通过一维光子量子行走实验实现半对称信息完备测量并进行自检验

Xu Xu*, Han-Yu Cheng*, Meng-YunMa, Chao-Jie Sun, YanWang,Li-Jiong Shen, Zhe Sun,† Qi-Ping Su, Chui-Ping Yang,‡ 和Yong-Nan Sun§*School of Physics, Hangzhou Normal University, Hangzhou 311121, China*

广义量子测量在量子力学中发挥着至关重要的作用，而对称信息完备正算子值测量（SIC POVM）为从量子系统中提取信息提供了强大而灵活的框架。然而，SIC-POVM 是否存在于每个有限维空间中仍是一个悬而未决的问题，这推动了人们对其他类别 POVM 的广泛研究。近期，Geng *et al.* [《物理评论快报》 126, 100401 (2021)] 提出了一类更广义的 SIC POVM，称为半对称信息完备 POVM（半SIC POVM），其范围超出了 SIC POVM。在本研究中，我们聚焦于四结果 POVM，并利用一维离散时间量子行走在实验中实现半SIC POVM。此外，我们使用单光子和线性光学，以半设备无关方式对半SIC POVM 进行了实验自检验。我们的结果为利用广义量子测量开展量子认证研究铺平了道路。

PACS 编号:

arXiv:2603.01802v1 [quant-ph] 2 Mar 2026

I. 引言

量子测量是量子信息处理中表征量子态的重要工具。广义量子测量，也称为正算子值测量（POVM），是一种有效的信息提取方法，其性能可显著优于冯·诺伊曼投影测量。特别是，非投影 POVM 广泛应用于量子理论，在多项任务中较投影测量具有明确优势。例如，非投影 POVM 能够增强纠缠探测 [1, 2] 和非正交态的无歧义态判别 [3, 4]。此外，它们还应用于量子密码学 [5] 和随机性生成 [6]。

对称信息完备 POVM（SIC POVM）是一类最优 POVM，其最优性源于 SIC POVM 由秩一算子 [7]构成这一性质。SIC POVM $\{E_x\}_{x=1}^{d^2}$ 应满足三个条件：(1) 对所有 $x \in \{1, ..., d^2\}$， E_x 均为秩一；(2) 对称性条件，即对所有 $x \neq y$，$\mathrm{Tr}[E_x E_y] = B$；(3) 对所有 $x \in \{1, ..., d^2\}$，$\mathrm{Tr}[E_x] = a$，其中 B 和 a 为常数， d 为底层希尔伯特空间的维数。

SIC POVM 处于数学与物理学的交汇处。在数学领域，SIC POVM 与代数数论中的重要未解问题密切相关，尤其是希尔伯特第十二问题 [8]。在物理学领域，它们在量子信息论中发挥着核心作用，并应用于多种方案，例如最优量子态层析 [9–11]，维度见证 [13]，随机性生成 [14, 15]，量子密钥分发[12]，和量子认证 [16]。

尽管对SIC POVM的兴趣迅速增长，但其在所有有限维中存在性的证明仍然难以获得（Zauner猜想） [17]。目前正在探索各种维度下SIC POVM的精确解和数值解 [18–21]。与此同时，各类量子测量，如对称测量 [22] 和等重叠测量[23, 24]，，已得到广泛研究。最近，Geng *et al*。 [25]引入了一类更广泛的SIC POVM，称为半对称信息完备（semi-SIC）POVM，其范围超出了SIC POVM。研究表明，SIC POVM的秩一条件至关重要；当该条件被放宽时，SIC POVM可以存在于所有维度 [26, 27]，，但它们不再是最优的。此外，对称性条件不能被放宽，因为它构成了SIC POVM的核心定义特征。因此，Geng *et al*。表明，半对称信息完备POVM可以通过放弃SIC POVM的等迹要求而由SIC POVM导出，从而产生若干新现象。

与此同时，量子系统日益复杂，使得认证量子态和测量的需求不断增长。由于量子设备固有的噪声和技术缺陷，一种以设备无关（DI）方式认证量子态和测量的趋势应运而生 [28–30]，这种方法称为自检验。在完全设备无关的框架中，量子设备被视为黑箱，量子系统仅通过测量统计数据来表征，而无需对设备的内部运行机制作出假设 [31, 32]。

然而，由于实现完全设备无关认证存在困难，人们日益关注半设备无关（SDI）方法 [33–35]。SDI方法的主要优势在于

*这些作者对这项工作贡献相同
†电子邮箱： sunzhe@hznu.edu.cn
‡电子邮箱： yangcp@hznu.edu.cn§电子邮箱： synan@hznu.edu.cn

采用制备与测量（PAM）框架，该框架在实验上更易实现，也更能抵御现实中的不完美因素 [36–41]。因此，许多研究致力于探索半设备无关（SDI）场景下非投影测量的自测试问题[42, 43]。

