arXiv:2603.01797v1 [math.AP] 2 Mar 2026

# 无滑移边界条件下二维单调剪切流的渐近稳定性阈值

Zhen Li、Shunlin Shen 和章志飞

摘要。本文研究了有限通道中带无滑移边界条件的二维纳维-斯托克斯方程在单调剪切流 $(U(t,y),0)$ 附近的渐近稳定性阈值问题。我们证明，满足$\|u^{\mathrm{in}}\|_{H^2} \le c\nu^{\frac{1}{2}}$的扰动下，该流是渐近稳定的。为达到稳定性阈值 $\nu^{\frac{1}{2}}$，证明的关键要素包括：基于弱型预解界的涡量尖锐预解估计；涡量的加权时空估计；速度的逐点估计。此外，我们通过散度形式处理非线性项，从而能够尖锐地应用上述时空估计。

## 1. 引言

流体动力学稳定性是流体力学的基石，其源头可追溯至雷诺的开创性实验。该实验揭示，层流与湍流之间的转捩由雷诺数 $Re$ 控制；雷诺数是一个无量纲参数，用于量化惯性力与粘性力之间的平衡。在这一背景下，不可压缩纳维-斯托克斯方程为描述此类粘性不可压缩流提供了典范数学框架，而研究受限几何（如有限通道）中剪切流附近的稳定性，则有助于探究：

$$\begin{cases} \partial_t v + (v\cdot\nabla)v - \nu\Delta v + \nabla P = 0, \\ \nabla\cdot v = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中， $v$ 是 速度场， $P$ 是压力，而 $\nu = Re^{-1} > 0$ 是粘性系数 .

这一领域的一个关键数学问题——最初由Trefethen等人以启发式方式提出 [32]，随后由Bedrossian、Germain和Masmoudi将其纳入严谨的数学框架加以形式化 [5],——涉及流动稳定性的转捩阈值:

给定一个范数 $\|\cdot\|_X$，确定一个 $\beta = \beta(X)$，使得

$$\|u^{\mathrm{in}}\|_X \ll \nu^{\beta} \Longrightarrow \textit{stability},$$
$$\|u^{\mathrm{in}}\|_X \gg \nu^{\beta} \Longrightarrow \textit{instability}.$$

该指数 $\beta$ 量化了基本流在保持稳定的情况下所能承受的初始扰动的最大幅度。它随 $\nu$ 的标度关系直接反映了粘性阻尼、无粘效应与边界约束之间的相互作用，因此可作为理解转捩机制的基准。

过去十年间，原型剪切流的转捩阈值问题取得了重大进展，包括平面库埃特流 [5–7, 18, 33], 平面泊肃叶流 [13], 和柯尔莫哥洛夫流 [28]。这些研究表明，两种关键的物理效应，

由剪切流诱导的混合机制驱动的无黏阻尼和增强耗散，对转捩早期阶段至关重要。更多详情请参阅综述论文 [5, 35]。

二维不可压缩纳维-斯托克斯方程不会出现有限时间奇点，但其在高雷诺数下的长时间动力学却异常丰富。即使在稳态解附近，不同的拓扑约束也可能导致截然不同的动力学行为。例如，在库埃特流附近，低正则性索博列夫扰动下存在行波解 [29], ；而由于无黏阻尼效应，在强正则性的 Gevrey 类扰动下，库埃特流具有渐近稳定性 [3]。本文研究剪切流的**渐近稳定性阈值问题**，也就是说，我们确定初始扰动的大小（取决于各种物理因素），使得高雷诺数下二维纳维-斯托克斯方程的解能够渐近稳定，并同时满足增强耗散和无黏阻尼。

库埃特流的渐近稳定性阈值问题现已得到充分理解，其稳定性阈值 $\beta$ 被发现微妙地取决于三个关键因素：初始扰动的正则性、空间区域以及施加的边界条件。为介绍我们的工作，我们总结若干已有的重要结果：

对于无界区域 $\Omega = \mathbb{T} \times \mathbb{R}$,

- 如果 $X$ 属于 Gevrey 类 $2+$，那么 $\beta = 0$ [11];
- 如果 $X$ 属于索博列夫空间，那么 $\beta \le \frac{1}{3}$ [31, 34];
- 如果 $X$ 属于 Gevrey 类 $\frac{1}{s}$，$s \in [0, \frac{1}{2}]$，那么 $\beta \le \frac{1-2s}{3+1-s}$ [26]。

对于有界通道 $\Omega = \mathbb{T} \times [-1, 1]$，在不同物理边界条件下已建立以下结果：

- 如果 $X$ 属于带无滑移边界条件的索博列夫空间，那么 $\beta \le \frac{1}{2}$ [16];
- 若 $X$ 是具有纳维滑移边界条件的索博列夫空间，则 $\beta \le \frac{1}{3}$ [36];
- 若 $X$ 是具有纳维滑移边界条件的 Gevrey 类 $2+$，则 $\beta = 0$ [9]。

关于这一主题的进一步研究，请读者参阅 [1, 2, 10, 12, 14, 19–25, 27, 30, 31, 34, 36, 38] 以及其中的参考文献。

尽管这方面的研究主要聚焦于库埃特流，一个自然且具有实际意义的拓展问题是：针对库埃特流所确定的稳定性机制（无黏阻尼、增强耗散）及阈值标度，在多大程度上仍适用于更一般的、随时间演化的单调剪切流？本文旨在将稳定性阈值分析拓展至一大类单调剪切剖面，其演化由扩散过程所支配。

具体而言，我们考虑满足一维热方程且具有如下边界条件的背景剪切流 $U(t, y)$

$$\begin{cases} \partial_t U = \nu \partial_y^2 U, \\ U(0, y) = U^{\text{in}}(y), \quad U(t, 0) = U^{\text{in}}(0), \quad U(t, 1) = U^{\text{in}}(1). \end{cases} \tag{1.2}$$

引言　速度剖面 $U^{\text{in}}(y)$ 是严格单调的，且为凹函数或凸函数：

$$(\text{M}) : \begin{cases} U^{\text{in}} \in H^4(0, 1), \qquad \partial_y U^{\text{in}} \ge c_0 > 0, \\ \partial_y^2 U^{\text{in}} \ge 0, \text{ or } \partial_y^2 U^{\text{in}} \le 0, \quad \partial_y^2 U^{\text{in}}(0) = \partial_y^2 U^{\text{in}}(1) = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

令 $u = v - (U(t,\ y),\ 0)$ 表示速度扰动。在 $u$ 上施加无滑移边界条件后，我们推导得出

$$\begin{cases} \partial_t u + u\cdot\nabla u - \nu\Delta u + (\partial_y U u^{(2)}, 0) + U(t,y)\partial_x u + \nabla p = 0, \\ \nabla\cdot u = 0, \\ u(t,x,0) = u(t,x,1) = 0, \quad u(0,x,y) = u^{\mathrm{in}}(x,y). \end{cases} \tag{1.4}$$

引入涡量 $\omega = \partial_y u^{(1)} - \partial_x u^{(2)}$ 和流函数 $\psi$，它们由关系式 $u = (\partial_y\psi,\ -\partial_x\psi)$ 定义后，可将控制方程组改写为涡量形式：

$$\begin{cases} \partial_t\omega - \nu\Delta\omega + u\cdot\nabla\omega + U(t,y)\partial_x\omega - \partial_y^2 U(t,y)\psi = 0, \\ \Delta\psi = \omega, \quad u = (\partial_y\psi, -\partial_x\psi), \\ \psi(t,x,0) = \psi(t,x,1) = \partial_y\psi(t,x,0) = \partial_y\psi(t,x,1) = 0, \\ \omega(0,x,y) = \omega^{\mathrm{in}}(x,y). \end{cases} \tag{1.5}$$

本文的主要结果陈述如下。

**定理 1.1.** 设 $(\omega,\ \psi)$ 是方程 (1.5)的解。存在正常数 $\nu_0$，$\epsilon_0$ 和 $c$，使得若初始扰动满足 $\|u^{\mathrm{in}}\|_{H^2} \le c\nu^{\frac{1}{2}}$，$0 < \nu \le \nu_0$，则解 $(\omega,\ u)$ 满足全局稳定性估计

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} E_k \le C\nu^{\frac{1}{2}},$$

其中，稳定性范数定义为

$$E_k = \begin{cases} \|\omega_0\|_{L^\infty L^2}, \quad k = 0, \\ |k|\|e^{\epsilon_0\nu^{\frac{1}{3}}t}u_k\|_{L^2L^2} + \|e^{\epsilon_0\nu^{\frac{1}{3}}t}u_k\|_{L^\infty L^\infty} \\ \quad + \|e^{\epsilon_0\nu^{\frac{1}{3}}t}\sqrt{1-(2y-1)^2}\omega_k\|_{L^\infty L^2} + \nu^{\frac{1}{4}}|k|^{\frac{1}{2}}\|e^{\epsilon_0\nu^{\frac{1}{3}}t}\omega_k\|_{L^2L^2}, \quad k \ne 0, \end{cases}$$

其中 $f_k(t,\ y) =: \int_{\mathbb{T}} f(t,\ x,\ y)e^{-ikx}dx$。这里，$\|f\|_{L^pL^q}$表示混合范数$\|f\|_{L_t^pL_y^q}$。

下面我们对定理 1.1 作几点说明。

- 定理 1.1 确立了无滑移边界条件下单调剪切流的渐近稳定性。鉴于该渐近稳定性阈值与库埃特流的稳定性结果 $\beta = \frac{1}{2}$ 和不稳定性结果 [16] 均相吻合，[12] 我们预计该阈值是尖锐的。

- 本研究在无滑移边界条件下为单调剪切流达到了这一尖锐阈值，关键依赖于两项重要估计：尖锐无黏阻尼估计 $|k|\|u_k\|_{L^2_{t,\ y}}$以及增强耗散估计 $\nu^{\frac{1}{4}}|k|^{\frac{1}{2}}\|\omega_k\|_{L^2_{t,\ y}}$。

- 纳入稳定性范数的 $\|u(t)\|_{L^\infty_{x,\ y}}$ 估计蕴含了单调剪切流的绝对稳定性。该逐点估计极具挑战性，其证明依赖于尖锐的$L^2_{t,\ y}$ 时空估计。

定理的证明 1.1虽然建立在 [16], 引入的框架之上，但采用了一种基于非线性项散度形式的不同策略。这种方法能够精准运用本文建立的关键时空估计，并为解决非线性稳定性问题提供了一条新颖而有效的途径，具有广泛的应用潜力，可适用于

各种不同情形下的问题。本节最后，我们将概述克服关键困难所采用的主要思路。

**困难与关键要素**。

在 $\mathbb{T}\times\mathbb{R}$的情形下，通过傅里叶乘子技术，可以优雅地推导出库埃特流的无黏阻尼和增强耗散估计 [4, 11, 31, 34]。然而，这一方法并不直接适用于通道区域 $\mathbb{T}\times[-1,1]$。特别是对于无滑移边界条件，除了Navier滑移情形中已经存在的困难外，边界层效应还带来了额外挑战。在 [16], 中建立了一个系统性框架来解决这些问题，并成功确立了 $\beta\leq\frac{1}{2}$ 的非线性稳定性阈值。沿着这一思路，一般单调剪切流的线性稳定性分析已在 [17], 中得到充分建立，这为完整的转捩阈值问题非线性分析迈出了关键一步。另一方面，近库埃特流也得到了深入研究，最近在 [8]中确立了一个尖锐结果（仅存在对数损失）。

与 [16], 中研究的库埃特流相比，一般单调剪切剖面的分析带来了诸多新难题。为克服这些难题，非线性稳定性分析需要引入新的要素，具体如下。

（1）变系数问题。

在线性稳定性分析中，剪切流 $U(t,\ y)$ 的剖面在决定线性化系统的稳定性方面起着核心作用。对于稳态单调剪切流 $U(y)$，在附加谱假设下，线性化算子已在 [17] 中得到充分研究。然而，在时变情形下，由于存在系数随时间变化的线性化算子，时空估计的推导变得更加困难。应对这类变系数问题的一种有效策略是冻结时间方法。不过，这种方法仍面临额外困难。首先，每个时间区间的控制常数可能不同，从而导致爆破量不断累积。其次，稳定性分析所需的谱条件必须在时间上保持一致成立。

在此，为了解决这两个困难，对于单调剪切流，有两个关键观察有助于分析。首先，在诺伊曼边界条件下，守恒性质保证速度梯度具有一致的下界

$$0<c_0\leq\inf_{t\in[0,\infty)}\inf_{y\in[0,1]}\partial_y U. \tag{1.6}$$

其次，二阶导数具有瞬时正性 $\partial_y^2 U$。具体而言，

$$\text{if } \partial_y^2 U^{\text{in}}\geq 0, \text{ then } \partial_y^2 U\equiv 0, \text{ or } \partial_y^2 U(t,y)>0, \forall t>0, y\in(0,1), \tag{1.7}$$

$$\text{if } \partial_y^2 U^{\text{in}}\leq 0, \text{ then } \partial_y^2 U\equiv 0, \text{ or } \partial_y^2 U(t,y)<0, \forall t>0, y\in(0,1). \tag{1.8}$$

这意味着，即使初始时刻存在嵌入特征值，在所有正时间内它也不会出现。

（2）无滑移边界条件下的尖锐预解估计。

改进涡量的预解估计时，主要困难在于非局部项$U''\partial_x\Delta^{-1}w$。为克服这一困难，我们推导出弱型预解估计，以改进系数界。如引理 2.3所述，我们根据谱所在的区域，证明了两个弱型预解估计：

谱局部化的区域:

$$|\langle w_{Na}, f\rangle| \lesssim \nu^{-\frac{1}{4}}|k|^{-\frac{3}{4}}\,|f(j)|\,\|F\|_{H_k^{-1}}\left(|U(j)-\lambda|+\delta_0\right)^{-\frac{3}{4}} + \nu^{-\frac{1}{2}}|k|^{-\frac{1}{2}}\|F\|_{H_k^{-1}}\left(|k|^{-1}\|\partial_y f\|_{L^\infty}+\|f\|_{L^\infty}\right),$$

and

$$|\langle w_{Na}, f\rangle| \lesssim |k|^{-1}\|F\|_{H_k^{-1}}\Big[\nu^{-\frac{1}{4}}|k||f(j)|(|k(U(j)-\lambda)|+1)^{-\frac{3}{4}} + \Big\|\partial_y\Big(f\frac{\chi_{\delta_1}}{U-\lambda}\Big)\Big\|_{L^2} + (\nu^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{1}{3}}+\nu^{-\frac{1}{2}}|k|^{-1})\Big\|f\frac{\chi_{\delta_1}}{U-\lambda}\Big\|_{L^2} + \nu^{-\frac{1}{2}}\|(\partial_y,k)f\|_{L^2(E_{\delta_1})}\Big].$$

（3）涡量的加权时空 $L^\infty L^2$ 估计以及速度的 $L^\infty L^\infty$ 估计。

基于涡量的精确预解估计，我们进一步建立了涡量的精确时空$L^2L^2$ 估计。对于非线性稳定性分析，此处另一个关键点是证明涡量的加权时空 $L^\infty L^2$ 估计以及速度的 $L^\infty L^\infty$ 估计，即

$$\|e^{\epsilon_0\nu^{\frac{1}{3}}t}\sqrt{1-(2y-1)^2}\omega_k\|_{L^\infty L^2},\quad \|e^{\epsilon_0\nu^{\frac{1}{3}}t}u_k\|_{L^\infty L^\infty}.$$

即使在更简单的库埃特流情形中，这类估计也已并非平凡 $U\ （y）\ =y$，如 [16]中所见。此处，主要困难同样来自非局部项 $U''\partial_x\Delta^{-1}w$。通过采用不同的策略并融入更精细的技术论证，我们仍然能够建立这些所需的加权时空估计与逐点估计。

（4）通过散度形式进行的非线性稳定性分析。

我们不采用涡量表示来处理非线性项，而是采用如下散度形式

$$\partial_t\omega_k-\nu(\partial_y^2-k^2)\omega_k+ikU(t,y)\omega_k-ik\partial_y^2U(t,y)\psi_k:=-\partial_y(f_k^{1,1}+f_k^{2,1})-ik(f_k^{1,2}+f_k^{2,2}),$$

其中，非线性项由速度分量给出

$$f_k^{1,1}=i\sum_{l\in\mathbb{Z}}u_l^{(1)}(t,y)(k-l)u_{k-l}^{(1)}(t,y),\quad f_k^{1,2}=i\sum_{l\in\mathbb{Z}}u_l^{(1)}(t,y)(k-l)u_{k-l}^{(2)}(t,y),$$
$$f_k^{2,1}=\sum_{l\in\mathbb{Z}}u_l^{(2)}(t,y)\partial_y u_{k-l}^{(1)}(t,y),\qquad f_k^{2,2}=\sum_{l\in\mathbb{Z}}u_l^{(2)}(t,y)\partial_y u_{k-l}^{(2)}(t,y).$$

散度形式减少了对涡量估计的依赖，并为处理非线性稳定性问题提供了一条新途径。正如 [15] 所示，这种方法已被证明在研究对称剪切流时有效。它尤其适用于单调剪切流的情形，使我们能够精确运用所获得的加权时空 $L^\infty L^2$ 估计和 $L^\infty L^\infty$ 估计。此外，它还提供了另一种证明方法，可如 [16] 中那样得到二维库埃特流的稳定性阈值。

**记号**。本文中，$C$ 表示与 $\nu$，$k$，$\lambda$无关的一般常数，且其值可能随行而变。记号 $A\lesssim B$ 表示 $A\le CB$。下文中，对于 $\omega$，$w$，$\psi$，$\phi$，$F$，我们将省略下标 $k$，但在实际估计中仍保留对 $k$ 的依赖。

## 2. 线性化算子的预解估计

本节致力于研究稳态剪切流的预解估计，这对于冻结系数法至关重要。具体而言，我们考虑带有无滑移边界条件的 Orr-Sommerfeld 方程

$$\begin{cases} -\nu(\partial_y^2 - k^2)w + ik(V-\lambda)w - ikV''\phi + o(\nu,k)w = F, \\ \phi = (\partial_y^2 - k^2)^{-1}w, \quad \phi(0) = \phi(1) = \partial_y\phi(0) = \partial_y\phi(1) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $\lambda \in \mathbb{R}$， $|o(\nu,\ k)| \ll (\nu k^2)^{\frac{1}{3}},$，并且为简洁起见，省略了 $w_k$ 中的下标 $k$。此处，稳态流 $V(y)$满足

$$V(y) \in H^4(0,1), \quad \inf_{y\in(0,1)} \partial_y V \geq c_0 > 0, \ \ V'' > 0 \text{ or } V'' < 0. \tag{2.2}$$

（2.2）中的凸性条件保证 Rayleigh 算子

$$R_k =: (\partial_y^2 - k^2)^{-1}(V(y)(\partial_y^2 - k^2) - V''(y))$$

没有嵌入特征值或特征值。这一谱性质对于在 [17]中进行的线性稳定性分析至关重要。更多细节参见 [37] 。

作为预备步骤，我们将（2.1）的解分解为

$$w = w_{Na} + c_1 w_1 + c_2 w_2, \tag{2.3}$$

其中 $w_{Na}$ 满足带有 Navier 滑移边界条件的非齐次 Orr-Sommerfeld 方程

$$\begin{cases} -\nu(\partial_y^2 - k^2)w_{Na} + ik(V-\lambda)w_{Na} - ikV''\phi_{Na} + o(\nu,k)w_{Na} = F, \\ \phi_{Na} = (\partial_y^2 - k^2)^{-1}w_{Na}, \quad \phi_{Na}(0) = \phi_{Na}(1) = w_{Na}(0) = w_{Na}(1) = 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

