arXiv:2603.01821v1 [q-fin.RM] 2 Mar 2026

从属化 Cram´er-Lundberg 模型中破产概率的渐近性*

Jonathan Klinge[1] 和 Maren Diane Schmeck[2]

[1,2]数学经济学中心，比勒费尔德大学

2026年3月3日

摘要

我们研究一个非寿险保险组合的动态模型。该模型以复合泊松过程为基础，用以表示保险人的索赔情况。为了引入成簇出现的索赔（例如由灾难性事件引发的索赔），我们通过一个 L´évy 从属过程对该过程进行时间变换。该从属过程的选取方式使其平均演化速度与日历时间相同，从而形成强度与严重程度之间的权衡。我们证明，这种变换总会对破产概率产生负面影响。尽管预期总索赔金额保持不变，但结果表明，破产概率随初始资本增加而下降的速度，可以因从属过程的选择而任意缓慢。

关键词： Cram´er-Lundberg 模型、破产理论、从属化、次指数分布、正则变差
JEL 分类： G22、G33、Q54

谨此感谢德国研究联合会（DFG） [RTG 2865/1 – 492988838] 提供的财政支持。作者感谢 Alfred M¨uller、Matthias Scherer 和 Hanspeter Schmidli 提供的宝贵意见和富有成效的讨论。

1 引言

如今，保险公司面临着各种各样需要恰当建模的风险。一方面，有个体风险及其相关的个体损失，例如，发生事故时机动车辆综合保险所承保的车辆损坏。另一方面，还有冰雹、风暴或地震等自然灾害。在这些情况下，保险人记录的是由许多同时发生的个体索赔所造成的累积损失（例如，冰雹一次损坏大量车辆）。由于气候变化，自然灾难及其财务后果日益受到重视，因此，对累积风险进行建模比以往任何时候都更加重要。

自然灾害造成的累积损失会对保险人的破产概率产生重大影响，因为这些损失在同一时点发生，而非像通常相互独立的个体损失那样分散在保险合同期限内。这种风险的大小不仅取决于气候条件，也取决于保险人的风险暴露集中度。对自然灾害风险暴露较高和/或地域集中度较强的保险组合，面临更高的累积风险。

本文构建了一个模型，用以刻画累积损失对破产概率的影响。我们考虑一个描述保险人损失端的复合泊松过程，并引入一个 L´évy 从属过程，对该过程进行随机时间变换。此时间变换使基础过程能够“跳过”某些时段，因此，在普通时间尺度下属于个体损失的事件，可能会在经过时间变换的过程中聚集成一笔巨额总损失。因此，从属损失过程表现出个体索赔的随机聚集效应。该模型扩展了 Selch和Scherer (2018) 的研究，但我们关注的是不同的应用。L´évy 过程从属化理论由 Bochner (1949)、Bochner (1955) 提出并加以研究，之后又得到进一步发展。关于从属化理论的丰富资料，例如可参见 Sato (1999)、Cont and Tankov (2003) 和 Applebaum (2009)。具体而言，Di Crescenzo 等人 (2015) 以及 Sengar 等人 (2020年) 研究了复合泊松过程的从属化。

我们模型中随机时间变化的经济解释十分直观：从属过程发生一次大跳跃，对应于一次重大灾难的发生

事件。为确保从属过程与原始复合泊松过程具有可比性，我们要求从属过程的平均运行速度与日历时间相同。因此，复合泊松过程的期望值在从属化后保持不变。从属化因此纯粹是对索赔到达时间进行随机扭曲。从数学上说，时间归一化会在跳跃强度和跳跃大小之间引入一种权衡，使期望值保持不变。此外，我们证明，从属化总会以随机占优的意义增大复合泊松过程的跳跃大小分布；同时，通过单个跳跃的聚集效应，从属化能够将轻尾跳跃分布转变为重尾分布。关于重尾分布及其子类的详细讨论，可参阅 Bingham 等人（1989）、Foss 等人（2011）以及 Embrechts 等人（2013）等文献。

本文的组织结构如下。首先，我们证明从属化的复合泊松过程仍然是一个具有修正强度和跳跃分布的复合泊松过程。我们推导出修正跳跃分布具有轻尾的条件，从而可以应用经典的 Cram´er-Lundberg 论证。然而，我们证明修正跳跃分布始终在一阶随机占优意义下占优于原始分布。在轻尾情形下，我们通过调节系数证明，从属化会使破产概率渐近增大。

随后，我们转向重尾情形，并确定修正跳跃分布变为重尾的条件。我们的分析聚焦于次指数分布，尤其是具有正则变化尾的分布，并推导出从属过程继承这些尾部性质的条件。

如上所述，有若干文献探讨了 Lévy 过程的从属化，尤其是精算领域的相关文献。该领域较新的研究例如 Zhang和Brockett（2020），其研究联合生命保险产品的估值，并通过随机相依从属子对死亡率相依性建模。破产理论和 Cram´er-Lundberg 模型的重要文献包括 Rolski 等人（2009）、Asmussen和Albrecher（2010）以及 Schmidli（2017）。

尽管破产理论是一门历史悠久的学科，可追溯至 Lundberg（1903），但它仍是当代研究的活跃领域。近期研究成果包括 Albrecher等人（2025年）、Locas和Renaud（2025年）、Cheung和Zhu（2023）、Li和Zhou（2024）、Lindskog和W¨uthrich（2025年）以及 Zhu（2025年）。Albrecher等人（2025年）讨论了在破产概率保持足够低的条件下的最优分红问题。Locas和Renaud（2025年）、Cheung和Zhu（2023）以及 Li和Zhou（2024）讨论了一种弱化的破产概念，即巴黎型破产：只有当盈余过程在足够长的一段时间内为负时，才会发生破产。这一破产概念在 Cram´er-Lundberg 模型和 Sparre Andersen模型中均有分析。Lindskog和W¨uthrich（2025年）分析了一个带有积压的索赔准备金问题，而 Zhu（2025年）则探讨了相依性下的破产理论。关于 Cram´er-Lundberg 模型的近期研究，还应提及 Averhoff和Thøgersen（2025年）。该研究考虑了带有未知参数的 Cram´er-Lundberg 模型。Braunsteins和Mandjes（2023）分析了一个被保险人人数并非固定的 Cram´er-Lundberg 模型，其中每位客户都有一定的进入率和随机的停留时长。专门研究自然灾害和巨灾债券的论文包括 Faias和Guedes（2020年）、Colaneri和Frey（2021）、Baradel（2024）以及 Liu（2025年）。

2 从属复合泊松过程

2.1 模型

我们考虑以下模型。设 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}, \mathbb{P})$ 为一个滤过概率空间。设 $(N_t)_{t\geq 0}$ 是强度为 λ 的标准泊松过程。索赔额 X_i （$i \in \mathbb{N}$）是独立同分布的正随机变量。

考虑复合泊松过程

$$C_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i,$$

其 Lévy 测度为 ν_C，分布为 μ^t：在时刻 $t \geq 0$ 的$= \mathcal{L}(C_t|\mathbb{P})$。此外，我们定义一个独立的一维 Lévy 从属过程 $(\Lambda_t)_t$，它定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}, \mathbb{P})$ 上，Lévy 三元组为 $(0, \nu_\Lambda, b_\Lambda)$。利用这些要素，我们定义本文分析的主要对象 —— 从属复合泊松过程

$$Y_t := C_{\Lambda_t} = \sum_{i=1}^{N_{\Lambda_t}} X_i, \quad t \geq 0. \tag{1}$$

