解在所选达布坐标图中为常值，因此投影算子存在且光滑。 □

为便于后文使用，宜记录 $\Pi_M^{(+)}$ 在达布坐标下的显式公式。给定 $(a, b) \in \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$，唯一分解 $(a, b) = (u, Mu) + (v, Mv)$ 由 $u + v = a$ 与 $Mu + Mv = b$ 确定，等价地 $(M - M)u = b - Ma$。由于 $M - M = 2i\,\mathrm{Im}\ M$可逆，可得

$$u = (2i\ \mathrm{Im}\, M)^{-1}(b - \bar{M}a), \qquad \Pi_M^{(+)}(a, b) = (u, Mu). \tag{28}$$

现在，我们直接在 $N_{\mathbb{C}}$ 上的变分原理层面施加复特征丛可容许性限制。若 C^1 曲线 $z : [t_0, t_1] \to N_{\mathbb{C}}$ 满足

$$\dot{z}(t) \in L_M^{(+)} \quad \text{for all } t \in [t_0, t_1], \tag{29}$$

且沿 $z(\cdot)$ 的容许变分是一个 C^1 向量场 $\delta z(t) \in T_{z(t)}N_{\mathbb{C}}$，其端点固定，且取值受以下条件约束：

$$\delta z(t) \in L_M^{(-)} \quad \text{for all } t \in [t_0, t_1], \qquad \delta z(t_0) = \delta z(t_1) = 0. \tag{30}$$

哈密顿作用量在受限变分下的驻定性，将完整的哈密顿方程替换为其到容许拉格朗日扇区上的投影。

命题 5（由复特征丛容许性得到的投影哈密顿方程）。设 $H : N \to \mathbb{R}$ 为实解析的（特别是达布坐标中的多项式），并用同一符号表示其到 $N_{\mathbb{C}}$ 的全纯延拓。设 X_H 为 $N_{\mathbb{C}}$ 上由 $\iota_{X_H}\Omega_{\mathbb{C}} = dH$ 定义的复哈密顿向量场。一条满足 (29) 的 C^1 容许曲线 $z(\cdot)$ 对 (25) 在所有可容许变分 (30) 下驻定，当且仅当它满足

$$\dot{z}(t) = \Pi_M^{(+)} X_H\big(z(t)\big) \in L_M^{(+)}\big|_{z(t)}, \qquad \text{for all } t \in [t_0, t_1]. \tag{31}$$

证明。我们将 θ 与 Ω $\mathbb{C}$双线性地延拓到 $N_{\mathbb{C}}$，并考虑具有实参数 ε 的变分 z_ε，记为 $\delta z = \frac{d}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0} z_\varepsilon$。驻定性意味着 $\frac{d}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0}\mathcal{S}[z_\varepsilon] = 0$ 在 $\mathbb{C}$ 中。$N_{\mathbb{C}}$ 上（25）的一阶变分是标准恒等式

$$\delta\mathcal{S}[z] = \Big[\theta(\delta z)\Big]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \Omega_{\mathbb{C}}\big(\delta z, \dot{z} - X_H(z)\big)\, dt,$$

这由 $\Omega_{\mathbb{C}} = -d\theta$ 和 $\iota_{X_H}\Omega_{\mathbb{C}} = dH$ 得到。根据 (30)，边界项消失，因此对所有可容许的 δz 而言，驻定性等价于

$$\Omega_{\mathbb{C}}\big(\delta z(t), \dot{z}(t) - X_H(z(t))\big) = 0 \qquad \forall\, t \in [t_0, t_1],\ \forall\, \delta z(t) \in L_M^{(-)}.$$

根据 (27)，将 $e(t) := \dot{z}(t) - X_H(z(t))$ 分解为 $e(t) = e_+(t) + e_-(t)$，其中 $e_\pm(t) \in L_M^{(\pm)}$。由于 $L_M^{(-)}$ 是拉格朗日的，对于所有 $\delta z \in L_M^{(-)}$，$\Omega_{\mathbb{C}}(\delta z, e_-) = 0$，因此该条件化简为：对于所有 $\delta z \in L_M^{(-)}$，$\Omega_{\mathbb{C}}(\delta z, e_+) = 0$。横截性意味着 $\Omega_{\mathbb{C}}$ 与 $L_M^{(+)}$ 非退化地配对，因此对于所有 t，$e_+(t) = 0$，即 $\Pi_M^{(+)} e(t) = 0$。应用 $\Pi_M^{(+)}$ 并利用 $\dot{z}(t) \in L_M^{(+)}$，得到 $\dot{z}(t) = \Pi_M^{(+)} X_H(z(t))$，这就是 (31)。

□

在达布坐标图 (26) 中，运动学约束 (29) 即为图关系

$$\dot{y}(t) = M\, \dot{\tilde{\rho}}(t). \tag{32}$$

因此，命题 5 给出了通用的约化原理：变分容许性限制将哈密顿方程转化为沿所选复拉格朗日扇区切向的投影演化。椭圆构造的其余部分，则是对这一投影动力学在适配图约束的坐标下进行显式分析。

当 $\operatorname{Im} M$ 为定号时，可通过一次保持 Ω 不变的达布坐标实辛变换（即线性坐标的 $\mathrm{Sp}(2n,\ \mathbb{R})$ 变换），将 $\operatorname{Im} M = -I$ 标准化，并写为 $M = R - iI$，其中 $R^\top = R$。在这一标准化类中，定义复线性组合

$$\psi := (I - iR)\tilde{\rho} + i\, y, \qquad \phi := (I + iR)\tilde{\rho} - i\, y. \tag{33}$$

求导并代入(32)，得到

$$\dot{\phi}(t) = 0, \tag{34}$$

因此，可容许运动学以仿射叶 $\{\phi=\phi_0\}$将约束动力学叶化，并且在每一叶上，投影方程(31)闭合为全纯坐标 ψ的演化方程。

在辛归一化坐标（33）中，可将可容许性限制等价地表述如下： $\dot z\in L_M^{(+)}$ 等价于图关系（32），而在（ψ，ϕ）变量中这恰好就是守恒律 $\dot\phi=0$。因此，可容许运动学将约束动力学分叶为仿射叶 $\{\phi=\phi_0\}$，且在每个叶上，投影方程（31）闭合为关于全纯坐标 ψ 的一阶演化方程。

为将这一一般约化原理与标准复量子动力学联系起来，我们现在特化到一种特定的极化。对于提升的最小作用哈密顿量（6），选择$M_*=(1-i)I$（即（33）中的 $R=I$）在不变全纯叶 $\{\phi=0\}$ 上给出一个椭圆型薛定谔方程:

命题6（薛定谔动力学源自特定极化）。设 $H(\tilde\rho,\ y)=\frac12\|y\|^2+\langle y,\ \widehat V\tilde\rho\rangle$ 为提升的最小作用哈密顿量，其中 $\widehat V=\widehat S+\widehat F$、 $\widehat S^{\top}=\widehat S$、 $\widehat F^{\top}=-\widehat F$。固定由下式确定的复极化

$$M_*=(1-i)I,\qquad \operatorname{Im}M_*=-I,$$

并使用相应的全纯/反全纯坐标（参见(33)，其中 $R=I$）

$$\psi:=(1-i)\tilde\rho+i\,y,\qquad \phi:=(1+i)\tilde\rho-i\,y.$$

那么，每个仿射叶 $\{\phi=\phi_0\}$ 在投影哈密顿动力学(39)下都是不变的；特别地， $\{\phi=0\}$ 是不变的。在 $\{\phi=0\}$ 上有

$$i\,\dot\psi=(I+\widehat S+i\widehat F)\psi. \tag{35}$$

等价地，经过标量重相位 $\Psi(t):=e^{it}\psi(t)$后，演化满足标准薛定谔方程

$$i\,\dot\Psi=(\widehat S+i\widehat F)\Psi. \tag{36}$$

证明。对于 $H(\tilde\rho,y)=\frac12\|y\|^2+\langle y,\widehat V\tilde\rho\rangle$，哈密顿向量场为

$$X_H(\tilde\rho,y)=\big(a,b\big)=\big(y+\widehat V\tilde\rho,\ -\widehat V^{\top}y\big).$$

投影动力学 (39) 为 $\dot z=\Pi_{M_*}^{(+)}X_H(z)$，因此 $\dot z\in L_{M_*}^{(+)}$，从而 $\dot y=M_*\dot{\tilde\rho}$。对 ϕ 和 ψ 的定义求导可得

$$\dot\phi=(1+i)\dot{\tilde\rho}-i\dot y=(1+i-iM_*)\dot{\tilde\rho}=0,\qquad \dot\psi=(1-i)\dot{\tilde\rho}+i\dot y=(1-i+iM_*)\dot{\tilde\rho}=2\dot{\tilde\rho}.$$

