arXiv:2603.01823v1 [math.PR] 2 Mar 2026

# 论由无序钉扎模型产生的分数阶随机热方程

ZI'AN LI、JIAN SONG、RAN WEI 与 HANG ZHANG

Abstract. 我们研究如下分数阶随机热方程的温和 Skorohod 解 -
tion 在 $\mathbb{R}$ 上:

$$\begin{cases}\partial_t u(t,x) = -(-\Delta)^{\rho/2}u(t,x) + \beta u(t,x)\delta_0(x)\xi(t),\\ u(0,\cdot) = u_0(x),\end{cases}$$

其中 $-(-\Delta)^{\rho/2}$， $\rho \in (0,2]$ 为分数阶拉普拉斯算子， $\xi$ 为协方差为$\mathbb{E}[\xi(t)\xi(s)] = |t-s|^{2H-2}$的高斯噪声，对 $H \in (\frac{1}{2}, 1]$。带有 $\rho \in (1,2]$ 的该方程自然出现在无序钉扎模型的研究中。

我们证明该方程存在局部 $L^2$解，当 $\rho = 2$时；而对于 $\rho \in (0, 2)$，任何解——若其唯一存在——都不能是 $L^p$可积的，对任意 $p > 1$。此外，受 Quastel 等人近期工作的启发 [44], ，我们证明该方程具有唯一的全局 $L^1$解，只要$\frac{1}{\rho} + 1 < 2H$。我们还建立了解的严格正性。我们的工作部分填补了 Weinrib-Halperin 预测研究中的空白。

## Contents

1. 引言 2 1.1. 主要结果与文献综述 2 1.2. 无序钉扎模型与Weinrib–Halperin 预测 7 1.3. 关于其他一些模型的讨论 11 1.4. 贡献与讨论 14 1.5. 论文结构 15 2. 预备知识 15 2.1. Malliavin演算 15 2.2. $L^1$-Skorohod积分 16 3. 关于具有 $p > 1$ 18的 $L^p$-解4. 关于 $L^1$-Skorohod 解 20 4.1. $\rho$-稳定过程的局部时 20 4.2. 方程的投影 24 4.3. 随机化平移与配分函数 27 4.4. 局部时的相互能量 28 4.5. 对 $\rho \in (\frac{1}{2H-1}, 2] \iff \alpha + 2H > 2$ 与 $\alpha \le \frac{1}{2}$ 34的$L^1$-收敛4.6. 关于条件 $\rho \in (\frac{1}{2H-1}, 2] \iff \alpha + 2H > 2$ 与 $\alpha \le \frac{1}{2}$ 36的讨论4.7. 重新审视情形 $\rho = 2$ 374.8. 关于Stratonovich 解的讨论 39

5. Skorohod 解的 0-1 定律与严格正性 40
致谢 42
附录 A. 若干结果 42
参考文献 43

## 1. Introduction

在本文中，w 我们研究如下定义在 $\mathbb{R}$上的分数阶随机热方程（分数阶 SHE） :

$$\begin{cases}\partial_t u(t,x) = -(-\Delta)^{\rho/2}u(t,x) + \beta u(t,x)\delta_0(x)\xi(t), \\ u(0,\cdot) = u_0(x),\end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $-(-\Delta)^{\rho/2}$， $\rho \in (0,2]$ 是分数阶拉普拉斯算子， $\delta_0(x)$ 是狄拉克 δ 函数， $u_0(x)$ 是 $\mathbb{R}$上的有界可测函数或有限测度，而 $\xi$ 是协方差为

$$\mathbb{E}\big[\xi(t)\xi(s)\big] = |t-s|^{2H-2}, \tag{1.2}$$

其中 $H \in (\frac{1}{2}, 1]$是赫斯特参数。该方程自然源于相关随机环境中的无序钉扎模型，并与关于无序相关性与无关性的 Weinrib–Halperin 预测 [55] 密切相关（更多细节见第 1.2节）。最近，文献 [54] 研究了方程（1.1）在特殊情形 $\rho = 2$ 和 $H = \frac{1}{2}$ 下的情况；众所周知，该情形是边缘情形（见第 1.4节），并且与随机 Volterra 方程密切相关（例如参见 [2]）。

设 $X = \{X_t, t \geq 0\}$ 是一维对称 $\rho$-稳定过程，其无穷小生成元为 $-(-\Delta)^{\rho/2}$，定义在概率空间 $(\mathfrak{X}, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ 上。高斯噪声 $\xi$ 与 $X$ 相互独立，定义在另一个概率空间 $(\Xi, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上。乘积概率空间 $\mathfrak{X} \times \Xi$ 上的概率和期望分别记为 P 和 E。

不失一般性，本文始终假设 $\beta \equiv 1$ 属于 (1.1)。

1.1. **主要结果与文献回顾**。形式上对 (1.1) 应用杜哈梅尔原理可得

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_{\mathbb{R}} g_\rho(t, x-y)u_0(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g_\rho(t-s, x-y)u(s,y)\delta_0(y)\mathrm{d}y\,\xi(s)\mathrm{d}s \\ &= \int_{\mathbb{R}} g_\rho(t, x-y)u_0(y)dy + \int_0^t g_\rho(t-s, x)u(s,0)\xi(s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

这一观察促使我们给出 (1.1) 的解的定义：

定义 *1.1*（温和 *Skorohod* 解）。若随机场 $\{u(t,x)\ t \in [0,T], x \in \mathbb{R}\}$ 满足： $\{u(t,\cdot)\ t \in [0,T]\}$ 适应于由噪声 $\xi$ 诱导的滤过， $u(t,x)$ 对每个 $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$ 都是 $L^1$-可积的，且满足以下积分方程，则称其为 *(1.1)* 的温和 *Skorohod* 解：

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} g_\rho(t, x-y)u_0(y)dy + \int \mathbf{1}_{[0,t]}(\cdot)g_\rho(t-\cdot, x)u(\cdot,0)\xi, \tag{1.3}$$

其中 $g_\rho$ 是 $\rho$-稳定过程 $X$ 的转移密度函数，右侧的第二个积分是一个 $L^1$-*Skorohod*积分（定义见第 *2* 节）。

我们强调，定义 $L^1$只要求 $u(t,x)$ 满足 -可积，因此（1.1）中的 Skorohod 积分只需满足 $L^1$-可积。经典的 Skorohod 积分被定义为 $L^2$-可积随机变量（见 [41, 第 1 节。3]），而近年来，Quastel、Ramirez 和 Vir´ag [44]发展了 $L^1$-可积 Skorohod 积分。这两种概念在我们的分析中都将发挥关键作用（有关 Skorohod 积分的更多详情，见第2 节）。

注意，右端的第一个积分（1.3）是良定义的，只要初始条件 $u_0$（$x$）是有界函数或有界测度。为简单起见，全文我们假设 $u_0$（$x$） $\equiv 1$。我们还始终假设 $\rho \in (0,2]$ 且 $H \in (\frac{1}{2},1]$。