并且 $w_1$、 $w_2$ 满足以下齐次 Orr-Sommerfeld 方程

$$\begin{cases} -\nu(\partial_y^2 - k^2)w_1 + ik(V-\lambda)w_1 - ikV''\phi_1 + o(\nu,k)w_1 = 0, \\ \phi_1 = (\partial_y^2 - k^2)^{-1}w_1, \quad \phi_1(0) = \phi_1(1) = 0, \quad \partial_y\phi_1(0) = 0, \quad \partial_y\phi_1(1) = 1, \end{cases} \tag{2.5}$$

and

$$\begin{cases} -\nu(\partial_y^2 - k^2)w_2 + ik(V-\lambda)w_2 - ikV''\phi_2 + o(\nu,k)w_2 = 0, \\ \phi_2 = (\partial_y^2 - k^2)^{-1}w_2, \quad \phi_2(0) = \phi_2(1) = 0, \quad \partial_y\phi_2(0) = 1, \quad \partial_y\phi_2(1) = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

利用（2.5）和（2.6）中的边界条件，系数由下式给出

$$c_1 = \int_0^1 \frac{\sinh k(1-y)}{\sinh k} w_{Na}(y)dy, \qquad c_2 = \int_0^1 \frac{\sinh(ky)}{\sinh k} w_{Na}(y)dy. \tag{2.7}$$

2.1. **带有 Navier 滑移边界条件的预解估计**。 速度的预解估计 $u = (\partial_y,\ -ik)\phi$、边界层校正项估计以及系数估计在文献中均已有充分研究 [16,17]。为清晰和完整起见，我们在引理 2.1中总结了以下文献中的关键结果： [17,命题 3.13、引理 4.2 和 4.4、命题 5。1] 以及 [16,引理 5。2]。

**引理 2.1**。 设 $(w,\phi)$ 是 (2.1)的解。则存在常数 $\nu_0 > 0$ 和 $\epsilon_1 > 0$，使得对于 $\nu \leq \nu_0$, $\nu k^2 \leq \|V'\|_{L^\infty}$ 以及 $|o(\nu,\ k)| \leq \epsilon_1(\nu k^2)^{\frac{1}{3}},$，以下估计成立。

(1) *Navier* 滑移边界条件下的预解估计：

$$\nu^{\frac{1}{6}}|k|^{\frac{4}{3}}\|u_{Na}\|_{L^2}+\nu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}\|w_{Na}\|_{L^2}+\nu^{\frac{2}{3}}|k|^{\frac{1}{3}}\|(\partial_y,k)w_{Na}\|_{L^2}\lesssim\|F\|_{L^2}, \tag{2.8}$$

$$\nu^{\frac{1}{6}}|k|^{\frac{4}{3}}\|w_{Na}\|_{L^2}+\nu^{\frac{1}{12}}|k|^{\frac{5}{3}}\|w_{Na}\|_{L^1}+|k|^2\|(V(y)-\lambda)w_{Na}\|_{L^2}\lesssim\|F\|_{H_k^1}, \tag{2.9}$$

$$\nu^{\frac{1}{2}}|k|\,\|u_{Na}\|_{L^2}+\nu^{\frac{2}{3}}|k|^{\frac{1}{3}}\|w_{Na}\|_{L^2}+\nu\|(\partial_y,k)w_{Na}\|_{L^2}\lesssim\|F\|_{H_k^{-1}}, \tag{2.10}$$

其中速度 $u_{Na}=(\partial_y\phi_{Na},-ik\phi_{Na})$，且范数由下式给出

$$\|F\|_{H_k^1}=\|(\partial_y,k)F\|_{L^2},\quad \|F\|_{H_k^{-1}}=\sup\{|\langle F,\phi\rangle|:\phi\in H_0^1(0,1),\ \|\phi\|_{H_k^1}=1\}.$$

(2) 边界层修正项的估计：

$$\|w_1\|_{L^2}\lesssim\nu^{-\frac{1}{4}}(1+|k(V(0)-\lambda)|)^{\frac{1}{4}}, \tag{2.11}$$

$$\|w_2\|_{L^2}\lesssim\nu^{-\frac{1}{4}}(1+|k(V(1)-\lambda)|)^{\frac{1}{4}}, \tag{2.12}$$

$$\|\rho_k^{\frac{1}{2}}w_1\|_{L^2}+\|\rho_k^{\frac{1}{2}}w_2\|_{L^2}\lesssim L^{\frac{1}{2}}, \tag{2.13}$$

其中 $L=\nu^{-\frac{1}{3}}\dagger k|^{\frac{1}{3}}$且权函数由下式给出

$$\rho_k(y)=\begin{cases}Ly, & y\in[0,L^{-1}],\\ 1, & y\in[L^{-1},1-L^{-1}],\\ L(1-y), & y\in[1-L^{-1},1].\end{cases} \tag{2.14}$$

(3) 系数的估计：

$$|c_1|+|c_2|\lesssim\nu^{-\frac{1}{4}}|k|^{-1}\|F\|_{L^2}, \tag{2.15}$$

$$|c_1|+|c_2|\lesssim\nu^{-\frac{1}{12}}|k|^{-\frac{5}{3}}\|F\|_{H_k^1}, \tag{2.16}$$

$$|c_1|+|c_2|\lesssim\nu^{-\frac{7}{12}}|k|^{-\frac{2}{3}}\|F\|_{H_k^{-1}}. \tag{2.17}$$

值得注意的是，手头已有的 $F\in H_k^{-1}$ 的系数估计，结合边界层校正项估计，尚不足以得出与库埃特流这一简单情形的结果相一致的结论。这主要是由于存在额外的非局部项 $V''\partial_x\Delta^{-1}\phi$。相比之下，对于库埃特流，该非局部项消失，其中 $V(y)=y$。为弥合这一差距，下一小节致力于推导系数 $c_1$ 与 $c_2$的精细估计，从而建立涡量的预解估计，使其与 [16] 中已知的最优结果相匹配。

2.2. **无滑移边界条件下的预解估计**。 在本小节中，我们着重推导涡量的这类精确预解估计，这些估计构成了下文的主要结果。

**命题 2.2**。 设 $(w,\ \phi)$ 是方程 (2.1)的解。则存在常数 $\nu_0>0$ 和 $\epsilon_1>0$，使得对于 $\nu\le\nu_0$，$\nu k^2\le\|V'\|_{L^\infty}$ 以及 $|o(\nu,\ k)|\le\epsilon_1(\nu k^2)^{\frac{1}{3}}$, 有

$$\nu^{\frac{1}{4}}|k|^{\frac{1}{2}}\|w\|_{L^2}+\nu^{\frac{1}{6}}|k|^{\frac{1}{3}}\|\rho_k^{\frac{1}{2}}w\|_{L^2}\lesssim\nu^{-\frac{1}{6}}|k|^{-\frac{1}{3}}\|F\|_{L^2}, \tag{2.18}$$

$$\nu^{\frac{1}{4}}|k|^{\frac{1}{2}}\|w\|_{L^2}+\nu^{\frac{1}{6}}|k|^{\frac{1}{3}}\|\rho_k^{\frac{1}{2}}w\|_{L^2}\lesssim\nu^{-\frac{1}{12}}|k|^{-\frac{7}{6}}\|F\|_{H_k^1}, \tag{2.19}$$

$$\nu^{\frac{1}{4}}|k|^{\frac{1}{2}}\|w\|_{L^2}+\nu^{\frac{1}{6}}|k|^{\frac{1}{3}}\|\rho_k^{\frac{1}{2}}w\|_{L^2}\lesssim\nu^{-\frac{1}{2}}\|F\|_{H_k^{-1}}. \tag{2.20}$$

命题 2.2 的证明关键依赖于系数的精细估计。在此之前，我们首先在引理 2.3中推导弱型预解估计，这些估计对于改进随后在引理 2.4中给出的系数估计起着关键作用。

弱型预解估计的一个关键方面，是分析 $V(y) \sim \lambda$ 的区域。为局部化该区域内的行为，我们引入一个 $C^1$ 光滑的截断函数 $\chi_\delta(y)$:

$$\chi_\delta(y) = \begin{cases} 1, & y \in [0,1] \setminus E_\delta, \\ \dfrac{2(V(y)-\lambda)^2}{\delta^2} - \dfrac{(V(y)-\lambda)^4}{\delta^4}, & y \in E_\delta, \end{cases} \tag{2.21}$$

其中 $E_\delta := \{y \in [0,1]: V(y) \in (\lambda-\delta, \lambda+\delta)\}$。该截断函数满足以下性质:

$$\frac{\chi_\delta}{V-\lambda} \in C^1, \quad \left\|\frac{\chi_\delta}{V-\lambda}\right\|_{L^2} \lesssim \delta^{-\frac{1}{2}}, \quad \left\|\frac{\chi_\delta}{V-\lambda}\right\|_{L^\infty} \lesssim \delta^{-1}, \quad \left\|\partial_y\left(\frac{\chi_\delta}{V-\lambda}\right)\right\|_{L^2} \lesssim \delta^{-\frac{3}{2}}. \tag{2.22}$$

我们还定义互补截断函数 $\chi_\delta^c(y) = 1 - \chi_\delta(y)$。

**引理 2.3** (弱型预解估计)。 设 $(w_{Na}, \phi_{Na})$ 为 (2.4)的解，且 $f \in H^1(0,1)$ 满足 $f(1-j) = 0$，其中 $j = 0$ 或 $j = 1$。定义

$$A_F = \begin{cases} \nu^{-\frac{1}{6}}|k|^{-\frac{5}{6}}\|F\|_{L^2}, & \text{if} \quad F \in L^2, \\ \nu^{-\frac{1}{2}}|k|^{-\frac{1}{2}}\|F\|_{H_k^{-1}}, & \text{if} \quad F \in H_k^{-1}. \end{cases}$$

于是，存在常数 $\nu_0 > 0$ 和 $\epsilon_1 > 0$，使得对于 $\nu \le \nu_0, \nu k^2 \le \|V'\|_{L^\infty}$ 和 $|o(\nu,k)| \le \epsilon_1(\nu k^2)^{\frac{1}{3}},$，以下估计成立。

(1) 若 $0 \le |V(j) - \lambda| \le 2|k|^{-1}$，对于 $\delta_0 = \nu^{\frac{1}{3}}|k|^{-\frac{1}{3}}$，我们有

$$|\langle w_{Na}, f\rangle| \lesssim \left(\nu^{\frac{1}{4}}|k|^{-\frac{1}{4}}|f(j)|\left(|V(j)-\lambda| + \delta_0\right)^{-\frac{3}{4}} + \left(|k|^{-1}\|\partial_y f\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^\infty}\right)\right) A_F. \tag{2.23}$$

(2) 若 $|V(j) - \lambda| \ge 2|k|^{-1}$，对于 $\delta_1 = |k|^{-1}$，我们有

$$\begin{aligned} |\langle w_{Na}, f\rangle| \lesssim \Big[&\nu^{\frac{1}{4}}|k|^{\frac{1}{2}}|f(j)|(|k(V(j)-\lambda)|+1)^{-\frac{3}{4}} + \nu^{\frac{1}{2}}|k|^{-\frac{1}{2}}\left\|\partial_y\left(f\frac{\chi_{\delta_1}}{V-\lambda}\right)\right\|_{L^2} \\ &+ (\nu^{\frac{1}{6}}|k|^{-\frac{1}{6}} + |k|^{-\frac{3}{2}})\left\|f\frac{\chi_{\delta_1}}{V-\lambda}\right\|_{L^2} + |k|^{-\frac{1}{2}}\|(\partial_y, k)f\|_{L^2(E_{\delta_1})}\Big] A_F. \end{aligned} \tag{2.24}$$

证明。 情形 $F \in L^2$ 的估计可沿用情形$F \in H_k^{-1}$ 的论证思路得到，只需按照后续证明的需要，将预解式估计（2.10）替换为（2.8）即可。因此，我们仅给出情形 $F \in H_k^{-1}$ 对应的证明。

为简便起见，我们讨论情形 $j = 1$，因为情形 $j = 0$ 可用类似方法处理。首先，我们改写

$$\langle w_{Na}, f\rangle = \left\langle (V-\lambda)w_{Na}, \frac{f\chi_\delta}{V-\lambda}\right\rangle + \langle w_{Na}, f\chi_\delta^c\rangle. \tag{2.25}$$

接下来我们分析 $\langle (V-\lambda)w_{Na}, \varphi\rangle$。将 (2.4) 与 $\varphi \in H_0^1(0,1)$ 相乘并积分，得到

$$\langle -\nu(\partial_y^2 - k^2)w_{Na} + ik(V-\lambda)w_{Na} - ikV''\phi_{Na} + o(\nu,k)w_{Na}, \varphi\rangle = \langle F, \varphi\rangle.$$

利用预解估计 (2.10) 和条件 $\nu k^2 \lesssim 1$，我们推导得出

$$\begin{aligned}
&|\langle (V-\lambda)w_{Na} - V''\phi_{Na}, \varphi\rangle| \\
&\lesssim |k|^{-1}\left(\|F\|_{H_k^{-1}}\|\varphi\|_{H_k^1} + \nu\|w_{Na}'\|_{L^2}\|\varphi'\|_{L^2} + (\nu k^2 + \epsilon_1\nu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}})\|w_{Na}\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}\right) \\
&\lesssim |k|^{-1}\|F\|_{H_k^{-1}}\left(\|\varphi\|_{H_k^1} + \nu^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{1}{3}}\|\varphi\|_{L^2}\right),
\end{aligned}$$

这意味着

$$|\langle (V-\lambda)w_{Na}, \varphi\rangle| \lesssim |k|^{-1}\|F\|_{H_k^{-1}}\left(\|\varphi\|_{H_k^1} + \nu^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{1}{3}}\|\varphi\|_{L^2}\right) + |\langle V''\phi_{Na}, \varphi\rangle|. \tag{2.26}$$

对于 $\varphi \in H^1(0,\ 1)$，且 $\varphi(0) = 0$，我们构造辅助函数 $\varphi_1 \in H_0^1(0,\ 1)$，使得

$$\varphi_1(y) = \varphi(y) - \varphi(1)\eta_{\delta_*}(y), \tag{2.27}$$

其中$C^1$光滑函数 $\eta_{\delta_*}(y)$满足

$$\begin{cases}
0 \le \eta_{\delta_*}(y) \le 1, \quad \eta_{\delta_*}(1) = 1, \quad \text{supp}\eta_{\delta_*} \subset [1-\delta_*, 1], \\
\|\eta_{\delta_*}\|_{L^\infty} = 1, \quad \|\eta_{\delta_*}\|_{L^2} \le \delta_*^{\frac{1}{2}}, \quad \|\eta_{\delta_*}\|_{L^1} \le \delta_*, \quad \|\eta_{\delta_*}'\|_{L^2} \le \delta_*^{-\frac{1}{2}}, \\
\|(V-\lambda)\eta_{\delta_*}\|_{L^\infty} \lesssim |V(1)-\lambda| + \delta_*.
\end{cases} \tag{2.28}$$

由（2.10）可得

$$\begin{aligned}
&\|w_{Na}\|_{L^1(1-\delta_*,1)} = \delta_*\Big\|\int_y^1 w_{Na}'(z)dz\Big\|_{L^\infty(1-\delta_*,1)} \le \delta_*^{\frac{3}{2}}\|w_{Na}'\|_{L^2} \lesssim \delta_*^{\frac{3}{2}}\nu^{-1}\|F\|_{H_k^{-1}}, \\
&\left|\langle V''\phi_{Na}, \eta_{\delta_*}\rangle\right| = \left|\int_0^1\left(\int_0^y \phi_{Na}'dz\right)V''\eta_{\delta_*}dy\right| \lesssim \delta_*\|\partial_y\phi_{Na}\|_{L^2} \lesssim \delta_*\nu^{-\frac{1}{2}}|k|^{-1}\|F\|_{H_k^{-1}}.
\end{aligned}$$

上述估计结合（2.26）、（2.27）和（2.28），可得

$$\begin{aligned}
&|\langle (V-\lambda)w_{Na}, \varphi\rangle| \\
&\le |\varphi(1)||\langle (V-\lambda)w_{Na}, \eta_{\delta_*}\rangle| + |\langle (V-\lambda)w_{Na}, \varphi_1\rangle| \\
&\lesssim |\varphi(1)|\|w_{Na}\|_{L^1(1-\delta_*,1)}\|(V-\lambda)\eta_{\delta_*}\|_{L^\infty} + |\langle (V-\lambda)w_{Na}, \varphi_1\rangle| \\
&\lesssim |\varphi(1)|\nu^{-1}\delta_*^{\frac{3}{2}}\|F\|_{H_k^{-1}}\left(|V(1)-\lambda| + \delta_*\right) + |k|^{-1}\|F\|_{H_k^{-1}}\|\varphi - \varphi(1)\eta_{\delta_*}(y)\|_{H_k^1} \\
&\quad + \nu^{-\frac{1}{3}}|k|^{-\frac{2}{3}}\|F\|_{H_k^{-1}}\|\varphi - \varphi(1)\eta_{\delta_*}(y)\|_{L^2} + |\langle V''\phi_{Na}, \varphi - \varphi(1)\eta_{\delta_*}\rangle| \\
&\lesssim |\varphi(1)||k|^{-1}\|F\|_{H_k^{-1}}\left[\nu^{-1}|k|\delta_*^{\frac{3}{2}}\left(|V(1)-\lambda| + \delta_*\right) + \delta_*^{-\frac{1}{2}} + \nu^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{1}{3}}\delta_*^{\frac{1}{2}} + \nu^{-\frac{1}{2}}\delta_*\right] \\
&\quad + |k|^{-1}\|F\|_{H_k^{-1}}\left(\|\partial_y\varphi\|_{L^2} + \nu^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{1}{3}}\|\varphi\|_{L^2}\right) + |\langle V''\phi_{Na}, \varphi\rangle|,
\end{aligned} \tag{2.29}$$

其中，最后一个不等式中我们使用了 $|k|\|\varphi\|_{L^2} \lesssim \nu^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{1}{3}}\|\varphi\|_{L^2}$。

现在，我们开始分析式（2.23）和式（2.24）。

**式 (2.23) 的证明。** 对于 $0 \le |V(1) - \lambda| \le 2|k|^{-1}$，我们设

$$\delta_* = \delta_0^{\frac{3}{2}}(|V(1)-\lambda| + \delta_0)^{-\frac{1}{2}}, \quad \delta_0 = \nu^{\frac{1}{3}}|k|^{-\frac{1}{3}}, \quad \delta_* \le \delta_0,$$

由此得到

$$\begin{cases}\nu^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{1}{3}}\delta_*^{\frac{1}{2}}=\delta_0^{-1}\delta_*^{\frac{1}{2}}\le\delta_*^{-\frac{1}{2}}, \quad \nu^{-\frac{1}{2}}\delta_*=|k|^{-\frac{1}{2}}\delta_0^{-\frac{3}{2}}\delta_*\le\delta_*^{-\frac{1}{2}},\\ \nu^{-1}|k|\delta_*^{\frac{3}{2}}\left(|V(1)-\lambda|+\delta_0\right)=\delta_*^{-\frac{1}{2}}=\nu^{-\frac{1}{4}}|k|^{\frac{1}{4}}(|V(1)-\lambda|+\delta_0)^{\frac{1}{4}}.\end{cases}\tag{2.30}$$