下图（图 1）对从属过程提供了经济解释。由于随机时间变换，尤其是由于从属过程可能发生跳跃，多个个体理赔会聚集成 $(Y_t)_{t\geq 0}$ 的一次累积跳跃。此类跳跃可以解释为自然灾害类索赔，代表许多潜在损失的随机总和。虚线描述了从属过程引起的时间跳跃。

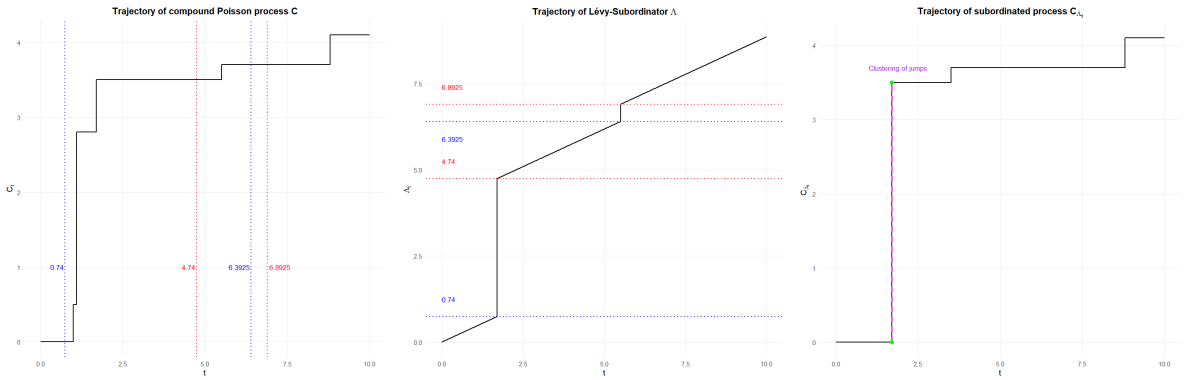

图 1：由带漂移复合泊松过程从属化的从属复合泊松过程的轨道

应注意，$(Y_t)_{t\geq 0}$ 不一定适应于滤子 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$。因此，我们定义滤子 $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0} := (\mathcal{F}_{\Lambda_t})_{t\geq 0}$，以确保对于每个 $t \in [0,\infty)$，Y_t 都是 $\mathcal{G}_t$-可测的。

本文将研究范围限定于满足时间归一化条件 $\mathbb{E}[\Lambda_t] = t$ 的 L´évy 从属过程，或等价地满足 $\mathbb{E}[\Lambda_1] = 1$ 的从属过程。提出这一条件的动机是，它确保了

$$\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[C_t], \quad t \geq 0,$$

这可通过条件化立即得出。因此，从属模型仍可与基准模型直接比较。

首先，我们回顾 L´évy 从属过程 Λ 的拉普拉斯变换。对于任意 L´évy 从属过程，以及任意 $t \geq 0$，均有

$$\mathcal{L}[\Lambda_t](u) := \mathbb{E}[e^{-u\Lambda_t}] = e^{-t\psi_\Lambda(u)}, \tag{2}$$

其中，拉普拉斯指数为

$$\psi_\Lambda(u) = b_\Lambda u + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-ux})\nu_\Lambda(dx), \quad u \geq 0, \tag{3}$$

对于漂移 b_Λ 和 L´évy 测度 ν_Λ；例如参见 Bertoin（1996）。
摘自佐藤（1 999) 已知如上所定义的 Y仍是一个L´evy过程。事实上 t

下面我们证明， Y 甚至是一个复合泊松过程，其强度与跳跃大小分布均可显式得知。由于我们未能在文献中找到与本文所需简洁程度相匹配的该结果表述，故在此连同详细证明一并给出。该结果对于本文所展开的论证具有根本重要性。

定理 1. 由（*1*）定义的过程 $(Y_t)_{t\geq 0} := (C_{\Lambda_t})_{t\geq 0}$具有复合泊松表示，其强度为 $\psi_\Lambda(\lambda)$ ，Λ 的拉普拉斯指数为 ψ_Λ ，跳跃大小分布为

$$\frac{\nu_Y(dx)}{\psi_\Lambda(\lambda)}, \tag{4}$$

其中， ν_Y 是 Y的列维测度，由下式给出：

$$\nu_Y(dx) = b_\Lambda \nu_C(dx) + \int_{(0,\infty)} \mu^t(dx)\nu_\Lambda(dt). \tag{5}$$

证明. 根据 Selch and Scherer (2018) 中的引理 2.2，我们知道 Y 是列维从属过程，其特征为

1. $b_Y = b_\Lambda b_C$
2. $\nu_Y(B) = b_\Lambda \nu_C(B) + \int_{(0,\infty)} \mu^t(B)\nu_\Lambda(dt) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$.

这里，对于每个 $t \geq 0$， $\mu^t := \mathcal{L}(C_t|\mathbb{P})$。量 b_Λ、 b_Y 和 b_C 分别表示 Λ、 Y 和 C 的漂移，而 ν_Λ、 ν_Y 和 ν_C 表示它们的列维测度。由于 C 是复合泊松过程，我们知道 $b_C = 0$，因此 $b_Y = 0$。于是，从属过程 Y 的特征指数为

$$\Psi_Y(u) = \int_0^\infty \left(e^{iux} - 1\right) \nu_Y(dx).$$

为了证明 Y 是复合泊松过程，我们必须证明测度 ν_Y 是有限的。我们得到

$$\int_{(0,\infty)} \nu_Y(dx) = \nu_Y((0,\infty)) = b_\Lambda \nu_C((0,\infty)) + \int_{(0,\infty)} \mu^t((0,\infty))\nu_\Lambda(dt).$$

加法的第一部分很直接，因为 X_1 为正，而 ν_C 是复合泊松过程 C的 L´évy 测度，其定义为 $\nu_C(S) = \lambda\mathbb{P}[X_1 \in S]$ ，其中

对每个 $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ 都成立。将其与求和的第二部分结合，得到

$$\int_{(0,\infty)} \nu_Y(dx) = b_\Lambda \lambda + \int_0^\infty \mathbb{P}[C_s > 0]\nu_\Lambda(ds) = b_\Lambda \lambda + \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda s})\nu_\Lambda(ds) < \infty.$$

有限性可由不等式 $1 - e^{-\lambda s} \leq \min\{\lambda s, 1\}$ 得出，该不等式对所有 $s \geq 0$ 都成立。由于 Λ 是一个 Lévy 从属过程，因此该不等式关于 ν_Λ 可积。此外，通过计算可知

$$\int_{(0,\infty)} \nu_Y(dx) = \psi_\Lambda(\lambda),$$

其中， ψ_Λ 是 Λ 的拉普拉斯指数，如式 (3) 所定义。
T因此，通过对 ν_Y 进行归一化，我们得到 Y 具有特征指数 t

$$\Psi_Y(u) = \psi_\Lambda(\lambda) \int_{(0,\infty)} (e^{iux} - 1) \frac{\nu_Y}{\psi_\Lambda(\lambda)}(dx),$$

这证明 Y 是一个复合泊松过程，其特征如定理中所述。

□

定理 1 表明，对复合泊松过程进行从属化后，得到的仍是复合泊松过程。此外，该定理还给出了复合泊松过程 Y 的强度和严重度分布，这些信息可直接从其特征指数中读出。

为进一步分析，我们写作

$$Y_t := \sum_{i=1}^{N_{\Lambda_t}} X_i \overset{\mathcal{L}}{=} \sum_{j=1}^{\tilde{N}_t} Z_j, \quad \forall t > 0, \tag{6}$$