因此，每个叶 $\{\phi=\phi_0\}$ 都是不变的，并且 $\dot{\tilde\rho}=\frac12\dot\psi$。

利用显式投影算子公式 (28)，其中 $M_*=(1+i)I$ 且 $\operatorname{Im}M_*=-I$，投影后的速度满足

$$\dot{\tilde\rho}=(2i\,\operatorname{Im}M_*)^{-1}\big(b-\bar M_*a\big)=\frac{1}{2i}\big(\bar M_*a-b\big).$$

在全纯叶 $\{\phi=0\}$ 上，有 $y=M_*\tilde\rho$ 和 $\tilde\rho=\psi/2$，因此 $a=\frac12(M_*+\widehat V)\psi$ 且 $b=-\frac12\widehat V^{\top}M_*\psi$。代入后得到

$$\dot\psi=2\dot{\tilde\rho}=\frac1i\Big(\bar M_*a-b\Big)=\frac1i\Big(I+\widehat S+i\widehat F\Big)\psi,$$

即（35）。通过重新定相 $\Psi(t)=e^{it}\psi(t)$，即可得到最终的薛定谔形式。 □

总而言之，在当前的椭圆构造中，需要额外提供一个 Ω相容复拉格朗日扇区 $L_M^{(+)} \subset TN_{\mathbb{C}}$ 作为建模输入。在适配坐标 $(\psi,\ \phi)$ 中，这一可容许性要求等价于守恒律 $\phi = 0$。因此，投影动力学由不变仿射叶 $\{\phi = \phi_0\}$ 组成。对于特定选择 $M_* = (1-i)I$，叶 $\{\phi = 0\}$（反全纯坐标为零）承载着薛定谔演化，其生成元为 $S + iF$，相差恒等算子的一个加性标量倍数（等价地说，是整体相位／射影规范）。

将其与第3节中的双曲（拟 K¨ahler）提升进行对比很有帮助。在那里，典范 Witt 分解由 Fisher–Rao/海森数据固定，而偏离拟幺正性的部分完全由幂零剪切承担。在零残差叶 $\Sigma_0 = \{(\tilde{\rho},\ y)\colon\ y = 0\}$，剪切不起作用，动力学闭合为拟幺正分块流，并得到一个拟全纯（分裂复数，$\mathbb{D}$）薛定谔表示（即“拟薛定谔”方程（20））。因此，两个部分都具有自然的“零叶”：$\{\phi = 0\}$ 在椭圆情形中，Σ_0 在双曲情形中。区别在于，Σ_0 由提升本身典范地确定，而 $\{\phi = 0\}$ 则取决于所选的复数部分 $L_M^{(+)}$。

因此，椭圆相干性并不单凭最小作用理性就能推出：它还需要一项额外的可容许性限制，以选定一个复拉格朗日扇区。这促使我们在所选的全纯扇区内采用修正后的最小作用量公设，并将在下文将其表述为相干最小作用理性（CLAR）。

4.2 相干最小作用理性

第§2节中的行为假设，尤其是第§2.3节关于LAR的假设，

$\widetilde{}$ 确定了 $N := T^*\mathcal{M}$ 上的典范抛物K¨ahler提升，并得出第§3节推导的提升双曲（Krein空间）模型。相比之下，椭圆（希尔伯特空间）量子模型需要Fisher–Rao数据未确定的额外结构：正如我们在上文第§4.1节所见，必须指定一个与Ω相容的复数部分，等价地说，一个复拉格朗日极化，然后将可容许的演化限制在该扇区内。从行为层面看，椭圆相干性因此并非假设A1–A3的推论，而是一项额外的可容许性要求。

我们将这一附加要求表述为同一底层实辛相空间上经修正的最小作用量公设。设 θ 为 N 上的典范一形式，且$\Omega = -d\theta$，设 $H\colon\ N \to \mathbb{R}$ 为提升的哈密顿量，并将（$N,\ \Omega\ \theta,\ H$）延拓至复化 $N_{\mathbb{C}}$。固定复化切丛的一个复双拉格朗日分解，

$$TN_{\mathbb{C}} = L^{(+)} \oplus L^{(-)}, \qquad \Omega_{\mathbb{C}}|_{L^{(\pm)}} \equiv 0, \qquad L^{(-)} = \overline{L^{(+)}}.$$

在第§4.1节所用的常值达布设置中，这种分解等价地由矩阵 $M \in \mathrm{Sym}(n,\ \mathbb{C})$ 指定，其中Im M经由 $L^{(+)} = L_M^{(+)}$、$L^{(-)} = L_M^{(-)}$ 非退化，如（26）所示，并带有沿 $L^{(-)}$到 $L^{(+)}$ 上的相伴投影算子 $\Pi^{(+)} = \Pi_M^{(+)}$。

考虑 C^1 曲线 $z\colon\ [t_0, t_1] \to N_{\mathbb{C}}$上的哈密顿作用量，

$$\mathcal{S}[z] := \int_{t_0}^{t_1} \big(\theta(\dot{z}(t)) - H(z(t))\big)\, dt.$$

若曲线 $z(\cdot)$满足以下条件，则称其为相干可容许 （对于所选的极化）：

$$\dot{z}(t) \in L^{(+)}_{z(t)} \qquad \text{for all } t \in [t_0, t_1], \tag{37}$$

沿着 $z(\cdot)$的容许变分 是一个 C^1 场 $\delta z(t) \in T_{z(t)}N_{\mathbb{C}}$ ，其端点固定，且取值受以下条件约束：

$$\delta z(t) \in L^{(-)}_{z(t)}, \qquad \delta z(t_0) = \delta z(t_1) = 0. \tag{38}$$

假设3' [相干最小作用理性（CLAR）] 给定一种复极化$TN_{\mathbb{C}} = L^{(+)} \oplus L^{(-)}$，决策者实现相干可容许历程 $z(\cdot)$，这些历程在所有容许变分(38)下均使哈密顿作用量 $\mathcal{S}[z]$ 取驻值。

根据命题 5，假设3'等价于投影哈密顿方程

$$\dot{z}(t) = \Pi^{(+)} X_H\big(z(t)\big) \in L^{(+)}_{z(t)}, \qquad t \in [t_0, t_1], \tag{39}$$

其中， X_H 是由 $\iota_{X_H}\Omega_{\mathbb{C}} = dH$定义的（复）哈密顿向量场。因此，CLAR以极化分量取代完整的哈密顿演化：互补的 $L^{(-)}$ 分量不沿X_H 演化，而是通过可容许性加以排除。

当 Im M定号时（经归一化 Im $M < 0$之后），极化通过 $\langle u, v\rangle_M := -i\Omega_{\mathbb{C}}(u, \bar{v})$在 $L^{(+)}$ 上诱导出正定半双线性形式，因此（39）成为相应希尔伯特空间上的幺正演化。对于提升的最小作用哈密顿量（7），特定选择 $M_* = (1-i)I$ 在不变全纯叶 $\{\phi = 0\}$上给出标准的$\widehat{\quad}\quad\widehat{\quad}$薛¨定动力学，其生成元为厄米算子 $S + iF$ （命题6）。特别是，椭圆模型中的相干性是一种明确的行为限制：它通过选择复极化并在其全纯扇区内 应用最小作用原理来施加，而不是仅由双曲型LAR提升产生。

5 有限理性

本节从有限理性的视角回顾最小作用理性（LAR）模型。我们的核心主题是区分潜在信息几何动力学与单纯形上的认识性读出：前者以振幅（及其提升）为基础进行表述，后者则生成可观测选择频率。我们主要考察前文阐述的双曲（分裂复数／拟 K¨ahler）情形，其中提升相空间

$$N := T^*\widetilde{\mathcal{M}} \subset T^*\mathbb{R}^n$$

携带其典范辛形式 Ω，以及由海森数据诱导的拟 K¨ahler 结构；而 N 上的哈密顿型 LAR 动力学在零残差叶上限制为拟幺正（分裂复数 Schr¨odinger 型）扇区。最后一个小节（第 5.5 节）将简要回到椭圆（复数、幺正）相干扇区，以对比在 CLAR 下哪些有限理性机制仍然成立，哪些则是双曲提升所特有的。

与其他类量子方法一样，两种状态描述并存。潜在状态是振幅（或提升的振幅—动量对），在信息几何提升上演化；而认知状态 则是单纯形上的概率分布 $\mathcal{M} = \Delta^{n-1}_{>0}$，通过几何投影（在选定的读出基中进行归一化和平方）获得。潜在变量不必赋予本体论解释；就我们的目的而言，重要的是它们支持典范微分几何和优选的 LAR 动力学，而认识论变量则是固定语境中可观测的选择频率。因此，有限理性可理解为这两种描述之间的不匹配：即使潜在层遵循简洁的变分原理，诱导出的认识论行为仍可能具有路径依赖性、历史