将（2.30）代入（2.29），得到

$$\begin{aligned}|\langle(V-\lambda)w_{Na},\varphi\rangle|\lesssim&|\varphi(1)|\|F\|_{H_k^{-1}}\nu^{-\frac{1}{4}}|k|^{-\frac{3}{4}}\left(|V(1)-\lambda|+\delta_0\right)^{\frac{1}{4}}\\&+|k|^{-1}\|F\|_{H_k^{-1}}\left(\|\partial_y\varphi\|_{L^2}+\delta_0^{-1}\|\varphi\|_{L^2}\right)+|\langle V''\phi_{Na},\varphi\rangle|.\end{aligned}\tag{2.31}$$

利用（2.31）和 $\varphi=f\frac{\chi_{\delta_0}}{V-\lambda}$, 可得

$$|\langle w_{Na},f\rangle|\le\left|\left\langle(V-\lambda)w_{Na},f\frac{\chi_{\delta_0}}{V-\lambda}\right\rangle\right|+\left|\langle w_{Na},f\chi_{\delta_0}^c\rangle\right|\le \mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3+\mathrm{I}_4,\tag{2.32}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_1=&\left|f(1)\frac{\chi_{\delta_0}(1)}{V(1)-\lambda}\right|\|F\|_{H_k^{-1}}\nu^{-\frac{1}{4}}|k|^{-\frac{3}{4}}\left(|V(1)-\lambda|+\delta_0\right)^{\frac{1}{4}},\\ \mathrm{I}_2=&|k|^{-1}\|F\|_{H_k^{-1}}\left(\left\|\partial_y\left(f\frac{\chi_{\delta_0}}{V-\lambda}\right)\right\|_{L^2}+\delta_0^{-1}\left\|f\frac{\chi_{\delta_0}}{V-\lambda}\right\|_{L^2}\right),\\ \mathrm{I}_3=&\left|\left\langle V''\phi_{Na},f\frac{\chi_{\delta_0}}{V-\lambda}\right\rangle\right|,\\ \mathrm{I}_4=&\left|\langle w_{Na},f\chi_{\delta_0}^c\rangle\right|.\end{aligned}$$

对于 $\mathrm{I}_1$,，利用表达式（2.21），有

$$\left|\frac{\chi_{\delta_0}(1)}{V(1)-\lambda}\right|\lesssim\left(|V(1)-\lambda|+\delta_0\right)^{-1},$$

这意味着

$$\mathrm{I}_1\le\nu^{-\frac{1}{4}}|k|^{-\frac{3}{4}}|f(1)|\|F\|_{H_k^{-1}}\left(|V(1)-\lambda|+\delta_0\right)^{-\frac{3}{4}}.$$

对于$\mathrm{I}_2$, 应用估计式（2.22），我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_2\le&|k|^{-1}\|F\|_{H_k^{-1}}\left[\|\partial_y f\|_{L^\infty}\left\|\frac{\chi_{\delta_0}}{V-\lambda}\right\|_{L^2}+\|f\|_{L^\infty}\left(\left\|\partial_y\left(\frac{\chi_{\delta_0}}{V-\lambda}\right)\right\|_{L^2}+\delta_0^{-1}\left\|\frac{\chi_{\delta_0}}{V-\lambda}\right\|_{L^2}\right)\right]\\ \lesssim&|k|^{-1}\|F\|_{H_k^{-1}}\left(\nu^{-\frac{1}{6}}|k|^{\frac{1}{6}}\|\partial_y f\|_{L^\infty}+\nu^{-\frac{1}{2}}|k|^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^\infty}\right).\end{aligned}$$

对于 $\mathrm{I}_3$,，我们首先定义

$$\begin{cases}y_\lambda\equiv 1, & \lambda\in[V(1),V(1)+2|k|^{-1}],\\ y_\lambda \text{ is the unique point such that } V(y_\lambda)=\lambda, & \lambda\in[V(1)-2|k|^{-1},V(1)].\end{cases}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_3\le&\int_0^1\left|\frac{\left[(V''\phi_{Na}f)(y)-(V''\phi_{Na}f)(y_\lambda)\right]\chi_{\delta_0}(y)}{V(y)-V(y_\lambda)}\right|dy+\left|\int_0^1\frac{(V''\phi_{Na}f)(y_\lambda)\chi_{\delta_0}(y)}{V(y)-V(y_\lambda)}dy\right|\\ :=&\mathrm{I}_{3,1}+\mathrm{I}_{3,2}.\end{aligned}\tag{2.33}$$

注意到 $|V(y)-V(y_\lambda)|\sim|y-y_\lambda|$，我们使用 H¨older 不等式和预解式估计（2.10）得到

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{3,1}\le&\int_0^1\left|\frac{\int_{y_\lambda}^y\partial_z(V''\phi_{Na}f)(z)dz}{V(y)-V(y_\lambda)}\right|dy\lesssim\|\partial_y(V''f\phi_{Na})\|_{L^2}\\ \lesssim&\|\phi_{Na}\|_{L^2}\|\partial_y f\|_{L^\infty}+(\|\phi_{Na}\|_{L^2}+\|\partial_y\phi_{Na}\|_{L^2})\|f\|_{L^\infty}\\ \lesssim&\nu^{-\frac12}|k|^{-1}\|F\|_{H_k^{-1}}(|k|^{-1}\|\partial_y f\|_{L^\infty}+\|f\|_{L^\infty}).\end{aligned}$$

对于 $\mathrm{I}_{3,2}$, if $V(1)-2|k|^{-1}\le\lambda\le V(1)-\delta_0$，我们应用预解式估计（2.10）得到

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{3,2}\lesssim&\|f\|_{L^\infty}|\phi_{Na}(y_\lambda)|\left|\int_0^1\frac{\chi_{\delta_0}(y)}{V(y)-V(y_\lambda)}dy\right|\\ \lesssim&\|f\|_{L^\infty}\left|\int_{y_\lambda}^1\partial_y\phi_{Na}dy\right|\left|\int_{E_{\delta_0}}\frac{2(V(y)-\lambda)}{\delta_0^2}-\frac{(V(y)-\lambda)^3}{\delta_0^4}dy+\int_{(0,1)\setminus E_{\delta_0}}\frac{1}{V(y)-\lambda}dy\right|\\ \lesssim&\|f\|_{L^\infty}\|\partial_y\phi_{Na}\|_{L^2}(1-y_\lambda)^{\frac12}(1+|\ln(1-y_\lambda)|+|\ln(y_\lambda)|)\\ \lesssim&\nu^{-\frac12}|k|^{-1}\|F\|_{H_k^{-1}}\|f\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

若 $V(1)-\delta_0\le\lambda\le V(1)$，令 $y_{\lambda,\,\delta_0}$ 为满足 $V(y_{\lambda,\,\delta_0})=\lambda-\delta_0$ 的唯一点。由预解式估计（2.10），可得

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{3,2}\lesssim&\|f\|_{L^\infty}|\phi_{Na}(y_\lambda)|\left|\int_0^1\frac{\chi_{\delta_0}(y)}{V(y)-V(y_\lambda)}dy\right|\\ \lesssim&\|f\|_{L^\infty}\left|\int_{y_\lambda}^1\partial_y\phi_{Na}dy\right|\left|\int_{y_{\lambda,\delta_0}}^1\frac{2(V(y)-\lambda)}{\delta_0^2}-\frac{(V(y)-\lambda)^3}{\delta_0^4}dy+\int_0^{y_{\lambda,\delta_0}}\frac{1}{V(y)-\lambda}dy\right|\\ \lesssim&\|f\|_{L^\infty}\|\partial_y\phi_{Na}\|_{L^2}(1-y_\lambda)^{\frac12}(1+|\ln(y_{\lambda,\delta_0}-y_\lambda)|+|\ln(y_\lambda)|)\\ \lesssim&\nu^{-\frac12}|k|^{-1}\|F\|_{H_k^{-1}}\|f\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

其中，在最后一个不等式中我们还用到了 $y_\lambda-y_{\lambda,\,\delta_0}\sim\delta_0$ 和 $1-y_\lambda\lesssim\delta_0$。

结合上述关于 $\mathrm{I}_{3,1}$ 和 $\mathrm{I}_{3,2}$,的估计，我们可得

$$\mathrm{I}_3\lesssim\nu^{-\frac12}|k|^{-1}\|F\|_{H_k^{-1}}(|k|^{-1}\|\partial_y f\|_{L^\infty}+\|f\|_{L^\infty}).$$

对于$\mathrm{I}_4$,根据（2.10）和 $\|\chi^c_{\delta_0}\|_{L^2}\le\delta_0^{\frac12}=\nu^{\frac16}|k|^{-\frac16}$，我们有

$$\mathrm{I}_4=\left|\langle w_{Na},f\chi^c_{\delta_0}\rangle\right|\le\|w_{Na}\|_{L^2}\|\chi^c_{\delta_0}\|_{L^2}\|f\|_{L^\infty(E_{\delta_0})}\lesssim\nu^{-\frac12}|k|^{-\frac12}\|F\|_{H_k^{-1}}\|f\|_{L^\infty(E_{\delta_0})}.$$

将$\mathrm{I}_1$–$\mathrm{I}_4$ 的估计代入（2.32），得到

$$\begin{aligned}|\langle w_{Na},f\rangle|\lesssim&\nu^{-\frac14}|k|^{-\frac34}\,|f(1)|\,\|F\|_{H_k^{-1}}\,(|V(1)-\lambda|+\delta_0)^{-\frac34}\\ &+\nu^{-\frac12}|k|^{-\frac12}\|F\|_{H_k^{-1}}\left(|k|^{-1}\|\partial_y f\|_{L^\infty}+\|f\|_{L^\infty}\right),\end{aligned}$$

由此完成了（2.23）的证明。

**式 (2.24) 的证明。** 对于 $|V(1)-\lambda|\ge2|k|^{-1}$，通过选取

$$\delta_*=\nu^{\frac12}|k|^{-\frac12}(|V(1)-\lambda|+|k|^{-1})^{-\frac12},\quad\delta_1=|k|^{-1},\quad\delta_*\le\delta_1,$$

我们得到

$$\begin{cases}\nu^{-1}|k|\delta_*^{\frac{3}{2}}\left(|V(1)-\lambda|+|k|^{-1}\right)=\delta_*^{-\frac{1}{2}}=\nu^{-\frac{1}{4}}\left(|k(V(1)-\lambda)|+1\right)^{\frac{1}{4}},\\ \nu^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{1}{3}}\delta_*^{\frac{1}{2}}\le\nu^{-\frac{1}{4}}\left(|k(V(1)-\lambda)|+1\right)^{-\frac{1}{4}},\quad \nu^{-\frac{1}{2}}\delta_*=\left(|k(V(1)-\lambda)|+1\right)^{-\frac{1}{2}}.\end{cases}\tag{2.34}$$

将 (2.34) 代入 (2.29)，并令 $\varphi=f_V^{\chi_{\delta_1}}$~~$(y)-\lambda$~~，可得

$$|\langle w_{Na},f\rangle|\le\left|\left\langle(V-\lambda)w_{Na},\frac{f\chi_{\delta_1}}{V-\lambda}\right\rangle\right|+\left|\langle w_{Na},f\chi_{\delta_1}^c\rangle\right|\lesssim \mathrm{J}_1+\mathrm{J}_2+\mathrm{J}_3+\mathrm{J}_4,\tag{2.35}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_1=&|k|^{-1}\|F\|_{H_k^{-1}}\left|f(1)\frac{\chi_{\delta_1}(1)}{V(1)-\lambda}\right|\nu^{-\frac{1}{4}}\left(|k(V(1)-\lambda)|+1\right)^{\frac{1}{4}},\\ \mathrm{J}_2=&|k|^{-1}\|F\|_{H_k^{-1}}\left(\left\|\partial_y\left(f\frac{\chi_{\delta_1}}{V-\lambda}\right)\right\|_{L^2}+\nu^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{1}{3}}\left\|f\frac{\chi_{\delta_1}}{V-\lambda}\right\|_{L^2}\right),\\ \mathrm{J}_3=&\left|\left\langle V''\phi_{Na},f\frac{\chi_{\delta_1}}{V-\lambda}\right\rangle\right|,\\ \mathrm{J}_4=&\left|\langle w_{Na},f\chi_{\delta_1}^c\rangle\right|.\end{aligned}$$

对于 $\mathrm{J}_1$,，利用条件 $|V(1)-\lambda|\ge 2|k|^{-1}$，可得

$$\left|\frac{\chi_{\delta_1}(1)}{V(1)-\lambda}\right|=\frac{1}{|V(1)-\lambda|}\lesssim|k||(|k(V(1)-\lambda)|+1)^{-1},$$

由此可得

$$\mathrm{J}_1\lesssim\nu^{-\frac{1}{4}}\|F\|_{H_k^{-1}}|f(1)|(|k(V(1)-\lambda)|+1)^{-\frac{3}{4}}.\tag{2.36}$$

的定义 $\mathrm{J}_2$ 已经符合所需的估计。因此，我们接下来分析 $\mathrm{J}_3$。由 (2.10)，可得

$$\mathrm{J}_3\le\|\phi_{Na}\|_{L^2}\left\|f\frac{\chi_{\delta_1}}{V-\lambda}\right\|_{L^2}\lesssim\nu^{-\frac{1}{2}}|k|^{-2}\|F\|_{H_k^{-1}}\left\|f\frac{\chi_{\delta_1}}{V-\lambda}\right\|_{L^2}.\tag{2.37}$$

对于 $\mathrm{J}_4$,，条件 $|V(1)-\lambda|\ge 2|k|^{-1}$ 意味着 $\chi_{\delta_1}^c(1)=0$。然后，结合边界条件 $f(0)=0$ 和预解式估计（2.10），我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_4\le&\|(\partial_y,k)\phi_{Na}\|_{L^2}\|(\partial_y,k)[f\chi_{\delta_1}^c]\|_{L^2}\\ \lesssim&\nu^{-\frac{1}{2}}|k|^{-1}\|F\|_{H_k^{-1}}\|(\partial_y,k)[f\chi_{\delta_1}^c]\|_{L^2}\\ \lesssim&\nu^{-\frac{1}{2}}|k|^{-1}\|F\|_{H_k^{-1}}\|(\partial_y,k)f\|_{L^2(E_{\delta_1})},\end{aligned}$$

其中，在最后一个不等式中我们使用了 $\|\chi_{\delta_1}^c\|_{L^\infty}\lesssim 1$和 $\|\partial_y\chi_{\delta_1}^c\|_{L^\infty}\lesssim\delta_1^{-1}=|k|$。

将$\mathrm{J}_1$–$\mathrm{J}_4$ 的估计代入（2.35），可得

$$\begin{aligned}|\langle w_{Na},f\rangle|\lesssim&|k|^{-1}\|F\|_{H_k^{-1}}\Big[\nu^{-\frac{1}{4}}|k||f(1)|(|k(V(1)-\lambda)|+1)^{-\frac{3}{4}}+\left\|\partial_y\left(f\frac{\chi_{\delta_1}}{V-\lambda}\right)\right\|_{L^2}\\ &+(\nu^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{1}{3}}+\nu^{-\frac{1}{2}}k^{-1})\left\|f\frac{\chi_{\delta_1}}{V-\lambda}\right\|_{L^2}+\nu^{-\frac{1}{2}}\|(\partial_y,k)f\|_{L^2(E_{\delta_1})}\Big].\end{aligned}\tag{2.38}$$

至此，我们完成了对式（2.24）的证明。 □

基于引理 2.1中的预解估计和引理 2.3中的弱型预解估计，我们现在推导系数 $c_1$ 和 $c_2$的精细界。

**引理 2.4.** 在与引理 *2.3* 中相同的条件下，我们有

$$(1+|k(\lambda-V(0))|)^{\frac{3}{4}}|c_1|+(1+|k(\lambda-V(1))|)^{\frac{3}{4}}|c_2|\lesssim \nu^{-\frac{1}{2}}|k|^{-\frac{1}{2}}\|F\|_{H_k^{-1}}, \tag{2.39}$$

$$(1+|k(\lambda-V(0))|)^{\frac{3}{4}}|c_1|+(1+|k(\lambda-V(1))|)^{\frac{3}{4}}|c_2|\lesssim \nu^{-\frac{1}{6}}|k|^{-\frac{5}{6}}\|F\|_{L^2}, \tag{2.40}$$

$$(1+|k(\lambda-V(0))|)|c_1|+(1+|k(\lambda-V(1))|)|c_2|\lesssim \nu^{-\frac{1}{12}}|k|^{-\frac{5}{3}}\|F\|_{H_k^1}. \tag{2.41}$$

证明。 我们只考虑系数 $c_1$，因为 $c_2$ 也可以用类似的方法处理。根据 $F$的正则性，我们将证明分为以下几种情况：$F\in H_k^{-1}$、 $L^2$或 $H_k^1$。为简单起见，我们令

$$f(y)=\frac{\sinh(k(1-y))}{\sinh k}.$$

**情形 1.** $F\in H_k^{-1}$ .

情形 *1.1*。 $\lambda\le V(0)\ -2|k|^{-1}$。

I在这种情况下，我们有 $E_{\delta_1}=\emptyset$ 以及 $\chi_{\delta_1}=1$。利用 (2.24) 和 $\nu k^2\lesssim 1$，我们得到

$$\begin{aligned}|c_1|=&|\langle w_{Na},f\rangle|\\ \lesssim&|k|^{-1}\|F\|_{H_k^{-1}}\Big(\nu^{-\frac{1}{4}}|k|(|k(V(0)-\lambda)|+1)^{-\frac{3}{4}}+\Big\|\partial_y\Big(\frac{f}{V-\lambda}\Big)\Big\|_{L^2}+\nu^{-\frac{1}{2}}\Big\|\frac{f}{V-\lambda}\Big\|_{L^2}\Big).\end{aligned} \tag{2.42}$$

根据引理 A.1，结合 $\nu k^2\lesssim 1$，我们得到

$$\begin{aligned}\Big\|\partial_y\Big(\frac{f}{V-\lambda}\Big)\Big\|_{L^2}\le&\|\partial_y f\|_{L^2}\Big\|\frac{1}{V-\lambda}\Big\|_{L^\infty}+\|f\|_{L^2}\Big\|\partial_y\Big(\frac{1}{V-\lambda}\Big)\Big\|_{L^\infty}\\ \lesssim&|k|^{\frac{1}{2}}|V(0)-\lambda|^{-1}+|k|^{-\frac{1}{2}}|V(0)-\lambda|^{-2}\\ \lesssim&|k|^{\frac{3}{2}}(1+|k(V(0)-\lambda)|)^{-1}\lesssim\nu^{-\frac{1}{2}}|k|^{\frac{1}{2}}(1+|k(V(0)-\lambda)|)^{-1},\end{aligned} \tag{2.43}$$

and

$$\begin{aligned}\nu^{-\frac{1}{2}}\Big\|\frac{f}{V-\lambda}\Big\|_{L^2}\le\nu^{-\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2}\Big\|\frac{1}{V-\lambda}\Big\|_{L^\infty}\le&\nu^{-\frac{1}{2}}|k|^{-\frac{1}{2}}|V(0)-\lambda|^{-1}\\ \le&\nu^{-\frac{1}{2}}|k|^{\frac{1}{2}}(1+|k(V(0)-\lambda)|)^{-1}.\end{aligned} \tag{2.44}$$

将（2.43）和（2.44）代入（2.42），得到

$$|c_1|\lesssim\nu^{-\frac{1}{2}}|k|^{-\frac{1}{2}}(1+|k(V(0)-\lambda)|)^{-\frac{3}{4}}\|F\|_{H_k^{-1}}. \tag{2.45}$$

情形 *1.2.* $|V(0)\ -\lambda|\in[0,2|k|^{-1}]$。

注意到 $1\sim\ \ (1+|k(V(0)\ -\lambda)|)$ 在这种情况下，弱型预解算子估计（2.23）给出 s

$$\begin{aligned}|c_1|=|\langle w_{Na},f\rangle|\lesssim&\nu^{-\frac{1}{4}}|k|^{-\frac{3}{4}}\left(|V(0)-\lambda|+\delta_0\right)^{-\frac{3}{4}}\|F\|_{H_k^{-1}}\\ &+\nu^{-\frac{1}{2}}|k|^{-\frac{1}{2}}\|F\|_{H_k^{-1}}\left(|k|^{-1}\|\partial_y f\|_{L^\infty}+\|f\|_{L^\infty}\right)\\ \lesssim&\nu^{-\frac{1}{2}}|k|^{-\frac{1}{2}}(1+|k(V(0)-\lambda)|)^{-\frac{3}{4}}\|F\|_{H_k^{-1}},\end{aligned} \tag{2.46}$$

其中，在最后一个不等式中，我们用到了

$$\nu^{-\frac{1}{4}}|k|^{-\frac{3}{4}}\left(|V(0)-\lambda|+\delta_0\right)^{-\frac{3}{4}}\le\nu^{-\frac{1}{4}}|k|^{-\frac{3}{4}}\delta_0^{-\frac{3}{4}}=\nu^{-\frac{1}{2}}|k|^{-\frac{1}{2}},$$
$$\|\partial_y f\|_{L^\infty}\lesssim|k|,\quad \|f\|_{L^\infty}\le 1,\quad 1\sim(1+|k(V(0)-\lambda)|)^{-\frac{3}{4}}.$$

情形 *1.3.* $\lambda\ge V(0)+2|k|^{-1}$.