我们现在陈述关于（1.1）适定性的主要定理。

**定理 1.2.** 关于随机热方程的温和 *Skorohod* 解 （1.1） 在定义 *1.1* 的意义下，我们有如下结果：

（*1*）当 $\rho \in$ （0，2）时，不存在 $L^p$-解，对任意 $p \geq 2$；若 （1.1） 的解是唯一的，则不存在 $L^p$-解，对任意 $p > 1$。（*2*）当 $\rho = 2$时，存在唯一的局部 $L^p$-解，但不存在整体 $L^p$-解，对任意 $p > 1$。（*3*）当 $\rho \in (\frac{1}{2H-1}, 2]$时，存在唯一的整体 $L^1$-解。

证明。结论 (1) 由命题 3.1、3.4 以及备注 3.5得出；结论 (2) 由命题 3.2、3.4以及备注 3.5得出；结论 (3) 则由命题4.6、4.8和4.19得出。□

**备注 1.3**。 本文证明，对于 $\rho \in (1,2]$, 方程 (1.1) 的解只要存在便是唯一的（见第 *4.1-4.2*节）。施加条件 $\rho > 1$ 是为了确保稳定过程 $X$的局部时存在，而它在我们的分析中起着关键作用。

带有乘性噪声的随机热方程（SHE）尤其值得关注，部分原因是它们与抛物 Anderson 模型密切相关。在现有的大多数文献中，对于所有 $p \geq 2$，其解都是 $L^p$-可积的（例如，参见 [53, 21, 30, 31, 51, 16, 17, 14]）。在这一设定下，解的 $p$阶矩的长时间渐近行为与所谓的间歇现象密切相关（例如，参见 [13, 7, 33, 19, 18]）。

Hu [30] 证明，带有乘性空间白噪声的 $\mathbb{R}^2$ 上的随机热方程（SHE）仅存在局部 $L^2$-解 $u(t, x)$，也就是说，只有当时间 $t$ 足够小时， $\mathbb{E}|u(t, x)|^2$ 才是有限的。相比之下，Quastel 等人 [44] 最近建立了一套关于 $L^1$-可积 Skorohod 积分的理论，并证明同一方程存在一个对所有时间 $t > 0$ 都是 $L^1$-可积的全局解。

定理 1.2 详细刻画了 $L^p$-可积解，其中 $p \geq 1$ 对应于具有 $\rho \in (0,2]$和 $H \in (\frac{1}{2},1]$ 的随机热方程（1.1）。特别是，该定理表明，当 $\rho \in (\frac{1}{2H-1}, 2)$ 时，方程（1.1）存在一个“真正的”$L^1$-解；这意味着对任何 $p > 1$，都不存在 $L^p$-解。据我们所知，这是第一个表现出这一性质的方程。值得注意的是，文献 [44] 中研究的 $\mathbb{R}^2$ 上的抛物 Anderson 模型仍然存在局部 $L^2$-解。这一现象也可能与无序钉扎模型的某些相变性质有关（更多讨论见第 1.2 节）。

现在，我们分别说明分析 $L^p$-Skorohod 解（针对 $p > 1$ ）和 $p = 1$ 的方法。

显然， $L^p$解且满足 $p > 2$ 蕴含一个 $L^2$解，这可由 Jensen 不等式得出；另一方面，由超收缩性可知，一个满足 $L^p$的 $p \in (1,2)$ 解也蕴含一个 $L^2$解（见命题 3.5）。因此，对于 $p > 1$, 研究 $L^p$解基本上可归结为研究 $L^2$解，这可通过分析解的 Wiener 混沌展开来完成（例如，参见 [30, 31, 51, 17]）。

对式（1.3）进行形式迭代，并取 $u_0(x) \equiv 1$ ，可得

$$\begin{aligned} & u(t,x) \\ &= 1 + \int_0^t g_\rho(t-s_1,x)u(s_1,0)\xi(s_1)\mathrm{d}s_1 \\ &= 1 + \int_0^t g_\rho(t-s_1,x)\left(1 + \int_0^{s_1} g_\rho(s_1-s_2,0)u(s_2,0)\xi(s_2)\mathrm{d}s_2\right)\xi(s_1)\mathrm{d}s_1 \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0<s_1<\cdots<s_n<t} \cdots \int g_\rho(t-s_n,x)g_\rho(s_n-s_{n-1},0)\cdots g_\rho(s_2-s_1,0)\xi(s_{n-1})\cdots\xi(s_1)\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_n. \end{aligned}$$

于是，若 $u(t,x)$ 是 $L^2$-可积的，则它具有如下唯一的 Wiener 混沌展开 n:

$$u(t,x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{I}_n(f_n(t,x)), \tag{1.4}$$

其中

$$\begin{aligned} & f_n(t,x;s_1,\cdots,s_n) \\ &= \mathrm{Sym}\left[g_\rho(t-s_n,x)g_\rho(s_n-s_{n-1},0)\cdots g_\rho(s_2-s_1,0)\mathbf{1}_{[0,t]^n_<}(s_1,\cdots s_n)\right] \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_n} g_\rho(t-s_{\sigma(n)},x)g_\rho(s_{\sigma(n)}-s_{\sigma(n-1)},0)\cdots g_\rho(s_{\sigma(2)}-s_{\sigma(1)},0)\mathbf{1}_{[0,t]^n_<}(s_{\sigma(1)},\cdots s_{\sigma(n)}), \end{aligned} \tag{1.5}$$

其中 $\mathscr{P}_n$ 为 $\{1,2,\ldots,n\}$ 上的置换集合，且 $[0,t]^n_< := \{\boldsymbol{s} = (s_1\cdots s_n) \in \mathbb{R}^n,\ 0 < s_1 < \cdots s_n < t\}$，以及

$$\mathbf{I}_n(f_n(t,x)) = \int_0^t \cdots \int_0^t f_n(t,x;s_1,\cdots,s_n)\xi(s_1)\cdots\xi(s_n)\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_n$$

是一个 $n$阶多重 Skorohod 积分。

众所周知，存在唯一的 $L^2$-解满足（1.1）等价于

$$\mathbb{E}\big[u(t,x)^2\big] = \sum_{n=0}^{\infty} n!\|f_n\|^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} < \infty, \tag{1.6}$$

其中 $\mathcal{H}$ 是与高斯噪声相关联的希尔伯特空间 $\xi$ （见第 2.1 节）。通过直接计算即可验证这一点，同时注意到 $f_n$ 在（1.5）中给出了显式表达式。更多细节请参阅第 3 节。

$L^1$-解的处理方式与 $L^2$-解的处理方式有根本不同，而我们的方法在很大程度上受近期工作 [44]的启发。

设 $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{H}$的一个标准正交基。记

$$\begin{aligned} m_k(t) &:= \int_0^t \int_0^T \delta_0(X_s)e_k(r)|s-r|^{2H-2}\mathrm{d}r\mathrm{d}s, \\ M_n(t) &:= \exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(m_k(t)\xi_k - \frac{1}{2}m_k(t)^2\right)\right\}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