依赖性和情境依赖性，这是因为潜在生成器中存在结构性约束，也因为要过渡到可观测量需要进行几何约化。

我们根据这些机制产生的位置加以区分：它们可能内在于认知单纯形 $\mathcal{M}$，内在于零残差叶上的潜在壳上流，内在于完整提升的（非壳上）相空间动力学，也可能源自将潜在振幅约化为可观测概率的几何读出映射。因此，我们按以下顺序展开。第 5.1 节研究偏好形式 β 在 $\mathcal{M}$上的认识非可积性。第 5.2 节研究零残差叶上的潜在壳上$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$划分 $V = S + F$，并引入射线上的单调熵时钟。第 5.3 节利用中性形式 Q 及相关指标$\Lambda(t)$研究壳外偏离。第 5.4 节研究由读出族 π_B引起的情境依赖性和双曲干涉。最后，在第 5.5 节中，我们简要回到椭圆相干扇区（CLAR），对比哪些有界理性机制在酉希尔伯特空间演化下依然存在，哪些则是双曲提升所特有的。

5.1 非可积性

假设 $n \geq 3$，因此 $\mathcal{M} = \Delta^{n-1}_{>0}$ 的维数为 $\mathcal{M} \geq 2$，并且存在非常数的光滑闭环和嵌入圆盘。回顾第 2.2 节，在彩票上的诱导认知偏好场是 1-形式 $\beta = \mathcal{T}(\widehat{V}) \in \Omega^1(\mathcal{M})$，它是将球面形式 $\bar{\alpha}^{\mathbb{S}}$ 限制到 $\mathbb{S}^{n-1}_+$ 上，再沿平方根坐标图 $\iota\colon \mathcal{M} \to \mathbb{S}^{n-1}_+$, $\iota(q) = \sqrt{q}$ 拉回所得。所有涉及 β（因而也涉及 $d\beta$）的单纯形层面微分恒等式，均理解为定义在 $\mathcal{M}$ 上；若一条轨迹触及 Δ^{n-1} 的边界，则如第 3 节所述，应在每个支撑固定的时间区间上分段理解。根据命题1，该偏好场可作如下规范分解

$$\beta = \mathcal{U} + \mathcal{R}, \qquad \mathcal{U} = dU, \qquad \mathcal{R} = \beta - \mathcal{U}, \qquad d\beta = d\mathcal{R}.$$

保守部分 $\mathcal{U}$ 存在全局势函数，而 $\mathcal{R}$ 则刻画了全局可积性障碍。我们将这一障碍整理如下。

定义 1 (共效用有界理性)。若 β 无法在全局上由 $\mathcal{M}$上的效用势表示，即不存在满足 $\beta = dU$的 $U\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$，则认知偏好表现出共效用有界理性。由于 $\mathcal{M}$ 可缩，这等价于 $d\beta \neq 0$；也等价于存在光滑闭环 $\gamma \subset \mathcal{M}$，使得 $\oint_\gamma \beta \neq 0$（根据斯托克斯定理，对于张成 γ 且包含于 $\mathcal{M}$的任意嵌入式2维圆盘 D，均有 $\oint_{\partial D} \beta = \int_D d\beta$；在边界接触的情况下，此恒等式按第 *3* 节所述，在每个固定支撑分层上理解）。

遵循 Russell (1991) 的几何观点，我们因此将这个 2-形式解释为

$$\mathcal{K} := d\beta$$

一种偏好曲率：它衡量路径无关性的失效，其通量则决定序贯变化所产生的累积回路整体效应（遗憾）。在我们的算子类中，保守部分恰好就是效用通道，因此这一障碍完全由共效用通道承载：根据命题1，$d\beta = d\mathcal{R}$。因此，期望效用行为对应于 $\mathcal{K} \equiv 0$，而非零曲率则预示着序贯选择中的路径依赖和顺序效应。这种表述与经典的遗憾／失望动机相符（LoomesSugden（1982）；Bell（1982））。非保守分量内在地源自共效用分量，而该分量由同一个潜在算子诱导；这个算子也生成效用势。

注 6。上述讨论可视为“非理性之塔”的一种具体体现。正如 Russell (1991) 所提出的：我们从偏好 1-形式 β 开始，并依次测量

偏离 通过反复应用外导数，与经典势表示相区分 e,

$$\beta, \quad d\beta, \quad d(d\beta), \ \ldots$$

在当前设定中，第一步就已经穷尽了认知偏好所面临的实质性阻碍。首先，由于 $\mathcal{M} = \Delta_{>0}^{n-1}$ 可缩，全局效用势唯一的 de Rham 阻碍就是曲率 $d\beta$；一旦 $d\beta$ 消失， β 就是闭的，因而也是恰当的。其次，对于 1-形式，外导数链总是在第一个阻碍之后立即终止，因为 $d^2 = 0$ 蕴含 $d\,(d\beta) \equiv 0$。因此，取决于模型的并非形式截断，而是对其作何解释：在我们的构造中， β 的不可积内容被规范地识别为由潜在偏好算子的反对称部分 F 所诱导的 ^ 共效用通道，而偏好曲率 $d\beta$ 则衡量决策环周围由此产生的整体效应（遗憾）。

5.2 零残差叶上的熵福利时钟

^ ^ ^ ^回想一下，在我们的算子表示中， $V = S + F$ 对称通道 S 编码评价性^范数变化，而斜通道 F 则产生循环（类似遗憾）的漂移。本小节旨在用极变量明确区分这两者，并在射线上引入一个典范标量时钟，以谱规范选择为锚；当我们之后离开零残差叶时，该选择将作为参照。这个时钟之所以称为熵 时钟，是因为它是二次读出中的对数配分归一化因子（因此通过凸对偶与香农熵相配对）；^而其在壳生成率 由评价通道 S产生，而非由^循环通道 F 产生。

回想一下，在零残差叶上我们令 $y \equiv 0$，因此提升振幅满足线性˙ ^ ^ ^ ^在壳动力学（7），即 $\tilde{\rho} = V\,\tilde{\rho}$，其中 $V = S + F$。我们写出极分解

$$r(t) := \|\tilde{\rho}(t)\| > 0, \qquad \rho(t) := \frac{\tilde{\rho}(t)}{\|\tilde{\rho}(t)\|} \in \mathbb{S}^{n-1}, \qquad \tilde{\rho}(t) = r(t)\rho(t).$$

对 $\|\rho(t)\|^2 \equiv 1$ 求导，得到 $\langle \rho(t) | \dot{\rho}(t) \rangle = 0$。将 $\dot{\tilde{\rho}} = \dot{r}\,\rho + r\,\dot{\rho}$ 代入壳上˙ ^演化方程 $\tilde{\rho} = V\tilde{\rho}$，并分离径向分量与切向分量，可得极恒等式

$$\dot{r}(t) = \Big\langle \rho(t) \Big| \widehat{S}\,\rho(t) \Big\rangle \, r(t), \tag{40}$$

and

$$\dot{\rho}(t) = \Big(\widehat{F} + \widehat{S} - \Big\langle \rho(t) \Big| \widehat{S}\rho(t) \Big\rangle \, I \Big) \rho(t), \qquad \langle \rho(t) | \dot{\rho}(t) \rangle = 0. \tag{41}$$

通道分离在范数变化层面已清晰可见：由反对称性可知，对所有 ρ，$\Big\langle \rho \Big| \widehat{F}\rho \Big\rangle = 0$ 均成立，因此 $\widehat{F}$不会产生直接径向分量，而 $\widehat{S}$则通过（40）完全决定 ^ ^径向变化率 $\dot{r}/r$ 。与此同时， S 也会通过（$S - \Big\langle \rho \Big| \widehat{S}\rho \Big\rangle I$）$\rho$影响切向漂移，而瞬时方向 $\rho(t)$则通过瑞利商 $\Big\langle \rho(t) \Big| \widehat{S}\rho(t) \Big\rangle$影响径向变化率。因此，环流可能改变路径 $\rho(t)$，但当 $S = 0$时，它无法产生^时钟产生。

认知状态通过对坐标平方得到，

$$q_i(t) := \rho_i(t)^2, \qquad q(t) \in \Delta^{n-1},$$

因此，单纯形可观测量仅取决于射线 $\mathbb{R}_{>0}\tilde{\rho}(t)$，而不取决于尺度 $r(t)$。编码这种射线不变性的一种简便方式，是利用单纯形投影的恒等变换不变性：对于任意 $c \in \mathbb{R}$，

$$\widehat{S} \mapsto \widehat{S} + cI \quad \Longrightarrow \quad \tilde{\rho}(t) \mapsto e^{ct}\tilde{\rho}(t) \quad \Longrightarrow \quad q_i(t) = \frac{\tilde{\rho}_i(t)^2}{\|\tilde{\rho}(t)\|^2} \ \text{ unchanged},$$

方向方程 (41) 也保持不变，因为该平移在 $\widehat{S} - \Big\langle \rho \Big| \widehat{S}\rho \Big\rangle I$ 中相互抵消。因此，我们将 $S \mapsto S + cI$ 视为射影规范。

现在我们引入尺度变量，作为内禀的熵（等价地说，福利）时钟。定义归一化因子

$$\mathcal{Z}(t) := \|\tilde{\rho}(t)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\rho}_i(t)^2, \qquad \sigma(t) := \log \|\tilde{\rho}(t)\| = \tfrac{1}{2}\log \mathcal{Z}(t),$$