利用弱型预解算子估计 (2.24) 和 $\nu k^2\lesssim 1$，可得

$$|c_1|=|\langle w_{Na},f\rangle|\lesssim|k|^{-1}\|F\|_{H_k^{-1}}\Big[\nu^{-\frac{1}{4}}|k|(|k(V(0)-\lambda)|+1)^{-\frac{3}{4}}+\Big\|\partial_y\Big(f\frac{\chi_{\delta_1}}{V-\lambda}\Big)\Big\|_{L^2}$$
$$+\nu^{-\frac{1}{2}}\Big\|f\frac{\chi_{\delta_1}}{V-\lambda}\Big\|_{L^2}+\nu^{-\frac{1}{2}}\|(\partial_y,k)f\|_{L^2(E_{\delta_1})}\Big].\tag{2.47}$$

为了进行更精细的分析，我们引入如下定义的分离点

$$\begin{cases} y_*\equiv 1, & \lambda\in[2V(1)-V(0),\infty),\\ y_*\text{ is the unique point: }\lambda-V(0)=2(\lambda-V(y_*)), & \lambda\in[V(0)+2|k|^{-1},2V(1)-V(0)].\end{cases}$$

由此定义可知

$$\Big\|\frac{1}{V-\lambda}\Big\|_{L^\infty(0,y_*)}\lesssim|\lambda-V(0)|^{-1}.\tag{2.48}$$

对于 $y_*<1$，由于 $2(V(y_*)-V(0))=\lambda-V(0)$，我们有 $y_*\sim\lambda-V(0)$，从而得到

$$\|f\|_{L^\infty(y^*,1)}=\Big\|\frac{\sinh(k(1-y))}{\sinh k}\Big\|_{L^\infty(y^*,1)}\lesssim e^{-|ky_*|}\lesssim|ky_*|^{-1}\lesssim|k(\lambda-V(0))|^{-1},\tag{2.49}$$

$$\|\partial_y f\|_{L^\infty(y^*,1)}\lesssim|k|\Big\|\frac{\cosh(k(1-y))}{\sinh k}\Big\|_{L^\infty(y^*,1)}\lesssim|k|e^{-|ky_*|}\lesssim|y_*|^{-1}\lesssim|\lambda-V(0)|^{-1}.\tag{2.50}$$

由（2.22）、（2.48）、（2.49）以及引理 A.1，可得

$$\Big\|f\frac{\chi_{\delta_1}}{V-\lambda}\Big\|_{L^2}\le\|f\|_{L^2}\Big\|\frac{1}{V-\lambda}\Big\|_{L^\infty(0,y_*)}+\|f\|_{L^\infty(y_*,1)}\Big\|\frac{\chi_{\delta_1}}{V-\lambda}\Big\|_{L^2}$$
$$\lesssim|k|^{-\frac{1}{2}}|\lambda-V(0)|^{-1}+\delta_1^{-\frac{1}{2}}|k(\lambda-V(0))|^{-1}\lesssim|k|^{\frac{1}{2}}|k(\lambda-V(0))|^{-1}.$$

类似地，利用（2.22）、（2.48）–（2.50）和引理 A.1，也可得

$$\Big\|f\partial_y\Big(\frac{\chi_{\delta_1}}{V-\lambda}\Big)\Big\|_{L^2}+\Big\|\frac{\chi_{\delta_1}}{V-\lambda}\partial_y f\Big\|_{L^2}\lesssim|k|^{\frac{3}{2}}|k(\lambda-V(0))|^{-1},$$

这与 $\nu k^2\lesssim 1$结合可推出

$$\Big\|\partial_y\Big(f\frac{\chi_{\delta_1}}{V-\lambda}\Big)\Big\|_{L^2}+\nu^{-\frac{1}{2}}\Big\|f\frac{\chi_{\delta_1}}{V-\lambda}\Big\|_{L^2}\lesssim\nu^{-\frac{1}{2}}|k|^{\frac{1}{2}}|k(\lambda-V(0))|^{-1}.\tag{2.51}$$

类似于（2.49）和（2.50），可得

$$\|(\partial_y,k)f\|_{L^2(y^*,1)}\lesssim|k|\|e^{-|ky|}\|_{L^2(y^*,1)}\lesssim|k|^{\frac{1}{2}}e^{-|ky_*|}\lesssim|k|^{\frac{1}{2}}|k(\lambda-V(0))|^{-1},$$

结合 $E_{\delta_1}\subset(y_*,1)$，可得

$$\nu^{-\frac{1}{2}}\|(\partial_y,k)f\|_{L^2(E_{\delta_1})}\lesssim\nu^{-\frac{1}{2}}|k|^{\frac{1}{2}}|k(\lambda-V(0))|^{-1}.\tag{2.52}$$

将 (2.51) 和 (2.52) 代入 (2.47)，并注意到 $(\lambda - V(0)) \geq 2|k|^{-1}$ 可得

$$(1+|k(\lambda-V(0))|)^{\frac{3}{4}}|c_1| \lesssim \nu^{-\frac{1}{2}}|k|^{-\frac{1}{2}}\|F\|_{H_k^{-1}}. \tag{2.53}$$

**情形 2.** $F \in L^2$.

本情形的分析采用了与 $F \in H_k^{-1}$ 类似的方法。通过相同的论证，我们还得到

$$(1+|k(\lambda-V(0))|)^{\frac{3}{4}}|c_1| \lesssim \nu^{-\frac{1}{6}}|k|^{-\frac{5}{6}}\|F\|_{L^2}.$$

**情形 3.** $F \in H_k^1$.

情形 *3.1.* $|\lambda - V(0)| \leq |k|^{-1}$.

由（2.16）可直接得出

$$(1+|k(\lambda-V(0))|)|c_1| \lesssim \nu^{-\frac{1}{12}}|k|^{-\frac{5}{3}}\|F\|_{H_k^1}.$$

情形 *3.2*。 $V(0) - \lambda \geq |k|^{-1}$。

由引理A.1和（2.9），可得

$$\begin{aligned}|c_1| =&\langle w_{Na}, f\rangle \leq \|f\|_{L^2}\Big\|\frac{1}{V-\lambda}\Big\|_{L^\infty}\|(V-\lambda)w_{Na}\|_{L^2}\\ \lesssim&|k|^{-\frac{5}{2}}(\lambda - V(0))^{-1}\|F\|_{H_k^1} \lesssim |k|^{-\frac{3}{2}}(1+|k(\lambda-V(0))|)^{-1}\|F\|_{H_k^1}.\end{aligned}$$

情形 *3.3*。 $\lambda - V(0) \geq |k|^{-1}$。

利用估计式（2.48）、（2.49），结合（A.1）和（2.9），得到

$$\begin{aligned}|c_1| = \langle w_{Na}, f\rangle \leq&\|f\|_{L^2}\Big\|\frac{1}{V-\lambda}\Big\|_{L^\infty(0,y_*)}\|(V-\lambda)w_{Na}\|_{L^2} + \|f\|_{L^\infty(y_*,1)}\|w_{Na}\|_{L^1}\\ \lesssim&\nu^{-\frac{1}{12}}|k|^{-\frac{5}{3}}|k(\lambda-V(0))|^{-1}\|F\|_{H_k^1}\\ \lesssim&\nu^{-\frac{1}{12}}|k|^{-\frac{5}{3}}(1+|k(\lambda-V(0))|)^{-1}\|F\|_{H_k^1},\end{aligned}$$

其中，在最后一个不等式中，我们使用了条件 $\lambda - V(0) \geq |k|^{-1}$。 □

现在，我们可以得出无滑移边界条件下涡量的预解估计。

命题的证明*2.2*。我们注意到

$$\begin{aligned}\|w\|_{L^2} \leq& \|w_{Na}\|_{L^2} + |c_1|\|w_1\|_{L^2} + |c_2|\|w_2\|_{L^2},\\ \|\rho_k^{\frac{1}{2}}w\|_{L^2} \leq& \|w_{Na}\|_{L^2} + |c_1|\|\rho_k^{\frac{1}{2}}w_1\|_{L^2} + |c_2|\|\rho_k^{\frac{1}{2}}w_2\|_{L^2}.\end{aligned}$$

估计式（2.18）–（2.20）可直接由预解估计（2.8）–（2.10）结合 Navier 滑移边界条件、边界层校正项估计（2.11）–（2.13）以及系数估计（2.39）–（2.41）证明。 □

## 3. 线性化纳维-斯托克斯方程的时空估计

在本节中，我们建立具有无滑移边界条件的线性化纳维-斯托克斯系统的时空估计

$$\begin{cases}\partial_t\omega-\nu(\partial_y^2-k^2)\omega+ikU\omega-ik\partial_y^2U\psi=-ikf_1-\partial_yf_2,\\(\partial_y^2-\alpha^2)\psi=\omega,\quad \psi(t,0)=\psi(t,1)=\psi'(t,0)=\psi'(t,1)=0,\quad \omega(0,y)=\omega_k^{\mathrm{in}}(y),\end{cases}\tag{3.1}$$

为简洁起见，此处省略下标 $k$。此外，我们采用记号$\|f\|_{L^pL^q}=\|f\|_{L_t^pL_y^q}$。

**命题3.1**。 设 $(\omega,\ \psi)$ 是方程 (3.1)的解。那么存在常数 $\nu_0>0$ 和 $\epsilon_0>0$，使得对于 $\nu\in(0,\ \nu_0]$，$\epsilon\in(0,\ \epsilon_0]$，有

$$\begin{aligned}&|k|^2\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}u\|_{L^2L^2}^2+\nu^{\frac12}|k|\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}\omega\|_{L^2L^2}^2+\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}\sqrt{1-(2y-1)^2}\omega\|_{L^\infty L^2}^2+\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}u\|_{L^\infty L^\infty}^2\\&\quad\lesssim E^{\mathrm{in}}+\nu^{-1}\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}(f_1,f_2)\|_{L^2L^2}^2,\end{aligned}$$

其中 $E^{\mathrm{in}}=:\quad |k|^{-2}\|\partial_y\omega^{\mathrm{in}}\|_{L^2}^2+\|u^{\mathrm{in}}\|_{H^1}^2$。

这里，我们利用第 2.2 节得到的精细预解式估计，证明无黏阻尼和增强耗散估计。在这些估计的基础上，我们进一步推导出涡量的加权时空 $L^\infty L^2$ 估计以及 $L^\infty L^\infty$ 速度估计。证明分为高频和低频两种情形，即 $\nu k^2\geq\|\partial_yU\|_{L_t^\infty L_y^\infty}$和$\nu k^2\leq\|\partial_yU\|_{L_t^\infty L_y^\infty}$。高频情形的详细分析见小节3.1。对于低频情形，我们先在小节 3.2 建立稳态剪切流的时空估计，然后在小节 3.3 通过冻结时间方法将分析推广到时变热流情形。最后，在小节3.4完成命题 3.1 的证明。

### 3.1. 高频时空估计。

**命题 3.2.** 设 $\nu k^2\geq\|\partial_yU\|_{L_t^\infty L_y^\infty}$和 $(\omega,\psi)$ 是方程 (3.1)的解。那么存在常数 $\nu_0>0$ 和 $\epsilon_0>0$，使得对于 $\nu\in(0,\nu_0]$, $\epsilon\in[0,\epsilon_0]$，有

$$\begin{aligned}&|k|^2\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}u\|_{L^2L^2}^2+\nu|k|^2\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}\omega\|_{L^2L^2}^2+\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}\omega\|_{L^\infty L^2}^2+|k|\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}u\|_{L^\infty L^\infty}^2\\&\lesssim E^{\mathrm{in}}+\nu^{-1}\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}(f_1,f_2)\|_{L^2L^2}^2.\end{aligned}\tag{3.2}$$

证明。 我们将证明分为两个步骤。

1 1**步骤 1**。 $|k|^2\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}u\|_{L^2L^2}^2+\nu|k|^2\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}\omega\|_{L^2L^2}^2$的估计。

对 3.1 进行检验，并由 $\psi$ 取实部，其中 $\nu k^2\geq\|\partial_yU\|_{L_t^\infty L_y^\infty}$，得到

$$\begin{aligned}\frac12\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2+\nu\|\omega\|_{L^2}^2&=-\operatorname{Re}\left(ik\int_0^1\partial_yU(t,y)\psi'\overline{\psi}dy\right)+\operatorname{Re}(\langle ikf_1,\psi\rangle-\langle f_2,\partial_y\psi\rangle)\\&\leq\left(\frac12+\eta\right)\nu k^2\|(\partial_y,k)\psi\|_{L^2}^2+C_\eta(\nu k^2)^{-1}\left(\|f_1\|_{L^2}^2+\|f_2\|_{L^2}^2\right),\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}u\|_{L^2}^2+\nu\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\omega\|_{L^2}^2\\&\leq C_\eta(\nu k^2)^{-1}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}(f_1,f_2)\|_{L^2}^2+\left(\epsilon|k|^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}+\eta\right)\nu k^2\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{2}}|k|}u\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

注意到

$$\|(\partial_y,k)\psi\|_{L^2}^2=\|u\|_{L^2}^2\leq|k|^{-2}\|\omega\|_{L^2}^2, \tag{3.3}$$

通过选取 $\eta\ll1$，然后对 $t$ 积分，我们得到

$$|k|^2\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}u\|_{L^\infty L^2}^2+\nu|k|^2\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\omega\|_{L^2L^2}^2\lesssim|k|^2\|u^{\mathrm{in}}\|_{L^2}^2+\nu^{-1}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}(f_1,f_2)\|_{L^2L^2}^2. \tag{3.4}$$

由（3.3）和（3.4），我们还有

$$|k|^2\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}u\|_{L^2L^2}^2\lesssim|k|^2\|u^{\mathrm{in}}\|_{L^2}^2+\nu^{-1}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}(f_1,f_2)\|_{L^2L^2}^2. \tag{3.5}$$

**步骤 2**。 关于 $\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\omega\|_{L^\infty L^2}^2+|k|\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}u\|_{L^\infty L^\infty}^2$ 的估计。

设 $F_1=\partial_t\psi+ikU\psi$。它满足

$$\begin{aligned}(\partial_y^2-k^2)F_1=&\partial_t(\partial_y^2-k^2)\psi+ikU(\partial_y^2-k^2)\psi+2ik\partial_yU\partial_y\psi+ik\partial_y^2U\psi\\=&\partial_t\omega+ikU\omega+2ik\partial_yU\partial_y\psi+ik\partial_y^2U\psi,\end{aligned}$$

其中 $F_1|_{y=0,\ 1}=\partial_yF_1|_{y=0,\ 1}=0$。分部积分并利用方程（3.1），可得

$$\begin{aligned}&\langle ikf_1,F_1\rangle-\langle f_2,\partial_yF_1\rangle=\langle-ikf_1-\partial_yf_2,-F_1\rangle\\&=\langle(\partial_t-\nu(\partial_y^2-k^2)+ikU)\omega-ik\partial_y^2U\psi,-F_1\rangle\\&=\langle(\partial_y^2-k^2)F_1-2ik\partial_yU\partial_y\psi-\nu(\partial_y^2-k^2)\omega-2ik\partial_y^2U\psi,-F_1\rangle\\&=\|(\partial_y,k)F_1\|_{L^2}^2+\langle2ik\partial_yU\partial_y\psi,F_1\rangle\\&\quad+\nu\langle\omega,\partial_t\omega+ikU\omega+2ik\partial_yU\partial_y\psi+ik\partial_y^2U\psi\rangle+2ik\langle\partial_y^2U\psi,F_1\rangle.\end{aligned}$$

取实部，再利用柯西-施瓦茨不等式，可得

$$\begin{aligned}&\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\|\omega\|_{L^2}^2+\|(\partial_y,k)F_1\|_{L^2}^2\\&\leq2\nu|k||\langle\omega,\partial_yU\partial_y\psi\rangle|+\nu|k|\langle\partial_y\psi,\partial_y^3U\psi\rangle+2|k||\langle\partial_yU\partial_y\psi+\partial_y^2U\psi+f_1,F_1\rangle|+|\langle f_2,\partial_yF_1\rangle|\\&\leq\nu\|\omega\|_{L^2}^2+\nu\|\partial_y^3U\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}^2+(\nu k^2+4)\|\partial_yU\|_{L^\infty}^2\|\partial_y\psi\|_{L^2}^2+4\|\partial_y^2U\|_{L^\infty}^2\|\psi\|_{L^2}^2\\&\quad+\frac{3}{4}|k|^2\|F_1\|_{L^2}^2+\frac{1}{4}\|\partial_yF_1\|_{L^2}^2+4\|f_1\|_{L^2}^2+\|f_2\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{3.6}$$

由（3.3），可得

$$\nu\frac{d}{dt}\|\omega\|_{L^2}^2\lesssim\|(f_1,f_2)\|_{L^2}^2+\nu\|\omega\|_{L^2}^2,$$

这意味着

$$\frac{d}{dt}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\omega\|_{L^2}^2\lesssim\nu^{-1}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}(f_1,f_2)\|_{L^2}^2+(1+\epsilon\nu^{\frac{1}{3}})\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\omega\|_{L^2}^2.$$