其中 $\delta_0(\cdot)$是狄拉克 δ 函数，而

$$\xi_k := \int_0^T e_k(s)\xi(s)\mathrm{d}s \tag{1.8}$$

是 $e_k$ 的维纳积分（见第2.1节）。项 $m_k(t)$还有另一种表示形式（4.15），它是连续函数关于由 $X$的局部时诱导的测度的积分。

令 $\mathbf{P}^{(t,x)}$ 表示稳定过程在 $[0,t]$ 上、具有任意初始值且条件为在时刻 $t$ 到达 $x$ 的概率律。或者，我们可以将 $\mathbf{P}^{(t,x)}$ 视为终值为 $\tilde{X}_t^{(t,x)} = x$ 的“反向稳定过程”$\{\tilde{X}_s^{(t,x)} = x + X_{t-s}, s \in [0,t]\}$ 的概率律。类似地，我们用 $\mathbf{E}^{(t,x)}$ 表示概率律 $\mathbf{P}^{(t,x)}$ 下的期望。

记

$$Z_n = Z_n(t,x) = u_n(t,x) := \mathbf{E}_{(t,x)}\big[M_n(t)\big].$$

那么， $u_n(t,x)$ 是 (1.1) 的一个有限维投影的解，其中噪声 $\xi$ <style id='17'}被投影到由下列元素张成的高斯子空间中：$\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$。具体而言，

$$u_n(t,x) = 1 + \mathbb{E}\left[\int \mathbf{1}_{[0,t]}(\cdot) g_\rho(t-\cdot, x) u(\cdot, 0)\xi \middle| \mathcal{F}_n\right],$$

其中 $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots\dots, \xi_n)$。显然， $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个非负鞅，因此几乎处处收敛。假设 $\rho \in (\frac{1}{2H-1}, 2]$，我们证明 $Z_n$ 的一致可积性，并证明其$L^1$-极限

$$u(t,x) := Z = \lim_{n\to\infty} Z_n \tag{1.9}$$

在定义 1.1 的意义下求解1.1。我们对一致可积性的分析依赖于自能的有限性，其中自能对应于 $\rho$-稳定过程 $X$的局部时：

$$I_t := \sum_{k=1}^{\infty} m_k^2(t) = \int_0^t \int_0^t \delta_0(X_r)\delta_0(X_s)|r-s|^{2H-2}\mathrm{d}r\mathrm{d}s. \tag{1.10}$$

作为一个附带结果，我们证明 $I_t$ 几乎处处有限，当且仅当 $\rho > \frac{1}{2H-1}$；这一结果本身也很有意义。详情请参见第 4节。

上述鞅方法的一个优点是，它使我们能够为解建立一个零一律（见命题5.1），进而推出其严格正性：

**定理 1.4**。 当 $\rho \in (\frac{1}{2H-1}, 2]$时， 方程 (1.1) 的解几乎处处为正。

证明。 这直接由命题 5.3 得出。 □

由于随机热方程的解 $u(t,x)$ 可视为聚合物模型的配分函数，因此，为了定义自由能 $\log u(t,x)$，最好能证明解具有严格正性。特别地，具有乘性时空白噪声的随机热方程的解 $u(t,x)$ 的 Cole–Hopf 变换 $\log u(t,x)$ 满足 KPZ 方程。关于随机热方程的正性结果，请参见 [39, 22, 15, 44] 。

设 $G \sim N(0,1)$ 为标准高斯随机变量， $a \in \mathbb{R}$ 为实数。那么对于所有有界可测函数 $f$，有

$$E[Y f(G)] = E[f(G+a)] \text{ with } Y = e^{aX - \frac{1}{2}a^2}.$$

这一恒等式体现了 Cameron–Martin 定理。在无限维情形下，对于高斯场存在类似的测度变换公式：通过某个（正则化的）高斯泛函进行指数倾斜，会将该场平移一个 Cameron–Martin 空间中的元素。当平移$a$ 本身是随机的，并且是在分布意义而非逐点意义下定义时，由此产生的测度变换便引出了高斯乘性混沌（GMC）理论（例如参见 [49]）。

在我们的设定中（见公式 (1.7) 和 (1.8)），$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$ 是一个无限维随机向量，由概率空间 $(\Xi,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的独立同分布的标准高斯随机变量组成，而 $m(t)=(m_1(t)\ m_2(t)\ \cdots)$ 是一个由定义在 $(\mathfrak{X},\mathcal{G},\mathbf{P})$ 上的 $X$ 随机化的平移向量。我们引入如下定义。

**定义 1.5**（配分函数）。定义在 $\Xi$ 上的随机变量 $J$ 称为随机化平移 $m(t)$ 的配分函数或总质量，如果对任意有界可测函数 $F:\Xi\to\mathbb{R}$，我们有

$$\mathbb{E}[JF(\xi)]=\mathbb{E}\mathbf{E}_{(t,x)}[F(\xi+m(t))]. \tag{1.11}$$

一个等价的表述是，$\xi+m(t)$ 的边缘分布关于 $\xi$ 的边缘分布绝对连续，其密度（拉东-尼科迪姆导数）为 $J$。

当 $\rho\in(\frac{1}{2H-1},2]$ 时，随机化平移 $m(t)$ 是平方可积的，即 $\sum_{k=1}^{\infty}m_k^2(t)(\omega)<\infty$P-a.s.（见推论 4.3 与注 4.22）。于是 $\sum_{k=1}^{\infty}m_k(t)(\omega)\xi_k-\frac{1}{2}m_k^2(t)(\omega)$ P-a.s. 存在，并且我们可以定义一个由 $\xi$ 参数化的、定义在 $\mathfrak{X}$ 上的随机测度：

$$M_{\xi,t}(\mathrm{d}\omega)=\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(m_k(t)(\omega)\xi_k-\frac{1}{2}m_k^2(t)(\omega)\right)\right\}\mathbf{P}_{(t,x)}(\mathrm{d}\omega). \tag{1.12}$$

可以验证（例如参见 [49, 例 12]），$\mathbb{P}$-随机测度 $M_{\xi,t}$ 在 $(X,\mathcal{G})$ 上满足

$$\mathbb{E}M_{\xi,t}[F(\xi,\omega)]=\mathbb{E}\mathbf{E}_{(t,x)}[F(\xi+m(t,\omega),\omega)], \tag{1.13}$$

对于任意有界可测函数 $F\colon\Xi\times\mathfrak{X}\to\mathbb{R}$，其中我们将 $M_{\xi,t}[\cdot]$ 滥用于表示对测度 $M_{\xi,t}(\mathrm{d}\omega)$ 的积分。接着，$M_{\xi,t}$ 称为非归一化聚合物测度（或与随机化平移 $m(t)$ 相关联的高斯乘性混沌），其定义在 $\mathfrak{X}$上；而归一化测度 $M_{\xi,t}/M_{\xi,t}(\mathfrak{X})$ 称为聚合物测度。

当 $F$ 在 (1.13) 中与 $\omega\in\mathfrak{X}$ 相互独立时，等式 (1.13) 化为 (1.11，其配分函数为

$$J=M_{\xi,t}(\Omega)=\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(m_k(t)\xi_k-\frac{1}{2}m_k^2(t)\right)\right\}\right], \tag{1.14}$$