以及非负权重 $w_i(t) := \tilde{\rho}_i(t)^2,$，使得 $\mathcal{Z} = \sum_i w_i$ 且 $q_i = w_i / \sum_j w_j$。当 $w_i(t) > 0$ 时，我们可以写作 $w_i = e^{\varphi_i}$，其中 $\varphi_i(t) := \log w_i(t)$，由此得到

$$\mathcal{Z}(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{\varphi_i(t)}, \qquad q_i(t) = \frac{e^{\varphi_i(t)}}{\sum_{j=1}^{n} e^{\varphi_j(t)}}.$$

（这些恒等式通过连续性延拓至边界，并约定 $0\log 0 := 0$。）因此，$\log \mathcal{Z} = \log \sum_i e^{\varphi_i}$ 是对数和指数归一化因子（离散选择中的“包容值”），并通过变分恒等式与香农熵自然配对

$$\log\Big(\sum_{i=1}^{n} e^{\varphi_i}\Big) = \sup_{q \in \Delta^{n-1}} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i + \mathcal{H}(q) \Big\}, \qquad \mathcal{H}(q) := -\sum_{i=1}^{n} q_i \log q_i,$$

（约定 $0 \log 0 := 0$）。由于 $q(t)$ 恰好是归一化权重向量，因此沿整个过程上确界均可达到，从而得到自由能恒等式

$$\log \mathcal{Z}(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i(t)\, \varphi_i(t) + \mathcal{H}\big(q(t)\big). \tag{42}$$

这正是 $\sigma = \frac{1}{2}\log \mathcal{Z}$ 同时具有“福利”（对数配分势）和“熵”特性的含义（通过凸对偶与 $\mathcal{H}$ 配对），而这一点与切向漂移是否包含 $\widehat{\ }$环流（$F \neq 0$）无关。

就动力学而言，采用一种符合上述射影规范的规范方式来锚定 σ 会更方便。令

$$\lambda_{\min} := \lambda_{\min}(\widehat{S}), \qquad \widehat{S}_+ := \widehat{S} - \lambda_{\min} I \succeq 0,$$

并定义谱归一化的熵福利时钟

$$\sigma_+(t) := \log \|\tilde{\rho}(t)\| - \lambda_{\min}\, t \;=\; \tfrac{1}{2}\log \mathcal{Z}(t) - \lambda_{\min}\, t. \tag{43}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$这种锚定具有射影不变性：在 $S \mapsto S + cI$ 下，有 $\log \|\tilde{\rho}(t)\| \mapsto \log \|\tilde{\rho}(t)\| + ct$，且 $\lambda_{\min} \mapsto \lambda_{\min} + c$，因此 σ_+ 保持不变。沿任意零残差轨迹，我们有

$$\dot{\sigma}_+(t) = \Big\langle \rho(t) \Big| \widehat{S}_+ \rho(t) \Big\rangle \geq 0, \tag{44}$$

因此 σ_+ 单调不减，且除非 $\rho(t)$ 始终处于基态特征空间 $\ker(S_+)$ 中，否则严格递增。特别是，时钟产生由评价通道驱动： F 不贡献直接的径向分量；当 $S=0$ 时，有 $\dot{\sigma}_+ \equiv 0$。此外，(44) 仅取决于射线 $\rho(t)$，因此除一个加法常数外，时钟由射线轨迹决定：

$$\sigma_+(t) - \sigma_+(t_0) = \int_{t_0}^{t} \left\langle \rho(s) \middle| \widehat{S}_+ \rho(s) \right\rangle \, ds.$$

这与第3.3节中的辅助复数重构相一致，其中定义了所封装的 生成元 $H_{\mathbb{C}}$。若 $H_{\mathbb{C}}$ 关于由欧几里得度量诱导的标准复内积是埃尔米特的，则意味着幺正演化，从而保持范数。特别地，在纯循环情形（$S=0$）中，演化是幺正的，并保持欧几里得范数。

最后，将(41)经由 $q_i = \rho_i^2$ 映射，得到诱导单纯形漂移。在算子分解的层面上，该漂移分离为由 S 驱动的评价贡献以及由 F 驱动的循环贡献。当 $n \geq 3$ 时，命题1在那里所述的正则性假设下，通过将诱导偏好1-形式 $\beta = \mathcal{T}(V)$ 分解为其势部分 dU（效用）及其互补部分（共效用），在单纯形上识别这一分离。

极变量也预示了非壳上会发生变化的内容。沿一般提升轨迹， 具有 $\tilde{\rho} = y + V\tilde{\rho}$，因此径向变化率恰好获得残差的径向分量，

$$\dot{r}(t) = \langle \rho(t) | y(t) \rangle + r(t) \left\langle \rho(t) \middle| \widehat{S} \rho(t) \right\rangle.$$

等价地，在归一化因子的层面上，可以得到

$$\dot{\mathcal{Z}}(t) = 2\,\langle \tilde{\rho}(t) | y(t) \rangle + 2\left\langle \tilde{\rho}(t) \middle| \widehat{S}\,\tilde{\rho}(t) \right\rangle, \qquad \dot{\sigma}(t) = \left\langle \rho(t) \middle| \widehat{S} \rho(t) \right\rangle + \frac{\langle \tilde{\rho}(t) | y(t) \rangle}{\mathcal{Z}(t)}.$$

因此，这一独特的新标量贡献由中性配对 $\langle \tilde{\rho}(t) | y(t) \rangle$ 来度量。在下一小节中，我们通过零锥指标 $\Lambda(t) = 2\,\langle \tilde{\rho}(t) | y(t) \rangle$（从而 $\dot{\sigma} = \left\langle \rho \middle| \widehat{S} \rho \right\rangle + \Lambda/(2\mathcal{Z})$）使这一相空间可观测量显式化，并说明它如何记录作用量累积，以及对非壳上过程施加单向过锥约束。

5.3 结构性双曲有界理性：零锥、作用量累积与单向过锥

前面的各小节在认识流形 $\mathcal{M}$ 上揭示了有限理性的机制：不可积性由偏好曲率 $d\beta$ 检测，而在零残差 叶上，潜在分裂 $V = S + F$ 将评价性范数变化与循环漂移区分开来。现在，我们聚焦于一种截然不同、专属于双曲型的机制；它只有在完整的提升动力学中才可见：残差非零的非壳上过程，由相空间中的正交关系组织，而该关系由副 Kähler 提升的典范中性形式编码。

回顾一下，我们考虑提升模型的达布坐标图 $Z = (\tilde{\rho}, y) \in T^*\widetilde{\mathcal{M}} \simeq \mathbb{R}^{2n}$，其中 y 表示残差（动量），而 $t \mapsto Z(t) = (\tilde{\rho}(t),\ y(t))$ 是满足式（7）的提升轨迹。根据 1 和式（9），欧几里得海森提升具有典范中性二次型

$$Q(\tilde{\rho}, y) = 2\langle \tilde{\rho}, y \rangle.$$

沿着一条 e 剧集 $Z(t) = (\tilde{\rho}(t),\ y(t))$ 因此，我们考虑相关的标量观测量

$$\Lambda(t) := (Q \circ Z)(t) = Q\big(\tilde{\rho}(t), y(t)\big) = 2\langle \tilde{\rho}(t), y(t) \rangle. \tag{45}$$

水平集

$$\mathcal{N} := \{Z \in T^*\widetilde{\mathcal{M}} : Q(Z) = 0\} = \{(\tilde{\rho}, y) : \langle \tilde{\rho}, y\rangle = 0\}$$

即为决策光锥[5], ，也就是零锥。它包含零残差叶 $\{y = 0\}$，但范围严格更大：零约束 $\Lambda = 0$ 仅施加正交性 $\langle \tilde{\rho},\ y\rangle = 0$ 并不强制 $y = 0$。

对零约束的解释是有限理性偏差的正交分解。对于 $\tilde{\rho} \neq 0$，记 $r := \|\tilde{\rho}\| > 0$ ，并记 $\rho := \tilde{\rho}/r \in \mathbb{S}^{n-1}$。将残差分解为平行于瞬时振幅方向的分量及其正交补，

$$y_{\parallel} := \langle \rho, y\rangle\, \rho, \qquad y_{\perp} := y - y_{\parallel}, \qquad \langle \rho, y_{\perp}\rangle = 0.$$

Then

$$\Lambda = 2\langle \tilde{\rho}, y\rangle = 2r\, \langle \rho, y\rangle,$$

因此， Λ 恰好度量了 $y_{\parallel}$ 的径向 分量。特别地，

$$Z \in \mathcal{N} \quad \Longleftrightarrow \quad \langle \tilde{\rho}, y\rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y_{\parallel} = 0,$$

也就是说，在零锥上，瞬时最小作用量偏差完全沿半径为 r 的球面切向。

这种区别在行为层面具有重要意义，因为单纯形可观测量仅通过二次读出依赖射线 $\mathbb{R}_{>0}\tilde{\rho}$

$$q_i = \frac{\tilde{\rho}_i^2}{\|\tilde{\rho}\|^2} = \rho_i^2,$$

而提升模型则展示偏差如何在相空间中累积。量 Λ分离出与当前振幅方向对齐的残差分量，从而将“径向”偏差（$\Lambda \neq 0$）与固定半径处的“纯再分配”偏差（$\Lambda = 0$）区分开来。

