局部化 曲率支配与调和映射的刚性

Sergey E. Stepanov

俄罗斯联邦莫斯科市列宁格勒大街49-55号，邮编
125468，金融大学数学系，电子邮件：*s.e.stepanov@mail.ru*

摘要。我们建立了一个适用于黎曼流形之间调和映射的局部化 Bochner 型刚性定理。设 f: $(M,g) \to (\bar{M},\bar{g})$ 是从一个紧流形出发的调和映射。我们不再假设目标空间的截面曲率处处非正，而是对像 $f(M)$ 施加局部曲率界，该界由沿像所遇到的最大截面曲率表示。

我们证明，若定义域的最小里奇曲率以一个精确的定量针化不等式支配这一依赖于像的曲率界，且该不等式涉及 f 的最大能量密度，则该映射为常值。在临界阈值处，我们得到一个位似分类：微分平行，且像为全测地。

该结果以依赖于像的曲率支配原理取代了全局曲率符号假设，并给出了 Yano–Ishihara 型刚性的局部化类比。

关键词： 黎曼流形，调和映射，精确的定量针化不等式，刚性理论

MSC2010： 53C20; 53C43

1. 引言

调和映射是几何分析中成果最为丰硕的领域之一，位于微分几何、偏微分方程理论和理论物理的交汇处（例如参见 [1]；[2] 和[3]）。

黎曼流形之间的调和映射 f：$(M,g) \to (\bar{M},\bar{g})$ 是能量泛函的临界点（见 [4]）

$$E(f) = \frac{1}{2}\int_M |\, df \,|^2 \; d\mathrm{vol}_g,$$

而它们的刚性性质则受到定义域曲率、目标空间曲率与全局几何约束之间微妙相互作用的支配。自 Eells–Sampson 的奠基性工作以来（见 [4]），曲率符号条件一直在刚性理论中发挥着决定性作用。在紧致情形下，Eells–Sampson 证明了，如果目标流形具有非正截面曲率，则每个同伦类都包含一个通过

热流获得的调和代表，且截面曲率的严格负性会在同伦类内施加强刚性。在互补的方向上，Yau 和 Schoen 建立了刘维尔型刚性定理（见 [5]）：如果定义域具有非负里奇曲率，且紧致目标空间具有非正截面曲率，那么每个调和映射都必须是常值映射。在这两种情形中，目标空间截面曲率的非正性都是驱动消失现象的基本几何假设。

这些结果的解析核心是 Bochner–Weitzenböck 恒等式（见 [4]）

$$\Delta e(f) = |\nabla df|^2 + \langle \mathrm{Ric}_M(df), df\rangle - \langle \bar{R}(df, df)df, df\rangle,$$

其中 $e(f) = \frac{1}{2}|df|^2$。当曲率符号条件使右端非负时，能量密度便成为次调和函数，而紧性或增长论证会迫使其为常值，从而得到刚性结论。因此，经典理论依赖全局定性的曲率假设，通常要求整个目标流形上的 $\overline{\mathrm{Sec}} \leq 0$（见 [4 - 6]）。

本文旨在通过将曲率控制局限于映射的像，来改进这一刚性机制。若 M 是紧致的，则 $f(M) \subset \bar{M}$是紧致的，因此可以定义沿像所遇到的最大截面曲率，

$$\overline{\mathrm{Sec}}_{\max}(f(M)) = \max_{\substack{q\in f(M)\\ \sigma\subset T_q\bar{M}}} \overline{\mathrm{Sec}}(\sigma).$$

我们不再对 $\overline{\mathrm{Sec}}$施加全局符号条件，而是假设满足如下形式的定量曲率支配不等式

$$\mathrm{Ric}_{\min}(M) > \frac{n-1}{n}\,\overline{\mathrm{Sec}}_{\max}(f(M)) \cdot \sup_M |df|^2,$$