特别地，当 $\rho\in(\frac{1}{2H-1},2]$ 时成立。 ——

现在我们可以给出 Feynman–Kac 公式了。

**定理 1.6** (Feynman–Kac 公式)。假设 $\rho\in(\frac{1}{2H-1},2]$。那么，对于 $u(t,x)$，方程 (1.1)的解满足以下 *Feynman–Kac* 公式

$$\begin{aligned}u(t,x)&=\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(m_k(t)\xi_k-\frac{1}{2}m_k^2(t)\right)\right\}\right]\\&=\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(m_k(t)\xi_k-\frac{1}{2}m_k^2(t)\right)\right\}\right].\end{aligned} \tag{1.15}$$

证明。(1.15) 的第一个等式由命题 4.6、4.8和 4.19 得出。命题4.19和引理 4.10 表明，1.13) 在以下情况下成立：$J=$ 极限 $_{n\to\infty}\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}m_k(t)\xi_k-\frac{1}{2}m_k^2(t)\right\}\right]$。结合式 (1.14)，即可得到所需的第二个等式。□

**Re标记 1.7**。当 $\rho\in(\frac{1}{2H-1},2]$，我们有（参见注 *4.22*和推论 *4.3*）

$$\sum_{k=1}^{\infty}m_k^2(t)=\int_0^t\int_0^t\delta_0(X_r)\delta_0(X_s)|r-s|^{2H-2}\mathrm{d}r\mathrm{d}s<\infty,\quad \mathbf{P}_{(t,x)}\text{-}a.s.$$

因此 $\delta_0(X)\in\mathcal{H}$，**P**-几乎必然成立（另见命题 *4.21*）。由 (2.6)，我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k(t)\xi_k = \int \mathbf{1}_{[0,t]}\delta_0(X)\xi =: \boldsymbol{\delta}\big(\mathbf{1}_{[0,t]}\delta_0(X)\big).$$

因此，*Feynman–Kac* 公式 （1.15）也可以写成

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \mathbf{E}_{(t,x)}\left[\exp\left\{\int \mathbf{1}_{[0,t]}\delta_0(X)\xi - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t \delta_0(X_r)\delta_0(X_s)|r-s|^{2H-2}\mathrm{d}r\mathrm{d}s\right\}\right] \\ &= \mathbf{E}_{(t,x)}\left[\exp\left\{\boldsymbol{\delta}\big(\mathbf{1}_{[0,t]}\delta_0(X)\big) - \frac{1}{2}\big\|\mathbf{1}_{[0,t]}\delta_0(X)\big\|_{\mathcal{H}}^2\right\}\right]. \end{aligned} \tag{1.16}$$

**注 1.8.** 这 自然地用如下磨光方程来逼近我们的随机热方程 （1.1）在 $\beta=1$ 的情形下

$$\partial_t u_\varepsilon(t,x) = -(-\Delta)^{\rho/2}u_\varepsilon(t,x) + u_\varepsilon(t,x)\delta_\varepsilon(x)\xi(t),\ \ with\ u_\varepsilon(0,x)=1, \tag{1.17}$$

其中

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\mathbf{1}_{\{|x|<\varepsilon\}} \tag{1.18}$$

是狄拉克 $\delta$ 函数的逼近 $\delta_0$（$x$），当 $\varepsilon\to 0$ 时。按照 [51], 中的方法，我们可以证明 （1.17） 的温和 *Skorohod* 解唯一存在，并由下式给出

$$u_\varepsilon(t,x) = \mathbf{E}_{(t,x)}\left[\exp\left\{\boldsymbol{\delta}\big(\mathbf{1}_{[0,t]}\delta_\varepsilon(X)\big) - \frac{1}{2}\big\|\mathbf{1}_{[0,t]}\delta_\varepsilon(X)\big\|_{\mathcal{H}}^2\right\}\right]. \tag{1.19}$$

尽管 *(1.19)* 中的 $u_\varepsilon(t,x)$ 为 *(1.16)* 中的 $u(t,x)$ 提供了形式上的近似，但由于缺乏底层的鞅结构或控制函数，目前尚不清楚当 $\rho\in(\frac{1}{2H-1},2]$ 时，$u_\varepsilon(t,x)$ 是否在 $L^1$ 中收敛到 $u(t,x)$。

**记号 1.9.** 本文中我们采用以下记号。

*(1)* 确定性情形的记号：令 $\mathbb{N}$ 表示不含 *0* 的自然数集合，即 $\mathbb{N}:=\{1,2,\cdots\}$ 和 $\mathbb{N}_0:=\{0,1,2,\cdots\}$；对于 $N\in\mathbb{N}$，$[\![N]\!]:=\{1,2,\cdots,N\}$；对于 $a\in\mathbb{R}$，$[a]$表示不大于 $a$ 的最大整数；$\|\cdot\|$ 用于表示欧几里得范数；令 $\boldsymbol{k}:=(k_1,k_2,\cdots,k_d)$ $\boldsymbol{x}:=(x_1,x_2,\cdots,x_d)$ 等表示 $\mathbb{Z}^d$ 或 $\mathbb{R}^d$ 中的向量，具体取决于上下文；我们用 $C$ 表示一个通用正数，它可能在不同的行中取不同的值；如果 $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x)=1$，则记作 $f(x)\sim g(x)$（记作 $x\to\infty$）。

*(2)* 随机情形的记号：我们使用 $\overset{(d)}{\longrightarrow}$ 表示随机变量或随机向量的依分布收敛（也称为弱收敛）；对于随机变量 $X$，$\|X\|_{L^p}:=(E[|X|^p])^{1/p}$ 表示 $p\geq 1$；我们使用 $\mathbf{1}_A$ 表示某个集合$A$的示性函数，即，当 $t\in A$ 时 $\mathbf{1}_A(t)=1$，当 $t\notin A$时 $\mathbf{1}_A(t)=0$；对于事件 $A$ 或定义在 $(\mathfrak{X},\mathcal{G},P)$ 上的随机变量 $Y$，我们使用 $A'$和 $Y'$表示它们的独立副本，其中 $A(\omega,\omega')=A(\omega)$（$A'(\omega,\omega')=\Omega\times A'(\omega')$，分别）以及 $Y=Y(\omega,\omega')=Y(\omega)$（$Y'=Y'(\omega,\omega')=Y'(\omega')$，分别）可以视为定义在乘积空间 $(\mathfrak{X},\mathcal{G},P)^{\otimes 2}$上；我们使用 $\int_0^T f(s)\xi(s)\mathrm{d}s$ 或 $\delta(f)$表示 $L^2$-*Skorohod*积分，并使用$\int o\ f\xi$ 表示 $L^1$-*Skorohod*积分。

## 1.2. 无序钉扎模型与 Weinrib–Halperin 预测。

本节将介绍我们的随机热方程（1.1）与无序钉扎模型之间的密切联系。我们还将介绍无序相关性和无序无关性这两个关键概念，以及相关的 Weinrib–Halperin 预测。

无序钉扎模型是一类聚合物模型，用于描述长高分子链与携带随机电荷或杂质的缺陷线（或界面）之间的相互作用，这些随机电荷或杂质由随机环境（或无序）表示。该模型通过吉布斯变换来定义