˜其中， N 是强度为 $\psi_\Lambda(\lambda)$的标准泊松过程，且对于每个$j \in \mathbb{N}$，它都独立于 Z_j。随机变量$(Z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 相互独立且同分布， Z_1 的分布由（4）给出。此外， ψ_Λ 的定义与（3）相同。为简化记号，我们定义 $X \sim X_1$ ，并用 X 代替 X_1 ，表示 X_1的一个独立副本。类似地，我们定义 $Z \sim Z_1$ ，并用 Z 代替 Z_1 ，表示 Z_1的一个独立副本 Z。根据（4）和（5）的定义， Z的分布可以解释为 X 的单个跳跃与簇集跳跃的混合分布。因此，（5）中的第一项表示单个跳跃，其分布与 X相同，而

后半部分表示通过从属化而聚集的跳跃，因为只有在 Λ发生跳跃时才会出现聚集效应。

由于 Z 的分布和复合泊松分布 μ^t的结构并非显式形式，因此能明确给出 Z 分布的例子很少。下面是一个非常简单的例子。

例 1. 定义

$$\Lambda_t := \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}K_t,$$

其中 $(K_t)_t$ 是强度为1的标准泊松过程。显然， Λ 是时间归一化的。将 Z 的分布记为 P_Z，容易计算得出，对于任意$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$，

$$\psi_\Lambda(\lambda) P_Z(B) = \frac{1}{2}\lambda \mathbb{P}[X \in B] + \mu^{\frac{1}{2}}(B), \tag{7}$$

如本例所示， $\nu_\Lambda(dt) = \mathbb{1}_{\frac{1}{2}}(dt)$，这大大简化了(5)中的积分。上式中， $\psi_\Lambda(\lambda) = 1 + \frac{\lambda}{2} - \exp(-\frac{\lambda}{2})$。(7)展示了$Z$分布的结构。如果从属过程没有跳跃，那么跳跃高度服从 X，强度为 $\frac{1}{2}\lambda$。另一方面，如果从属过程发生跳跃，在本例中，其跳跃高度为 $1/2$。这意味着时间跳跃 $1/2$的距离，因此聚集跳跃高度服从 $\mu^{\frac{1}{2}}$，平均每单位时间发生一次。因此， Z 的分布可以解释为聚集跳跃高度与原始跳跃高度的混合分布。

2.2 从属跳跃大小的随机占优

从直观上看，可以预期索赔 Z 在某种意义上大于索赔X，因为 Z 可能涉及基础过程中的若干较小损失聚集在一起。我们将在以下定理中证明这一点。

定理 2。

$$X \prec_{st} Z,$$

其中， $\prec_{st}$ 表示一阶随机占优。

证明。 设 $y > 0$，则

$$\mathbb{P}[Z > y] \overset{(4)}{=} \frac{\nu_Y((y,\infty))}{\psi_\Lambda(\lambda)} = \frac{b_\Lambda \nu_C((y,\infty)) + \int_{(0,\infty)} \mu^t((y,\infty))\nu_\Lambda(dt)}{\psi_\Lambda(\lambda)}.$$

由于 C 是复合泊松过程，其强度为 λ,

$$\mathbb{P}[Z > y] = \frac{b_\Lambda \lambda \mathbb{P}[X > y] + \int_{(0,\infty)} \mu^t((y,\infty))\nu_\Lambda(dt)}{\psi_\Lambda(\lambda)}$$

$$= \frac{b_\Lambda \lambda \mathbb{P}[X > y] + \int_{(0,\infty)} \mathbb{P}[\sum_{j=1}^{N_t} X_j > y]\nu_\Lambda(dt)}{\psi_\Lambda(\lambda)}.$$

显然，对于任意 $t \geq 0$, $\{N_t \neq 0, X_1 > y\} \subset \{\sum_{j=1}^{N_t} X_j > y\}$。因此我们得到

$$\mathbb{P}[Z > y] \geq \frac{b_\Lambda \lambda \mathbb{P}[X > y] + \int_{(0,\infty)} \mathbb{P}[N_t \neq 0]\mathbb{P}[X > y]\nu_\Lambda(dt)}{\psi_\Lambda(\lambda)}$$

$$= \frac{b_\Lambda \lambda \mathbb{P}[X > y] + \mathbb{P}[X > y] \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\lambda t})\nu_\Lambda(dt)}{\psi_\Lambda(\lambda)}.$$

根据拉普拉斯指数的定义，我们知道

$$= \frac{b_\Lambda \lambda \mathbb{P}[X > y] + \mathbb{P}[X > y](\psi_\Lambda(\lambda) - b_\Lambda \lambda)}{\psi_\Lambda(\lambda)} = \mathbb{P}[X > y],$$

这就给出了结论 $X \prec_{st} Z$。 □

如果跳跃大小 X 服从重尾分布，那么前一个证明中使用的不等式限制性很强，因为在这种情况下，数值 C_t 通常是由一次大跳跃触发的。

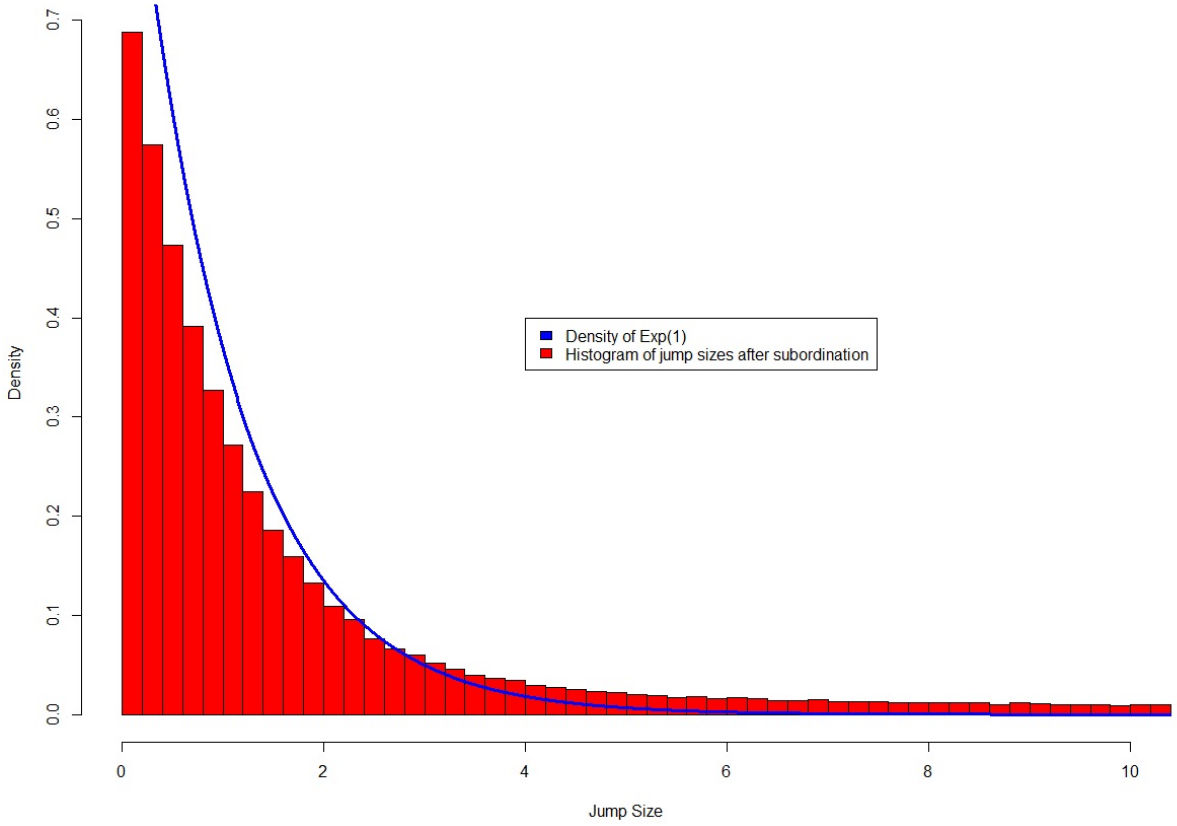

图2：从属化后的跳跃大小分布

图2展示了从属复合泊松过程的跳跃大小分布。基础过程的强度为 $\lambda = 1$，跳跃大小服从指数分布$X_i \sim Exp(1)$，其中所有 $i \in \mathbb{N}$均成立。L´évy 从属过程也是一个复合泊松过程，其漂移为 $b_\Lambda = 0.2$、强度为 $\lambda_\Lambda = 0.08$ ，跳跃大小服从 $Exp(0.1)$分布。由于从属过程允许出现大跳跃，基础过程中跳跃的聚集效应非常强。因此，比较基础过程与从属过程的跳跃大小分布，可以看到从属化使概率质量向尾部转移。