其中，$\mathrm{Ric}_{\min}(M)$表示定义域的最小里奇曲率，而对于每个点$p \in f(M)$处的任意$\sigma \subset T_q\bar{M}$，$\overline{\mathrm{Sec}}(\sigma) \geq 0$。在此假设下，我们证明调和映射必为常值。因此，刚性并非由目标空间的整体几何决定，而是由像上实际感受到的曲率决定

以及内蕴曲率与环境曲率贡献之间的定量平衡。

当目标流形不满足全局曲率符号条件时，这一局部化原理便显得尤为重要。例如，若 M^{-}含有正截面曲率区域，但调和映射的像完全落在一个截面曲率以上界为常数 κ 的区域内，那么只要定义域的里奇曲率在上述定量意义上支配 κ，刚性结论便成立。与像不相交区域的几何性质在论证中不起作用。由此，当前结果将经典 Bochner 型刚性的适用范围拓展到了传统的全局非正曲率框架之外。

该理论的另一项结构性特征是对阈值情形的分析。当曲率支配不等式取等号时，Bochner 恒等式迫使微分 df 平行，而曲率估计背后的代数等式则意味着 df 的奇异值彼此相等。因此，该映射要么为常值，要么为位似，且其像为全测地子流形。这一现象与 Yano 和 Ishihara 的分类结果相呼应（见 [6]）：他们证明，在涉及目标空间截面曲率一致上界的全局曲率挤压条件下，从具有正 Ricci 曲率的紧流形出发的调和映射必为常值或位似。当前框架通过以依赖于像的曲率上界取代全局曲率上界，并用映射的最大能量密度表述挤压条件，进一步细化了这一观点。

综合来看，这些结果确立了一个局部化的曲率支配原理：沿像的外围截面曲率受到定义域内在里奇曲率支配的定量控制，在严格情形下导致坍缩为常值映射，或在临界阈值处得到位似刚性。就此意义而言，经典的 Bochner 方法在解析结构上得以保留，而其几何假设则被显著放宽并局部化。

在本文中，我们继续我们在[7] 中开始的研究，并在其中证明了映入非负曲率流形的调和映射的若干消失定理，并研究了它们的应用。

2. 主定理

设 (M, g) 是一个紧致黎曼流形，$(\bar{M}, \bar{g})$ 是任意黎曼流形，并设

$$f: (M, g) \to (\bar{M}, \bar{g})$$

是一个可微映射。我们先回顾一下曲率紧性所导致的一个标准结论。由于里奇曲率张量 Ric_M 随度量光滑变化，其特征值在 M 上连续变化。由于 M 是紧致的，里奇曲率存在一个全局下界；也就是说，存在一个常值

$$\mathrm{Ric}_{\min}(M) = \min_{p \in M} \min_{[X]=1} (\mathrm{Ric}(X, X))$$

此最小值在 M 的某一点处取得。

现在我们来考察目标空间沿着 f 的像的几何性质。由于光滑流形之间的每个可微映射都是连续的，而连续映射将紧集映为紧集，因此像 $f(M) \subset \bar{M}$ 是 $\bar{M}$ 中的一个紧致子集。要得出这一结论，无需对 $\bar{M}$ 作任何额外假设。

为了讨论像上的截面曲率，考虑 $\bar{M}$ 上二维平面的格拉斯曼丛 $\mathrm{Gr}_2(T\bar{M}) \longrightarrow \bar{M}$。截面曲率函数

$$\overline{\mathrm{Sec}} : \mathrm{Gr}_2(T\bar{M}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

是连续的，因为它依赖于 $\bar{M}$ 的度量张量和曲率张量，并且这种依赖是光滑的。将此丛限制在紧致集 $f(M)$ 上，得到 $\mathrm{Gr}_2(T\bar{M})\ |_{f(M)}$。由于每个纤维 $\mathrm{Gr}_2(T_p\bar{M})$ 都是紧致的，且底空间 $f(M)$ 也是紧致的，因此该丛是紧致的。consequently，根据极值定理，截面曲率函数在这个限制丛上取得其最小值。因此，量

$$\overline{\mathrm{Sec}}_{\max}(f(M)) := \max_{\substack{p\in f(M)\\ \sigma\subset T_p\bar{M}}} \overline{\mathrm{Sec}}(\sigma)$$