由（3.4）可得，令 $\nu k^2 \gtrsim 1$，我们得到

$$\begin{aligned}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\omega\|_{L^\infty L^2}^2 \lesssim& \|\omega_k^{\text{in}}\|_{L^2}^2 + \nu^{-1}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}(f_1,f_2)\|_{L^2L^2}^2 + \nu|k|^2\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\omega\|_{L^2L^2}^2\\ \lesssim& \|\omega_k^{\text{in}}\|_{L^2}^2 + \nu^{-1}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}(f_1,f_2)\|_{L^2L^2}^2.\end{aligned}$$

由于 $\|u\|_{L^\infty} \le |k|^{-\frac{1}{2}}\|\omega\|_{L^2}$，我们还有

$$|k|\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}u\|_{L^\infty L^\infty}^2 \lesssim \|\omega_k^{\text{in}}\|_{L^2}^2 + \nu^{-1}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}(f_1,f_2)\|_{L^2L^2}^2.$$

因此，我们完成了命题 3.2 的证明。 □

3.2. **低频的时空估计：冻结时间情形**。我们首先考虑冻结系数方程

$$\begin{cases}\partial_t\omega - \nu(\partial_y^2 - k^2)\omega + ikV\omega - ikV''\psi = -ikf_1 - \partial_y f_2 - f_3 - f_4,\\ \omega = (\partial_y^2 - k^2)\psi, \quad \psi(0) = \psi(1) = \psi'(0) = \psi'(1) = 0,\\ \omega(0,y) = \omega_k^{\text{in}}(y),\end{cases} \tag{3.7}$$

其中稳态流满足

$$V(y) \in H^4(0,1), \qquad \inf_{y\in(0,1)} \partial_y V \ge c_0 > 0, \text{ and } V'' > 0 \text{ or } V'' < 0.$$

**引理 3.3.** 设 $\nu k^2 \le \|V'\|_{L^\infty}$ 和 $(\omega,\psi)$ 是方程 (3.7)的解。那么存在常数$\nu_0 > 0$ 和 $\epsilon_1 > 0$，使得对于 $\nu \in (0,\nu_0]$, $\epsilon \in [0,\epsilon_1]$，有

$$\begin{aligned}&|k|^2\left\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}u\right\|_{L^2L^2}^2 + \nu^{\frac{1}{2}}|k|\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\omega\|_{L^2L^2}^2 + \nu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\rho_k^{\frac{1}{2}}\omega\|_{L^2L^2}^2\\ &\lesssim E^{\text{in}} + \nu^{-1}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}(f_1,f_2)\|_{L^2L^2}^2 + \nu^{-\frac{1}{3}}|k|^{-\frac{2}{3}}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}f_3\|_{L^2L^2}^2 + \nu^{-\frac{1}{6}}|k|^{-\frac{7}{3}}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}f_4\|_{L^2H_k^1}^2.\end{aligned} \tag{3.8}$$

关于 $|k|^2\left\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}u\right\|_{L^2L^2}^2$ 的估计已在 [17, 命题 6.1 和 6.2] 中建立。

$$\begin{aligned}|k|^2\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}u\|_{L^2L^2}^2 \lesssim& E^{\text{in}} + \nu^{-1}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}(f_1,f_2)\|_{L^2L^2}^2\\ &+ \nu^{-\frac{1}{3}}|k|^{-\frac{2}{3}}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}f_3\|_{L^2L^2}^2 + |k|^{-2}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}f_4\|_{L^2H_k^1}^2.\end{aligned}$$

接下来只需估计 $\nu^{\frac{1}{2}}|k|\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\omega\|_{L^2L^2}^2 + \nu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\rho_k^{\frac{1}{2}}\omega\|_{L^2L^2}^2$，其证明分为以下引理：3.4 和 3.5。

我们首先将方程（3.7）的解分解为非齐次部分和齐次部分：

$$\omega = \omega_I + \omega_H,$$

其中，非齐次部分 $\omega_I$ 满足

$$\begin{cases}\partial_t\omega_I - \nu(\partial_y^2 - k^2)\omega_I + ikV\omega_I - ikV''\psi_I = -ikf_1 - \partial_y f_2 - f_3 - f_4,\\ \omega_I = (\partial_y^2 - k^2)\psi_I, \quad \psi_I(0) = \psi_I(1) = \psi_I'(0) = \psi_I'(1) = 0,\\ \omega_I(0,y) = 0,\end{cases} \tag{3.9}$$

而齐次部分 $\omega_H$ 满足

$$\begin{cases}\partial_t\omega_H-\nu(\partial_y^2-k^2)\omega_H+ikV\omega_H-ikV''\psi_H=0,\\ \omega_H=(\partial_y^2-k^2)\psi_H,\quad \psi_H(0)=\psi_H(1)=\psi_H'(0)=\psi_H'(1)=0,\\ \omega_H(0,y)=\omega_k^{\mathrm{in}}(y).\end{cases}\tag{3.10}$$

**引理 3.4.** 设 $\nu k^2\le\|V'\|_{L^\infty}$和$(\omega_I,\psi_I)$是(3.9)的解。那么，存在常数$\nu_0>0$和 $\epsilon_1>0$，使得对于 $\nu\in(0,\nu_0]$, $\epsilon\in[0,\epsilon_1]$，有

$$\begin{aligned}&\nu^{\frac12}|k|\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}\omega_I\|_{L^2L^2}^2+\nu^{\frac13}|k|^{\frac23}\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}\rho_k^{\frac12}\omega_I\|_{L^2L^2}^2\\ \lesssim&\nu^{-1}\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}(f_1,f_2)\|_{L^2L^2}^2+\nu^{-\frac13}|k|^{-\frac23}\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}f_3\|_{L^2L^2}^2+\nu^{-\frac16}|k|^{-\frac73}\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}f_4\|_{L^2H_k^1}^2.\end{aligned}\tag{3.11}$$

证明. 首先，我们令

$$\begin{aligned}w_I(\lambda,k,y)=:&\int_0^{+\infty}e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}\omega_I(t,k,y)e^{-it\lambda}dt,\\ F_j(\lambda,k,y)=:&\int_0^{+\infty}e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}f_j(t,k,y)e^{-it\lambda}dt,\quad j=1,2,3,4.\end{aligned}$$

那么 $w_I$ 满足带无滑移边界条件的 OS 方程。因此，我们可以利用命题2.2 中的预解式估计，得到

$$\nu^{\frac12}|k|\|w_I\|_{L^2}^2+\nu^{\frac13}|k|^{\frac23}\|\rho_k^{\frac12}w_I\|_{L^2}^2\lesssim\nu^{-1}\|(F_1,F_2)\|_{L^2}^2+\nu^{-\frac13}|k|^{-\frac23}\|F_3\|_{L^2}^2+\nu^{-\frac16}|k|^{-\frac73}\|F_4\|_{H_k^1}^2,$$

结合 Plancherel 公式可得

$$\begin{aligned}&\nu^{\frac12}|k|\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}\omega_I\|_{L^2L^2}^2+\nu^{\frac13}|k|^{\frac23}\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}\rho_k^{\frac12}\omega_I\|_{L^2L^2}^2\\ \lesssim&\nu^{-1}\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}(f_1,f_2)\|_{L^2L^2}^2+\nu^{-\frac13}|k|^{-\frac23}\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}f_3\|_{L^2L^2}^2+\nu^{-\frac16}|k|^{-\frac73}\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}f_4\|_{L^2H_k^1}^2.\end{aligned}$$

引理3.4的证明至此完成。 □

接下来，我们开始分析齐次方程（3.10）。

**引理 3.5.** 设 $\nu k^2\le\|V'\|_{L^\infty}$ 和 $(\omega_H,\psi_H)$ 为方程 (3.10)的解。那么存在常数$\nu_0>0$ 和 $\epsilon_1>0$，使得当 $\nu\in(0,\nu_0]$, $\epsilon\in[0,\epsilon_1]$时，有

$$\nu^{\frac12}|k|\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}\omega_H\|_{L^2L^2}^2+\nu^{\frac13}|k|^{\frac23}\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}\rho_k^{\frac12}\omega_H\|_{L^2L^2}^2\lesssim E^{\mathrm{in}}.\tag{3.12}$$

证明. 令 $\omega_{H,0}$ 满足线性化欧拉方程

$$\partial_t\omega_{H,0}+ikV\omega_{H,0}-ikV''(\partial_y^2-k^2)^{-1}\omega_{H,0}=0,\quad \omega_{H,0}(0)=\omega_k^{\mathrm{in}}.$$

为了纳入增强耗散的影响，我们接着令

$$\omega_{H,1}(t,k,y)=e^{-\nu k^2((V')^2t^3/3+t)}\omega_{H,0}(t,k,y),$$

它满足

$$\begin{aligned}&\partial_t\omega_{H,1}-\nu(\partial_y^2-k^2)\omega_{H,1}+ikV\omega_{H,1}-ikV''\psi_{H,1}\\ &\quad=-\nu(\partial_y\omega_{1,1}-iktV''\omega_{H,1}-iktV'\omega_{1,1})+ikV''\psi_{1,1},\end{aligned}\tag{3.13}$$

其中 $\psi_{1,\ 1}=\psi_{H,\ 1}-e^{-\nu k^2((V')^2t^3/3+t)}\psi_{H,\ 0}$ 且 $\omega_{1,\ 1}=\partial_y\omega_{H,\ 1}+iktV'\omega_{H,\ 1}$。

我们还引入以下记号

$$u_{H,j}=(\partial_y,-ik)\psi_{H,j},\quad \psi_{H,j}=(\partial_y^2-k^2)^{-1}\omega_{H,j},\quad j=0,1,2,3.$$

然后我们将 $\omega_H$ 分解为三部分

$$\omega_H=\omega_{H,1}+\omega_{H,2}+\omega_{H,3},$$

其中$\omega_{H,2}$ 满足带无滑移边界条件的非齐次纳维–斯托克斯方程

$$\begin{cases}\partial_t\omega_{H,2}-\nu(\partial_y^2-k^2)\omega_{H,2}+ikV\omega_{H,2}-ikV''\psi_{H,2}\\ \qquad\qquad=\nu(\partial_y\omega_{1,1}-iktV''\omega_{H,1}-iktV'\omega_{1,1})-ikV''\psi_{1,1},\\ \omega_{H,2}|_{t=0}=0,\qquad \langle\omega_{H,2},\sinh(ky)\rangle=\langle\omega_{H,2},\sinh(k(1-y))\rangle=0,\end{cases}\tag{3.14}$$

并且$\omega_{H,3}$ 求解

$$\begin{cases}\partial_t\omega_{H,3}-\nu(\partial_y^2-k^2)\omega_{H,3}+ikV\omega_{H,3}-ikV''\psi_{H,3}=0,\\ \omega_{H,3}|_{t=0}=0,\qquad \langle\omega_{H,3}+\omega_{H,1},\sinh(ky)\rangle=\langle\omega_{H,3}+\omega_{H,1},\sinh(k(1-y))\rangle=0.\end{cases}\tag{3.15}$$

**步骤 1.** 对$\omega_{H,1}$的估计。

以下关于 $\omega_{H,1}$ 的估计已在 [17,命题 6。2] 中得到，即

$$\nu^{\frac13}|k|^{\frac23}\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}\omega_{H,1}\|_{L^2L^2}^2\lesssim\|\omega_k^{\mathrm{in}}\|_{L^2}^2,\tag{3.16}$$

$$\nu\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}\omega_{1,1}\|_{L^2L^2}^2\lesssim\nu^{\frac23}|k|^{-\frac23}\|\omega_k^{\mathrm{in}}\|_{H^1}^2,\tag{3.17}$$

$$\nu^{\frac53}|k|^{\frac43}\left(\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}t\omega_{H,1}\|_{L^2L^2}^2+\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}t\omega_{1,1}\|_{L^2L^2}^2\right)\lesssim\nu^{\frac23}|k|^{-\frac23}\|\omega_k^{\mathrm{in}}\|_{H^1}^2,\tag{3.18}$$

$$\nu^{-\frac16}|k|^{-\frac13}\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}\psi_{1,1}\|_{L^2H_k^1}^2\lesssim\nu^{\frac12}|k|^{-1}\|\omega_k^{\mathrm{in}}\|_{H^1}^2.\tag{3.19}$$

**步骤 2.** 对$\omega_{H,2}$的估计。

应用引理3.4，取

$$f_2=-\nu\omega_{1,1},\quad f_3=-i\nu kt(V''\omega_{H,1}+V'\omega_{1,1}),\quad f_4=-ikV''\psi_{1,1},$$

我们有

$$\begin{aligned}&\nu^{\frac12}|k|\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}\omega_{H,2}\|_{L^2L^2}^2+\nu^{\frac13}|k|^{\frac23}\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}\rho_k^{\frac12}\omega_{H,2}\|_{L^2L^2}^2\\ &\lesssim\nu\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}\omega_{1,1}\|_{L^2L^2}^2+\nu^{\frac53}|k|^{\frac43}\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}t(V''\omega_{H,1}+V'\omega_{1,1})\|_{L^2L^2}^2\\ &\quad+\nu^{-\frac16}|k|^{-\frac73}\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}(ikV''\psi_{1,1})\|_{L^2H_k^1}^2.\end{aligned}\tag{3.20}$$

将（3.17）–（3.19）代入（3.20），可得

$$\nu^{\frac12}|k|\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}\omega_{H,2}\|_{L^2L^2}^2+\nu^{\frac13}|k|^{\frac23}\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}\rho_k^{\frac12}\omega_{H,2}\|_{L^2L^2}^2\lesssim|k|^{-2}\|\omega_k^{\mathrm{in}}\|_{H^1}^2.\tag{3.21}$$

**步骤 3.** 对$\omega_{H,3}$的估计。

对时间变量 $t$进行傅里叶变换，我们得到

$$w_3(\lambda,k,y)=\int_0^{+\infty}\omega_{H,3}(t,k,y)e^{-it\lambda+\epsilon\nu^{\frac13}t}dt,\quad \phi_3(\lambda,k,y)=\int_0^{+\infty}\psi_{H,3}e^{-it\lambda+\epsilon\nu^{\frac13}t}dt,$$

and

$$(i\lambda-\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}-\nu(\partial_y^2-k^2)+ikV)w_3(\lambda,k,y)-ikV''\phi_3=0.$$

因此，我们得到

$$w_3=-c_1(\lambda)w_{3,1}-c_2(\lambda)w_{3,2},$$

and

$$c_1(\lambda)=-\int_0^1\frac{\sinh(k(1-y))}{\sinh k}w_3dy,\qquad c_2(\lambda)=-\int_0^1\frac{\sinh(ky)}{\sinh k}w_3dy,$$

其中 $w_{3,1}$， $w_{3,2}$ 是由齐次 Orr-Sommerfeld 方程（2.5）和（2.6）定义的边界层修正项，其中 $\lambda$ 替换为 $-\lambda/k-i\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}/k$。

由（2.11）–（2.13），我们推得

$$\begin{aligned}\|w_{H,3}(\lambda,k,y)\|_{L_y^2}\leq&|c_1(\lambda)|\|w_{3,1}\|_{L_y^2}+|c_2(\lambda)|\|w_{3,2}\|_{L_y^2}\\ \lesssim&\nu^{-\frac{1}{4}}\big(|c_1(\lambda)|(1+|\lambda+kV(0)|)^{\frac{1}{4}}+|c_2(\lambda)|(1+|\lambda+kV(1)|)^{\frac{1}{4}}\big),\\ \|\rho_k^{\frac{1}{2}}w_{H,3}(\lambda,k,y)\|_{L_y^2}\leq&|c_1(\lambda)|\|\rho_k^{\frac{1}{2}}w_{3,1}\|_{L_y^2}+|c_2(\lambda)|\|\rho_k^{\frac{1}{2}}w_{3,2}\|_{L_y^2}\lesssim\nu^{-\frac{1}{6}}|k|^{\frac{1}{6}}(|c_1(\lambda)|+|c_2(\lambda)|),\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}&\nu^{\frac{1}{4}}|k|^{\frac{1}{2}}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\omega_{H,3}\|_{L^2L^2}+\nu^{\frac{1}{6}}|k|^{\frac{1}{3}}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\rho_k^{\frac{1}{2}}\omega_{H,3}\|_{L^2L^2}\\ &\lesssim|k|^{\frac{1}{2}}(\|(1+|\lambda+kV(0)|)^{\frac{1}{4}}c_1\|_{L^2}+\|(1+|\lambda+kV(1)|)^{\frac{1}{4}}c_2\|_{L^2}).\end{aligned}\tag{3.22}$$

系数 $c_1$ 和 $c_2$ 已在 [17, (7.21)] 中估计为

$$\|(1+|\lambda+kV(0)|)c_1\|_{L^2}+\|(1+|\lambda+kV(1)|)c_2\|_{L^2}\lesssim|k|^{-\frac{3}{2}}\|\omega_k^{\mathrm{in}}\|_{H^1}.\tag{3.23}$$

将（3.23）代入（3.22），得到

$$\nu^{\frac{1}{2}}|k|\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\omega_{H,3}\|_{L^2L^2}^2+\nu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\rho_k^{\frac{1}{2}}\omega_{H,3}\|_{L^2L^2}^2\lesssim|k|^{-2}\|\omega_k^{\mathrm{in}}\|_{H^1}^2.\tag{3.24}$$

结合（3.16）、（3.21）与（3.24，引理 3.5 的证明至此完成。 □

**3.3. 低频的时空估计：热方程情形。** 为后续应用时间冻结方法，我们需要对由热方程控制的背景剪切流 $U(t,\ y)$ 进行一致控制

$$\begin{cases}\partial_tU=\nu\partial_y^2U,\\ U(0,y)=U^{\mathrm{in}}(y),\quad U(t,0)=U^{\mathrm{in}}(0),\quad U(t,1)=U^{\mathrm{in}}(1).\end{cases}\tag{3.25}$$

下述引理给出了所需的一致估计。

**引理 3.6。** 假设初始数据 $U_{在}$ 中满足 （$M$）条件 （1.3）。则有以下估计成立。

(1) $\partial_yU$ 的一致上下界：

$$0<c_0\leq\inf_{t\in[0,\infty)}\inf_{y\in[0,1]}\partial_yU\leq\|\partial_yU\|_{L_t^\infty L_y^\infty}\leq C_0.\tag{3.26}$$

(2) $\partial_y^2 U$ 的瞬时正性：

$$\text{if } \partial_y^2 U^{\text{in}} \geq 0, \text{ then } \partial_y^2 U \equiv 0, \text{ or } \partial_y^2 U(t,y) > 0, \forall t > 0, y \in (0,1), \tag{3.27}$$

$$\text{if } \partial_y^2 U^{\text{in}} \leq 0, \text{ then } \partial_y^2 U \equiv 0, \text{ or } \partial_y^2 U(t,y) < 0, \forall t > 0, y \in (0,1). \tag{3.28}$$

(3) 正则性估计：

$$\|U(t,y)\|_{L_t^\infty H^4} \lesssim 1, \tag{3.29}$$

$$\|U(t,y) - U(s,y)\|_{L_y^\infty} \lesssim \nu(t-s)\|U^{\text{in}}\|_{H^4}, \tag{3.30}$$

$$\|\partial_y^2 U(t,y) - \partial_y^2 U(s,y)\|_{L_y^2} \lesssim \nu(t-s)\|U^{in}\|_{H^4}. \tag{3.31}$$

证明。 对于(1)，我们注意到 $\partial_y U$ 满足带诺伊曼边界条件的热方程。该解可用诺伊曼热核表示

$$\partial_y U(t,y) = \int_0^1 K(t,y,z)\partial_z U^{\text{in}}(z)dz, \tag{3.32}$$