在本研究中，我们探究半SIC POVM，并通过一维离散时间量子行走对其进行实验实现。通过改变参数 B，我们实现了三种不同的半SIC POVM，并将其特性与标准 SIC-POVM 进行比较。此外，我们将状态制备设备和测量设备视为黑箱，仅依赖观测到的输入输出统计，对这些测量进行半设备无关（SDI）自检验。该方法旨在产生一种关联，根据量子理论，这种关联只能通过半 SIC POVM 实现。我们采用单光子和线性光学，在有界维度假设下通过实验验证了这一 SDI 自检验。

II. 理论

首先，我们分析二维半SIC POVM。与传统的SIC-POVM相比，半SIC POVM仍保留了秩一和对称性条件，但放宽了每个元素都具有恒定迹的约束。换言之，半SIC POVM是通过去除对所有结果均满足$[E_x] = 1/d$ $i = (1,\ldots,d^2)$这一条件，从SIC POVM推导而来的。更具体地说，半SIC POVM中每个元素的迹可以取两个不同的值。在二维情形下，半SIC POVM的元素如下 [25]:

$$E_1 = a_-|\psi_1\rangle\langle\psi_1|, \quad E_2 = a_-|\psi_2\rangle\langle\psi_2|, \\ E_3 = a_+|\psi_3\rangle\langle\psi_3|, \quad E_4 = a_+|\psi_4\rangle\langle\psi_4|, \tag{1}$$

其中 $a_\pm = (1 \pm \sqrt{1-12B})/2$，二维向量 $|\psi_x\rangle$ 由下式给出

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle, \qquad |\psi_2\rangle = r|0\rangle + \sqrt{1-r^2}|1\rangle,$$
$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\theta}|1\rangle, \; |\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}e^{-i\theta}|1\rangle,$$

r 和 θ 的值可由下式推导得出

$$r = \frac{2\sqrt{B}}{1-\sqrt{1-12B}}, \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-8\mathrm{B}-\sqrt{1-12\mathrm{B}}}}{4\sqrt{\mathrm{B}}}\right).$$

因此，参数 B 在刻画半SIC POVM方面发挥着关键作用：改变 B 会生成一族不同的半SIC POVM。在二维情形下，B 的取值范围受限于 $B \in (1/16,\ 1/12]$。值得注意的是，当 $B = 1/12$ 时，半SIC POVM 会退化为标准 SIC-POVM。在后续实验中，

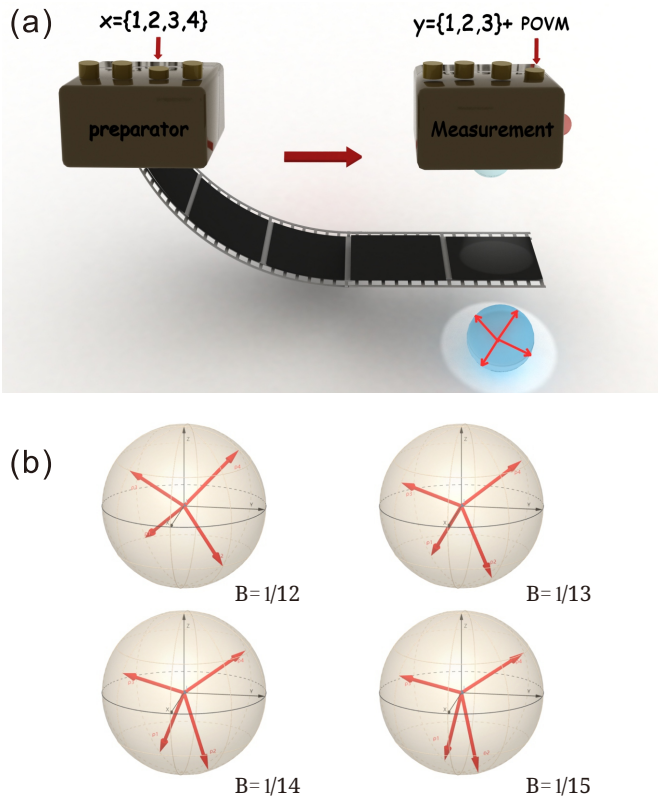

图1：用于认证半SIC POVM的情景。(a) Alice制备四种不同量子态之一并发送给Bob；Bob执行三种不同二值测量之一，或进行四结果POVM测量。(b) 当B =1/12、1/13、1/14和1/15时，半SIC POVM的布洛赫向量。当 $B = 1/12$时，半SIC POVM退化为SIC-POVM。