更新过程的定律，该定律编码聚合物返回缺陷线的时刻，并对这些接触赋予随机的能量奖励或惩罚。由于其表述简洁且数学结构丰富，无序钉扎模型特别适合研究相变和临界现象，并在物理学、化学和生物学中引起了广泛兴趣。我们参阅专著 [23] 和 [24]以了解更多细节。

现在我们定义无序钉扎模型。设 $\tau = \{\tau_i, i \in \mathbb{N}_0\}$ 是定义在 $\mathbb{N}$ 上的更新过程，其 $\tau_0$ 为 $= 0$，且增量独立同分布。我们用 $\mathbb{P}_\tau$ 表示关于更新过程的概率，用 $\mathbb{E}_\tau$ 表示期望。不失一般性，我们假设 $\tau$ 是常返的，即 $\mathbb{P}_\tau(\tau_1 < \infty) = 1$。如 [24], 所述， $\tau$ 的暂留性只会导致某些系数发生平移，这并非关键。 $\tau$ 的间隔分布定义为

$$\mathbb{P}_\tau(\tau_1 = n) = \frac{L(n)}{n^{1+\alpha}}, \quad \text{for } n \geq 1, \tag{1.20}$$

其中 $\alpha > 0$，且 $L(\cdot) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 是一个慢变函数，即对任意 $a > 0$，$\lim_{t\to\infty} L(at)/L(t) = 1$（关于慢变函数的更多细节，参见 [9] ）。

令 $\omega = \{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ 为一列与 $\tau$ 相互独立的随机变量，其概率为 $\mathbb{P}_\omega$、期望为 $\mathbb{E}_\omega$，表示随机环境（也称为无序），并满足

$$\mathbb{E}_\omega[\omega_i] = 0, \ \mathrm{Var}(\omega_i) = 1, \ \text{and } \exists\beta_0 > 0, \ \text{such that } \mathbb{E}_\omega\left[e^{\beta\omega_i}\right] < \infty, \ \forall\beta \in (-\beta_0, \beta_0). \tag{1.21}$$

长度为 $N$ 且具有自由边界条件的无序钉扎模型，通过吉布斯变换定义为

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^{\omega,h}_{N,\beta}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_\tau}(\tau) := \frac{1}{Z^{\omega,h}_{N,\beta}} \exp\left\{\sum_{n=1}^{N}(\beta\omega_n + h)\mathbf{1}_{\{n\in\tau\}}\right\}, \tag{1.22}$$

其中

$$Z^{\omega,h}_{N,\beta} = \mathbb{E}_\tau\left[\exp\left\{\sum_{n=1}^{N}(\beta\omega_n + h)\mathbf{1}_{\{n\in\tau\}}\right\}\right]. \tag{1.23}$$

配分 函数， $\beta > 0$ 为逆温度， $h \in \mathbb{R}$ 为外场。

为了看出我们的随机热方程（1.1）与无序钉扎模型之间的联系，请注意，根据 Feynman–Kac 公式，方程（1.1）的温和 Skorohod 解可形式化地写为

$$u(t,x) = \mathbf{E}_{(t,x)}\left[\exp\left\{\beta\int_0^t \delta_0(X_r)\xi(t-r)\mathrm{d}r - \frac{\beta^2}{2}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \delta_0(X_r)\xi(t-r)\mathrm{d}r\right)^2\right]\right\}\right]. \tag{1.24}$$

若无序项 $\omega$ 在（1.22）中为高斯分布，则经 *Wick* 正规序处理的配分函数定义为

$$\tilde{Z}^{\omega,h}_{N,\beta} := \mathbb{E}_\tau\left[\exp\left\{\sum_{n=1}^{N}(\beta\omega_n + h)\mathbf{1}_{\{n\in\tau\}} - \frac{\beta^2}{2}\mathbb{E}_\omega\left[\left(\sum_{n=1}^{N}\omega_n\mathbf{1}_{\{n\in\tau\}}\right)^2\right]\right\}\right]. \tag{1.25}$$

方程 (1.24) 可视为 (1.25) 的连续介质类比，其中 $h = 0$；其含义是，经过适当缩放后， $X_t$ 到达 0 的击中时刻与更新过程 $\tau$ 具有相同的间隔分布。事实上，考虑一个重尾随机游走 $S = \{S_i, i \in \mathbb{N}_0\}$，它属于某个 $\rho$-稳定律的吸引域，其中 $\rho \in (0, 2]$。根据引理 A.1， $S$ 到达 0 的击中时刻会生成一个更新过程；当 $\rho = \frac{1}{1-\alpha} \in (1, 2]$ 时，其间隔分布由 (1.20) 给出，其中 $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$。这恰好是我们证明随机热方程 (1.1) 存在唯一 $L^1$ 解的情形；见定理 1.2。相反，当 $\rho \in (0, 1]$, 时，不存在任何来自属于某个 $\rho$-稳定律吸引域的随机游走、且具有 (1.20) 形式的更新过程。因此，随机热方程 (1.1) 不仅可视为连续介质类比，也是对无序钉扎模型 (1.25) 的真正推广。

作为一种无序系统，无序钉扎模型的一个基本问题是：任意微小的无序是否都能显著改变其行为。随机环境与逆温度 $\beta$ 耦合，后者量化了无序的强度。如果对于每个 $\beta>0$，模型的行为都与齐次情形 $\beta=0$ 本质不同，那么就称无序为 无序相关。相反，如果当 $\beta>0$ 足够小时，模型仍与齐次情形相近，那么就称无序为 无序无关。

对于独立同分布随机环境中的无序钉扎模型，著名的 Harris 判据 [28] 指出，当 $\alpha>\frac{1}{2}$ 时，无序是相关的；而当 $\alpha<\frac{1}{2}$ 时，无序是不相关的。在临界情形$\alpha=\frac{1}{2}$ 下，Harris 判据无法给出结论。在过去二十年里，这一判据——包括临界情形——已通过一系列研究得到充分验证，下面我们将简要回顾这些研究。

记 [24], 系统的自由能为

$$F(\beta,h):=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log Z_{N,\beta}^{\omega,h}\overset{\text{a.s and in } L^1}{=\!=\!=}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\mathbb{E}_\omega\Big[\log Z_{N,\beta}^{\omega,h}\Big],\tag{1.26}$$

其中，已知该极限存在。可以证明，$F(\beta,h)$ 非负，且关于 $h$单调不减。令

$$h_c(\beta):=\inf\{h\in\mathbb{R}:,F(\beta,h)>0\}=\sup\{h\in\mathbb{R}:,F(\beta,h)=0\}\tag{1.27}$$

表示 $F(\beta,h)$ 的临界点。此外，可以证明 $h_c(\beta)\in(-\infty,+\infty)$。

对于均匀模型，$F(0,h)\approx(h-h_c(0))^{\theta(\alpha)}$，其中 $\theta(\alpha)=1\vee\frac{1}{\alpha}$，称为临界指数。对于 $\beta>0$, 已知如下图景。