双曲提升的一个核心特征是，相应的单次过程级指标 Λ 满足带有非负源项的精确平衡定律。沿解对(45)求导，并代入来自(7)的 $\dot{\tilde{\rho}} = y + \widehat{V}\tilde{\rho}$与 $\dot{y} = -\widehat{V}^{\top} y$，可得

$$\dot{\Lambda}(t) = 2\langle \dot{\tilde{\rho}}(t), y(t)\rangle + 2\langle \tilde{\rho}(t), \dot{y}(t)\rangle = 2\|y(t)\|^2,$$

从而得到单调性恒等式

$$\dot{\Lambda}(t) = 2\|y(t)\|^2 \geq 0. \tag{46}$$

对(46)从 t_0 到 t 积分，得到

$$\Lambda(t) = \Lambda(t_0) + 2\int_{t_0}^{t} \|y(\tau)\|^2\, d\tau, \qquad t \geq t_0. \tag{47}$$

因此，自然可将 Λ 解释为零锥指标 ，其增量记录了相对于零残差叶的累积偏差。我们将相关的非负累积泛函命名为

$$\mathcal{A}(t; t_0) := \int_{t_0}^{t} \|y(\tau)\|^2\, d\tau, \qquad t \in [t_0, t_1]. \tag{48}$$

由于 $y = \dot{\tilde{\rho}} - \widehat{V}\tilde{\rho}$沿任意单次过程，有 $L(\tilde{\rho}, \dot{\tilde{\rho}}) = \frac{1}{2}\|y\|^2$，因此在$[t_0, t]$ 上累积的作用量为

$$\int_{t_0}^{t} L\, d\tau = \tfrac{1}{2}\, \mathcal{A}(t; t_0) = \tfrac{1}{4}\big(\Lambda(t) - \Lambda(t_0)\big).$$

[5]Levin（2019）定义了 *cognitive light cone*，这是另一种情境中的不同概念。

因此， Λ 同时既是几何相空间指标，也是累积最小作用量偏差的定量记录。

Λ 的单调性相对于零锥施加了单向约束。固定 t_0。若$\Lambda(t_0) > 0$，则对所有 $t \geq t_0$，都有 $\Lambda(t) > 0$ 。若 $\Lambda(t_0) = 0$ 且 $y(t_0) \neq 0$，则 $\dot{\Lambda}(t_0) = 2\|y(t_0)\|^2 > 0$，因此对所有 $t > t_0$，都有 $\Lambda(t) > 0$ 。若 $\Lambda(t_0) < 0$，则对于 $t \geq t_0$， Λ 至多穿过 0 一次；任何穿越时刻 $t_* > t_0$ （若存在）都由下式唯一确定：

$$\Lambda(t_*) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{A}(t_*; t_0) = \int_{t_0}^{t_*} \|y(\tau)\|^2 \, d\tau = -\frac{\Lambda(t_0)}{2}.$$

最后，对所有正向时间始终处于零锥上等价于残差为零：根据 (46)，对所有 $t \geq t_0$ ，条件 $\Lambda(t) \equiv \Lambda(t_0)$ 成立，当且仅当 $\|y(t)\| \equiv 0$，即对所有 $t \geq t_0$， $y(t) \equiv 0$。特别是，任何残差非零且触及 $\mathcal{N}$ 的阶段都会立即离开并进入区域$\{Q > 0\}$，且在正向时间内无法返回 $\{Q < 0\}$ 。

将这种提升后的过程层面约束与前文讨论的内在单纯形分解进行对比，很有帮助。在 $\mathcal{M}$ 偏好场 $\beta = \mathcal{T}(V)$ 可作典范分解$\beta = \mathcal{U} + \mathcal{R}$ ，其中 $\mathcal{U} = dU$ 且 $d\beta = d\mathcal{R}$ （命题1）；因此，共效用有界理性可通过曲率 $d\beta$ 来检测，也可通过回路整体性进行探查。相比之下， $\Lambda(t) = 2\langle \tilde{\rho}(t)\ y(t) \rangle$ 取决于余变量 y ，因此不能仅由认知状态 $q(t)$决定。因此，共效用有界理性是认知偏好场 在 $\mathcal{M}$ 上的一种属性，而零锥指标 Λ 则是提升模型中非壳上过程的轨迹 诊断量：它量化累积偏差，并强制施加双曲最小作用量提升所特有的单向过锥约束。

注 7 （双结果情形与洛伦兹度规符号。）。 对于 $n = 2$ 双曲（分裂复数）表示法，可以直接作 (2+1) 维洛伦兹解释。将 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$规范平移 $V \mapsto V + cI$ （在单纯形投影下不可见）取模后，有效的无迹生成元可视为 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 中的一个元素，并且存在李代数同构

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \ \cong \ \mathfrak{so}(2, 1),$$

其中 $\mathfrak{so}(2, 1)$ 是度规符号为 (2,1) 的洛伦兹李代数。

在群层面上，存在标准的二重覆盖

$$\mathrm{Spin}(2, 1) \ \longrightarrow \ \mathrm{SO}^+(2, 1), \qquad \ker = \{\pm 1\},$$

且 Spin(2,1) $\cong$SL(2, $\mathbb{R}$)。用几何代数的术语来说，Spin(2,1) 在偶子代数 Cl^+(2,1) 内实现，并通过夹心映射 $v \mapsto RvR^{-1}$作用于 $\mathbb{R}^{2,1}$ 。

从几何上看，这是复数二能级系统布洛赫球图景的双曲类比。在分裂复表示中， $n = 2$ 的归一化射影纯状态流形对应于 $\mathbb{R}^{2,1}$中的双叶双曲面，而（拟幺正）标架的变换则通过洛伦兹变换 SO^+(2,1)作用于这一“双曲布洛赫”几何。因此，双结果双曲情形具有典范的洛伦兹 SO(2,1)对称性，正如椭圆（复数）双结果情形具有 SO(3)对称性一样。我们将在第 5.4.1 节对此作进一步阐述。

5.4 读出的几何

目前分析的机制，要么是认知单纯形动力学固有的（例如诱导偏好形式不可积），要么是提升后的最小作用量动力学固有的（例如壳上

通道分解和非壳上零锥指标）。现在我们将一种不同的有限理性来源单独剥离出来：它既不是潜在生成器本身的性质，也不是单纯形几何本身的性质，而是连接两者的几何约化的性质：可观测选择频率由振幅通过一个非线性读出映射得到，该映射是相对于潜在振幅空间中固定的正交归一读出基定义的。因此，如果改变读出基，即使两个潜在情境彼此接近（甚至在潜在规范变换下完全相同），它们也可能诱导出不同的可观测漂移；反过来，仅仅由于到概率的投影是非线性的，一个固定的潜在情境也可能呈现情境依赖性。由于这种效应在实数（双曲型）LAR 表述中就已存在——其中线性振幅动力学与正交归一基下的二次归一化／平方读出相结合——因此无需援引椭圆型幺正性或任何额外的测量公设即可对其进行分析。

因此，我们分两步进行。首先，引入统一相位群记号，以一种兼容椭圆型与双曲型相干描述的形式记录概率读出。然后，我们研究在不同情境下改变读出映射如何引发不同的可观测漂移，并在多个振幅贡献于二次归一化之前进行相干组合时，产生通常称为（干涉）的熟悉交叉项机制。

5.4.1 概率读出、相位群与环境签名

认识性读出直接由实振幅变量 $\tilde{\rho}$ 定义。对于 $\tilde{\rho} \neq 0$，设

$$\mathcal{Z}(\tilde{\rho}) := \|\tilde{\rho}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\tilde{\rho}_k)^2, \qquad q_i(\tilde{\rho}, y) := \frac{(\tilde{\rho}_i)^2}{\mathcal{Z}(\tilde{\rho})}. \tag{49}$$

因此，$q(\tilde{\rho}, y)$ 仅通过 $\tilde{\rho} \in \mathbb{R}^n$ 依赖于 $(\tilde{\rho}, y) \in N$；余变量 y 仅通过诱导轨迹 $t \mapsto (\tilde{\rho}(t), y(t))$ 影响 q。映射 (49) 是 0 次齐次的，因此对于 $\lambda \neq 0$ 在 $\tilde{\rho} \mapsto \lambda\tilde{\rho}$ 下保持不变，并且对每个分量均不敏感于符号：$\tilde{\rho}_i \mapsto -\tilde{\rho}_i$ 不会改变 q。边界事件 $q_i = 0$ 等价于 $\tilde{\rho}_i = 0$。

为便于比较椭圆扇区与双曲扇区的记号，令

$$U(\mathbb{C}) := \{u \in \mathbb{C}^\times : \overline{u}\, u = 1\} \cong S^1, \qquad U(\mathbb{D}) := \{u \in \mathbb{D}^\times : u^{\#} u = 1\}.$$