一阶随机占优还可以直接得出关于风险度量行为的结论。正如 B¨auerle 和 M¨uller（2006）所示，一阶随机占优意味着

$$\rho(Z) \geq \rho(X)$$

对于每一种单调且分布不变的风险度量 ρ。

因此，在大多数相关风险度量下都可以观察到风险上升。另一方面，新过程的强度降低了。这种相互作用将在后文分析。

2.3 Z的重尾性与轻尾性

接下来，我们希望更深入地了解 Z 的分布，以及从属化到$(C_t)_{t\geq 0}$所产生的影响。我们的目标是了解 Z的尾部行为，并推导出使跳跃大小 Z 具有轻尾分布的条件。首先，我们计算 Y_t 的拉普拉斯变换，对所有 $t > 0$均成立。由于 Y 是一个 L´évy 过程，只需计算 Y_1的拉普拉斯变换，即可完全刻画整个过程 Y的拉普拉斯变换。

引理 1. Y_1 的拉普拉斯变换Ψ_{Y_1} 为

$$\Psi_{Y_1}(u) = \exp(-\psi_\Lambda(\lambda[1 - \Psi_X(u)])), \quad u \geq 0$$

其中， ψ_Λ 定义如式 *(2)*， Ψ_X 是跳跃大小 X的拉普拉斯变换。

证明. 将 σ-代数 $\sigma(\Lambda_t, t \geq 0)$记为 $\sigma(\Lambda)$。对所有 $u \geq 0$

$$\Psi_{Y_1}(u) = \mathbb{E}[\exp(-uC_{\Lambda_1})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\exp(-uC_{\Lambda_1})|\sigma(\Lambda)]] = \mathbb{E}[\exp(\lambda\Lambda_1[\Psi_X(u) - 1])], \qquad (8)$$

其中， $\Psi_X(u) := \mathbb{E}[\exp(-uX)]$。注意到，对所有 $u \geq 0$， $\lambda[\Psi_X(u) - 1] \leq 0$，因此将式 (8) 写为

$$= \exp(-\psi_\Lambda(\lambda[1 - \Psi_X(u)])).$$

□

由于 Y 是一个 L´év y 过程，我们可以立即得出结论，对于任意 $t > 0$

$$\Psi_{Y_t}(u) = \exp(-t\psi_\Lambda(\lambda[1 - \Psi_X(u)])), \quad \forall u > 0.$$

正如本节引言中已经提到的，我们希望分别分析 Y_1 和 Z 的尾部行为。判断给定分布是否具有重尾的一个常见定义是：在某个点 $u > 0$处矩母函数不存在。换言之，重尾的存在被定义为以下函数发散：

在某个点 $u < 0$处的拉普拉斯变换。Selch and Scherer (2018)也采用了这一重尾性定义，例如 Foss 等人（2011）的定义 2.2 中也给出了该定义。

定义 1. 若分布 F 在 $\mathbb{R}$上满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ux} F(dx) = \infty, \quad \forall u > 0.$$

也就是说，若 F 不存在任何正指数矩。

本文中，只要有定义，我们便将式 (3) 中定义的拉普拉斯指数延拓至负参数。在这种情况下，在负值处取拉普拉斯指数对应于考虑指数矩，即矩母函数。现在我们给出判定 Y_1 分布是否为重尾的准则。

引理 2. Y_1 的分布是重尾的，当且仅当 Λ_1 或 X 的分布是重尾的。

证明. 令 $u > 0$。若矩母函数 M_{Y_1} 存在，则可由 Y_1 的拉普拉斯变换推导出 Y_1 的矩母函数:

$$M_{Y_1}(u) = \exp(-\psi_\Lambda(\lambda[1 - M_X(u)])), \tag{9}$$

其中 M_X 是 X的矩母函数。对于 $u > 0$， $\lambda[1 - M_X(u)]$ 满射到 $(-\infty, 0)$，因此若 Λ_1 的分布是重尾的，即对每个 $x < 0$， $\psi_\Lambda(x) = -\infty$ ，则可推出对任意 $u > 0$， $M_{Y_1}(u) = \infty$ ，这表明 Y_1 是重尾的。

另一方面，令 $u > 0$，由（9）可立即得出，若 X 服从重尾分布，则对于任意 $u > 0$ ，$M_X(u) = \infty$ ，因此 $M_{Y_1}(u) = \infty$，这意味着 Y_1 是重尾的。

定理的另一个方向可以通过非常相似的论证得出。假设对每个 $u > 0$，都有$M_{Y_1}(u) = \infty$。这意味着对每个 $u > 0$，都有 $-\psi_\Lambda(\lambda[1 - M_X(u)]) = \infty$。这种情况有两种可能。第一种是对每个 $u < 0$，都有 $\psi_\Lambda(u) = -\infty$，这意味着对每个 $u < 0$，都有 $\mathbb{E}[e^{-u\Lambda_1}] = \infty$ ，因此 Λ_1 具有重尾分布。第二种可能是对任意 $u > 0$，都有 $\lambda[1 - M_X(u)] = -\infty$ ，这立即意味着，对每个 $u > 0$ ，都有 $M_X(u) = \infty$ ，因此 X 具有重尾分布。证明至此完成。

□

前面的证明与 Selch and Scherer (2018) 中命题2.2的证明类似。由于 Y 是一个 L´ évy 过程，前述引理的结论可推广到所有 $t \in \mathbb{R}$。根据上一节的定理，我们知道，从属过程 $(Y_t)_t := (\sum_{k=1}^{N_{\Lambda_t}} X_k)_t$ 具有复合泊松表示

$$Y_t \sim \sum_{j=1}^{\tilde{N}_t} Z_j.$$

因此，根据前面的引理， Z 具有重尾分布，当且仅当 X 或 Λ_1 具有重尾分布；这一点可通过与前文证明中相同的标准论证得出。此外，根据上一节的结果，我们有

$$Z \sim \frac{\nu_Y}{\psi_\Lambda(\lambda)}, \tag{10}$$

其中 ν_Y 如式（5）所示。

3 从属模型中的调节系数：轻尾跳跃幅度

在风险理论中，当复合泊松过程的跳跃具有轻尾时，调节系数便成为量化破产概率的关键参数。我们通过以下方式定义从属 Cram´er-Lundberg 模型：

$$P_t := u + ct - Y_t, \quad t \geq 0. \tag{11}$$

如上所示，$(Y_t)_{t\geq 0}$ 仍然是一个复合泊松过程，因此从属 Cram´er-Lundberg 模型与标准 Cram´er-Lundberg 模型具有相同的结构。在式（11）中， u表示初始资本， c 表示保费率，而 Y_t 刻画保险人的索赔端。