- 对于 $\alpha<-\frac{1}{2}$，且 $\beta>0$ 足够小时，$F(\beta,\ h)\approx(h-h_c(\beta))^{\theta(\alpha)}$（见 [34]）。
- 对于任意 $\alpha>0$ 和任意 $\beta>0$，$F(\beta,\ h)\le C(h-h_c(\beta))^2$（见 [25]）。
- 对于 $\alpha=-\frac{1}{2}$，无序相关性/无序无关性取决于慢变函数 $L(\cdot)$ 在（1.20）中的更精细性质，并且当且仅当 $h_c(\beta)>h_c(0)$ 对任意 $\beta>0$（见[34, 5]）。

上述结果通过展示 $\alpha>\frac{1}{2}$ 时临界指数的变化，以及在临界情形 $\alpha=\frac{1}{2}$ 下临界点的移动，证实了 Harris 判据。

尽管独立同分布随机环境中的无序钉扎模型已得到充分研究，但对于相关环境中的模型，我们所知甚少。随机环境相关函数的一种自然选择是

$$\gamma(n-m):=\mathbb{E}_\omega[\omega_n\omega_m]=|n-m|^{-p}\wedge 1,\quad \text{for } n,m\in\mathbb{N}_0,\tag{1.28}$$

其中 $p>0$。对于相关随机环境，也有与 Harris 判据相对应的判据，称为 Weinrib–Halperin 预测 [55]。该预测推测，对于情形（1.28）下的无序钉扎模型，当 $\alpha>\min(p,1)/2$ 时，无序是相关的；当$\alpha<\min(p,1)/2$时，无序是不相关的。注意，当 $p>1$时，对应于相关性足够弱的情形，Weinrib–Halperin 预测与 Harris 判据一致。

关于相关随机环境中的无序钉扎模型，首项研究发表于 [3]。研究表明，若 $p>1$，则对于任意 $\alpha>0$ 和任意 $\beta>0$，$h_c(\beta)\in(-\infty,+\infty)$ 且$F(\beta,h)\le C(h-h_c(\beta))^2$,。这证实了$\alpha>\frac{1}{2}$时无序相关性，与独立同分布随机环境的情形一致；然而，对于 $\alpha<\frac{1}{2}$，无序是否无关仍悬而未决。此外，[3] 已证明，若 $p\le 1$，则对于任意 $\beta>0$ 和任意 $h\in\mathbb{R}$，$F(\beta,h)>0$。因此，不可能通过将临界指数与均匀模型进行比较来判定无序相关性或无序无关性。在 [3], 的分析中，相关函数 $\gamma(n)$ 是否可求和起着

关键作用（即，是否 $p > 1$）。通过放宽特定假设（1.28），仅假设$\sum_{n\geq 1}\gamma(n) < +\infty$， [6] 证明了若 $\mathbf{E}[\tau_1] < +\infty$ （这要求 $\alpha \geq 1$），则从临界点发生偏移的意义上说，无序相关。

对于相关随机环境中具有 $p < 1$的无序钉扎模型， $F$（$\beta$， $h$）的临界指数根据 [3], 并不存在，因此需要采用其他方法来研究无序相关性。一个自然的框架是中间无序区域，其建立在如下事实之上：当无序相关时，即使对于任意小的 $\beta$，环境也会影响该模型。令 $\beta = \beta_N$ 随着 $N \to \infty$下调至零，可以得到非平凡的随机极限。该方法首先在 [1] 中针对 $1+1$ 定向聚合物在独立同分布环境中的情形而提出，随后在 [10]中被推广到独立同分布随机环境中的模型，包括伊辛模型、长程定向聚合物和钉扎模型。其适用性可扩展到广泛的相关环境，包括具有空间着色 [45, 20], 、时间着色 [46], 或时空着色环境的聚合物模型 [50]。受这些工作启发，在假设（1.28）下且带有 $p < 1$ 的无序钉扎模型最近在 [36], 中得到了分析，如下文所述。

我们假设 $\omega$ 是高斯环境，与 [3, 6], 中的设定相同，因为否则该模型在技术上难以处理。令 $p = 2 - 2H$其中 $H \in (1\,2, 1)$，其中 $H$是赫斯特参数；此范围确保 $p \in (0, 1)$。根据 Weinrib–Halperin 预测，当 $\alpha + H > 1$时，无序预计是相关的。为作简单说明，我们在（1.25）中取 $h = 0$，并在（ $L(\cdot) \equiv 1$ 中取 1.20。通过将逆温度调节为 $\beta_N = \hat{}\beta N^{-(\alpha+H-1)}$，我们在以下假设 [36] 下得到了如下结果： $\alpha + H > 1$。

- 当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时，对于任意 $\hat{}\,\beta > 0$，Wick序配分函数 $\tilde{Z}^{\omega}_{N,\ \beta_N}$ 在（1.25）中依分布收敛于一个非平凡随机变量 $\tilde{\mathcal{Z}}_{\hat{}\beta,\ \alpha}$当 $N \to \infty$ 时，其中 $\tilde{\mathcal{Z}}_{\hat{}\beta,\ \alpha}$是由多重 Skorohod 积分构成的 $L^2$-收敛级数。
- 当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时，存在 $\hat{}\,\beta_c > 0$，使得对于 $\hat{}\,\beta \in (0,\ \hat{}\beta_c)$， $\tilde{Z}^{\omega}_{N,\ \beta_N}$ 依分布收敛于 $\tilde{\mathcal{Z}}_{\hat{}\beta,\ 1\,2}$它仅在 $\hat{}\,\beta \in (0,\ \hat{}\beta_c)$ 内是 $L^2$-收敛级数。
- 当 $\alpha < \frac{1}{2}$ 时，$\sup_N \mathbb{E}_\omega[(\tilde{Z}^{\omega}_{N,\ \beta_N})^2] = +\infty$。

这些结果表明，为了使重标度配分函数的弱极限是一个 $L^2$-可积随机变量，额外条件 $\alpha \geq \frac{1}{2}$ 是必要的。特别地，条件$H > \frac{1}{2}$和 $\alpha \geq \frac{1}{2}$ 自动蕴含 $\alpha + H > 1$，而这正是 Weinrib 和 Halpērin 预测的无序相关性条件。有趣的是，我们证明，只要满足 $\alpha + H > 1$， $\mathcal{Z}_{\hat{\beta},\ \alpha}$ 级数展开中的每个˜多重 Skorohod 积分都有定义。然而，为了使该级数收敛于 $L^2$，我们还需要额外条件 $\alpha \geq \frac{1}{2}$。

这是一种新现象，据我们所知，此前尚未被观察到。对于上述在时间上独立的随机环境中的聚合物模型，中间无序区域——即一个 $L^2$-区域——似乎与无序相关区域重合。相比之下，对于相关随机环境中的无序钉扎模型， $L^2$-区域是（预测的）完整无序相关区域的真子集（我们将在第1.3节中更详细地讨论这一点）。另一方面，条件 $\alpha + H > 1$ 是得到 $\beta_N \to 0$的必要条件，并且它提供了使每个多重 Skorohod 积分收敛的正确标度。因此，目前尚无强有力的证据与 Weinrib–Halperin 预测相矛盾。处理情形 $\alpha + H > 1$ 且$\alpha < \frac{1}{2}$因而需要发展新的策略。