这里，$U(\mathbb{D})$ 是单元双曲线，由两个连通分支组成；选择哪个分支对读出均无关紧要，因为下面只涉及关系 $u^{\#}u = 1$。给定 $\tilde{\rho} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 和 $u = (u_1, \dots, u_n) \in U(\mathbb{K})^n$，定义相应的 $\mathbb{K}$–值向量

$$\psi = \psi(\tilde{\rho}; u) \in \mathbb{K}^n, \qquad \psi_i := \tilde{\rho}_i\, u_i, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{50}$$

于是，逐分量地，

$$\psi_i^* \psi_i = (\tilde{\rho}_i)^2 \quad (\mathbb{K} = \mathbb{C}), \qquad \psi_i^{\#} \psi_i = (\tilde{\rho}_i)^2 \quad (\mathbb{K} = \mathbb{D}),$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n} \psi_k^* \psi_k = \mathcal{Z}(\tilde{\rho}) \quad (\mathbb{K} = \mathbb{C}), \qquad \sum_{k=1}^{n} \psi_k^{\#} \psi_k = \mathcal{Z}(\tilde{\rho}) \quad (\mathbb{K} = \mathbb{D}).$$

因此，二次读出 (49) 满足以下玻恩形式恒等式

$$q_i = \frac{\psi_i^* \psi_i}{\sum_{k=1}^{n} \psi_k^* \psi_k} \quad (\mathbb{K} = \mathbb{C}), \qquad q_i = \frac{\psi_i^{\#} \psi_i}{\sum_{k=1}^{n} \psi_k^{\#} \psi_k} \quad (\mathbb{K} = \mathbb{D}). \tag{51}$$

方程 (51) 是一个恒等式，而非额外的公设。在椭圆扇区中，Caticha (2021) 同样推导出玻恩形式表达式，而不是将其作为公设。这里的概率由 (49) 定义，而 (51) 仅将这一二次读出表示为形式如 (50) 的向量 ψ 的归一化分量强度。特别是，(51) 不 适用于任意 $\psi \in \mathbb{K}^n$。

在所选的全纯本征丛上，可以取 $\psi = \Psi \in \mathbb{C}^n$；在所选的副全纯本征丛上，可以取 $\psi = \Psi_{\mathbb{D}} \in \mathbb{D}^n$。在这两种情况下，概率规则仍为 (49)，变化的只是记号。因此，椭圆／双曲之分不在于二次读出 (49)–(51)，而在于相位几何，以及与之对应的态演化的 $\mathbb{K}$–厄米封装（参见 (36)、(20)）。对于 $n = 2$，它是备注 7 中的洛伦兹 SO(2,1)载体。

备注 8（读出基中的双曲Born形式）。 基于 $\mathbb{D}$ 的双曲量子力学（例如 Khrennikov (2000)）通常将概率写作

$$q_i = \frac{c_i^{\#} c_i}{\sum_{k=1}^{n} c_k^{\#} c_k},$$

其中 $c_i \in \mathbb{D}$ 是所选读出基中分裂复数状态的展开系数。对于一般的 $\mathbb{D}$–向量，量 $c_i^{\#} c_i$ 可能是不定的。然而，在本框架中，参与读出的系数被限制为以下形式

$$c_i = (\Psi_{\mathbb{D}})_i = \tilde{\rho}_i u_i, \qquad u_i \in U(\mathbb{D}), \qquad u_i^{\#} u_i = 1.$$

由此立即可得

$$c_i^{\#} c_i = (\tilde{\rho}_i)^2 \geq 0,$$

且对 $\tilde{\rho}_i$ 不作符号限制。因此，(51) 中的双曲公式与定义性读出 (49) 完全等价。

5.4.2 情境与双曲干涉

在前文确定了二次读出及其相位群记号后，我们现在允许读出本身发生变化。情境 由读出基的选择（等价地，由读出映射的选择）来指定，因此，同一潜振幅态在不同情境下可以产生不同的可观测概率指派。由于读出是非线性的，其微分取决于所选情境，因此，即使潜动力学与情境无关，诱导单纯形漂移也未必与情境无关。这种对读出的几何依赖性，正是我们框架中情境性的基本机制。

回顾一下，潜态由归一化振幅 $\rho \in \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 表示，而可观测概率则由二次读出产生。典范读出对应于标准基，即 $q_k = \rho_k^2$。为了对情境读出建模，我们允许读出基发生变化：情境 是一个正交矩阵 $B \in O(n)$，其列为 $b_1, \ldots, b_n$。相应的读出映射为

$$\pi_B : \mathbb{S}^{n-1} \to \Delta^{n-1}, \qquad \pi_B(\rho)_k := \langle b_k, \rho \rangle^2, \tag{52}$$

从而有 $\sum_k \pi_B(\rho)_k = \|\rho\|^2 = 1$。典范情境为 $B = I$，得到 $\pi_I(\rho)_k = \rho_k^2$。等价地，记作 $\rho^{(B)} := B^{\top}\rho$，则有 $\pi_B(\rho)_k = (\rho_k^{(B)})^2$，，即在旋转坐标中应用相同的二次读出；特别地，对于实情境 $B \in O(n)$，通过设定 $c_k^{(B)} := \rho_k^{(B)} u_k$ 并令 $u_k \in U(\mathbb{D})$，分裂复数形式（51）仍然适用，从而

$$(c_k^{(B)})^* c_k^{(B)} = (\rho_k^{(B)})^2 = \pi_B(\rho)_k.$$

现在令 X 表示定义在 $\mathbb{S}^{n-1}$上的潜在 LAR 向量场（4）。在情境 B中，记作 $q := \pi_B(\rho) \in \Delta^{n-1}$。在 ρ 处诱导的瞬时可观测漂移是推前$d\pi_{B,\ \rho}(X(\rho))$，其满足 $\sum_k \dot{q}_k = 0$ ，因此当 $q \in \mathcal{M}$ 时定义了一个可容许单纯形漂移。由于 π_B 是非线性的，其微分取决于 B，因此，可观测的单纯形轨迹取决于使用哪个读出基 B 来读出同一个潜在振幅过程。

这并未穷尽基变换带来的影响。即使在固定情境 B 下，只要潜在状态的 B 坐标在读出前包含多个模态贡献，同一个二次读出也可能产生交叉项。在这种情况下，平方运算会生成非对角项。具体而言，只要所选读出基未与壳上生成元的谱基对齐，就会出现这种情况。在分裂复数扩展 $\mathbb{D}$ 中，同样的代数机制会产生双曲量子文献所研究的双曲干涉定律（例如，Khrennikov，2000）。

为明确说明这一点，在零残差叶上，可以采用辅助复数封装$\widehat{\qquad}$ $\widehat{\qquad}$(23)。相应的有效复哈密顿量 $H_{\mathbb{C}} = iV$ 通常是非厄米的$\widehat{\qquad}$ $\widehat{\qquad}$，只要 $S \neq 0$。假设 V 可在 $\mathbb{C}$上对角化，则写作

$$\widehat{V} = P\Lambda P^{-1}.$$

Then

$$z_i(t) = \sum_a P_{ia} e^{\lambda_a t} c_a, \qquad w_i(t) := z_i(t)^2 = \sum_{a,b} P_{ia} P_{ib}\, c_a c_b\, e^{(\lambda_a+\lambda_b)t}.$$

$\widehat{\ }$含有 $a \neq b$ 的项正是干涉项。由于 V 和壳上初始数据均为实数，复数模态贡献会重新组合成实轨迹 $z(t) = \tilde{\rho}(t) \in \mathbb{R}^n$。因此，对于 (50) 型的代表元，可观测概率仍通过同一读出来计算，也可等价地写成形式 (51)。

因此，未对齐情境可以产生干涉，但这两个概念不应混为一谈：情境指的是所选的读出基，而干涉指的是二次读出在该固定基下产生的非对角交叉项。在实双曲 LAR 框架中，两者都是线性振幅动力学与到单纯形的二次读出映射相结合的内在结果，既不需要复希尔伯特空间或椭圆型幺正性，也不需要任何额外的测量公设。

5.5 椭圆量子几何中的有限理性

到目前为止，在第 §5 节中，我们一直讨论双曲信息几何情形：在加倍相空间 $N = T^*\mathcal{M}$ 上的实 para–$\widetilde{\ }$K¨ahler LAR 提升，以及潜在流约化到认知单纯形时产生的有限理性。在这一情形中，潜在分裂 $V = S + F$ 将评价通道与共效用通道分开，并且存在一种特有的双曲提升诊断工具，可在离壳状态下使用：中性形式 Q（及其指标 Λ）通过加倍变量 y 控制残差累积。