我们考察四种具有代表性的情形： $B = 1/12$、1/13、1/14 和 1/15。

其次，我们以 SDI 方式研究半SIC POVM 的自检验。为了对半SIC POVM 进行自检验，我们考虑图 1(a) 所示的 PAM场景。发送方 Alice 从四个可能的经典输入中选择一个 $x \in \{1,2,3,4\}$，并将其编码为量子态 ρ_x，然后发送给 Bob。Bob 有两种选择。首先，他可以选择 $y \in \{1,2,3\}$，并进行二分量子测量 $M_{b|y}$，得到测量结果 $b \in \{0,1\}$。或者，Bob 可以选择第四个输入（$y = 4$），并对 $b \in \{1,2,3,4\}$执行四结果正算子值测度 $M_{b|y=4}$。关联由概率分布 $p(b|x,\ y) = \mathrm{Tr}(\rho_x \mathrm{M}^{b|y})$ 描述。当观测到的测量结果统计数据足以验证制备的量子态和测量算子与其声称的描述相符时，即可进行自检验。在 PM场景中，可以利用线性见证量 W 对半SIC POVM 进行自检验，其表达式为 [43, 44]

$$W = W_1 - k\sum_{x=1}^{4} P(b = x|x, y = 4), \tag{2}$$

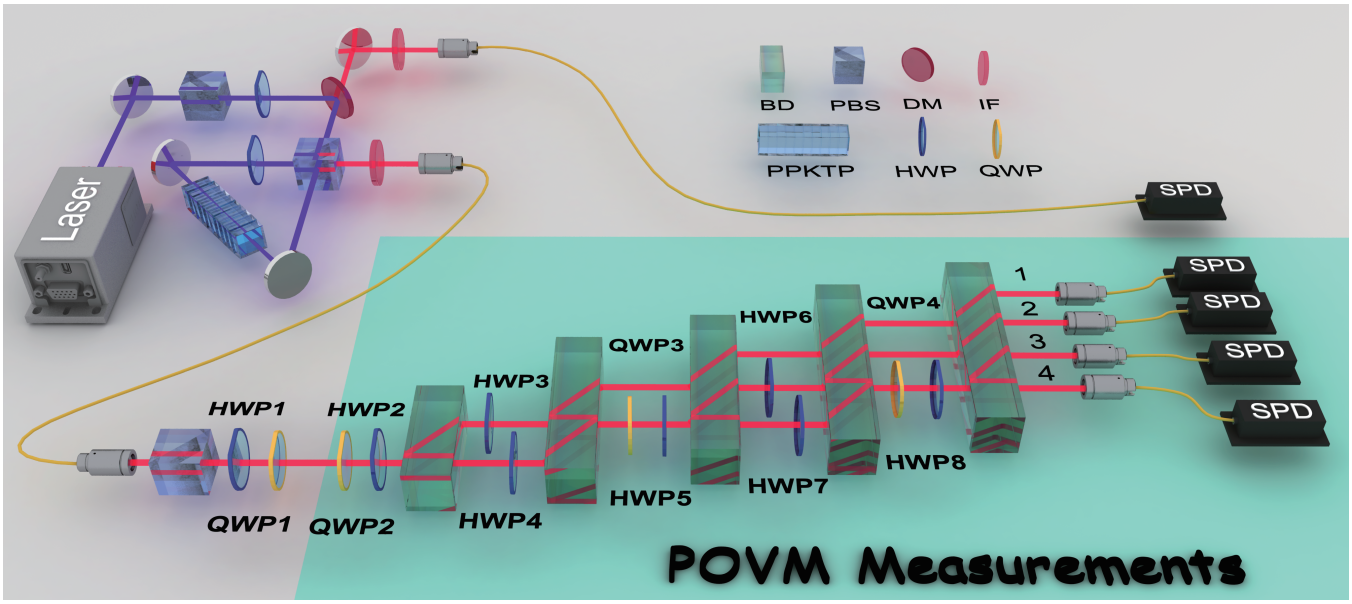

图2：实验装置。通过五步量子行走实现半SIC POVM。在一维离散时间量子行走中，行走者的位置和硬币态分别由单光子的空间模式和偏振态编码。半波片1和四分之一波片1用于制备初态。正算子值测度测量由五个光束位移器和十片波片组成。通过光路中的不同半波片和四分之一波片实现位置依赖硬币的翻转。PBS，偏振分束器；HWP，半波片；QWP，四分之一波片；IF，干涉滤光片；BD，光束位移器；DM，二向色镜。