在本文中，我们在假设 $\rho \in (\frac{1}{2H-1},\ 2]$（见定理1.2）下部分解决了这一问题，这等价于 $\alpha + 2H > 2$。我们证明，我们的随机热方程（1.1）作为无序钉扎模型的连续介质类比，具有一个 $L^1$-解。事实上，我们已经在

[36] 中证明了$\{Z^{\omega}_{N,\beta_N}\}_N$ 是一致可积的。然而，在缺乏鞅结构的情况下，很难建立 $L^1$-收敛，而后者在随机热方程的连续统设定中更便于处理。

最后，我们回顾一下，在我们此前的工作中 [36] 我们还证明，当$\alpha + H > \frac{3}{2}$ 以与上述相同的方式调整 $\beta_N$ 时，普通配分函数$Z^{\omega}_{N,\ \beta_N}$ 在（1.23）中的依分布收敛于一个非平凡极限 $\mathcal{Z}_{\hat{\beta}}$。该极限可表示为一个 $L^2$收敛的多重Stratonovich积分级数。然而，当 $\alpha + H < \frac{3}{2}$时，这类多重Stratonovich积分没有良好定义。由于本文始终假设 $\alpha < \frac{1}{2}$且$H < 1$，因此我们的分析不考虑Stratonovich机制。

1.3. **关于其他一些模型的讨论**。 如第1.2节所述，对于无序钉扎模型，无序相关区域是否与 $L^2$区域重合，取决于底层（时间）随机环境是否相互独立。更一般地，在其他含无序模型中，无序相关区域与 $L^2$区域之间的关系同样受随机环境时间结构的支配；本小节将对此问题进行详细讨论。

我们考虑另外两类随机环境涉及空间噪声的模型。第一类包括具有时空噪声的随机热方程及其离散类比——随机环境中的定向聚合物模型；这两者都与无序钉扎模型密切相关。第二类是具有纯空间噪声的抛物 Anderson 模型，因为本文采用的方法受到近期关于二维抛物Anderson模型的一项突破性进展 [44]的启发。需要指出的是，纯空间噪声可视为时间随机性完全相关的时空噪声。

具有时间-空间噪声的随机热方程定义为

$$\partial_t v(t,x) = -(-\Delta)^{\rho/2} u(t,x) + \beta v(t,x)\dot{W}(t,x), \tag{1.29}$$

其中， $W$ 是协方差为

$$\mathbb{E}[\dot{W}(t,x)\dot{W}(s,y)] = \gamma_1(t-s)\gamma_2(x-y). \tag{1.30}$$

根据 Feynman–Kac 公式，其温和 Skorohod 解为

$$v(t,x) = \mathbf{E}^x_X\left[\exp\left\{\beta\int_0^t \dot{W}(t-s,X_s)\mathrm{d}s - \frac{\beta^2}{2}\mathbb{E}_W\left[\left|\int_0^t \dot{W}(t-s,X_s)\mathrm{d}s\right|^2\right]\right\}\right]. \tag{1.31}$$

相应地，t 定向聚合物模型的 Wick序配分函数定义为

$$\mathbf{Z}^{\omega}_{n,\beta} := \mathbb{E}_S\left[\exp\left\{\beta\sum_{i=1}^n \omega_{i,S_i} - \frac{\beta^2}{2}\mathbb{E}_\omega\left[\left(\sum_{i=1}^n \omega_{i,S_i}\right)^2\right]\right\}\right], \tag{1.32}$$

其中 $S$ 是在 $\mathbb{Z}^d$ 上具有期望 $\mathbb{E}_S$的随机游走，且 $\omega := (\omega_{i,x})_{i\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{Z}}$ 是表示随机环境的一族随机变量，它们与（1.30）具有相同的协方差结构，即$\mathbb{E}_\omega[\omega_{i,x}\omega_{j,y}] = \gamma_1(n-m)\gamma_2(x-y) \wedge 1$。

若 $W$ 是白噪声，或者若 $\omega$ 是独立同分布随机变量族，那么随机热方程（1.29）和定向聚合物模型（1.32）都已得到广泛研究（近期综述见 [56] ）。此外，现有结果表明，在独立同分布的情形下，无序钉扎模型与定向聚合物模型具有很强的可比性。更确切地说，对它们的配分函数进行二阶矩计算后可见，无序钉扎模型的一个关键对象是更新过程 $\tilde{\tau} = \tau \cap \tau'$，其中 $\tau'$是 $\tau$的一个独立副本；而对于定向聚合物模型，相应的对象是随机游走 $S$ 与其独立副本之间的碰撞时间集合$S'$，它诱导出一个更新过程 $\bar{\tau}$。只要 $\tilde{\tau}$和 $\bar{\tau}$具有相同的分布，这两个模型

就会呈现许多共同特征。有趣的是，通过二阶矩分析确定的 $L^2$-区域与 Harris 判据预测的无序相关区域相吻合。此外，中间无序区域存在于整个无序相关区域内（见 [1, 10]），即使在边缘相关情形下这一结论也成立（见 [11]）。

接下来，我们将说明，随机环境的时间结构——无论空间噪声是否相互独立——都决定了 $L^2$-区间与无序相关区间之间的关系。我们以随机热方程（1.29）为例。为理解无序相关性/无序无关性，采用 重整化群变换。这一变换类似于粗粒化过程：我们对时间和空间进行重新标度，并在逐渐增大的尺度上考察模型（也称为缩小观察），然后观察噪声是增强还是减弱。如果在这一过程中噪声增强，则认为无序是相关的；如果噪声减弱，则认为无序是无关的。

在我们的协方差设定（1.30）中，假设 $\gamma_i(t) = |t|^{-\theta_i}$ 对于 $i = 1,\ 2$. 若 $\gamma_i(\cdot)$ 是狄拉克 δ 函数，即噪声在相应坐标上为白噪声，则我们将 $\theta_i$ 解释为维数 $d$ （时间的维数为 1）。这种解释与狄拉克 δ 函数的标度性质一致。因此，对于任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\mathbb{E}[\dot{W}(\varepsilon^{-1}t, \varepsilon^{-a}x)\dot{W}(\varepsilon^{-1}s, \varepsilon^{-a}y)] = \varepsilon^{\theta_1+a\theta_2}|t-s|^{-\theta_1}|x-y|^{-\theta_2}, \tag{1.33}$$

这意味着 $\widetilde{W}(t,x) := \varepsilon^{-(\theta_1+\frac{1}{2}a\theta_2)/2}\dot{W}(\varepsilon^{-1}t, \varepsilon^{-a}x) \overset{d}{=} \dot{W}(t,x)$ 是另一个具有相同协方差结构的噪声（1.30）。记 $\tilde{v}(t,x) := v(\varepsilon^{-1}t, \varepsilon^{-a}x)$，则有

$$\varepsilon\partial_t\tilde{v}(t,x) = -\varepsilon^{a\rho}(-\Delta)^{\rho/2}\tilde{v}(t,x) + \beta\varepsilon^{(\theta_1+a\theta_2)/2}\tilde{v}(t,x)\dot{\widetilde{W}}(t,x). \tag{1.34}$$