在全文中，我们假设保费率 c 满足净利润条件，即

$c > \mathbb{E}[Y_1] = \psi_\Lambda(\lambda)\mathbb{E}[Z] = \lambda\mathbb{E}[X_1]$ （参见，例如，Schmidli（2017））。请注意，净利润条件仅取决于 Y_t的期望。因此，它保持不变

在相对于时间归一化次 subordinators的从属化下。这意味着保险人的公平保费不受从属化的影响。
本文主要关注盈余过程 $(P_t)_{t\geq 0}$ 的破产概率量化问题。形式上，这意味着量化退出概率

$$\Psi_P(u) := \mathbb{P}\left[\inf_{t>0} P_t < 0 | P_0 = u\right].$$

为证明本节的主要结果，我们需要以下引理，它表明时间归一化的 L´évy 从属过程的拉普拉斯指数始终位于角平分线下方。

引理 3. 设 $(\Lambda_t)_t$ 为时间归一化的 *L´évy* 从属过程（即，$\mathbb{E}[\Lambda_1] = 1$），则$\psi_\Lambda(u) \leq u$ 对任意 $u \in \mathbb{R}_+$ 均成立。此外，若 $\psi_\Lambda(-s)$ 对 $s > 0$ 存在，则 $\psi_\Lambda(-s) \leq -s$ 也存在。

证明。 设 $(\Lambda_t)_t$ 为时间归一化的 L´évy 从属过程，则 Λ 的拉普拉斯指数为

$$\psi_\Lambda(u) = b_\Lambda u + \int_0^\infty (1 - e^{-ux})\nu_\Lambda(dx).$$

根据时间归一化条件 $\mathbb{E}[\Lambda_1] = 1$，有

$$1 = b_\Lambda + \int_0^\infty x\nu_\Lambda(dx).$$

因此，对于 $u \geq 0$，我们得到

$$\psi_\Lambda(u) = b_\Lambda u + \int_0^\infty (1 - e^{-ux})\nu_\Lambda(dx) \leq b_\Lambda u + \int_0^\infty ux\nu(dx) = u\left(b_\Lambda + \int_0^\infty x\nu_\Lambda(dx)\right) = u.$$

假设对于 $s > 0$， $\psi_\Lambda(-s)$ 存在，那么我们可以执行相同的步骤，证明 $\psi_\Lambda(-s) \leq -s$，由此得证。 □

前一个引理证实了人们的预期。众所周知，从属过程 Y 具有强度为 $\psi_\Lambda(\lambda)$ 的复合泊松表示，其中 λ 是基础过程 C的强度。因此，该引理意味着， Y 的强度比 C的强度˜低，即 $\mathbb{E}[N_1] \leq \mathbb{E}[N_1]$，这是从属过程中聚集效应的结果。此外，该引理对接下来的定理也会有所帮助。

我们考虑 Cram´er-Lundberg 过程 $(P_t)_{t\geq 0}$，如 (11) 中所述，并将 P 与初始风险模型进行比较

$$S_t := u + ct - \sum_{k=1}^{N_t} X_k = u + ct - C_t.$$

此处，Λ 的时间归一化在比较 P 与 S时起着关键作用，因为在时间归一化从属下，预期总索赔金额保持不变。

对于轻尾跳跃大小的情形，经典的 Cram´er-Lundberg 理论适用（参见 Schmidli（2017）第 5.5 节和第 5.6 节）。现在假设 X和 Λ_1 的矩母函数在足够大的定义域上存在。根据引理 2，因此可以应用标准的 Cram´er-Lundberg 理论。设 M_X 和 M_Z 分别为 X 和 Z的矩母函数。我们用 R 表示下式的非平凡解

$$\Theta(r) = \lambda\left(M_X(r) - 1\right) - cr = 0 \tag{12}$$

并用 R_Λ 表示下式的非平凡解

$$\Theta_\Lambda(r) = \psi_\Lambda(\lambda)(M_Z(r) - 1) - cr = 0. \tag{13}$$

Θ 和 Θ_Λ 分别是相应 Cram´er-Lundberg 过程的所谓调整函数。显然，当 $r = 0$时，平凡解为 R和 R_Λ。假设调整系数 R和 R_Λ存在，且 $M'_X(R)$ $M'_Z(R_\Lambda) < \infty$，根据 Schmidli（2017）中的定理 5.5，我们知道 S 和 P 的破产概率 Ψ_S 和 Ψ_P 具有如下渐近形式

$$\Psi_S(u) \sim \frac{c - \lambda\mathbb{E}[X]}{\lambda M'_X(R) - c} e^{-Ru}; \quad \Psi_P(u) \sim \frac{c - \lambda\mathbb{E}[X]}{\psi_\Lambda(\lambda) M'_Z(R_\Lambda) - c} e^{-R_\Lambda u}, \quad u \to \infty, \tag{14}$$

其中 u 是投资组合中的初始资本。我们提出以下结论。

引理 4. 假设 X 的矩母函数在 $[0, x)$上存在。此外，Λ_1 的矩母函数在 $[0, l)$上存在，则 Z 的矩母函数在 $[0, x \wedge (\lambda[M_X(x) - 1] \wedge l))$ 上存在，且由下式给出

$$M_Z(r) = 1 - \frac{\psi_\Lambda\left(\lambda[1 - M_X(r)]\right)}{\psi_\Lambda(\lambda)}.$$

证明。其存在性可由引理 2 立即得出。由引理 1 可推得，

Y_1 的矩母函数为

$$M_{Y_1}(r) = \exp(-\psi_\Lambda(\lambda[1 - M_X(r)])).$$

另一方面，根据 Y 的复合泊松表示，我们知道

$$M_{Y_1}(r) = \exp\left(\psi_\Lambda(\lambda)[M_Z(r) - 1]\right).$$

如果矩母函数在 0 的某个邻域内存在，它就能唯一确定分布。因此，我们可以结合这两个方程得出

$$M_Z(r) = 1 - \frac{\psi_\Lambda(\lambda[1 - M_X(r)])}{\psi_\Lambda(\lambda)}. \tag{15}$$

区间 $[0, x \wedge (\lambda[M_X(x) - 1] \wedge l))$ 上的限制由 (15) 得出。 □

现在我们可以证明轻尾情形下的以下结论。根据以下结果，我们可以明确推导出破产概率的渐近行为。

定理3. 假设 R 的调节系数$(S_t)_{t\geq 0}$ 存在。设 Λ 是一个时间归一化的 *L´évy* 从属过程，使得$(P_t)_{t\geq 0}$ 的调节系数 R_Λ 存在。那么

$$R_\Lambda \leq R.$$

证明。 根据 (12)， R 的调节方程为

$$\Theta(r) = \lambda(M_X(r) - 1) - cr = 0.$$

根据前述 引理和（13），与 P 相关的调整方程为

$$\Theta_\Lambda(r) = -\psi_\Lambda(\lambda[1 - M_X(r)]) - cr = 0.$$

由引理 3 可得，

$$\Theta_\Lambda(r) = -\psi_\Lambda(\lambda[1 - M_X(r)]) - cr \geq -\lambda(1 - M_X(r)) - cr = \lambda(M_X(r) - 1) - cr = \Theta(r).$$

成立： $\Theta(0) = \Theta_\Lambda(0) = 0$。此外，由于调节系数的存在，

$\Theta(R) = \Theta_\Lambda(R_\Lambda) = 0$。根据 Θ的凸性以及 Θ_Λ （例如参见 Schmidli（2017）），可得 $R_\Lambda \leq R$ ，除非 Λ 是确定性的，否则不等式为严格不等式。 □

该定理表明，在从属模型中，破产概率 $\Psi_P(u)$ 随初始资本增加而衰减的速度，始终慢于初始模型中的破产概率 $\Psi_S(u)$。这里的时间归一化对于确保这两个模型的可比性至关重要，因为它保留了两个过程的期望值。