其中， k 为正数常量， W_1 是通过二分量子测量得到的见证量，即 $W_1 = \sum_{x,\ y} \omega_{xy} E_{xy}$。 E_{xy} 是可观测量的期望值， ω_{xy} 表示见证矩阵 [44]。我们的目标是构造一个见证量 W ，使其在量子比特系统中可达到的最大值 Q 能够对目标半SIC POVM 进行自检验。根据文献 [44], ，不同半SIC POVM 的最大值 Q 为

$$Q = 24\sqrt{\frac{B}{24B-1}}. \tag{3}$$

我们根据式（2）测量线性见证量 W。当测量值 W 接近理论最大值 Q时，即可对半SIC POVM进行自检验。最后，我们针对 $B = 1/13$、1/14和1/15对半SIC POVM进行自检验。图1(b)所示的相应布洛赫向量，在幺正变换或反幺正变换 [44]下，与式（1）定义的半SIC POVM等价。

III. 实验

实验装置如图2所示。采用偏振分束器（PBS）和半波片（HWP）控制泵浦光束的偏振。在萨格纳克干涉仪内，405纳米激光器泵浦周期极化磷酸氧钛钾（PPKTP）非线性晶体，产生波长为810纳米的光子对。

光子经过干涉滤光片后，分别耦合进入单模光纤。探测到其中一个光子作为触发信号，预示另一个光子的存在，从而制备出单光子态。雪崩光电二极管在3 ns的符合时间窗内探测光子。泵浦功率为2.67 mW时，总符合计数约为 3×10^4每秒。

在我们的实验中，量子态编码在光子的水平（ $|H\rangle = |0\rangle$）和垂直（$|V\rangle = |1\rangle$）偏振上。单光子经过两块波片（半波片1和四分之一波片1）后，其状态被制备为所需的初态 $|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|H\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|V\rangle$。通过适当配置的离散时间量子行走 [45–48]，实现了四结果POVM。因此，利用五步量子行走实现了所需的单量子比特半对称信息完备正算子值测度。一般而言，量子行走的演化算符（U）由条件平移算符（T）和硬币算符（C）组成，定义为 $U = TC$。第 n 步的位置依赖硬币操作 $C_{x,\ n}$ 以及条件平移算符 T 定义如下： [45]

$$C_{x,n} = \begin{pmatrix} \cos\theta_x & e^{-i\beta}\sin\theta_x \\ -e^{i\beta}\sin\theta_x & \cos\theta_x \end{pmatrix}, \qquad T = \sum_x |x+1, H\rangle\langle x, H| + |x-1, V\rangle\langle x, V|. \tag{4}$$

行走者的位置(x)和硬币态分别编码在单光子的空间模式和偏振态中

位置依赖的硬币操作$C_{x,n}$ 通过设置在特定空间路径中的波片实现，而条件平移算符 T 则通过级联干涉网络实现。量子测量通过由五个光束位移器（BD）和十个波片（QWP2、HWP2、HWP3、HWP4、QWP3、HWP5、HWP6、HWP7、QWP4 和 HWP8）组成的量子行走来完成。成对排列的光束位移器构成干涉仪，其光轴需要相互对准。在实验中，干涉消光比在约一小时内稳定保持在 220:1。实验装置中有四个输出端口，每个端口对应一个半SIC POVM元素的测量结果（E_i）。通过精心设计量子行走过程，从不同硬币态初始化的行走者会演化为不同的位置分布。在最后一步对行走者进行位置测量，即可实现半SIC POVM。

A. 半SIC POVM的实验实现

为了利用五步量子漫步实现半SIC POVM，通过调节半波片1和四分之一波片1制备初态 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}($ $|H\rangle + |V\rangle)$。条件平移算符 T 通过级联干涉网络实现。至关重要的是，半SIC POVM的成功实现依赖于位置依赖硬币操作$C_{x,\ n}$的实验实现。例如，为了实现 $B = 1/13$的半SIC POVM，硬币算符的五个步骤为

$$
\begin{aligned}
&C_{0,1} = \mathrm{I}, \quad \mathrm{C}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0.6011 & 0.7992 \\ 0.7992 & -0.6011 \end{pmatrix}, \\
&C_{-1,2} = C_{-1,4} = \sigma_x, \\
&C_{0,3} = \begin{pmatrix} 0.5551 & 0.8318 \\ 0.8318 & -0.5551 \end{pmatrix}, \\
&C_{1,4} = \begin{pmatrix} 0.6941 & 0.7199 \\ 0.7199 & -0.6941 \end{pmatrix}, \\
&C_{0,5} = \begin{pmatrix} -0.0771 + 0.7029i & 0.7028 + 0.0771i \\ 0.0771 + 0.7028i & -0.7028 + 0.0771i \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

当 B 取其他值时，我们可以通过方程（1）和方程（4）计算位置依赖硬币操作，从而实现任意半SIC POVM。随后，具体设置HWP和QWP的角度，以实现位置依赖的硬币旋转 $C_{x,\ n}$，如表I所示。在最后一步对行走者进行位置测量后，我们可以得出四个输出端口的概率分布 P（1、2、3、4），测量状态 ρ 时得到第 i 个半SIC POVM元素的概率为 $P_i = \mathrm{Tr}[\rho \mathrm{E_i}]$ (i = (1，2、3、4))。