其中诺伊曼热核为正，并满足守恒性质

$$K(t,y,z) > 0, \quad \int_0^1 K(t,y,z)dz = 1. \tag{3.33}$$

因此，结合初始数据的下界与上界，我们推导 ve

$$0 < c_0 \leq \inf_{z\in(0,1)} \partial_z U^{\text{in}}(z) \leq \partial_y U(t,y) \leq \sup_{z\in(0,1)} \partial_z U^{\text{in}}(z) \leq C_0. \tag{3.34}$$

对于(2)，由于 $\partial_y^2 U$ 满足带狄利克雷边界条件的热方程，瞬时正性直接由强最大值原理得出。

对于 (3)，我们设

$$f(t,y) =: U(t,y) - \left(U^{\text{in}}(1) - U^{\text{in}}(0)\right) y - U^{\text{in}}(0),$$

它满足带狄利克雷边界条件的热方程。应用 $H^2$ 估计式 (A.5) 对狄利克雷热方程进行估计，可得

$$\|f\|_{L_t^\infty H^2} \leq \|f(0)\|_{H^2}, \tag{3.35}$$

这意味着

$$\|U\|_{L_t^\infty H^2} \lesssim 1. \tag{3.36}$$

类似地，对于初始条件 $\partial_y^2 U$在$\in H^2 \cap H_0^1$ 下，我们也可得到

$$\|\partial_y^2 U\|_{L_t^\infty H^2} \leq \|\partial_y^2 U^{\text{in}}\|_{H^2}. \tag{3.37}$$

将 (3.36) 和 (3.37) 合并，得到 (3.29)。

由于初始条件 $U^{\text{in}} \in H^2 \cap H_0^1$，我们重写

$$U(t,y) - U(s,y) = \int_s^t \partial_\tau U(\tau,y)d\tau = \nu \int_s^t \partial_y^2 U(\tau,y)d\tau.$$

然后根据插值不等式和 $H^2$ 估计式（3.37），我们推导出

$$\begin{aligned}\|U(t,y)-U(s,y)\|_{L^\infty_y} \leq & \nu\int_s^t \|\partial_y^2 U(\tau,y)\|_{L^\infty_y}d\tau \lesssim \nu\int_s^t \|\partial_y^2 U(\tau,y)\|_{L^2}^{\frac12}\|\partial_y^2 U(\tau,y)\|_{\dot H^1}^{\frac12}dy\\ \leq & \nu(t-s)\|U^{\rm in}\|_{H^4}.\end{aligned}$$

类似地，对于二阶导数，我们也有

$$\left\|\partial_y^2 U(t)-\partial_y^2 U(s)\right\|_{L^2_y} \leq \nu\int_s^t \left\|\partial_y^4 U(\tau,y)\right\|_{L^2_y}d\tau \leq \nu(t-s)\|U^{\rm in}\|_{H^4}.$$

□

现在，我们考虑方程（3.1）的解 $\nu k^2 \leq \|\partial_y U\|_{L^\infty_t L^\infty_y}$，并建立以下时空估计。

**命题 3.7.** 设 $\nu k^2 \leq \|\partial_y U\|_{L^\infty_t L^\infty_y}$，且 $(\omega,\psi)$ 是 (3.1)的解。则存在常数 $\nu_0>0$ 和 $\epsilon_0>0$，使得对于 $\nu\in(0,\nu_0]$, $\epsilon\in(0,\epsilon_0]$，有

$$\begin{aligned}(3.38)\qquad & |k|^2\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}u\|_{L^2L^2}^2+\nu^{\frac12}|k|\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}\omega\|_{L^2L^2}^2+\nu^{\frac13}|k|^{\frac23}\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}\rho_k^{\frac12}\omega\|_{L^2L^2}^2\\ & \lesssim E^{\rm in}+\nu^{-1}\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}(f_1,f_2)\|_{L^2L^2}^2.\end{aligned}$$

证明。只需证明对任意固定时刻 3.38）成立即可 $T$。不失一般性，我们取

$$T=t_{N+1},\quad t_j=j\nu^{-\frac13}.$$

我们将解 $\omega$ （3.1）分解为 $\omega=\sum_{j\geq0}\omega_j$，其中对于每个 $j\geq0$，分量 $\omega_j$满足

$$(3.39)\qquad \begin{cases}\partial_t\omega_j-\nu(\partial_y^2-k^2)\omega_j+ikU(t_{j+1},y)\omega_j-ik\partial_y^2U(t_{j+1},y)\psi_j=[ikf_1+\partial_yf_2+G_j]\chi_{I_j},\\ \omega_j=(\partial_y^2-k^2)\psi_j,\quad \psi_j(0)=\psi_j(1)=\psi_j'(0)=\psi_j'(1)=0,\\ \omega_j(t_j,y)=1_{\{j=0\}}\omega^{\rm in}(y),\end{cases}$$

其中 $I_j=:[t_j,t_{j+1})$ 并且

$$G_j=\sum_{j'=0}^{j}(F_{j',1}-F_{j',2}),$$

$$F_{j',1}:=ik(U(t_{j'+1},y)-U(t,y))\omega_{j'},\quad F_{j',2}:=ik(\partial_y^2U(t_{j'+1},y)-\partial_y^2U(t,y))\psi_{j'}.$$

为简便起见，我们定义范数

$$(3.40)\qquad \|f\|_Y=|k|\|(\partial_y,k)(\partial_y^2-k^2)^{-1}f\|_{L^2}+\nu^{\frac14}|k|^{\frac12}\|f\|_{L^2}+\nu^{\frac16}|k|^{\frac13}\|\rho_k^{\frac12}f\|_{L^2},$$

$$(3.41)\qquad \|f\|_{X(a,b)}=\|f\|_{L^2(a,b;Y)}.$$

对于 $0\leq j\leq N$，注意到 $\epsilon\nu^{\frac13}(t-t_j)\leq1$ 对 $t\in I_j$成立，我们利用引理 3.3 以及 $f_3=G_j\chi_{I_j}$和$f_4=0$推得

$$\begin{aligned}(3.42)\qquad & \|e^{\epsilon_1\nu^{\frac13}(t-t_j)}\omega_j\|_{X(t_j,T)}^2\\ & \lesssim E^{\rm in}1_{\{j=0\}}+\nu^{-1}\|e^{\epsilon_1\nu^{\frac13}(t-t_j)}(f_1,f_2)\|_{L^2(I_j;L^2)}^2+\nu^{-\frac13}|k|^{-\frac23}\|e^{\epsilon_1\nu^{\frac13}(t-t_j)}G_j\|_{L^2(I_j;L^2)}^2\\ & \lesssim E^{\rm in}1_{\{j=0\}}+\nu^{-1}\|(f_1,f_2)\|_{L^2(I_j;L^2)}^2+\nu^{-\frac13}|k|^{-\frac23}\|G_j\|_{L^2(I_j;L^2)}^2.\end{aligned}$$

由（3.30）和（3.31）可得

$$\begin{aligned}&\|U(t_{j'+1},y)-U(t,y)\|_{L^\infty(\mathrm{I}_j;L^\infty)}+\|\partial_y^2U(t_{j'+1},y)-\partial_y^2U(t,y)\|_{L^\infty(\mathrm{I}_j;L^2)}\\&\lesssim\nu\|t-t_{j'+1}\|_{L_t^\infty(\mathrm{I}_j)}\|U^{in}\|_{H^4}\lesssim\nu^{\frac{2}{3}}(j-j'+1).\end{aligned}$$

将其与界 $\|\psi_{j'}\|_{L^\infty}\lesssim|k|^{-\frac{3}{2}}\|w_{j'}\|_{L^2}\leq\|w_{j'}\|_{L^2}$ 结合，可得

$$\begin{aligned}\nu^{-\frac{1}{6}}|k|^{-\frac{1}{3}}\|G_j\|_{L^2(\mathrm{I}_j;L^2)}\leq&\nu^{-\frac{1}{6}}|k|^{-\frac{1}{3}}\sum_{j'=0}^{j}(\|F_{j',1}\|_{L^2(\mathrm{I}_j;L^2)}+\|F_{j',2}\|_{L^2(\mathrm{I}_j;L^2)})\\\leq&\nu^{-\frac{1}{6}}|k|^{\frac{2}{3}}\sum_{j'=0}^{j}\Big(\|U(t_{j'+1},y)-U(t,y)\|_{L^\infty(\mathrm{I}_j;L^\infty)}\|\omega_{j'}\|_{L^2(\mathrm{I}_j;L^2)}\\&+\|\partial_y^2U(t_{j'+1},y)-\partial_y^2U(t,y)\|_{L^\infty(\mathrm{I}_j;L^2)}\|\psi_{j'}\|_{L^2(\mathrm{I}_j;L^\infty)}\Big)\\\lesssim&\nu^{\frac{1}{2}}|k|^{\frac{2}{3}}\sum_{j'=0}^{j}(j-j'+1)\|\omega_{j'}\|_{L^2(\mathrm{I}_j;L^2)}.\end{aligned}\tag{3.43}$$

由于对于 $t\in\mathrm{I}_j$ 和 $\nu k^2\lesssim1$，$\nu^{\frac{1}{3}}(t-t_{j'})\geq j-j'$，因此可得

$$\nu^{\frac{1}{2}}|k|^{\frac{2}{3}}\|\omega_{j'}\|_{L^2(\mathrm{I}_j;L^2)}\lesssim\nu^{\frac{5}{12}}|k|^{\frac{1}{2}}e^{-\epsilon_1(j-j')}\|e^{\epsilon_1\nu^{\frac{1}{3}}(t-t_{j'})}\omega_{j'}\|_{L^2(\mathrm{I}_j;L^2)}.$$

由此，根据（3.43）、范数 $X$ 的定义（3.41），以及柯西-施瓦茨不等式，可得

$$\begin{aligned}\nu^{-\frac{1}{3}}|k|^{-\frac{2}{3}}\|G_j\|_{L^2(\mathrm{I}_j;L^2)}^2\lesssim&\nu^{\frac{1}{3}}\left(\sum_{j'=0}^{j}(j-j'+1)e^{-\epsilon_1(j-j')}\|e^{\epsilon_1\nu^{\frac{1}{3}}(t-t_{j'})}\omega_{j'}\|_{X(\mathrm{I}_j)}\right)^2\\\lesssim&\nu^{\frac{1}{3}}\sum_{j'=0}^{j}e^{-\epsilon_1(j-j')}\|e^{\epsilon_1\nu^{\frac{1}{3}}(t-t_{j'})}\omega_{j'}\|_{X(\mathrm{I}_j)}^2.\end{aligned}\tag{3.44}$$

将（3.44）代入（3.42），得到

$$\begin{aligned}&\|e^{\epsilon_1\nu^{\frac{1}{3}}(t-t_j)}\omega_j\|_{X(t_j,T)}^2\\&\lesssim E^{\mathrm{in}}1_{\{j=0\}}+\nu^{-1}\|(f_1,f_2)\|_{L^2(\mathrm{I}_j;L^2)}^2+\nu^{\frac{1}{3}}\sum_{j'=0}^{j}e^{-\epsilon_1(j-j')}\|e^{\epsilon_1\nu^{\frac{1}{3}}(t-t_{j'})}\omega_{j'}\|_{X(\mathrm{I}_j)}^2.\end{aligned}\tag{3.45}$$

现在我们设

$$D_j=\sum_{j'=0}^{j}e^{-\epsilon_1(j-j')}\|e^{\epsilon_1\nu^{\frac{1}{3}}(t-t_{j'})}\omega_{j'}\|_{X(t_{j'},t_{j+1})}^2.$$

于是由（3.45）可得

$$D_j\lesssim\sum_{j'=0}^{j}e^{-\epsilon_1(j-j')}\Big[E^{\mathrm{in}}1_{\{j'=0\}}+\nu^{-1}\|(f_1,f_2)\|_{L^2(\mathrm{I}_{j'};L^2)}^2+\nu^{\frac{1}{3}}D_{j'}\Big].$$

取$\epsilon \leq \frac{\epsilon_1}{4}$并应用闵可夫斯基不等式，可得

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{N} e^{2\epsilon j} D_j \lesssim & \sum_{j=0}^{N} e^{2\epsilon j} \sum_{j'=0}^{j} e^{-\epsilon_1 (j-j')} \left[ E^{\text{in}} 1_{\{j'=0\}} + \nu^{-1} \|(f_1, f_2)\|^2_{L^2(\mathrm{I}_{j'}; L^2)} + \nu^{\frac{1}{3}} D_{j'} \right] \\ = & \sum_{j=0}^{N} \sum_{j'=0}^{j} e^{-(\epsilon_1 - 2\epsilon)(j-j')} e^{2\epsilon j'} \left[ E^{\text{in}} 1_{\{j'=0\}} + \nu^{-1} \|(f_1, f_2)\|^2_{L^2(\mathrm{I}_{j'}; L^2)} + \nu^{\frac{1}{3}} D_{j'} \right] \\ \lesssim & \sum_{j'=0}^{N} e^{2\epsilon j'} \left[ E^{\text{in}} 1_{\{j'=0\}} + \nu^{-1} \|(f_1, f_2)\|^2_{L^2(\mathrm{I}_{j'}; L^2)} + \nu^{\frac{1}{3}} D_{j'} \right] \\ \leq & E^{\text{in}} + \nu^{-1} \|e^{\epsilon \nu^{\frac{1}{3}} t} (f_1, f_2)\|^2_{L^2(0,T;L^2)} + \nu^{\frac{1}{3}} \sum_{j=0}^{N} e^{2\epsilon j} D_j,\end{aligned}$$

这意味着

$$\sum_{j=0}^{N} e^{2\epsilon j} D_j \lesssim E^{\text{in}} + \nu^{-1} \|e^{\epsilon \nu^{\frac{1}{3}} t} (f_1, f_2)\|^2_{L^2(0,T;L^2)}. \tag{3.46}$$

最后，由于 $(0,T) = \sum_{j=0}^{N} \mathrm{I}_j$ 且 $\omega = \sum_{j'=0}^{j} \omega_{j'}$ 对于 $t \in \mathrm{I}_j$，我们得到

$$\|e^{\epsilon \nu^{\frac{1}{3}} t} \omega\|^2_{X(0,T)} = \sum_{j=0}^{N} \int_{\mathrm{I}_j} \|e^{\epsilon \nu^{\frac{1}{3}} t} \omega\|^2_Y dt \lesssim \sum_{j=0}^{N} e^{2\epsilon j} \int_{\mathrm{I}_j} \Big\| \sum_{j'=0}^{j} \omega_{j'} \Big\|^2_Y dt. \tag{3.47}$$

利用 Hölder 不等式以及 $\nu^{\frac{1}{3}}(t - t_{j'}) \geq j - j'$ 对于 $t \in \mathrm{I}_j$这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{I}_j} \left( \sum_{j'=0}^{j} \|\omega_{j'}\|_Y \right)^2 dt \leq & \int_{\mathrm{I}_j} \sum_{j'=0}^{j} e^{-\epsilon_1 \nu^{\frac{1}{3}} (t - t_{j'})} \|e^{\epsilon_1 \nu^{\frac{1}{3}} (t - t_{j'})} \omega_{j'}\|^2_Y \sum_{j'=0}^{j} e^{-\epsilon_1 \nu^{\frac{1}{3}} (t - t_{j'})} dt \\ \lesssim & \int_{\mathrm{I}_j} \sum_{j'=0}^{j} e^{-\epsilon_1 (j-j')} \|e^{\epsilon_1 \nu^{\frac{1}{3}} (t - t_{j'})} \omega_{j'}\|^2_Y dt \lesssim D_j.\end{aligned} \tag{3.48}$$

综合 (3.46)、(3.47) 和 (3.48，我们得到

$$\|e^{\epsilon \nu^{\frac{1}{3}} t} \omega\|^2_{X(0,T)} \lesssim E^{\text{in}} + \nu^{-1} \|e^{\epsilon \nu^{\frac{1}{3}} t} (f_1, f_2)\|^2_{L^2(0,T;L^2)},$$

至此，命题 3.7 的证明完成。 □

3.4. **完整问题的时空估计**。 我们现在可以证明命题 3.1。

命题 *3.1* 的证明。 对于情形 $\nu k^2 \geq \|\partial_y U\|_{L^\infty_t L^\infty_y}$，所需估计已在命题 3.2 中建立。现在，我们关注低频情形 $\nu k^2 \leq \|\partial_y U\|_{L^\infty_t L^\infty_y}$。

在命题3.7中，我们已建立如下估计

$$\begin{aligned}&|k|^2 \|e^{\epsilon \nu^{\frac{1}{3}} t} u\|^2_{L^2 L^2} + \nu^{\frac{1}{2}} |k| \|e^{\epsilon \nu^{\frac{1}{3}} t} \omega\|^2_{L^2 L^2} + \nu^{\frac{1}{3}} |k|^{\frac{2}{3}} \|e^{\epsilon \nu^{\frac{1}{3}} t} \rho_k^{\frac{2}{3}} \omega\|^2_{L^2 L^2} \\ &\lesssim E^{\text{in}} + \nu^{-1} \|e^{\epsilon \nu^{\frac{1}{3}} t} (f_1, f_2)\|^2_{L^2 L^2}.\end{aligned} \tag{3.49}$$

这归结为处理剩余的能量项，并分为以下三个步骤。

**步骤 1.** $\nu^{\frac{1}{4}} |k|^{\frac{1}{2}} \|e^{\epsilon \nu^{\frac{1}{3}} t} \omega\|_{L^\infty L^2}$ 的估计。

用3.1式测试 $\omega$ 并利用分部积分，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega\|_{L^2}^2+\nu\|(\partial_y,k)\omega\|_{L^2}^2=&-\langle ikU\omega-ik\partial_y^2U\psi,\omega\rangle+\langle -ikf_1-\partial_yf_2,\omega\rangle+\nu\partial_y\omega\omega\big|_{y=0}^{y=1}\\=&-ik\int_0^1U|\omega|^2+\partial_y^2U(|\partial_y\psi|^2+k^2|\psi|^2)dy-ik\int_0^1\partial_y^3U\psi\partial_y\psi dy\\&-\int_0^1ikf_1\omega dy+\int_0^1f_2\partial_y\omega dy+[(\nu\partial_y\omega-f_2)\omega]\big|_{y=0}^{y=1}.\end{aligned}$$

取实部并利用（3.29），可得

$$\begin{aligned}(3.50)\quad&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega\|_{L^2}^2+\nu\|(\partial_y,k)\omega\|_{L^2}^2\\&\le C|k|\|\psi\|_{L^2}\|\partial_y\psi\|_{L^2}+|k|\|f_1\|_{L^2}\|\omega\|_{L^2}+\|f_2\|_{L^2}\|\partial_y\omega\|_{L^2}+\|\omega\|_{L^\infty}\Big|(\nu\partial_y\omega-f_2)\big|_{y=0}^{y=1}\Big|\\&\le C\|u\|_{L^2}^2+\nu^{-1}\|(f_1,f_2)\|_{L^2}^2+\frac{1}{4}\nu\|(\partial_y,k)\omega\|_{L^2}^2+\|\omega\|_{L^\infty}\Big|(\nu\partial_y\omega-f_2)\big|_{y=0}^{y=1}\Big|.\end{aligned}$$

为简单起见，令 $\gamma_1=\sinh k(1-y)-\sinh k$，其满足 $(\partial_y^2-k^2)\gamma_1=0$。由于无滑移边界条件，我们有

$$\langle\partial_t\omega,\gamma_1\rangle=\langle\partial_t\psi,(\partial_y^2-k^2)\gamma_1\rangle=0.$$