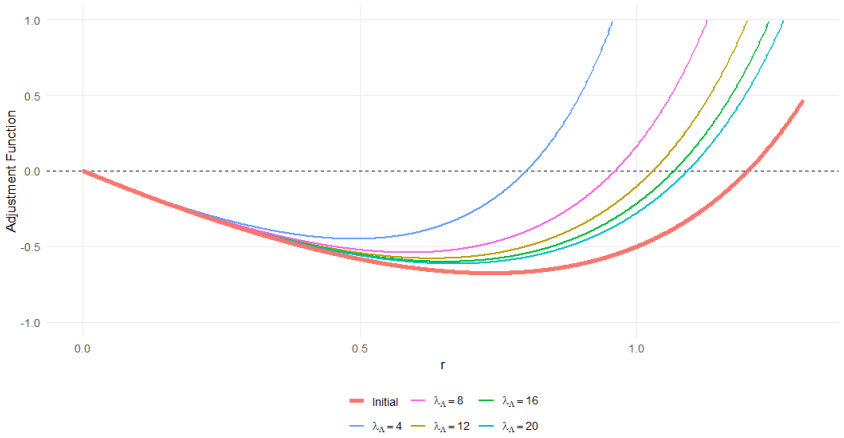

图3：不同从属过程对应的调整函数

图3展示了各种时间归一化从属过程的调整函数。我们选择强度为 $\lambda = 2$ 、跳跃高度服从指数分布的基础复合泊松过程 $X_i \sim Exp(2)$。保费率设为 $c = 2.5$，显然满足净利润条件。所有考察的从属过程都是强度不同的复合泊松过程 λ_Λ。为简便起见，从属过程中的跳跃大小也选择为指数分布。由于进行了时间归一化，从属过程中指数分布跳跃高度的参数也因此为 λ_Λ 。如前述定理所示，从属化后调整函数的非平凡零点位于基础过程相应零点的左侧。这意味着，从属模型中的破产概率衰减速度明显慢于初始模型中的破产概率衰减速度（参见 (14)）。

4 渐近破产概率：重尾跳跃大小

下一节将讨论从属过程的跳跃大小分布为重尾的情形。如定理 2 所述，若初始跳跃大小分布为重尾，或者从属过程具有重尾无限可分分布，就会出现这种情形。本章主要关注次指数分布这一类。次指数性的一项优势是，在某些情况下仍能很好地量化破产概率的渐近行为。我们尤其关注具有正则变差尾部的分布；对于这类分布，卡拉马塔定理可以给出破产概率的显式渐近式。在此情形下，经典的 Cramér-Lundberg 理论不再适用，因为跳跃高度不具有指数矩，因此矩母函数也未定义。

我们首先回顾本节中通篇使用的一些基本定义。对于任意累积分布函数 G with $G(0) = 0$，我们将其右尾记为 $\overline{G}$；对于 $n \in \mathbb{N}$，我们将 G^{*n} 记为 G的 n 重卷积。

4.1 预备定义

定义 2. 一个分布 F 具有支撑集 $(0, \infty)$ 称为次指数的，如果对所有$n \geq 2$,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} = n.$$

我们用 $\mathcal{S}$ 表示次指数分布类。

本章的另一个非常重要的定义如下。

定义 3. *1.* 若正的勒贝格可测函数 L 在$(0, \infty)$ 上满足以下条件，则称其缓慢变化（于 ∞）：

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L(t\,x)}{L(x)} = 1, \quad t > 0.$$

2. 若正的勒贝格可测函数 h 在$(0,\infty)$ 上满足以下条件，则称其正则变化（于 ∞），指数为 $\alpha \in \mathbb{R}$：

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h(t\,x)}{h(x)} \;=\; t^{\alpha}, \quad t>0.$$

显然，缓变函数的情形对应于指数为 $\alpha = 0$的正则变函数。下文中， Λ_1 的累积分布函数记为 F_{Λ_1} ，类似地， X 的累积分布函数记为 F_X，其中 X 和 Λ_1 的定义同前。我们还将相应的右尾，即，记为 $\overline{F}_{\Lambda_1}$和 $\overline{F}_X$。

$$\overline{F}_{\Lambda_1}(x) := 1 - F_{\Lambda_1}(x), \quad \overline{F}_X(x) := 1 - F_X(x).$$

我们关注这样一类分布函数：其尾部 $F.$ 是指数为 $-\alpha < 0$的正则变函数。正如 Embrechts 等人（2013年）所示，具有这一性质的分布属于 $\mathcal{S}$类。下文中，如果函数 f 和 g满足，记 $f(x) \sim g(x)$为

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

4.2 次指数初始跳跃大小

首先，我们考虑从属过程具有轻尾分布且 X为次指数的情形。

定理 4。 设 Λ_1 为时间归一化的轻尾分布。此外， $\mathcal{L}(X|\mathbb{P}) \in \mathcal{S}$。则 $Z \in \mathcal{S}$ 并且

$$\mathbb{P}[Z>x] \sim \frac{\lambda}{\psi_\Lambda(\lambda)}\mathbb{P}[X>x].$$

证明。 令 $t>0, \varepsilon>0$。我们计算期望

$$\mathbb{E}[e^{\varepsilon N_{\Lambda_t}}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{\varepsilon N_{\Lambda_t}}|\sigma(\Lambda_t)]].$$

由于 N 是标准泊松过程，我们得到

$$= \mathbb{E}[e^{\lambda\Lambda_t(e^{\varepsilon}-1)}]. \tag{16}$$

由于对于任意 $t \geq 0$， Λ_t 都是轻尾的，因此我们可以选择足够小的 $\varepsilon > 0$ ，使得表达式 (16) 有限。因此，对于任意 $t \geq 0$， N_{Λ_t} 都是轻尾的。

根据 Schmidli (1999) 中的定理 1 可知，对于任意 $t > 0$，分布 $Y_t := \sum_{i=1}^{N_{\Lambda_t}} X_i$ 属于 $\mathcal{S}$。

此外，根据 Schmidli (1999)，对于 $x > 0$,

$$\mathbb{P}[Y_t > x] = \mathbb{P}[\sum_{i=1}^{N_{\Lambda_t}} X_i > x] \sim \lambda t \mathbb{P}[X > x]. \tag{17}$$

根据（6）以及 Embrechts 等人（2013）中的定理 A.3.19，还可推出

$$\frac{\mathbb{P}[Y_t > x]}{\mathbb{P}[Z > x]} \sim \psi_\Lambda(\lambda) t. \tag{18}$$

结合（17）和（18），我们得到

$$\mathbb{P}[Z > x] \sim \frac{\lambda}{\psi_\Lambda(\lambda)} \mathbb{P}[X > x]. \tag{19}$$

根据 $X \in \mathcal{S}$、（19）以及 Embrechts 等人（2013）中的引理 A3.15，可推出 $Z \in \mathcal{S}$，这证明了该结论。 □

方程（19）有一个非常自然的解释：平均而言，原复合泊松过程中跳跃大小为 X 的 $\psi_\Lambda^{\lambda}(\lambda)$ 个索赔会聚合为从属复合泊松过程中的一次跳跃，其跳跃大小为 Z。

4.3 正则变差从属过程

在本小节中，我们使用一个 Lévy 从属过程 Λ，使得 F_{Λ_1} 正则变差。由于时间归一化，正则变差尾部的指数 $-\rho$ 必须小于 -1，以确保 Λ_1 的期望值存在。我们给出如下表述。