表I：用于实现半SIC POVM的半波片和四分之一波片角度
对于 B= 1/12、1/13、1/14 和 1/15 的半SIC POVM，半波片4和半波片7的角度固定为 45°。

B	HWP3	HWP5	HWP6	QWP4	HWP8
1/12	22.5°	22.5°	17.63°	60.34°	7.67°
1/13	26.53°	28.14°	23.02°	96.26°	25.63°
1/14	28.05°	31.86°	24.96°	67.03°	11.01°
1/15	29.14°	36°	26.31°	22.19°	-11.4°

图3展示了半SIC POVM下五步量子行走的概率分布，该分布通过估计重复测量的频率得到，并与理论预测高度一致。例如，考虑 $B = 1/13$下量子行走的实验分布，五步后的概率为 $P(E_1) = 0.1832 \pm 0.0023$、$P(E_2) = 0.3563 \pm 0.0021$、$P(E_3) = 0.2316 \pm 0.0022$以及$P(E_4) = 0.2289 \pm 0.0015$，而相应的理论结果为 $P(E_1) = 0.1807$、$P(E_2) = 0.3584$、$P(E_3) = 0.2305$以及 $P(E_4) = 0.2305$。这些实验结果与理论预测高度吻合，最大偏差小于0.005，从而证实了半SIC POVM测量任意量子态的能力。作为对照，我们还基于SIC POVM进行了测量。我们注意到，当 $B = 1/12$时，半SIC POVM约化为SIC POVM；该情形下测得的概率分布如图3(a)所示。

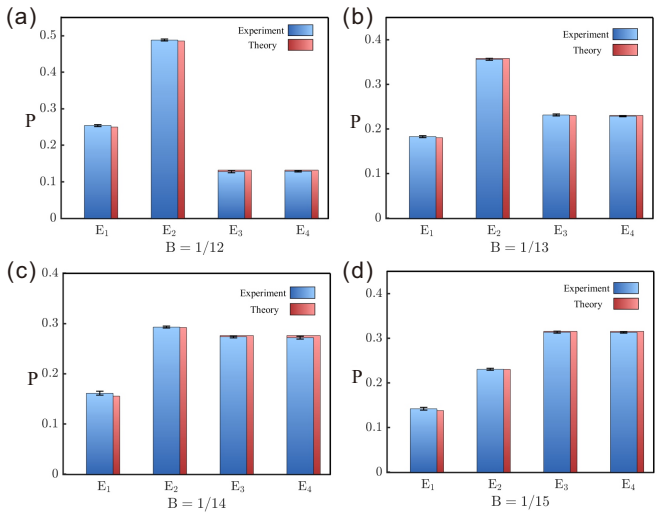

图 3：通过光子量子行走实现半SIC POVM的实验结果。对于 $B = 1/12$、$1/13$、$1/14$ 和 $1/15$ 的半SIC POVM，其测量概率分布与理论预测高度吻合，最大偏差小于 0.005。

B. 半SIC POVM的自检验

第二个实验旨在演示半SIC POVM的自检验。如图1(a)所示，为实现半SIC POVM的自检验，Alice制备四个初始态，随后Bob对接收到的态进行随机测量，并将结果代入式(2)。通过将式(2)中的线性见证量 W 与最大值 Q进行比较，我们可以判断Bob的测量是否对应于半SIC POVM。在实验中，我们针对不同类型的半SIC POVM实现了自检验，具体而言，当 $B = 1/13$、1/14和1/15时，我们分别进行实验。以 $B = 1/13$为例，我们详细描述整个实验过程。对于 $B = 1/13$，四个初始态为

$$\begin{aligned}
|\psi_1\rangle &= 0.3409|H\rangle - (0.6648 + 0.6648i)|V\rangle, \\
|\psi_2\rangle &= 0.3409|H\rangle + (0.6648 + 0.6648i)|V\rangle, \\
|\psi_3\rangle &= 0.8468|H\rangle + (0.3761 - 0.3761i)|V\rangle, \\
|\psi_4\rangle &= 0.8468|H\rangle - (0.3761 - 0.3761i)|V\rangle,
\end{aligned} \tag{6}$$