是良定义的，并且对某个满足 $p \in f(M)$ 的二维平面 $\sigma \subset T_p\bar{M}$ 取得。

需要强调的是，取最小值时考虑的是 $T_p\bar{M}$ 中像上各点处的所有二维平面，而不仅仅是与 $f(M)$相切的平面。后者描述的是子流形的内蕴曲率性质，而这里的量反映的是 $\bar{M}$ 沿映射像的外围几何。

总之，M 的紧致性保证其里奇曲率存在全局下界，并确保像 $f(M)$在 $\bar{M}$中是紧致的。进而，这种紧致性意味着 $\bar{M}$ 在以 $f(M)$上各点为基点的所有二维平面上的截面曲率存在全局最大值。于是，下面的定理成立。

主定理 (曲率夹挤下的刚性)

设 $f:(M,g) \longrightarrow (\bar{M},\bar{g})$ 是从一个 n 维连通、紧致、无边界黎曼流形 (M,g) 到一个连通黎曼流形 $(\bar{M},\bar{g})$的光滑调和映射。记

$$\mathrm{Ric}_{\min}(M) = \min_{p\in M}\ \min_{|X|=1}(\mathrm{Ric}(X,X))$$

M（g，M）的里奇曲率全局最小值，并定义为

$$\overline{\mathrm{Sec}}_{\max}(f(M)) = \max_{\substack{p\in f(M)\\ \sigma\subset T_p\bar{M}}} \overline{\mathrm{Sec}}(\sigma),$$

M（$\bar{g}$，$\bar{g}$），其由f（M）的紧性可知定义良好。令e（f）$=\frac{1}{2}|df|^2$ 表示f的能量密度，并设

$$\mathrm{e}_{\max} = \mathrm{Sup}_{M}\ e(f).$$

假设对于每个$p \in f$（M）处的任意二维平面$\sigma \subset T_p\bar{M}$，均有$\overline{\mathrm{Sec}}$（$\sigma$）$\geq 0$

$$\mathrm{Ric}_{\min}(M) > \frac{n-1}{n}\,\mathrm{e}_{\max}\cdot \overline{\mathrm{Sec}}_{\max}(f(M)).$$

那么 f为常值。

3. 主定理的评估

该定理为满足定量曲率挤压条件的调和映射建立了 Bochner型刚性结果。其显著特点在于，不再要求目标流形的截面曲率满足经典的全局符号假设，而是仅沿像 $f(M)$ 施加局部上界。具体而言，估计中涉及的曲率常数并非目标流形的全局不变量，而是取自像上各点处二维平面所对应的最大截面曲率。这是对标准刚性框架在概念上的改进。

与 Eells–Sampson（见 [4]）和 Yau- Schoen（见[5]）的经典结果不同，在那些结果中，整个目标流形的非正截面曲率起着决定性的结构作用；本定理允许目标空间包含正截面曲率区域。刚性结论是通过定义域的最小里奇曲率与目标空间在像上的最大截面曲率之间的定量平衡不等式得出的。因此，这一机制本质上具有竞争性：定义域的内蕴曲率必须支配映射沿其像所经历的环境曲率。

从结构上看，该结果属于*Bochner*型消失定理这一类。定义域的紧致性保证最小里奇曲率能够取到，也保证像的紧性，进而确保沿 $f(M)$ 的最大截面曲率定义良好。关键不等式

$$\mathrm{Ric}_{\min}(M) > \frac{n-1}{n}\,\overline{\mathrm{Sec}}_{\max}(f(M)) \cdot \sup_{M} |\,df\,|^2$$