相比之下，在我们的框架中，椭圆型（复数、希尔伯特空间）量子模型是通过施加相干最小作用量合理性（CLAR）的相干可容许性限制而得出的。首先对 $N_{\mathbb{C}}$ 进行复化 $TN_{\mathbb{C}} = L^{(+)} \oplus L^{(-)}$，并限制在选定的复拉格朗日分裂上$TN_{\mathbb{C}} = L^{(+)} \oplus L^{(-)}$（参见第4.2节和第§4节）。在由此得到的全纯扇区中，约化动力学闭合为式（36）中的标准薛定谔演化，其生成元为厄米打包生成元

$$\widehat{H} := \widehat{S} + i\widehat{F},$$

因此，相对于诱导的希尔伯特内积，它是幺正的。特别地，沿着 CLAR轨迹，希尔伯特范数$\|\psi(t)\|$保持守恒。从本节的视角来看，这意味着第 5.3 节中的提升后非壳上双曲机制在椭圆型机制中并不发挥相同作用：中性指标 Λ 是与加倍变量上的实拟K¨ahler提升相关的轨迹诊断指标（$\tilde{\rho},\ y$），而 CLAR 则以偏振投影、保持相干的演化取代完整的提升流，作用于 $N_{\mathbb{C}}$。然而，椭圆型机制中的有限理性仍然通过认识非可积性（诱导偏好形式的曲率）以及读出引发的情境性而持续存在，因为两者都源于从潜在振幅到可观测概率的约化，而非源于非壳上双曲提升。

为准确描述这种持续性，我们现在从潜在的酉CLAR演化转向固定读出语境下由其诱导的认知动力学。由于椭圆型机制中不存在非壳上提升诊断量 Λ，相关的有界理性机制是那些在约化为可观测概率后仍然保留下来的机制：诱导单纯形漂移、与之对偶的费希尔–拉奥偏好形式，以及它们对所选读出语境的依赖。

与第 5.4 节一样，固定一个可容许读出语境 $B = \{b_1, \dots, b_n\} \subset \mathbb{R}^n$，即二次读出所使用的正交归一基。在椭圆模型中，潜在状态是复振幅$\psi(t) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$，它在相干扇区上酉演化；相应的认知状态则通过所选基下的模平方读出获得，

$$q_B(t) = \pi_B(\psi(t)) \in \mathcal{M}, \qquad \pi_B(\psi)_k := \frac{|\langle b_k, \psi\rangle|^2}{\|\psi\|^2},$$

其中，我们将讨论范围限定在满足 $q_B(t) \in \mathcal{M} = \Delta^{n-1}_{>0}$ 的情形（因此 Fisher–Rao几何适用，且不存在边界问题）。对于酉CLAR轨迹 $\|\psi(t)\|$ 为常数，因此归一化并非必要，但我们仍将其明确写出，以强调射线不变性。

情境 B 中的诱导单纯形漂移由潜在速度推前得到，

$$\dot{q}_B(t) = d\pi_{B,\psi(t)}\big(\dot{\psi}(t)\big),$$

它会自动与单纯形超平面 $\sum_k q_k = 1$相切。由于 π_B 是非线性的且非单射，$\dot{q}_B(t)$通常取决于 $\psi(t)$中的潜在相位信息。因此，约化漂移自然应被视为定义在沿着一条轨迹上的对象，而非定义在 $\mathcal{M}$ 上的自治向量场。

为联系回第 5.1 节的认知分析，可以通过费希尔–拉奥对偶，将一个（偏好）协向量与沿轨迹的约化漂移相关联，

$$\beta_B(t) \ := \ g_F\big(\dot{q}_B(t), \cdot\big) \in T^*_{q_B(t)}\mathcal{M}.$$

只要约化漂移在固定语境中存在一个光滑的代表一形式场 $\beta_B \in \Omega^1(\mathcal{M})$（例如，在全纯扇区上选定相干规范／截面之后），就会出现与双曲情形相同的可积性问题：曲率 $d\beta_B$ 揭示该情境中的认知路径依赖，而 B 的变化则探究第 5.4 节中读出几何的情境性机制。

定义 2（固定语境中的相干有界理性）。 假设潜动力学满足 *CLAR*（因此 $\psi(t)$ 在全纯扇区上酉地演化），并固定一个读出语境 B，使得约化漂移具有代表性偏好形式 $\beta_B \in \Omega^1(\mathcal{M})$。此外，假设 β_B具有如下典范分解

$$\beta_B = dU_B + \mathcal{R}_B$$

如命题*1*所示。若在情境 B 中，沿每一条 *CLAR*轨迹，评价率均为零，

$$\frac{d}{dt}U_B\big(q_B(t)\big) = dU_B\big(\dot{q}_B(t)\big) = 0.$$

等价地， $g_F\big(\boldsymbol{\nabla}_{g_F}U_B(q_B(t))\ \dot{q}_B(t)\big) = 0$ 只要 $q_B(t) \in \mathcal{M}$。

因此，在椭圆型机制中，CLAR 通过厄米算子 $H = S + iF$ 产生保持相干性的（幺正）潜态运动 ^ ^ ^，而认识论有界理性则取决于这种运动如何通过非线性读出族 π_B 约化为可观测概率。事实上，这正是复希尔伯特空间量子认知文献所研究的情形：有限理性与保持相干性的（幺正）潜态演化相容，并通过几何约化产生，也就是说，由依赖情境的非线性读出族 π_B 将潜态映射到单纯形上的可观测概率。我们的框架在双曲（抛物凯勒）机制中增添了一种真正提升后的额外机制；在相干椭圆约化下，这一机制不可见：加倍变量上的完整最小作用量动力学（$\tilde{\rho}, y$）具有中性指标 $\Lambda(t) = 2\langle\tilde{\rho}(t)\ y(t)\rangle$，该指标提供内在累积诊断量，并对残差偏离施加单向过锥约束。这种 Λ机制在幺正 CLAR 扇区中没有对应物；在该扇区，人们只关注相干的全纯演化，而不追踪非零残差叶之外的阶段。

6 结论与后续研究

信息论在行为选择建模中的作用一直褒贬不一。Luce（2003）认为，尽管信息论早期颇具吸引力，但它对选择心理学理论的解释价值有限。他的批评着眼于结构：标准的信息论表述将备选项视为有限集合中彼此无结构的元素，而行为刺激通常具有内部关系（相似性、显著性或度量结构），这些关系会塑造观察到的选择模式。从这一观点来看，基于熵的方法可能只能捕捉选择的一般性“软化”，却无法解释情境和内部结构如何发挥作用。

有趣的是，同年，香农熵以另一种方式重新引入有界理性模型：Sims（2003）并未将熵视为对刺激的描述，而是将其视为一种支配内部表征的资源成本 。这种重新诠释避开了 Luce 关于备选项缺乏结构的质疑，但它仍直接作用于单纯形本身，并未提供一种内在几何结构，将表征的潜在层与选择的可观测层联系起来。

主要贡献。 我们构建了一套统一的信息几何选择理论：单纯形上的可观测概率由受单一偏好算子 V 支配的 ^潜在振幅动力学，通过二次型（玻恩型）读出得到。该算子具有^ ^ ^典范分解 $V = S + F$，这一分解具有直接的行为学含义。对称^扇区 S 是评价 通道：它通过射线上的范数变化驱动福利／效用生产，引发梯度型漂移，并由对数配分归一化因子生成典范的单调熵福利时钟 。这与熵正则化选择、自由能表述及理性注意目标^函数背后的对数和指数（包容价值）势函数相同，并通过凸对偶与香农熵典范配对。斜对称扇区 F是环流 通道：它产生再分配漂移而不产生福利，并通过认知偏好场中不可积（整体论）分量诱发共效用／遗憾。

^关键的是， F 揭示了提升动力学中一个真实的分裂复数 （旁复）扇区。 ⌢在配备典范旁凯勒结构的余切提升$N = T^{*}\mathcal{M}$上，我们推导出哈密顿最小作用量方程，并证明在特定的零残差叶 $y = 0$上，动力学闭合为线性的旁薛定谔 ¨演化 。这为类量子认知模型采用实振幅提供了有原则的动机：典范双曲提升本身已包含一个连贯的薛¨定谔型扇区，其福利与环流的解释清晰明了，且无需假设复希尔伯特空间。

该框架扩展到了相干叶之外。在偏离 $y = 0$ 的情况下，有限理性由双曲提升的内禀相空间诊断量加以组织，其中包括中性配对及其零锥指标；这些量记录累积的最小作用量偏差，并对非零残差阶段施加单向穿锥约束。总体而言，该理论提供了一种算子几何基础，使福利生产、遗憾/共效用以及相干分裂复动力学均源自同一个最小作用原理，即使在非零残差叶之外亦然。

这些构造也阐明了熵正则化选择与类量子认知模型之间的关系。这种方法明确以概率优先为出发点，秉承信息几何重构的精神，但并不首先假定一个复希尔伯特空间。相反，Fisher–Rao/海森数据在提升流形上确定了一个规范的 para–K¨ahler 结构，而可观测概率则通过同一种二次归一化直接在实叶上获得。