其他初始态可通过式（1）获得。

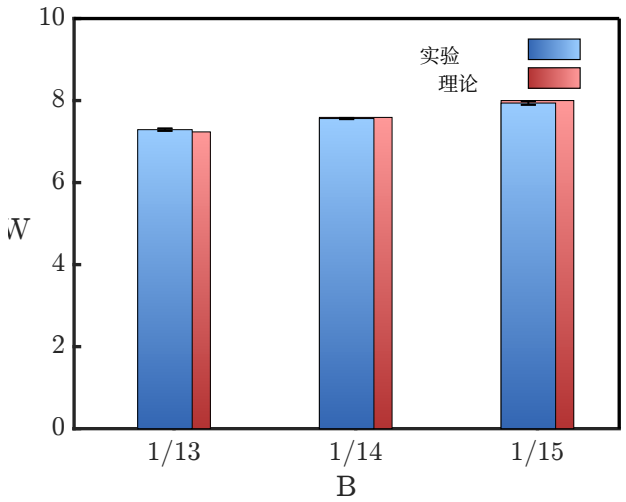

图4：半SIC POVM自检验的实验结果。对于 $B = 1/13$、1/14和1/15，见证量的值 W分别为 7.2908 ± 0.0304、7.5615 ± 0.0149和 7.9393 ± 0.0434。这些实验结果接近理论预测，误差棒表示统计不确定性。

我们通过由五个光束位移器和十个波片组成的量子行走来实现自检验。为此，我们配置半波片和四分之一波片的角度，以产生位置依赖的硬币操作$C_{x,\ n}$，详情见表II。对于特定情况

表II：用于实现B= 1/13、1/14和1/15的半SIC POVM自检验的半波片和四分之一波片角度，半波片4和半波片7的角度固定为 $45°$。

波片	B=1/13	B=1/14	B=1/15
QWP2	15.28°	11.41°	7.56°
HWP2	0.9°	0.41°	0.13°
HWP3	26.53°	28.05°	29.14°
QWP3	-62.16°	-69.79°	-76.81°
HWP5	-19.31°	-25.63°	-32.05°
HWP6	23.02°	24.96°	26.31°
QWP4	-45°	-45°	-45°
HWP8	-15.86°	-13.68°	-12.28°

$B = 1/13$，五个步骤的硬币算符为

$$\begin{aligned}
C_{0,1} &= \begin{pmatrix} 0.9381 + 0.0614i & 0.2563 - 0.2248i \\ -0.2248 + 0.2563i & -0.0614 - 0.9381i \end{pmatrix}, \\
C_{1,2} &= \begin{pmatrix} 0.6011 & 0.7992 \\ 0.7992 & -0.6011 \end{pmatrix}, \\
C_{-1,2} &= C_{-1,4} = \sigma_x, \\
C_{0,3} &= \begin{pmatrix} -0.4281 - 0.3533i & 0.8106 - 0.1866i \\ -0.1866 + 0.8106i & 0.3533 + 0.4281i \end{pmatrix}, \\
C_{1,4} &= \begin{pmatrix} 0.6941 & 0.7199 \\ 0.7199 & -0.6941 \end{pmatrix}, \\
C_{0,5} &= \begin{pmatrix} 0.6882 + 0.1625i & -0.6882 + 0.1625i \\ 0.1625 - 0.6882i & -0.1625 - 0.6882i \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{7}$$

通过调节光路中半波片和四分之一波片的角度，所有输入光子被导向四个输出端口（1、2、3、4）。在该配置中，半波片4和半波片7固定在 $45°$，并对各端口的耦合效率进行校准，以确保探测效率之差不超过5%。图4给出了参数为 $B = 1/13$、$1/14$和 $1/15$时量子比特半对称信息完备正算符值测度的见证量 W 的实验结果。相应的见证量数值分别为 7.2908 ± 0.0304、7.5615 ± 0.0149和 7.9393 ± 0.0434，与理论预测值7.2363、7.5895和8高度吻合。这些结果证实该装置成功实现了半SIC POVM，差异的主要来源归因于波片的不完美以及光子计数统计。

IV. 结论

在本工作中，我们研究了半SIC POVM，并通过一维离散时间量子行走对其进行了实验实现。在我们的装置中，任意单量子比特POVM通过离散时间量子行走实现，量子态以高保真度编码在光子的偏振自由度中。通过改变参数 B，我们实现了三种不同的半SIC POVM，并将其特性与标准SIC-POVM进行比较。此外，我们研究了四结果半SIC POVM的半设备无关自检，建立了一种认证这些量子系统的方法。利用单光子和线性光学，我们在有界维度假设下实验演示了该半设备无关自检。

致谢

本研究得到中国国家重点研发计划（项目编号：2024YFA1408900）、浙江省自然科学基金杭州联合基金（项目编号：LHZSD24A050001）、国家自然科学基金（62105086，U21A20436）、量子科学与技术创新计划（2021ZD0301705）、杭州市领军型青年创新创业团队项目（项目编号：TD2024005）以及杭州师范大学学者科研基金（4085C50221204030）的资助。