体现了曲率支配原理：定义域的正Ricci曲率必须控制目标几何所产生的潜在曲率放大效应，而该效应受映射微分的最大范数加权。

从数学角度来看，该定理的优势主要体现在两个方面：

1. 它不对目标流形施加全局曲率限制。

2. 它以定量刚性阈值取代定性符号条件；该阈值源自 Bochner公式中曲率项的尖锐代数估计。

与此同时，这一假设仍然具有较强限制。因子 $\sup_M |df|^2$（或等价地，$\sup_M e(f)$）的存在，使刚性条件取决于映射的解析大小。在目标空间沿像的截面曲率非正这一特殊情形下，该不等式在定义域具有正Ricci曲率时化为经典消失条件。因此，定理真正的新意体现在目标流形允许正截面曲率、但其影响在定量上受定义域曲率支配的情形中。

系数 $\frac{n-1}{n}$ 并非偶然；它源自拉回度量对角化过程中，将 $\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j$ 与 $(\sum_i \lambda_i)^2$ 联系起来的最优代数不等式。若该常数确实是尖锐的，那么这一定理在Bochner框架内具有结构最优性。

总而言之，该定理给出了几何上协调且技术上精确的刚性陈述。其新意在于将截面曲率控制局部化到映射的像上，并提出定量曲率平衡原理。该结果的更广泛影响，取决于钳制常数是否尖锐，以及是否存在接近临界阈值且具有几何意义的例子。

3. 主定理的证明

1. 记号与曲率界

设 $f:(M,g)\to(\bar{M},\bar{g})$ 是一个光滑的调和映射，其中 (M,g) 是连通、紧致且无边界的，而 $(\bar{M},\bar{g})$ 是连通的。按上述方式定义：

$$\mathrm{Ric}_{\min} := \min_{p\in M}\ \min_{\substack{X\in T_pM\\ |X|=1}} \mathrm{Ric}_M(X,X), \qquad \overline{\mathrm{Sec}}_{\max} := \max_{q\in f(M)}\ \max_{\sigma\subset T_q\bar{M}} \overline{\mathrm{Sec}}(\sigma).$$

由于 M 是紧致的，$\mathrm{Ric}_{\inf}$ 有良好定义且能取到其值。由于 $f(M)$ 是紧致的，$\overline{\mathrm{Sec}}_{\max}$ 有良好定义且能取到其值。

我们采用如下约定

$$e(f):=\frac{1}{2}\mid df\mid^2,\ \mathrm{e}_{\max}:=\sup_M e(f),\ \text{so that}\ \ \mid df\mid^2\leq 2\mathrm{e}_{\max}\ \text{ on }\ M.$$

2. *Bochner* 恒等式

对于调和映射 f，博赫纳–魏岑博克公式为（见 [4, p 123] 与[6, p. 506]）

$$\frac{1}{2}\Delta\mid df\mid^2=\parallel\nabla df\parallel^2+Q(f),$$

其中

$$Q(f)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Ric}_M(e_i,e_i)\mid df(e_i)\mid^2-\sum_{i,j=1}^{n}\langle\bar{R}(df(e_i),df(e_j))\,df(e_j),df(e_i)\rangle$$

对任意局部 g-正交标架 $\{e_1,\dots,e_n\}$。

在紧致 M （无边界）上积分可得（见 [4]；[5] 与 [6]）

$$\int_M(\parallel\nabla df\parallel^2+Q(f))\,dv_g=0. \tag{1}$$

3. 拉回度量的对角化。

固定一点 $x\in M$。选取一个局部的 g-正交标架 $\{e_1,\dots,e_n\}$，定义在 x 附近，使得拉回度量

$$g^*:=f^*\bar{g}$$

在 x 处为对角形式，即 $g(df(e_i),df(e_j))=\lambda_i\,\delta_{ij},\ \lambda_i\geq 0$。令 $S=S(x)$ 表示

$$S:=\textstyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\mathrm{tr}_g(g^*)=\mid df\mid^2.$$