与此同时，熟悉的椭圆（希尔伯特空间）机制也可以纳入同一信息几何起源。改变的并非底层辛结构（N，Ω），而是容许变分的类别：只有在提供额外的容许性输入，选定一个Ω相容复拉格朗日扇区 $L^{(+)} \subset TN_{\mathbb{C}}$ 并据此限制轨迹之后，才能得到椭圆模型。在这样的扇区内，受限动力学闭合为幺正薛定谔型演化，玻恩型概率也再次由同一二次读出产生。从这个严格意义上说，椭圆相干性并非最小作用理性的原初结果；它是对规范双曲提升的一种相干限制，因此启发了相干最小作用理性（CLAR）：一种在选定复扇区内表述的最小作用量公设。

自然可以引出若干进一步研究方向。在应用方面，基于算子的（成对）结构提示我们，可以构建新的估计量和模型类别，在加性效用、成对情境耦合与后悔驱动的环流之间进行插值，并与现有的熵正则化及依赖情境的选择模型建立明确联系。在几何方面，值得探究如何（以及以何种意义）以数据驱动方式选定容许复扇区，并理解双曲零锥和内禀时钟如何与单纯形上的投影、聚合和测量方案相互作用。另一个相关方向是研究混合扰动和开放系统扰动，探讨它们如何在相干性受限与不受限的提升动力学之间进行插值（例如，类量子决策动力学中的量子通道/林德布拉德型效应；（例如 Asano 等人，2012年））。

参考文献

Aerts, D. (1995). 量子结构：试图解释其在自然界中出现的起源。国际理论物理杂志, 34(8), 1165–1186. Aerts, D. (2009). “认知中的量子结构。”《数学心理学杂志》, **53**(5), 314–348.

Aerts, D., Haven, E., & Sozzo, S. (2018). “在量子概率框架中扩展期望效用的提议。”《经济理论》, 65(4), 1079–1109. Amari, S.-I., & Nagaoka, H. (2000). 《信息几何方法》。罗德岛州普罗维登斯：美国数学学会。 Asano, M., Basieva, I., Khrennikov, A., Ohya, M., & Tanaka, Y. (2012). 决策的类量子动力学。《物理学A：统计力学及其应用》, 391(5), 2083–2099. Bell, D. E. (1982). 不确定性下决策的遗憾。《运筹学》, 30 (5), 961– 981. Betti, A. and Gori, M. (2016). 最小认知作用原理。《理论计算机科学》, 633, 83–99. Brody, D. C., & Hughston, L. P. (2001). “几何量子力学。”《几何与物理学杂志》, 38(1–2), 19–53. Bruza, P. D., Kitto, K., Nelson, D., & McEvoy, C. (2009). “人类心理词库是否具有某种类量子特征？”《数学心理学杂志》, 53(5), 362–377. Buckley, C. L., Kim, C. S., McGregor, S., & Seth, A. K. (2017). “行动与知觉的自由能原理：数学综述。”《数学心理学杂志》, 81, 55–79. Busemeyer, J. R., & Bruza, P. D. (2012). 《认知与决策的量子模型》。剑桥：剑桥大学出版社。 Busemeyer, J. R., Zhang, Q., Balakrishnan, S. N., & Wang, Z. (2020). “量子—马尔可夫开放系统模型在人类认知与决策中的应用。”《熵》, 22(9), 990. Busemeyer, J. R., Wang, Z., & Townsend, J. T. (2006). “人类决策的量子动力学。”《数学心理学杂志》, 50(3), 220–241. Busemeyer, J. R., Wang, Z., & Lambert-Mogiliansky, A. (2009). “马尔可夫模型与量子模型在决策中的实证比较。”《数学心理学杂志》, 53(5), 423–433. Caticha, A. (2021). “统计流形上的量子力学即哈密顿—基灵流。”《物理科学论坛》, 3, 12. https://doi.org/10.3390/psf2021003012 de Barros, J. A., & Suppes, P. (2009). “量子力学、干涉与大脑。”《数学心理学杂志》, 53(5), 306–313. Dombrowski, P. (1962). “关于切丛的几何。” Journal f ¨ur die reine und ange- wandte Mathematik, 210, 73–88. Etayo, F., Santamar´ıa, R., and Tr´ıas, U. R. (2006). 双拉格朗日流形的几何。《微分几何及其应用》, 24(1), 33–59. Fishburn, P. C. (1984). SSB效用理论与不确定性下的决策。《数学社会科学》, 8(3), 253-285. Fox, S. and Kotelba, A. (2018). 最小精神运动作用原理：在人类、赛博格和机器人工作者参与的精神运动劳动优化中对情境熵进行建模。《熵》, 20(11), 836. Goyal, P. (2010). “从信息几何到量子理论。”《新物理学杂志》, 12, 023012. Harper, M. (2009). 信息几何与演化博弈论。arXiv 预印本 arXiv:0911.1383. Harr´re, M.S. 《人工智能、心理学与经济学中的智能体信息论》。《熵》2021, 23, 310. Heslot, A. (1985). “量子力学作为经典理论。”《物理评论D》, 31(6), 1341–1348. Haven, E., & Khrennikov, A. (2016). “认知与决策类量子模型中概率的统计解释与主观解释。”《数学心理学杂志》, 74, 82–91.

Khrennikov, A. (2000, 2018).双曲量子力学. https://arxiv.org/abs/quant-ph/ 0101002. Khrennikov, A. (2005). “基于全概率公式重建量子理论。”《*AIP*会议论文集》，**750**，187–218. Khrennikov, A. Y. 与 Haven, E. (2009). “量子力学与确定性原理的违背：概率干涉及其他概念的运用。”《数学心理学杂志》，**53**(5)，378–388. Kibble, T. W. B. (1979). “量子力学的几何化。”《数学物理通讯》，**65**(2)，189–201. La Mura, P. (2009). “射影期望效用。”《数学心理学杂志》，**53**(5)，408–414. Levin M. (2019)，计算意义上的 “ 自我 ” 边界：发育生物电驱动多细胞性与无标度认知。《心理学前沿》2019 12月13日；10:2688. Loomes, G. 与 Sugden, R. (1982). 遗憾理论：不确定性下理性选择的一种替代理论。《经济学杂志》，*92*(368)，805–824. Luce, R. D. (1959).《个体选择行为：一种理论分析》. 纽约：约翰·威利父子出版公司. Luce, R. D. (2003). 信息论在心理学中究竟怎么了？《普通心理学评论》，7(2)，183–188. Ly, A.、Verhagen, J. 与 Wagenmakers, E.-J. (2017年). “关于费希尔信息的教程。”《数学心理学杂志》，**80**，40–55. Machina, M. J. (1982). “无独立性公理的期望效用分析。”《计量经济学》，**50**(2)，277–323. Matˇejka, F. 与 McKay, A. (2015). “对离散选择的理性疏忽。”《美国经济评论》，**105**(1)，272–298. McFadden, D. (1974). “定性选择行为的条件logit分析。” 载于 P. Zarembka（编），《计量经济学前沿》（第105–142页）. 纽约：学术出版社. Molitor, M. (2012年). “论量子力学几何表述的统计学起源。”《现代物理中的几何方法国际期刊》，**9**(3)，1220001. Molitor, M. (2013年). “指数族、K¨ahler几何与量子力学。”《几何与物理学杂志》，**70**，54–80. Frank Nielsen. 信息几何初阶导论.《熵》**22**(10):1100, 2020. Pothos, E. M. 与 Busemeyer, J. R. (2013年). “量子概率能否为认知建模提供新方向？”《行为与大脑科学》，**36**(3)，255–327. Reginatto, M. (2013年). “从信息到量子：由信息几何推导量子理论的几何表述。”《*AIP*会议论文集》，**1641**，165–182. Reginatto, M. 与 Hall, M. J. W. (2012年). “信息几何、动力学与离散量子力学。” arXiv:1207.6718. Russell, T. (1991). “不确定性下决策的几何模型。” 载于《决策、效用与风险理论进展》（第135–143页）. 多德雷赫特：荷兰施普林格. Sakitt, B. (1973). “可辨别性指标。”《自然》，**241**，133–134. https://doi.org/10.1038/241133a0 Sandholm, W. H. (2010).《种群博弈与演化动力学》. 麻省理工学院出版社，马萨诸塞州剑桥. Shima, H. (2007年)，《*Hessian*结构的几何》，世界科学出版社. Sims, C. A. (2003). “理性疏忽的含义。”《货币经济学杂志》，**50**(3)，665–690.

Siomopoulos, V. (1975). 论心理物理定律：一种信息论诠释。《知觉与运动技能》，40，8–10. Snickars, F. 与 Weibull, J. W. (1977年). “最小信息原理：理论与实践。”《区域科学与城市经济学》，7(1–2)，137–168. Stevens, S.，(1957) 论心理物理定律。《心理学评论》，64(3):153–181. 冯·诺伊曼与摩根斯特恩 (1944年). 《博弈论与经济行为》. 新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社. Yearsley, J. M. (2017年). “量子认知的高级工具与概念：教程。”《数学心理学杂志》，78，24–39. Yearsley, J. M. 与 Busemeyer, J. R. (2016). “量子认知与决策理论：教程。”《数学心理学杂志》，74，99–116.