由（3.1）可得

$$\begin{aligned}0=&\langle\partial_t\omega,\gamma_1\rangle=\langle\nu(\partial_y^2-k^2)\omega,\gamma_1\rangle-\langle ikU\omega,\gamma_1\rangle+\langle ik\partial_y^2U\psi,\gamma_1\rangle-\langle ikf_1,\gamma_1\rangle-\langle\partial_yf_2,\gamma\rangle\\=&\langle -ikU\omega,\gamma_1\rangle+\langle ik\partial_y^2U\psi,\gamma_1\rangle-\langle ikf_1,\gamma_1\rangle+\langle f_2,\partial_y\gamma_1\rangle+[-\nu\omega\partial_y\gamma_1+(\nu\partial_y\omega-f_2)\gamma_1](0).\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}\langle -ikU\omega,\gamma_1\rangle=&\langle ik\partial_yU\partial_y\psi,\gamma_1\rangle+\langle ikU\partial_y\psi,\partial_y\gamma_1\rangle+\langle ik^3U\psi,\gamma_1\rangle\\=&-\langle ik\partial_y^2U\psi,\gamma_1\rangle-2\langle ik\partial_yU\psi,\partial_y\gamma_1\rangle-\langle ikU\psi,(\partial_y^2-k^2)\gamma_1\rangle\\=&-\langle ik\partial_y^2U\psi,\gamma_1\rangle-2\langle ik\partial_yU\psi,\partial_y\gamma_1\rangle,\end{aligned}$$

并利用（3.29）和引理A.1，可得

$$(3.51)\qquad|(\nu\partial_y\omega-f_2)(0)|\lesssim\nu|k|\|\omega\|_{L^\infty}+|k|^{\frac{1}{2}}\|(f_1,f_2)\|_{L^2}+|k|^{\frac{3}{2}}\|\psi\|_{L^2}.$$

同理，我们有

$$(3.52)\qquad|(\nu\partial_y\omega-f_2)(1)|\lesssim\nu|k|\|\omega\|_{L^\infty}+|k|^{\frac{1}{2}}\|(f_1,f_2)\|_{L^2}+|k|^{\frac{3}{2}}\|\psi\|_{L^2}.$$

将（3.51）和（3.52）代入（3.50，可得

$$\begin{aligned}(3.53)\quad&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega\|_{L^2}^2+\nu\|(\partial_y,k)\omega\|_{L^2}^2\\\lesssim&\|u\|_{L^2}^2+\nu^{-1}\|(f_1,f_2)\|_{L^2}^2+\|\omega\|_{L^\infty}(\nu|k|\|\omega\|_{L^\infty}+|k|^{\frac{1}{2}}\|(f_1,f_2)\|_{L^2}+|k|^{\frac{3}{2}}\|\psi\|_{L^2}).\end{aligned}$$

1 1根据插值不等式 $\|\omega\|_{L^\infty} \lesssim \|\omega\|_{L^2}^{\frac{2}{2}}\|(\partial_y, k)\omega\|_{L^2}^{\frac{2}{2}}$以及杨氏不等式，有

$$\begin{aligned}
\nu|k|\|\omega\|_{L^\infty}^2 \leq& \eta\nu\|(\partial_y,k)\omega\|_{L^2}^2 + C_\eta\nu k^2\|\omega\|_{L^2}^2,\\
|k|^{\frac12}\|\omega\|_{L^\infty}\|(f_1,f_2)\|_{L^2} \leq& \eta\nu\|(\partial_y,k)\omega\|_{L^2}^2 + C_\eta\nu^{-1}\|(f_1,f_2)\|_{L^2}^2,\\
|k|^{\frac32}\|\psi\|_{L^2}\|\omega\|_{L^\infty} \leq& \eta\nu\|(\partial_y,k)\omega\|_{L^2}^2 + C_\eta(\nu^{-\frac14}|k|^{\frac32}\|\psi\|_{L^2}\|\omega\|_{L^2}^{\frac12})^{\frac43}\\
\leq& \eta\nu\|(\partial_y,k)\omega\|_{L^2}^2 + C_\eta\nu^{-\frac12}|k|^{-1}(|k|^2\|u\|_{L^2}^2 + \nu^{\frac12}|k|\|\omega\|_{L^2}^2).
\end{aligned}$$

将上述估计代入 (3.53)，并结合 $\eta \ll 1$，可得

$$\frac12\frac{d}{dt}\|\omega\|_{L^2}^2 + \nu\|(\partial_y,k)\omega\|_{L^2}^2 \lesssim \nu^{-1}\|(f_1,f_2)\|_{L^2}^2 + \nu^{-\frac12}|k|^{-1}(|k|^2\|u\|_{L^2}^2 + \nu^{\frac12}|k|\|\omega\|_{L^2}^2),$$

这意味着

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}\omega\|_{L^2}^2 + \nu\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}(\partial_y,k)\omega\|_{L^2}^2\\
&\lesssim \nu^{-1}\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}(f_1,f_2)\|_{L^2}^2 + \nu^{-\frac12}|k|^{-1}(|k|^2\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}u\|_{L^2}^2 + \nu^{\frac12}|k|\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}\omega\|_{L^2}^2).
\end{aligned}$$

由 (3.49) 和 $\nu k^2 \lesssim 1$，可推得

$$\begin{aligned}
&\nu^{\frac12}|k|(\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}\omega\|_{L^\infty L^2}^2 + \nu\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}(\partial_y,k)\omega\|_{L^2L^2}^2)\\
&\lesssim E^{\text{in}} + \nu^{-1}\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}(f_1,f_2)\|_{L^2L^2}^2 + |k|^2\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}u\|_{L^2L^2}^2 + \nu^{\frac12}|k|\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}\omega\|_{L^2L^2}^2\\
&\lesssim E^{\text{in}} + \nu^{-1}\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}(f_1,f_2)\|_{L^2L^2}^2.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

**步骤 2.** $\|e^{\epsilon\nu^{\frac13}t}\sqrt{1-(2\bar{y}-1)^2}\omega\|_{L^\infty L^2}$的估计。

用3.1) 乘以 $(1-(2y-1)^2)\omega$ 并取实部，可得

$$\begin{aligned}
&\frac12\frac{d}{dt}\|\sqrt{1-(2y-1)^2}\omega\|_{L^2}^2 + \nu\|\sqrt{1-(2y-1)^2}(\partial_y,k)\omega\|_{L^2}^2\\
&\leq \nu|\operatorname{Re}\langle\partial_y\omega, 2(2y-1)\omega\rangle| + |\operatorname{Re}\langle ik\partial_y^2U\psi, (1-(2y-1)^2)\omega\rangle|\\
&\quad + |\langle ikf_1, (1-(2y-1)^2)\omega\rangle| + |\langle f_2, \partial_y((1-(2y-1)^2)\omega)\rangle|.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

通过分部积分和 H¨older 不等式（3.29），可得

$$\nu|\operatorname{Re}\langle\partial_y\omega, 2(2y-1)\omega\rangle| \leq 2\nu\|\partial_y\omega\|_{L^2}\|\omega\|_{L^2} \lesssim \nu^{\frac32}\|\partial_y\omega\|_{L^2}^2 + \nu^{\frac12}\|\omega\|_{L^2}^2, \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Re}\langle ik\partial_y^2U\psi, (1-(2y-1)^2)\omega\rangle| =& |\operatorname{Re}\langle ik\partial_y(\partial_y^2U(1-(2y-1)^2))\psi, \partial_y\psi\rangle|\\
\lesssim& |k|(\|\partial_y^3U\|_{L^\infty} + \|\partial_y^2U\|_{L^\infty})\|\psi\|_{L^2}\|\partial_y\psi\|_{L^2} \lesssim \|u\|_{L^2}^2,
\end{aligned} \tag{3.57}$$

and

$$\begin{aligned}
&|\langle ikf_1, (1-(2y-1)^2)\omega\rangle| + |\langle f_2, \partial_y((1-(2y-1)^2)\omega)\rangle|\\
&\leq |k|\|f_1\|_{L^2}\|\sqrt{1-(2y-1)^2}\omega\|_{L^2} + |\langle f_2, -4y\omega + (1-(2y-1)^2)\partial_y\omega\rangle\\
&\leq C\nu^{-1}\|(f_1,f_2)\|_{L^2}^2 + \frac12\nu\|\sqrt{1-(2y-1)^2}(\partial_y,k)\omega\|_{L^2}^2 + \nu\|\omega\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

将（3.56）–（3.58）代入（3.55），可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|\sqrt{1-(2y-1)^2}\omega\|_{L^2}^2+\nu\|\sqrt{1-(2y-1)^2}(\partial_y,k)\omega\|_{L^2}^2\\&\lesssim \nu^{\frac{3}{2}}\|\partial_y\omega\|_{L^2}^2+\nu^{\frac{1}{2}}\|\omega\|_{L^2}^2+\|u\|_{L^2}^2+\nu^{-1}\|(f_1,f_2)\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}&\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\sqrt{1-(2y-1)^2}\omega\|_{L^\infty L^2}^2+\nu\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\sqrt{1-(2y-1)^2}(\partial_y,k)\omega\|_{L^2L^2}^2\\&\lesssim \|\omega_k^{\text{in}}\|_{L^2}^2+\nu^{\frac{1}{3}}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\sqrt{1-(2y-1)^2}\omega\|_{L^2L^2}^2+\nu^{\frac{3}{2}}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\partial_y\omega\|_{L^2L^2}^2\\&\quad+\nu^{\frac{1}{2}}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\omega\|_{L^2L^2}^2+\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}u\|_{L^2L^2}^2+\nu^{-1}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}(f_1,f_2)\|_{L^2L^2}^2.\end{aligned}$$

注意到对 $y\in(\nu^{\frac{1}{6}},\ 1-\nu^{\frac{1}{6}})$ 有 $\rho_k=1$，从而

$$\begin{aligned}&\nu^{\frac{1}{3}}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\sqrt{1-(2y-1)^2}\omega\|_{L^2(0,1)}^2\\&\le \nu^{\frac{1}{3}}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\rho_k^{\frac{1}{2}}\omega\|_{L^2(\nu^{\frac{1}{6}},1-\nu^{\frac{1}{6}})}^2+\nu^{\frac{1}{3}}\|1-(2y-1)^2\|_{L^\infty((0,\nu^{\frac{1}{6}})\cup(1-\nu^{\frac{1}{6}},1))}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\omega\|_{L^2}^2\\&\lesssim \nu^{\frac{1}{3}}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\rho_k^{\frac{1}{2}}\omega\|_{L^2}^2+\nu^{\frac{1}{2}}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\omega\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

然后，利用（3.49）和（3.54），我们得到

$$\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\sqrt{1-(2y-1)^2}\omega\|_{L^\infty L^2}^2\lesssim E^{\text{in}}+\nu^{-1}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}(f_1,f_2)\|_{L^2L^2}^2.\tag{3.59}$$

**第3步.** $\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}u\|_{L^\infty\bar{L}^\infty}$的估计。

我们引入由下式定义的截断函数 $\rho$

$$\rho(y)=\begin{cases}1, & y\in(\nu^{\frac{1}{4}},1-\nu^{\frac{1}{4}}),\\ \dfrac{1}{2}\nu^{-\frac{1}{4}}(1-|2y-1|), & y\in(0,\nu^{\frac{1}{4}})\cup(1-\nu^{\frac{1}{4}},1).\end{cases}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^\infty}\le\|\omega\|_{L^1}=&\int_0^{\nu^{\frac{1}{2}}}|\omega|dy+\int_{\nu^{\frac{1}{2}}}^{1-\nu^{\frac{1}{2}}}|\omega|dy+\int_{1-\nu^{\frac{1}{2}}}^1|\omega|dy\\\le&2\nu^{\frac{1}{4}}\|\omega\|_{L^2}+\|\rho^{-1}\|_{L^2(\nu^{\frac{1}{2}},1-\nu^{\frac{1}{2}})}\|\rho\omega\|_{L^2}.\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}\|\rho^{-1}\|_{L^2(\nu^{\frac{1}{2}},1-\nu^{\frac{1}{2}})}^2\lesssim&\int_{\nu^{\frac{1}{4}}}^{1-\nu^{\frac{1}{4}}}1dy+\int_{1-\nu^{\frac{1}{4}}}^{1-\nu^{\frac{1}{2}}}\nu^{\frac{1}{2}}(1-|2y-1|)^{-2}dy+\int_{\nu^{\frac{1}{2}}}^{\nu^{\frac{1}{4}}}\nu^{\frac{1}{2}}(1-|2y-1|)^{-2}dy\\\lesssim&1-2\nu^{\frac{1}{4}}+\nu^{\frac{1}{2}}(\nu^{-\frac{1}{2}}-\nu^{-\frac{1}{4}})\lesssim 1,\end{aligned}$$

由（3.54）可得

$$\begin{aligned}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}u\|_{L^\infty L^\infty}^2\le&\nu^{\frac{1}{2}}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\omega\|_{L^\infty L^2}^2+\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\rho\omega\|_{L^\infty L^2}^2\\\lesssim&E^{\text{in}}+\nu^{-1}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}(f_1,f_2)\|_{L^2L^2}^2+\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\rho\omega\|_{L^\infty L^2}^2.\end{aligned}\tag{3.60}$$

接下来需要估计 $\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\rho\omega\|_{L^\infty L^2}$。为此，我们引入一个 $C^2$-光滑函数

$$\widetilde{\rho}(y)=\begin{cases}1, & y\in(\nu^{\frac{1}{4}},1-\nu^{\frac{1}{4}}),\\ 1+\Big(\frac{1}{2}\nu^{-\frac{1}{4}}(1-|2y-1|)-1\Big)^3, & y\in(0,\nu^{\frac{1}{4}})\cup(1-\nu^{\frac{1}{4}},1),\end{cases}$$

它满足以下性质

$$\rho\le\widetilde{\rho},\qquad |\partial_y\widetilde{\rho}|\lesssim\nu^{-\frac{1}{4}},\qquad \|\partial_y\widetilde{\rho}\|_{L^2}\lesssim\nu^{-\frac{1}{8}},\qquad |\partial_y^2\widetilde{\rho}|\lesssim\nu^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.61}$$

将（3.1）乘以 $\widetilde{\rho}^2\omega$ 并取实部，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\widetilde{\rho}\omega\|_{L^2}^2+\nu\|\widetilde{\rho}(\partial_y,k)\omega\|_{L^2}^2\\&\le|\operatorname{Re}(\nu\langle\partial_y\omega,\partial_y(\widetilde{\rho}^2)\omega\rangle+\langle ik\partial_y^2U\psi,\widetilde{\rho}^2\omega\rangle)|+|\langle ikf_1,\widetilde{\rho}^2\omega\rangle|+|\langle\partial_yf_2,\widetilde{\rho}^2\omega\rangle|.\end{aligned} \tag{3.62}$$

利用分部积分、（3.61）和（3.29），可得

$$\nu|\langle\partial_y\omega,\partial_y(\widetilde{\rho}^2)\omega\rangle|\le\nu\Big|\int_0^1\partial_y^2(\widetilde{\rho}^2)|\omega|^2dy\Big|\lesssim\nu^{\frac{1}{2}}\|\omega\|_{L^2}^2, \tag{3.63}$$

and

$$\begin{aligned}&|\operatorname{Re}\langle ik\partial_y^2U\psi,\widetilde{\rho}^2\omega\rangle|\le|\langle k\partial_y(\partial_y^2U\widetilde{\rho}^2)\psi,\partial_y\psi\rangle|\\&\le\|\partial_y^3U\widetilde{\rho}^2\|_{L^\infty}\|k\psi\|_{L^2}\|\partial_y\psi\|_{L^2}+2\|\partial_y^2U\widetilde{\rho}\partial_y\widetilde{\rho}\|_{L^2}|k|\|\psi\|_{L^\infty((0,\nu^{\frac{1}{4}})\cup(1-\nu^{\frac{1}{4}},1))}\|\partial_y\psi\|_{L^2}\\&\lesssim\|u\|_{L^2}^2+\nu^{-\frac{1}{8}}|k|\|\psi\|_{L^\infty((0,\nu^{\frac{1}{4}})\cup(1-\nu^{\frac{1}{4}},1))}\|u\|_{L^2}\lesssim|k|\|u\|_{L^2}^2,\end{aligned} \tag{3.64}$$

其中，在最后一个不等式中，我们用到了

$$\|\psi\|_{L^\infty((0,\nu^{\frac{1}{4}})\cup(1-\nu^{\frac{1}{4}},1))}=\Big\|\int_0^y\partial_y\psi(z)dz\Big\|_{L^\infty(0,\nu^{\frac{1}{4}})}+\Big\|\int_1^y\partial_y\psi(z)dz\Big\|_{L^\infty(1-\nu^{\frac{1}{4}},1)}\lesssim\nu^{\frac{1}{8}}\|\partial_y\psi\|_{L^2}.$$

对于 $|\langle ikf_1,\ \widetilde{\rho}\omega\rangle|+|\langle\partial_yf_2,\ \widetilde{\rho}\omega\rangle|$，利用柯西-施瓦茨不等式和（3.61），可得

$$\begin{aligned}&|\langle ikf_1,\ \widetilde{\rho}\omega\rangle|+|\langle\partial_yf_2,\ \widetilde{\rho}\omega\rangle|\\&\le\nu^{-1}\|f_1\|_{L^2}+\frac{1}{4}\nu\|k\widetilde{\rho}\omega\|_{L^2}^2+\nu^{-1}\|f_2\|_{L^2}^2+\frac{1}{4}\nu\|\widetilde{\rho}\partial_y\omega\|_{L^2}^2+\frac{1}{4}\nu\|\partial_y\widetilde{\rho}\omega\|_{L^2}^2\\&\le\nu^{-1}\|(f_1,f_2)\|_{L^2}^2+\frac{1}{4}\nu\|\widetilde{\rho}(\partial_y,k)\omega\|_{L^2}^2+\nu^{\frac{1}{2}}\|\omega\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{3.65}$$

将（3.63）、（3.64）和（3.65）与（3.62）结合起来，可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\widetilde{\rho}\omega\|_{L^2}^2+\nu\|\widetilde{\rho}(\partial_y,k)\omega\|_{L^2}^2\lesssim\nu^{-1}\|(f_1,f_2)\|_{L^2}^2+\nu^{\frac{1}{2}}\|\omega\|_{L^2}^2+|k|^2\|u\|_{L^2}^2.$$

回顾权函数的定义（2.14），通过直接计算，我们得到 $\rho_k$。然后，利用时空估计（3.49），可得

$$\begin{aligned}&\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\widetilde{\rho}\omega\|_{L^\infty L^2}^2+\nu\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\widetilde{\rho}(\partial_y,k)\omega\|_{L^2L^2}^2\\&\lesssim E^{\text{in}}+\nu^{\frac{1}{3}}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\rho_k^{\frac{1}{2}}\omega\|_{L^2L^2}^2+\nu^{\frac{1}{2}}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}\omega\|_{L^2L^2}^2+|k|^2\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}u\|_{L^2L^2}^2+\nu^{-1}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}(f_1,f_2)\|_{L^2L^2}^2\\&\lesssim E^{\text{in}}+\nu^{-1}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}(f_1,f_2)\|_{L^2L^2}^2.\end{aligned}$$

将上述估计代入（3.60），并取 $\rho \lesssim \widetilde{\rho}$，即可得到

$$\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}u\|_{L^\infty L^\infty}^2 \lesssim E^{\text{in}} + \nu^{-1}\|e^{\epsilon\nu^{\frac{1}{3}}t}(f_1, f_2)\|_{L^2L^2}^2. \tag{3.66}$$