4. 里奇项的下界。

根据 $\mathrm{Ric}_{\inf}$ 的定义，我们有（参见 [6]）

$$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Ric}(e_i,e_i)\mid df(e_i)\mid^2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\ \mathrm{Ric}(e_i,e_i)\geq\mathrm{Ric}_{\min}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\mathrm{Ric}_{\min}\cdot S.$$

5. 目标空间曲率项的上界

令 $u_i := df(e_i)$。由于 $g(u_i,u_j)=0$ 对于 $i\neq j$ 和 $|u_i|^2=\lambda_i$成立，我们得到 $i\neq j$

$$\langle \bar{R}(u_i,u_j)\,u_j,u_i\rangle = \overline{\mathrm{Sec}}(u_i,u_j)\;|u_i|^2|u_j|^2=\overline{\mathrm{Sec}}(u_i,u_j)\,\lambda_i\lambda_j.$$

此外，含有 $i=j$ 的项消失。因此（另见 [6]）

$$\sum_{i,j=1}^{n}\langle \bar{R}(u_i,u_j)\,u_j,u_i\rangle = 2\sum_{1\le i<j\le n}\sec(u_i,u_j)\,\lambda_i\lambda_j \le 2\,\overline{\mathrm{Sec}}_{\max}\sum_{i<j}\lambda_i\,\lambda_j.$$

利用恒等式

$$\sum_{i<j}\lambda_i\,\lambda_j=\frac{S^2-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2}{2}\le\frac{S^2-\frac{1}{n}S^2}{2}=\frac{n-1}{2n}S^2,$$

由柯西–施瓦茨不等式 $\sum\lambda_i^2\ge\frac{1}{n}(\sum\lambda_i)^2$, 可得

$$\sum_{i,j=1}^{n}\langle \bar{R}(u_i,u_j)\,u_j,u_i\rangle \le 2\,\overline{\mathrm{Sec}}_{\max}\cdot\frac{n-1}{2n}S^2=\frac{n-1}{n}\,\overline{\mathrm{Sec}}_{\max}\cdot S^2.$$

6. Q的钳制估计(f)

结合上述不等式，我们得到逐点下界

$$Q(f)\ge \mathrm{Ric}_{\min}S-\frac{n-1}{n}\,\overline{\mathrm{Sec}}_{\max}S^2=|df|^2\,(\mathrm{Ric}_{\min}-\frac{n-1}{n}\,\overline{\mathrm{Sec}}_{\max}\,|df|^2). \quad (2)$$

用能量密度 $e(f)=\frac{1}{2}|df|^2$ 表示，即为

$$Q(f)\ge 2e(f)(\mathrm{Ric}_{\min}-\frac{2(n-1)}{n}\,\overline{\mathrm{Sec}}_{\max}\cdot e(f)). \qquad (7)$$

7. 结论：f 的常值性

假设 $\overline{\mathrm{Sec}}_{\max}\ge 0$ 且

$$\mathrm{Ric}_{\min}>\frac{n-1}{n}\,\overline{\mathrm{Sec}}_{\max}\cdot\sup_{M}|df|^2. \qquad (3)$$

因此，式 (2) 中的括号项在 M 的每一点都非负，故 $Q(f)\ge 0$ 在 M 上成立。由 (1) 可得

$$\int_M \| \nabla df \|^2 \, dv_g = 0, \qquad \int_M Q(f) \, d v_g = 0,$$

因此，$\nabla df \equiv 0$ 且 $Q(f) \equiv 0$ 在 M 上成立。特别地，$| df |^2$ 为常值。在严格不等式 (3) 下，恒等式 $Q(f) \equiv 0$ 推出 $| df |^2 \equiv 0$，因此 $df \equiv 0$ 且 f 为常值。证明完毕。

6. 局部刚性、阈值分类与非负曲率结构的相容性

本文提出的刚性机制应置于调和映射的经典 Bochner框架中理解。Eells–Sampson、Yano–Ishihara 和 Yau-Schoen 的奠基性结果依赖于全局曲率符号假设（见 [4] - [6]），通常要求整个目标流形具有非正截面曲率。在这些情形下，Bochner 恒等式通过对曲率项进行全局符号控制，导出消失性结论或强几何约束。