[1] Jiangwei Shang、Ali Asadian、Huangjun Zhu 和 Otfried G¨uhne，《通过对称信息完备测量增强纠缠判据》，《物理评论A》**98**，022309（2018）。[2]Joonwoo Bae、Beatrix C Hiesmayr 和 Daniel Mc- Nulty，《通过量子 2**21**，013012 2019 -设计关联纠缠检测与态层析》，《新物理学杂志》（）。[3] Dennis Dieks，《量子态的重叠与可区分性》，《物理快报A》**126**，303-306（1988）。[4] Asher Peres，《如何区分非正交态》，《物理快报A》**128**，19（1988）。[5] Charles H Bennett，《利用任意两个非正交态进行量子密码学》，《物理评论快报》**68**，3121（1992）。[6]J. B. Brask、A. Martin、W. Esposito、R. Houlmann、J. Bowles、H. Zbinden 和 N. Brunner，《基于无歧义态判别的兆赫兹速率半设备无关量子随机数发生器》，《物理评论应用》**7**，054018（2017）。[7] J. M. Renes、R. Blume-Kohout、A. J. Scott 和 C. M. Caves，《数学物理杂志》（纽约）**45**，2171（2004）。[8] Marcus Appleby、Steven Flammia、Gary McConnell 和 Jon Yard，《对称信息完备量子态与代数数论》，《物理学基础》**47**，1042-1059（2017）。[9] William K Wootters 和 Brian D Fields，《利用互不相容测量进行最优态判定》，《物理学年刊》**191**，363-381（1989）。[10] Andrew J Scott，《紧致信息完备量子测量》，《物理学杂志A：数学与一般》**39**，13507（2006）。[11] Xiaowei Wang、Xiang Zhan、Yulin Li、Lei Xiao、Gaoyan Zhu、Dengke Qu、Quan Lin、Yue Yu 和 Peng Xue，《通过量子行走对高维系统进行广义量子测量》，《物理评论快报》**131**，150803（2023）。[12]Christopher A Fuchs 和 Masahide Sasaki，《通过经典信道压缩量子信息：测量一组量子态的量子性》，《量子信息与计算》**3**，377-404（2003）。[13] Nicolas Brunner、Miguel Navascues 和 Tamas Vertesi，《维度见证与量子态判别》，《物理评论快报》**110**, 150501 (2013).[14] Antonio Acin、Stefano Pironio、Tamas Vertesi 和 Pe- ter Wittek，《基于一个纠缠比特的最优随机性认证》，《物理评论A》**93**, 040102 (2016).[15] Ole Andersson、Piotr Badziag、Irina Dumitru 和 Adan Cabello，《基于一个纠缠比特和Gisin优雅贝尔不等式的两个随机比特的设备无关认证》，《物理评论A》**97**, 012314 (2018).[16] Piotr Mironowicz 和 Marcin Pawlowski，《四结果正算子值测量的实验可行半设备无关认证》，《物理评论A》**100**, 030301 (2019). [17] G. Zauner，《量子设计：非交换设计理论基础》，《国际量子信息学杂志》**09**, 445 (2011). [18] M. Appleby 和 I. Bengtsson，《简化的精确对称信息完备量子态》，《数学物理杂志》(N.Y.) **60**, 062203 (2019). [19] M. Appleby、T.-Y. Chien、S. Flammia 和 S. Waldron，《从数值解构造精确的对称信息完备测量》，《物理学杂志A》**51**, 165302 2018( ). [20] L. P. Hughston 和 S. M. Salamon，《复射影平面上的点调查》，《数学进展》**286**, 1017 (2016). [21] A. J. Scott 和 M. Grassl，《对称信息完备正算子值测量：一项新的计算机研究》，《数学物理杂志》(N.Y.) **51**, 042203 (2010).[22]Katarzyna Siudzi´nska，《有限维中所有类别的信息完备对称测量》，《物理评论A》**105**, 042209 (2022).[23]Lingxuan Feng、Shunlong Luo、Yan Zhao 和 Zhi- hua Guo，《作为对称信息完备正算子值测量扩展的等重叠测量》，《物理评论A》**109**, 012218 (2024).[24]Zhihua Guo、Yan Liu、Tsung-Lin Lee、Shunlong Luo，《作为对称信息完备正算子值测量扩展的等重叠测量》，《物理评论A》**111**, 012430 (2025).[25]Isabelle Jianing Geng、Kimberly Golubeva 和 Gilad Gour，《定义对称信息完备广义测量所需的最小条件是什么？》，《物理评论快报》**126**, 100401 (2021).