命题 3.1 的证明至此完成。 □

## 4. 非线性稳定性

本节旨在利用第 3 节中的时空估计，推导具有无滑移边界条件的单调剪切流的渐近稳定性阈值。

回顾一下稳定性范数

$$E_k = \begin{cases} \|\omega_0\|_{L^\infty L^2}, \quad k = 0, \\ |k|\|e^{\epsilon_0\nu^{\frac{1}{3}}t}u_k\|_{L^2L^2} + \|e^{\epsilon_0\nu^{\frac{1}{3}}t}u_k\|_{L^\infty L^\infty} \\ + \|e^{\epsilon_0\nu^{\frac{1}{3}}t}\sqrt{1-(2y-1)^2}\omega_k\|_{L^\infty L^2}^2 + \nu^{\frac{1}{4}}|k|^{\frac{1}{2}}\|e^{\epsilon_0\nu^{\frac{1}{3}}t}\omega_k\|_{L^2L^2}, \quad k \neq 0. \end{cases}$$

定理 *1.1* 的证明。 方程（1.5）可改写为

$$\partial_t\omega - \nu\Delta\omega + U\partial_x\omega - \partial_y^2 U\partial_x\psi = -\operatorname{curl}(u\cdot\nabla u).$$

对 $x$ 变量进行傅里叶变换，得到方程的 $k$ 频率表述:

$$\begin{aligned} &\partial_t\omega_k - \nu(\partial_y^2 - k^2)\omega_k + ikU\omega_k - ik\partial_y^2 U\psi_k \\ &\quad = -\partial_y(u\cdot\nabla u^{(1)})_k + ik(u\cdot\nabla u^{(2)})_k := -\partial_y(f_k^{1,1} + f_k^{2,1}) + ik(f_k^{1,2} + f_k^{2,2}), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} f_k^{1,1} &= i\sum_{l\in\mathbb{Z}} u_l^{(1)}(t,y)(k-l)u_{k-l}^{(1)}(t,y), \quad f_k^{1,2} = i\sum_{l\in\mathbb{Z}} u_l^{(1)}(t,y)(k-l)u_{k-l}^{(2)}(t,y), \\ f_k^{2,1} &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} u_l^{(2)}(t,y)\partial_y u_{k-l}^{(1)}(t,y), \qquad f_k^{2,2} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} u_l^{(2)}(t,y)\partial_y u_{k-l}^{(2)}(t,y). \end{aligned}$$

现在我们分析能量项 $E_0$。条件 $\operatorname{div} u = 0$ 意味着 $u_0^{(2)} = 0$。结合$P_0(u^{(1)}\partial_x u^{(1)}) = 0$, 方程 (1.4) 在 $u^1$ 处的零频模态给出

$$(\partial_t - \nu\partial_y^2)u_0^{(1)}(t,y) = -\sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} u_l^{(2)}\partial_y u_{-l}^{(1)}(t,y) := -f_0^{2,1}(t,y). \tag{4.1}$$

将方程 (4.1) 与 $-\partial_y^2 u_0^{(1)}$ 进行配对，并利用分部积分，得到

$$\partial_t\|\partial_y u_0^{(1)}\|_{L^2}^2 + 2\nu\|\partial_y^2 u_0^{(1)}\|_{L^2}^2 = 2\langle f_0^{2,1}, \partial_y^2 u_0^{(1)}\rangle \le C\nu^{-1}\|f_0^{2,1}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\nu\|\partial_y^2 u_0^{(1)}\|_{L^2}^2.$$

这与 $\partial_y u_0^{(1)}(t,y) = \omega_0(t,y)$ 一起给出

$$E_0^2 \lesssim \nu^{-1}\|f_0^{2,1}\|_{L^2L^2}^2 + \|\omega_0^{\text{in}}\|_{L^2}^2. \tag{4.2}$$

对于能量项 $E_k$ 在 $k \neq 0$ 下，由命题 3.1 可知

$$E_k^2 \lesssim \nu^{-1}\|e^{\epsilon_0\nu^{\frac{1}{3}}t}f_k^{i,j}\|_{L^2L^2}^2 + \|u_k^{\text{in}}\|_{H^1}^2 + |k|^{-2}\|\partial_y\omega_k^{\text{in}}\|_{L^2}^2, \quad 1 \le i,j \le 2. \tag{4.3}$$

对于 $f^{1,i}$ 在 $i=1$下，2，由H¨older不等式，我们有

$$\|e^{\epsilon_0\nu^{\frac{1}{3}}t}f^{1,i}\|_{L^2L^2}\leq\sum_{l\in\mathbb{Z}}\|e^{\epsilon_0\nu^{\frac{1}{3}}t}u_l^{(1)}\|_{L^\infty L^\infty}\|(k-l)e^{\epsilon_0\nu^{\frac{1}{3}}t}u_{k-l}^{(i)}\|_{L^2L^2}\leq\sum_{l\in\mathbb{Z}}E_lE_{k-l}. \tag{4.4}$$

对于 $f^{2,i}$ 当 $i=1,2$ 时，我们首先利用哈代不等式以及 $\partial_y u^{(2)}=-iku^{(1)}$ 这一事实，得到

$$\Big\|\frac{e^{\epsilon_0\nu^{\frac{1}{3}}t}u_l^{(2)}}{\sqrt{1-(2y-1)^2}}\Big\|_{L^2L^\infty}\lesssim\|e^{\epsilon_0\nu^{\frac{1}{3}}t}\partial_y u_l^{(2)}\|_{L^2L^2}\lesssim\|e^{\epsilon_0\nu^{\frac{1}{3}}t}lu_l^{(1)}\|_{L^2L^2}\lesssim E_l.$$

这与（A.3）一起意味着

$$\begin{aligned}\|e^{\epsilon_0\nu^{\frac{1}{3}}t}f^{2,i}\|_{L^2L^2}\leq&\sum_{l\in\mathbb{Z}}\Big\|\frac{e^{\epsilon_0\nu^{\frac{1}{3}}t}u_l^{(2)}}{\sqrt{1-(2y-1)^2}}\Big\|_{L^2L^\infty}\|e^{\epsilon_0\nu^{\frac{1}{3}}t}\sqrt{1-(2y-1)^2}\partial_y u_{k-l}^{(i)}\|_{L^\infty L^2}\\\lesssim&\sum_{l\in\mathbb{Z}}E_l\|e^{\epsilon_0\nu^{\frac{1}{3}}t}\sqrt{1-(2y-1)^2}\omega_{k-l}\|_{L^\infty L^2}\lesssim\sum_{l\in\mathbb{Z}}E_lE_{k-l}.\end{aligned} \tag{4.5}$$

将（4.4）、（4.5）代入（4.3），并将（4.5）代入（4.2），我们推得

$$E_k\lesssim\nu^{-\frac{1}{2}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}E_lE_{k-l}+\|u_k^{\mathrm{in}}\|_{H^1}+|k|^{-1}\|\partial_y\omega_k^{\mathrm{in}}\|_{L^2},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

与 $k$ 相加，我们进一步得到

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}E_k\lesssim\nu^{-\frac{1}{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}E_lE_{k-l}+\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\|u_k^{\mathrm{in}}\|_{H^1}+|k|^{-1}\|\partial_y\omega_k^{\mathrm{in}}\|_{L^2}).$$

得益于初始数据条件

$$\|u^{\mathrm{in}}\|_{H^2}\leq c\nu^{\frac{1}{2}},$$

我们最终推导出

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}E_k\lesssim\nu^{\frac{1}{2}},$$

这就完成了定理 1.1的证明。 □

## Appendix A. Auxiliary estimates

**引理 A.1**。 有如下结论：

$$\Big\|\frac{\sinh k(1-y)}{\sinh k}\Big\|_{L^2}\lesssim|k|^{-\frac{1}{2}},\qquad\Big\|\frac{\sinh(ky)}{\sinh k}\Big\|_{L^2}\lesssim|k|^{-\frac{1}{2}}, \tag{A.1}$$

$$\Big\|\frac{\cosh k(1-y)}{\sinh k}\Big\|_{L^2}\lesssim|k|^{-\frac{1}{2}},\qquad\Big\|\frac{\cosh(ky)}{\sinh k}\Big\|_{L^2}\lesssim|k|^{-\frac{1}{2}}. \tag{A.2}$$

**引理 A.2.** 令$(\partial_y^2-k^2)\psi=\omega$ 满足 $\psi(\pm1)=0$。则有

$$\|\sqrt{1-(2y-1)^2}\partial_y u\|_{L^2}^2\leq\|\sqrt{1-(2y-1)^2}\omega\|_{L^2}^2. \tag{A.3}$$

证明。 根据 $\omega$的定义，我们有

$$\begin{aligned}
&\|\sqrt{1-(2y-1)^2}\omega\|_{L^2}^2 = \int_0^1 (1-(2y-1)^2)|\omega|^2 dy \\
&= \int_0^1 (1-(2y-1)^2)(|\partial_y^2\psi|^2 + |k^2\psi|^2) dy - 2\,\mathrm{Re}\int_0^1 (1-(2y-1)^2)\partial_y^2\psi |k|^2 \psi dy \\
&= \int_0^1 (1-(2y-1)^2)(|\partial_y^2\psi|^2 + |k^2\psi|^2 + 2|k\partial_y\psi|^2) dy - 4\,\mathrm{Re}\int_0^1 (2y-1)\partial_y\psi |k|^2 \psi dy \\
&= \int_0^1 (1-(2y-1)^2)(|\partial_y^2\psi|^2 + |k^2\psi|^2 + 2|k\partial_y\psi|^2) dy + 4\int_0^1 |k\psi|^2 dy,
\end{aligned}$$

由此可得

$$\|\sqrt{1-(2y-1)^2}\partial_y u\|_{L^2}^2 \le \|\sqrt{1-(2y-1)^2}\omega\|_{L^2}^2.$$

□

**引理 A.3.** 设 $f(t)$ 为带狄利克雷边界条件的一维热方程的解

$$\begin{cases} \partial_t f = \nu \partial_y^2 f, \\ f(t,0) = f(t,1) = 0, \quad f(0,y) = f^{\mathrm{in}}(y) \in H^2 \cap H_0^1(0,1). \end{cases} \tag{A.4}$$

则我们有

$$\|f\|_{L_t^\infty H^k} \le \|f^{\mathrm{in}}\|_{H^k}, \quad k = 0,1,2. \tag{A.5}$$

证明。 对于 $k = 0$,1，该引理由标准能量方法得出。对于 $k = 2$，我们采用逼近论证。设 $P_{\le N}$ 表示狄利克雷拉普拉斯算子前 $N$ 个特征函数上的谱投影，并定义 $f_N = P_{\le N} f$。对 $f_N$ 应用能量方法，我们得到

$$\|\partial_y^2 f_N\|_{L_t^\infty L^2} \le \|\partial_y^2 f_N^{\mathrm{in}}\|_{L^2} \le \|\partial_y^2 f^{\mathrm{in}}\|_{L^2}. \tag{A.6}$$

取极限后，我们可得关于 $f$ 的相同界。 □

致谢

Z. Li 部分得到了中国博士后科学基金会博士后资助计划（资助编号：GZC20240123 和 2025M773073）的支持。S. Shen 部分得到了国家自然科学基金（资助编号：12501322）和安徽省自然科学基金（资助编号：2508085QA001）的支持。Z. Zhang 部分得到了国家自然科学基金（资助编号：12288101）的支持。

**数据可用性声明：** 由于本文未生成或分析任何数据集，因此不适用数据共享。

**利益冲突：** 作者声明不存在利益冲突。

## 参考文献

[1] X. An、T. He 和 T. Li. 索博列夫空间中二维泰勒-库埃特流的非线性渐近稳定性与转捩阈值。Comm. Math. Phys., 405(6):Paper No. 146, 57, 2024.[2] R. Arbon 和 J. Bedrossian. 具有纳维边界条件的无界区域上库埃特流的定量流体动力学稳定性。Comm. Math. Phys., 406(6): Paper No. 129, 57, 2025.[3] J. Bedrossian 和 N. Masmoudi. 二维欧拉方程中平面剪切流的无黏阻尼与渐近稳定性。Publ. Math. Inst. Hautes ´etudes Sci., 122 :195–300, 2015.[4] J. Bedrossian、P. Germain 和 N. Masmoudi. 索伯列夫正则性下三维库埃特流的稳定性阈值。Ann. of Math. (2), 185(2):541–608, 2017.[5] J. Bedrossian、P. Germain 和 N. Masmoudi. 高雷诺数下二维和三维库埃特流的稳定性。Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 56(3):373–414, 2019.[6] J. Bedrossian、P. Germain 和 N. Masmoudi. 三维库埃特流亚临界转变附近的动力学 I：阈值以下情形。Mem. Amer. Math. Soc., 266(1294):v+158, 2020.[7] J. Bedrossian、P. Germain 和 N. Masmoudi. 三维库埃特流亚临界转变附近的动力学 II：阈值以上情形。Mem. Amer. Math. Soc., 279(1377):v+135, 2022.[8] J. Bedrossian、S. He、S. Iyer、L. Li 和 F. Wang. 二维无滑移边界条件下接近库埃特流的剪切流稳定性阈值。arXiv:2510.16378, 2025.[9] J. Bedrossian、S. He、S. Iyer 和 F. Wang. 纳维边界条件下二维纳维-斯托克斯方程的一致无黏阻尼与无黏极限。arXiv:2405.1924, 2024.[10] J. Bedrossian、S. He、S. Iyer 和 F. Wang. 二维纳维边界条件下近库埃特剪切流的稳定性阈值。Comm. Math. Phys., 406(2):Paper No. 28, 42, 2025.[11] J. Bedrossian、N. Masmoudi 和 V. Vicol. 二维库埃特流附近纳维-斯托克斯方程无黏极限中的增强耗散与无黏阻尼。Arch. Ration. Mech. Anal., 219(3):1087–1159, 2016.[12] D. Bian、E. Grenier、N. Masmoudi 和 W. Zhao. 库埃特流的边界驱动不稳定性。Comm. Math. Phys., 406(9):Paper No. 221, 2025.[13] Q. Chen、S. Ding、Z. Lin 和 Z. Zhang. 有限通道中三维平面泊肃叶流的非线性稳定性。arxiv:2310.11694, 2023; Mem. Amer. Math. Soc., 即将出版.[14] Q. Chen、H. Jia、D. Wei 和 Z. Zhang. 高雷诺数下柯尔莫哥洛夫流的渐近稳定性。arXiv:2510.13181, 2025.[15] Q. Chen、H. Li、S. Shen 和 Z. Zhang. 通过无黏阻尼与增强耗散实现对称流的渐近稳定性。arXiv:2510.18361, 2025.[16] Q. Chen、T. Li、D. Wei 和 Z. Zhang. 有限通道中二维库埃特流的转捩阈值。Arch. Ration. Mech. Anal., 238(1):125–183, 2020.[17] Q. Chen、D. Wei 和 Z. Zhang. 单调剪切流的线性无黏阻尼与增强耗散。Comm. Math. Phys., 400(1):215–276, 2023.[18] Q.Chen、D. Wei 和 Z. Zhang. 有限通道中三维库埃特流的转捩阈值。Mem. Amer. Math. Soc., 296(1478):v+178, 2024.[19] Q. L. Chen 和 Z. Li. 有限通道中泊肃叶-库埃特流的增强耗散。Nonlinearity, 38(5):Paper No. 055007, 41, 2025.[20] Q. L. Chen、Z. Li 和 C. Miao. 无界通道上具有无滑移边界条件的二维库埃特流的定量稳定性。J. Lond. Math. Soc. (2), 113: Paper No. e70440, 2026.[21] M. Coti Zelati、T. M. Elgindi 和 K. Widmayer. 泊肃叶流附近纳维-斯托克斯方程中的增强耗散。Comm. Math. Phys., 378(2):987–1010, 2020.[22] A. Del Zotto. 周期条带中泊肃叶流的增强耗散与转捩阈值。SIAM J. Math. Anal., 55(5):4410–4424, 2023.[23] T. Gallay. 二维黏性涡旋的增强耗散与轴对称化。Arch. Ration. Mech. Anal., 230 (3):939–975, 2018.

[24] H. Jia. 高雷诺数区域中单调剪切流附近的一致线性无黏阻尼与增强耗散（I）：全空间情形。J. Math. Fluid Mech., 25(3):第42号论文，38页，2023年。[25] H. Li, N. Masmoudi, and W. Zhao. 研究库埃特流附近不稳定性的一种动力学方法。Comm. Pure Appl. Math., 77(6):2863–2946, 2024.[26] H. Li, N. Masmoudi, and W. Zhao. 黏性流体中二维库埃特流的渐近稳定性。Arch. Ration. Mech. Anal., 249(5):第56号论文，113页，2025年。[27] H. Li and W. Zhao. 黏性流体中二维单调剪切流在临界空间中的渐近稳定性。Comm. Math. Phys., 405(11):第267号论文，50页，2024年。[28] T. Li, D. Wei, and Z. Zhang. 三维柯尔莫哥洛夫流的伪谱界与转捩阈值。Comm. Pure Appl. Math., 73(3):465–557, 2020.[29] Z. Lin and C. Zeng, 库埃特流附近的无黏动力学结构。Arch. Ration. Mech. Anal., 200(3) : 1075– 1097, 2011.[30] N. Masmoudi and W. Zhao. 临界空间中二维库埃特流的增强耗散。Comm. Partial Differential Equations, 45(12):1682–1701, 2020.[31] N. Masmoudi and W. Zhao. 索博列夫空间中二维库埃特流的稳定性阈值。Ann. Inst. H. Poincar´e C Anal. Non Lin´eaire, 39(2):245–325, 2022.[32] L. N. Trefethen, A. E. Trefethen, S. C. Reddy, and T. A. Driscoll. 无特征值的流体动力学稳定性。Science, 261(5121):578–584, 1993.[33] D. Wei and Z. Zhang. 索об列夫空间中三维库埃特流的转捩阈值。Comm. Pure Appl. Math., 74(11):2398–2479, 2021.[34] D. Wei and Z. Zhang. 二维库埃特流的非线性增强耗散与无黏阻尼。Tunis. J. Math., 5(3):573–592, 2023.[35] D. Wei and Z. Zhang. 高雷诺数下的流体动力学稳定性。载于《ICM——国际数学家大会》第5卷，第9–11节，第3902–3922页。EMS Press，柏林， [2023] ©2023。[36] D. Wei and Z. Zhang. 有限通道中二维库埃特流的渐近稳定性阈值。Ann. Inst. H. Poincar´e C Anal. Non Lin´eaire，即将出版。[37] D. Wei, Z. Zhang, and W. Zhao. 索博列夫空间中一类单调剪切流的线性无黏阻尼。Comm. Pure Appl. Math., 71(4):617–687, 2018.[38] D. Wei, Z. Zhang, and W. Zhao. 柯尔莫哥洛夫流的线性无黏阻尼与增强耗散。Adv. Math., 362:106963, 103, 2020. 北京师范大学数学科学学院、数学与复杂系统重点实验室（教育部），中国北京 100875。电子邮箱：lizhen@bnu.edu.cn 中国科学技术大学数学科学学院，中国合肥 230026。电子邮箱：slshen@ustc.edu.cn 北京大学数学科学学院，中国北京 100871。电子邮箱：zfzhang@math.pku.edu.cn