相比之下，本文的方法将曲率控制局限于像 $f(M)$。我们不对 $\bar{M}$ 上的 Sec 施加全局界，而仅考虑

$$\overline{\mathrm{Sec}}_{\max} = \max_{\substack{q \in f(M) \\ \sigma \subset T_q \bar{M}}} \overline{\mathrm{Sec}}(\sigma).$$

这使得目标流形可以包含与像不相交的正截面曲率区域，而不影响刚性。决定性的几何因素是映射实际遇到的曲率。

关键的定量假设是曲率支配条件

$$\mathrm{Ric}_{\min} \geq \frac{n-1}{n} \overline{\mathrm{Sec}}_{\max} S_0, \qquad S_0 := \sup_M | df |^2. \tag{4}$$

该条件平衡定义域的内在里奇曲率与沿像的最大截面曲率，并按微分的大小进行缩放。

推论 1（挤压阈值处的刚性与相似分类）

设 $f\colon (M,\ g) \to (\bar{M},\ \bar{g})$ 是一个调和映射，其中 $(M,\ g)$ 是连通、紧致且无边界的。定义

$$\mathrm{Ric}_{\min} := \min_{p\in M}\ \min_{|X|=1} \mathrm{Ric}_M(X,X),\ \overline{\mathrm{Sec}}_{\max} := \max_{\substack{q\in f(M)\\ \sigma\subset T_q\bar{M}}} \overline{\mathrm{Sec}}(\sigma),\ S_0 := \sup_M\ |df\ |^2,$$

并假设$\overline{Sec}_{max} \geq 0$ 且

$$Ric_{min}\ \geq\ \frac{n-1}{n}\ \overline{Sec}_{max}\, S_0. \tag{5}$$

则要么f为常值，要么(5)中等式成立，且f为具有全测地像的位似映射(并且若$dim\ M = dim\ \bar{M}$则为局部位似)。

证明。 设$e(f)\ = \frac{1}{2}|\ df\ |^2$。对于调和映射，Bochner–Weitzenböck 恒等式为

$$\frac{1}{2}\Delta\ |\ df\ |^2 = \|\ \nabla df\ \|^2 + Q(f). \tag{6}$$

根据本文前面所证明的曲率估计，

$$Q(f)\ \geq\ \ |\ df\ |^2\ (\mathrm{Ric}_{\min} - \frac{n-1}{n}\ \overline{\mathrm{Sec}}_{\max}\ |\ df\ |^2). \tag{7}$$

由于$|\ df\ |^2 \leq S_0$，假设(5)表明(7)右端的括号处处非负；因此在M上有$Q(f)\ \geq 0$。在紧致M上对(6)积分并利用$\int_M \Delta(\ \cdot\ d\,v_g = 0)$，我们得到（另见[4]）

$$0 = \int_M (\|\ \nabla df\ \|^2 + Q(f))\ dv_g.$$

由于$\|\ \nabla df\ \|^2 \geq 0$且$Q(f)\ \geq 0$，由此可得

$$\|\ \nabla df\ \|^2 \equiv 0,\ Q(f) \equiv 0\ \text{ on }\ M. \tag{2}$$

特别地，$\nabla df \equiv 0$ 意味着df是平行的，且$|\ df\ |^2$ 是常值。

若（5）中的不等式为严格不等式，则除非$|df|^2 = 0$，否则（1）中的括号项严格为正。结合$Q(f)\ \equiv 0$，可推出$|\ df\ |^2 \equiv 0$，因此$df \equiv 0$ 且f为常值。