[26] D. M. Appleby, 《任意秩的对称信息完备测量》, 《光谱学与光谱分析》**103**, 416 2007( ). [27] G. Gour 和 A. Kalev, 《构造所有一般对称信息完备测量》, 《物理学杂志A》**47**, 335302 (2014). [28] J. Kaniewski, 《Clauser-Horne-Shimony-Holt不等式和Mermin不等式的解析自测试界及近最优自测试界》, 《物理评论快报》**111**, 070402 (2016). [29] J. D. Bancal、N. Sangouard 和 P. Sekatski, 《抗噪声的贝尔态测量设备无关认证》, 《物理评论快报》**121**, 250506 (2018). [30] M. O. Renou、J. Kaniewski 和 N. Brunner, 《量子网络中的纠缠测量自检验》, 《物理评论快报》**121**, 250507 (2018). [31] E. S. G´omez、S. G´omez、P. Gonz´alez、G. Canas、J. F. Barra、A. Delgado、G. B. Xavier、A. Cabello、M. Klein- mann、T. V´ertesi 和 G. Lima, 《非投影量子比特测量的设备无关认证》, 《物理评论快报》**117**, 260401 (2016). [32] M. Smania、P. Mironowicz、M. Nawareg、M. Paw-lowski、A. Cabello 和 M. Bourennane, 《通过设备无关协议对信息完备量子测量进行实验认证》, 《光学》**7**, 123 (2020). [33] M. Paw-lowski 和 N. Brunner, 《单向量子密钥分发的半设备无关安全性》, 《物理评论A》**84**, 010302(R) (2011). [34] R. Gallego、N. Brunner、C. Hadley 和 A. Ac´ın, 《经典维数与量子维数的设备无关检验》, 《物理评论快报》**105**, 230501 (2010). [35] J. Bowles、M. T. Quintino 和 N. Brunner, 《在独立设备的制备与测量场景中认证经典系统与量子系统的维数》, 《物理评论快报》**112**, 140407 (2013). [36] M. Hendrych、R. Gallego、M. Miuda、N. Brunner、A. Acin 和 J. P. Torres, 《经典系统与量子系统维数的实验估计》, 《自然·物理》**8**, 588 (2012). [37] J. Ahrens、P. Badziag、A. Cabello 和 M. Bourennane, 《经典维数与量子维数的实验设备无关检验》, 《自然·物理》**8**, 592 (2012). [38] V. D'Ambrosio、F. Bisesto、F. Sciarrino、J. F. Barra、G. Lima 和 A. Cabello, 《高维量子系统的设备无关认证》, 《物理评论快报》**112**, 140503 (2014).

[39] J. Ahrens、P. Badziag、M. Paw-lowski、M. Zukowski和M. Bourennane, 《经典与量子维数的实验检验》, 《物理评论快报》**112**，140401（2014）。[40] Y.-N. Sun、Z.-D. Liu、J. Sun、G. Chen、X.-Y. Xu、Y.-C. Wu、J.-S. Tang、Y.-J. Han、C.-F. Li和G.-C. Guo，基于量子态判别的维度见证的实验实现，《物理评论A》**94**，052313（2016）。[41] Y.-N. Sun、Z.-D. Liu、J. Bowles、G. Chen、X.-Y. Xu、J.-S. Tang、C.-F. Li和G.-C. Guo，利用独立装置对量子维数及不可约高维量子系统的实验认证，《光学》**7**，1073（2020）。[42] J. Steinberg、H. C. Nguyen和M. Kleinmann，制备与测量场景中认证三结果量子比特测量的最小方案，《物理评论A》**104**，062431（2021）。[43]Armin Tavakoli、Massimiliano Smania、Tamas Vertesi、Nicolas Brunner和Mohamed Bourennane，制备与测量实验中非投影量子测量的自检验，《科学进展》**6**，eaaw6664（2020）。[44] G´abor Dr´otos、K´aroly F. P´al和Tam´as V´ertesi，量子比特制备与测量场景中半对称信息完备测量的自检验，《物理评论A》**110**，032427（2024）。[45] Pawe-l Kurzy´nski和Antoni W´ojcik，作为广义测量装置的量子行走，《物理评论快报》**110**，200404（2013）。[46] Zhihao Bian、Jian Li、Hao Qin、Xiang Zhan、Rong Zhang、Barry C. Sanders和Peng Xue，通过一维光子量子行走实现单量子比特正算子值测量，《物理评论快报》**114**，203602（2015）。[47] Yuan-yuan Zhao、Neng-kun Yu、Pawe-l Kurzy´nski、Guo-yong Xiang、Chuan-Feng Li和Guang-Can Guo，基于量子行走的广义量子比特测量的实验实现，《物理评论A》**91**，042101（2015）。[48] Qin Fan、Meng-Yun Ma、Yong-Nan Sun、Qi-Ping Su和Chui-Ping Yang，最小重叠假设下非投影量子测量的实验认证，《光学快报》**30**，34441（2022）。