定理 5. 设 Λ 为时间归一化的 *Lévy* 从属过程，且 F_{Λ_1} 以指数 $\overline{-\rho} < -1$正则变差，即 $F_{\Lambda_1}(x) \sim x^{-\rho} L(x)$，其中$\overline{L}$为某个缓变函数。此外，设$F_X(x) \in o(x^{-\rho} L(x))$，则 F_Z 以指数 $-\rho$正则变差。

证明。 对于 $x \in \mathbb{N}$，有

$$\mathbb{P}[N_{\Lambda_1} = x] = \int_0^\infty \mathbb{P}[N_r = x] dF_{\Lambda_1}(r) = \int_0^\infty \frac{(\lambda r)^x}{x!} e^{-\lambda r} dF_{\Lambda_1}(r).$$

代入 $z := \lambda r$，得到

$$= \int_0^\infty \frac{z^x}{x!} e^{-z} dF_{\Lambda_1}(\frac{z}{\lambda})$$

对任意 $x \in \mathbb{N}$ 均成立。因此， N_{Λ_1} 服从混合泊松分布。定义 $\mathcal{L}(z) := \lambda^\rho L(z)$，根据 L 的缓慢变化性

$$\overline{F_{\Lambda_1}}(\frac{z}{\lambda}) \sim z^{-\rho}\lambda^\rho L(\frac{z}{\lambda}) \sim z^{-\rho}\mathcal{L}(z), \quad z \to \infty.$$

由 Grandell (1997) 中的命题 8.4 和推论 8.5 可得

$$\mathbb{P}[N_{\Lambda_1} > z] \sim \overline{F_{\Lambda_1}}(\frac{z}{\lambda}) \sim z^{-\rho}\mathcal{L}(z), \quad z \to \infty.$$

由于 $\overline{F_X}(x) \in o(x^{-\rho}L(x))$，根据定义有

$$\lim_{x\to\infty} \overline{F_X}(x) x^\rho \frac{1}{L(x)} = 0.$$

此外，我们知道

$$\lim_{x\to\infty} \mathbb{P}[N_{\Lambda_1} > x] x^\rho \frac{1}{L(x)} = \lim_{x\to\infty} x^{-\rho}\mathcal{L}(x) x^\rho \frac{1}{L(x)} = \lambda^\rho.$$

根据 Stam (1973) 中的定理 1.3,

$$\lim_{z\to\infty} \mathbb{P}[Y_1 > z] z^\rho \frac{1}{L(z)} = (\lambda\mathbb{E}[X])^\rho,$$

这表明

$$\mathbb{P}[Y_1 > z] \sim (\lambda\mathbb{E}[X])^\rho z^{-\rho} L(z).$$

由 Embrechts 等人（2013年）的定理 A3.19 可得,

$$\overline{F_Z}(x) \sim \frac{1}{\psi_\Lambda(\lambda)} (\lambda\mathbb{E}[X])^\rho z^{-\rho} L(z).$$

□

在 Cram´er-Lundberg 模型和破产概率的背景下，索赔额分布具有正则变化尾的情形非常容易处理。应用 Karamata´s 定理，可以显式地得到破产概率的渐近行为。

推论1. 设 Λ 为时间归一化的 *L´évy* 从属过程，使得 $F_{\Lambda_1}(x) \sim \overline{x^{-\rho}}L(x)$，其中 L 为缓变函数，且 $-\rho < -1$。此外，$F_X(x) \in o(x^{-\rho}\overline{L(x)})$。考虑从属 *Cramér-Lundberg* 过程

$$P_t = u + ct - \sum_{k=1}^{N_{\Lambda_t}} X_k,$$

那么，P_t 的破产概率渐近地表示为

$$\Psi_P(u) \sim \frac{1}{c - \lambda\mathbb{E}[X]} \frac{1}{\rho - 1} (\lambda\mathbb{E}[X])^{\rho} u^{-\rho+1} L(u), \quad u \to \infty.$$

证明。由于 $\overline{F_{\Lambda_1}}$ 是指数为 $-\rho < -1$的正则变差函数，根据前述定理，我们知道，

$$\overline{F_Z}(z) \sim \frac{1}{\psi_\Lambda(\lambda)} (\lambda\mathbb{E}[X])^{\rho} z^{-\rho} L(z)$$

对于 $z \to \infty$。

F_Z 的积分尾定义为

$$\overline{F_I^Z}(x) := \frac{1}{\mathbb{E}[Z]} \int_x^\infty \overline{F_Z}(y) dy.$$

根据 F_Z的正则变差性质，应用卡拉马塔定理可得，

$$\frac{1}{\mathbb{E}[Z]} \int_x^\infty \overline{F_Z}(y) dy \sim \frac{1}{\rho - 1} \frac{1}{\psi_\Lambda(\lambda)} (\lambda\mathbb{E}[X])^{\rho} \frac{1}{\mathbb{E}[Z]} x^{-\rho+1} L(x) = \frac{1}{\rho - 1} (\lambda\mathbb{E}[X])^{\rho-1} x^{-\rho+1} L(x).$$

应用 Embrechts 等人（2013年）的定理1.3.6，可得

$$\psi_P(u) \sim \frac{\lambda\mathbb{E}[X]}{c - \lambda\mathbb{E}[X]} \frac{1}{\rho - 1} (\lambda\mathbb{E}[X])^{\rho-1} u^{-\rho+1} L(u) \tag{20}$$

$$= \frac{1}{c - \lambda\mathbb{E}[X]} \frac{1}{\rho - 1} (\lambda\mathbb{E}[X])^{\rho} u^{-\rho+1} L(u), \quad u \to \infty. \tag{21}$$

□

这一结果尤其引人注目。根据前述定理，正则变差会从从属过程传递到其跳跃大小 Z 。因此，可以利用

卡拉马塔定理来量化保险人破产概率的渐近行为。这代表着一种保险人无法忽视的风险。

如前所述，时间归一化从属仅会随机改变损失发生的时点，不会改变期望值。然而，即使个体损失看起来相当温和，损失聚集（例如自然灾害巨灾事件中的情况）仍可能严重影响破产概率。以下示例对此加以说明。

示例 2. 设 $C_t := \sum_{i=1}^{N_t} X_i$ 为满足 $X_1 \sim Exp(1)$ 且$\mathbb{E}[N_1] = 1$的复合泊松过程。对于从属过程 Λ ，我们定义

$$\Lambda_t := 0.9t + \sum_{i=1}^{\bar{N}_t} K_i,$$

¯其中， N 是强度为1 的泊松过程，而$(K_j)^{j\in\mathbb{N}}$ 是满足 $K_1 \sim Par(\frac{0.1\varepsilon}{1+\varepsilon}, 1+\varepsilon)$ 的独立同分布正随机变量，其中—$\varepsilon > 0$。这里，第一个参数表示帕累托分布的尺度参数，第二个参数表示形状参数。参数的选取使得 Λ 满足时间归一化假设，即 $\mathbb{E}[\Lambda_1] = 1$。

我们比较以下对象的破产概率

$$S_t := u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

and

$$P_t := u + ct - \sum_{i=1}^{N_{\Lambda_t}} X_i.$$

根据 *Asmussen*和*Albrecher*（*2010*）第 *X.1* 节中的命题 *1.5* 以及第 *X.2* 节中的引理 *2.2*，我们知道

$$\mathbb{P}[\Lambda_1 > x] = \mathbb{P}[0.9 + \sum_{i=1}^{\bar{N}_t} K_i > x] \sim \mathbb{P}[\sum_{i=1}^{\bar{N}_t} K_i > x] \sim \mathbb{P}[K_1 > x] = \left(\frac{0.1\varepsilon}{(1+\epsilon)x}\right)^{1+\varepsilon},$$