现在假设 （5）中的等式成立，且f不是常值，因此$|\,df\,|^2 \equiv S_0 > 0$。此外，推导（1）时所用的所有不等式都在每一点处取等。特别地，在每一点处，都可以选取一个将$f^*\bar{g}$对角化的正交标架，其奇异值为 λ_1，…， $\lambda_n \geq 0$，并满足 $\sum_i \lambda_i = |\,df\,|^2$。柯西–施瓦茨步骤中的等式

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \geq \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)^2$$

迫使 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$。结合 $\nabla df \equiv 0$，这意味着 f具有常秩，并在其核的正交补上起相似变换的作用；等价地，f在相应分布上的限制是局部位似。此外，由于 df 平行，像的第二基本形式为零，因此 $f(M)$I 在 $\bar{M}$中是全测地的。若 $\dim\ M = \dim\ \bar{M}$，则 $\ker\ df = \{0\}$，且 f是局部位似。

推论 2（非负曲率情形下的局部刚性 ）

设 f:（M^n， g） →（$\bar{M}$， $\bar{g}$）是一个调和映射，其中（M^n， g）是连通、紧致且无边界的。假设（$\bar{M}$， $\bar{g}$）是完备非紧的，且具有截面曲率$\overline{\text{Sec}} \geq 0$。如上定义截面曲率$\overline{\text{Sec}}_{\max}$和 S_0 。那么：

(i) *If*

$$\text{Ric}_{\min}(M) > \frac{n-1}{n}\,\overline{\text{Sec}}_{\max}\,S_0,$$

则 f为常值。

(ii) 若等式成立且 f非恒定，则 $f(M)$ 在 $\bar{M}$中是全测地的。若此外 $\overline{\text{Sec}}$在 $\bar{M}$中的某一点处严格为正，则 $\bar{M}$的灵魂是一个点，因此 $\bar{M} \cong \mathrm{R}^m$，从而 $f(M)$ 包含于 R^m的某个仿射子空间中。

证明。 第 (i) 部分由推论 1 立即得到：由于 $\overline{\text{Sec}} \geq 0$，我们有 $\overline{\text{Sec}}_{\max} \geq 0$，而严格不等式意味着推论 1 的严格情形，因此 f为常值。

对于 (ii)，若等式成立且 f非常值，则由推论 1 可知， df平行，且 $f(M)$ 是 $\bar{M}$中的全测地子流形。现在进一步假设 $\overline{\text{Sec}} > 0$在

¯中的某点处。根据佩雷尔曼对具有 灵魂定理的完备非紧流形的改进，若其具有 $\overline{\mathrm{Sec}} \geq 0$，则灵魂退化为一点，且 M^{-}与 R^{m} 微分同胚（参见 [8]）。在欧几里得空间中，全测地子流形恰好是仿射子空间。因此，$f(M)$作为全测地子流形，必包含于 R^{m}的某个仿射子空间中。

参考文献

1. F. Hélein，《调和映射、守恒律与动标架》，第2版，剑桥数学专著，第150卷，剑桥大学出版社，剑桥，2002年。2. F. Lin、C. Wang，《调和映射及其热流分析》，世界科学出版社，新加坡，2008年。3. 《调和映射与微分几何》，E. Loubeau、S. Montaldo（编），当代数学，第542卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2011年。4. James Eells, Jr.、Joseph H. Sampson，《黎曼流形的调和映射》，《美国数学杂志》，第86卷，第1期，109–160页（1964年）。5. Shung Tung Yau、Richard Schoen，《调和映射与稳定超曲面的拓扑及具有非负里奇曲率的流形》，《瑞士数学评论》，第51卷，333–342页（1976年）。6. Kentaro Yano、Shigeru Ishihara，《调和与相对论仿射映射》，《微分几何杂志》，第10卷，501–509页（1975年）。7. Sergey Stepanov、Irina Tsyganok，《调和映射到非负曲率流形的消失定理及其应用》，《数学手稿》，第154卷，79–90页（2017年）。8. Grisha Perelman，《Cheeger和Gromol灵魂猜想的证明》，《微分几何杂志》，第40卷，第1期，209–212页（1994年）。