对于 $x \to \infty$。因此， Λ_1 是指数为 $-(1+\varepsilon)$ 的正则变差函数。根据前述 *us*

推论，我们有

$$\Psi_P(u) \sim \frac{1}{c-1}\frac{1}{\varepsilon}u^{-\varepsilon}\left(\frac{0.1\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{1+\varepsilon}.$$

此外，对于 S，标准的 ***Cramér-Lundberg*** 理论给出

$$\Psi_S(u) \sim \frac{1}{c}e^{-(1-\frac{1}{c})u}.$$

注意，对于所有 $t \geq 0$， $\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[P_t]$ 。然而，破产概率的渐近行为截然不同。当 $\varepsilon > 0$ 较小时， $\Psi_P(u)$ 呈现多项式衰减，而且衰减速度可以任意慢；而 $\Psi_S(u)$ 则始终以指数速度衰减。

5 总结

本文建立了一个模型，能够将自然灾害事件等累积损失纳入由个体理赔构成的保险组合。保险人最初的损失过程被建模为复合泊松过程。随后，通过一个由 L´évy 从属过程定义的随机时间变换，引入自然灾害损失。选择 L´évy 从属过程，使其平均运行速度与日历时间相同。这种时间归一化使从属化后的投资组合与初始投资组合之间能够进行有意义的定量比较，因为在这一条件下，从属化不会改变风险过程的期望。此外，时间归一化确保从属化仅仅代表索赔发生时间的随机扭曲。然而，我们已经证明，这种时间安排的改变会对破产概率的渐近行为产生重大影响。

我们证明了，保险人的时间变换后的索赔过程仍是复合泊松过程，并推导出从属过程具有轻尾或重尾跳跃分布的条件。在这两种情况下，我们都能够量化破产风险。此外，我们还表明，在轻尾情形下，从属化对保险人总是不利的。在重尾情形下，我们的分析主要聚焦于具有正则变差尾部的跳跃分布。我们确立了从属过程继承正则变差性的条件，并利用卡拉马塔定理，得出了此情形下破产概率的渐近结果。我们还表明，即使在正则变差情形下，在非常宽松的条件下，从属化也会对破产概率产生负面影响。

如上一节所示，如果我们从跳跃分布为轻尾的初始模型出发，并应用具有正则变化尾部的时间归一化 L´evy 从属过程，则破产概率仅以多项式速度衰减。根据所选从属过程的不同，这种多项式衰减可以任意缓慢。值得注意的是，若不进行从属化，初始模型的破产概率始终呈指数衰减。渐近行为之所以存在如此显著的差异，是因为在从属模型中，损失以簇的形式发生，而非像初始模型那样均匀分布在整个保险期间。

参考文献

Albrecher, Hansj¨org, Garcia Flores, Brandon, 和 Hipp, Christian（2025）。《分红区间与破产约束》，《保险：数学与经济学》，第121卷，第1–25页。Applebaum, David（2009）。*L´*<style id='7}evy 过程与随机微积分，剑桥大学出版社。Asmussen, S¨oren 和 Albrecher, Hansj¨org（2010）。破产概率，第14卷。World Scientific。Averhoff, Melanie 和 Thøgersen, Julie（2025）。《Cram´er-Lundberg 模型中的经验费率厘定》，《保险：数学与经济学》，第124卷，第103128页。Baradel, Nicolas（2024）。《不确定性下的最优控制：巨灾债券发行的应用》，《保险：数学与经济学》，第117卷，第16–44页。B¨auerle, Nicole 和 M¨uller, Alfred（2006）。《随机序与风险度量：一致性与界》，《保险：数学与经济学》，第38卷第1期，第132–148页。Bertoin, Jean（1996）。*L´evy* 过程，第121卷。剑桥大学出版社，剑桥。Bingham, Nicholas H, Goldie, Charles M, 和 Teugels, Jef L（1989）。正则变差，第27卷。剑桥大学出版社。Bochner, S.（1949）。《扩散方程与随机过程》，《美国国家科学院院刊》，第35卷第7期，第368–370页。—（1955）。调和分析与概率论，第1版。加利福尼亚大学出版社。Braunsteins, Peter 和 Mandjes, Michel（2023）。《客户数量波动下的 Cram´er-Lundberg 模型》，《保险：数学与经济学》，第112卷，第1–22页。Cheung, Eric C.K. 和 Zhu, Wei（2023）。《具有指数分布索赔的更新风险过程中有限与无限时间范围内的累积巴黎型破产》，《保险：数学与经济学》，第111卷，第84–101页。Colaneri, Katia 和 Frey, R¨udiger（2021）。《马尔可夫调制标记点过程的反向偏积分微分方程的经典解及其在巨灾债券中的应用》，《保险：数学与经济学》，第101卷，第498–507页。

Cont, Rama 和 Tankov, Peter（2003）。跳跃过程金融建模，Chapman and Hall/CRC。Di Crescenzo, Antonio、Martinucci, Barbara 和 Zacks, Shelemyahu（2015）。“具有泊松从属过程的复合泊松过程”，应用概率期刊，第52卷第2期，第360–374页。Embrechts, Paul、Kl¨uppelberg, Claudia 和 Mikosch, Thomas（2013）。极端事件建模：保险与金融，第33卷。Springer Science & Business Media。Faias, Jos´e Afonso 和 Guedes, Jos´e（2020）。“复杂证券的扩散：巨灾债券案例”，《保险：数学与经济学》，第90卷，第46–57页。Foss, Sergey、Korshunov, Dmitry、Zachary, Stan 等（2011）。重尾分布与次指数分布导论，第6卷。Springer。Grandell, Jan（1997）。混合泊松过程，第77卷。CRC出版社。Li, Bo 和 Zhou, Xiaowen（2024）。“基于游程理论的巴黎型破产问题方法”，《保险：数学与经济学》，第118卷，第44–58页。Lindskog, Filip 和 W¨uthrich, Mario V（2025）。“揭示积压赔案中隐藏的理赔发展模式与成本”，《欧洲精算学报》，第1–39页。Liu, Haibo（2025）。“巨灾债券的稳健无差异估值”，《保险：数学与经济学》，第122卷，第1–10页。Locas, F´elix 和 Renaud, Jean-Fran¸cois（2025）。“受巴黎型破产约束、采用绝对连续控制的最优分红问题中折射策略的最优性”，《保险：数学与经济学》，第120卷，第189–206页。Lundberg, Filip（1903）。“I. 概率函数的近似表示。II. 集体风险的再保险”，Rolski, Tomasz、Schmidli, Hanspeter、Schmidt, Volker 和 Teugels, Jozef L（2009）。保险与金融中的随机过程，John Wiley & Sons。Sato, Ken-Iti（1999）。*L´évy*过程与无限可分分布，第68卷。剑桥大学出版社。Schmidli, Hanspeter（1999）。“复合和与次指数性”，伯努利，第5卷第6期，第999–1012页。—（2017）。风险理论，Springer。Selch, Daniela Anna 和 Scherer, Matthias（2018）。用于保险应用的多元索赔次数模型，Springer。

Sengar, Ayushi S、Maheshwari, Aditya 和 Upadhye, NS（2020）。“k阶时间变换泊松过程”，《随机分析与应用》，第38卷第1期，第124–148页。Stam, AJ（1973）。“从属概率分布尾部的正则变差”，《应用概率进展》，第5卷第2期，第308–327页。Zhang, Yuxin 和 Brockett, Patrick（2020）。“通过从属过程对联合生存进行随机死亡率建模”，《保险：数学与经济学》，第95卷，第166–172页。Zhu, Wei（2025）。“基于独立伽马分布时间窗口、具有依赖结构的Erlang风险模型中的破产概率”，《欧洲精算学报》，第1–27页。