为了得到适当的标度，我们应当有 $a\rho = 1$，即 $a = \frac{1}{\rho}$。将两边同除以 $\varepsilon$，我们得到标度因子 $\varepsilon^{(\theta_1+\theta_2/\rho-2)/2}$ 位于噪声项之前。当 $\varepsilon \to 0$ 时，若 $\theta_1 + \theta_2/\rho > 2$，则噪声项消失，无序是无关的；若 $\theta_1 + \theta_2/\rho < 2$，则噪声项爆炸，无序是相关的；情形 $\theta_1 + \theta_2/\rho = 2$ 是边缘的。

具有空间相关但时间独立随机环境的 $1+1$ 定向聚合物模型最早在 [45] 中得到研究，随后在[20]中被推广到更一般的框架。随机环境在时间上相关、但在空间上独立的情形则在 [46]中得到研究。在 [20],中，参数为 $\theta_1 = 1$和 $\theta_2 = 2r-1$，其中 $r = \frac{3}{2} - H \in (1_2, 1)$（回忆一下，$H \in (\frac{1}{2}, 1)$）。根据上述重整化群变换，无序相关性的条件为 $\frac{1}{2} < r < \frac{1+\rho}{2}$。恰在这一条件下，作者证明配分函数依分布收敛到一个 $L^2$-可积随机变量。在 [46], 中，参数为 $\theta_1 = 2-2H$和 $\theta_2 = 1$, 其中 $H \in (\frac{1}{2}, 1],)$，无序相关性的条件为 $H > \frac{1}{2\rho}$。在略强的假设 $\rho \in (1,2])$ 和 $H \in (\frac{1}{2}, 1],)$ 下，这些假设自动蕴含 $H > \frac{1}{2\rho}$，作者证明重标度配分函数依分布收敛到一个 $L^2$-可积随机变量。附加假设 $\rho > 1$ 是为确保 $L^2$-可积性而提出的，其作用类似于我们先前工作 [36]中的条件$\alpha > \frac{1}{2}$。

注意，赫斯特参数 $H = \frac{1}{2}$ 对应白噪声（符合 Harris 判据），而$H < \frac{1}{2}$ 代表粗糙得多的噪声，其协方差必须解释为广义函数。- $H < \frac{1}{2}$ 的情况则复杂得多（例如，参见[41, 第 5]节），而 [45, 20, 46, 36] 中建立的框架不再适用。因此，我们将注意力限制在 $H \geq \frac{1}{2}$ 的情况。对于定向聚合物模型，当随机环境在时间上相互独立时，$L^2$区域与无序相关区域重合，即使环境具有空间相关性也是如此，正如 [45, 20]所示。相反，当

环境在时间上相关时，即使存在空间独立性， $L^2$区域与（预测的）无序相关区域之间也会出现差距；参见 [46]。

现在，我们讨论由 $\mathbb{R}^d$上的随机热方程定义的抛物 Anderson 模型：

$$\partial_t v(t,x) = \Delta v(t,x) + \beta v(t,x)\dot{W}(x), \tag{1.35}$$

其中 $\dot{W}(x)$是满足以下条件的高斯噪声

$$\mathbb{E}[\dot{W}(x)\dot{W}(y)] = \delta(x-y). \tag{1.36}$$

此处噪声是p 纯空间且为白的。类似的重整化群变换给出

$$\partial_t \tilde{v}(t,x) = \Delta \tilde{v}(t,x) + \beta \varepsilon^{\frac{d}{4}-1}\tilde{v}(t,x)\dot{\widetilde{W}}(x), \tag{1.37}$$

这表明临界维数为 $d=4$，并且当 $d<4$时无序是相关的。对于$d=1$，众所周知，解 $v(t,x)$是良定义的，且对任意 $p>0$均为 $L^p$可积（见 [13]）。对于 $d=2$， $L^2$-解的存在性已被确立，但仅在时间上是局部的（见[43, 30]）。后来在 [26, 27] 中，利用正则性结构理论，对 $d=2,3$在整个空间 $[0,+\infty)\times\mathbb{R}^d$上构造了全局解。然而，该解的可积性并未被明确说明。最近， [44] 中证明，对于 $d=2$，通过将Skorohod积分的经典理论推广到 $L^1$情形，存在全局 $L^1$-解。

抛物 Anderson 模型确实由时间相关性很强的噪声驱动。由于不存在时间坐标，该噪声表现出完全的时间相关性，也就是说，同一空间噪声在所有时刻都存在。在这种情形下，我们还观察到，抛物 Anderson 模型的 $L^2$ 区域只是（预测的）无序相关区域的真子集。

最后，我们转向随机热方程（1.1）以及第 1.2 节介绍的无序钉扎模型。通过应用相同的重整化群变换，我们得到，对于 $\tilde{u}(t,\ x)=u(\varepsilon^{-1}t,\ \varepsilon^{-1/\rho}x)$,

$$\partial_t \tilde{u}(t,x) = -(-\Delta)^{\rho/2}\tilde{u}(t,x) + \beta\varepsilon^{1/\rho-H}\tilde{u}(t,x)\delta(x)\tilde{\xi}(t), \tag{1.38}$$

其中 $\tilde{\xi}(t) := \varepsilon^{H-1}\xi(\varepsilon^{-1}t)$ 是另一种时间噪声，其分布与 $\xi(t)$ 相同。这种标度关系表明，无序相关性的条件为 $1/\rho - H < 0 \iff \alpha + H > 1$，这与 Weinrib–Halperin 预测一致。回想一下，我们已在 [36] 中证明， $L^2$ 区域存在当且仅当 $\alpha \geq \frac{1}{2}$，因此 $L^2$ 区域无法扩展到整个无序相关区域。

总之，上述研究表明，噪声中时间相关性的有无，对于判定 $L^2$-区域是否与无序相关区域重合起着决定性作用。对于由时间白噪声驱动的模型，整个无序相关区域都位于 $L^2$-区域之内。相比之下，当噪声为时间有色噪声时，情形变得更为复杂且有趣。如 [44] 及本文所示，一个真正的 $L^1$-区域可能出现在无序相关相中。此外， $L^1$-区域能否延拓至整个无序相关区域仍是一个未决问题。在 [27], 中构造了三维抛物型安德森模型的一个解，但未指明其可积性。对于本文所研究的随机热方程（1.1），该区域

$$\left\{(\alpha,H) : \alpha < \frac{1}{2}, \alpha + H > 1, \alpha + 2H < 2\right\}$$

仍然是一个悬而未决的问题，我们将在第1.4节中进一步讨论。类似地，对于文献 [46], 所研究的定向聚合物模型，其中随机环境在空间上相互独立，但在

时间上存在相关性，一个类似的非-$L^2$ 状态

$$\left\{(\rho,H):\rho\in\left[\frac{1}{2},1\right),H\in\left(\frac{1}{2},1\right],H>\frac{1}{2\rho}\right\}$$

仍然悬而未决。

**1.4. 贡献与讨论**。在本小节中，我们总结本文的主要贡献，并讨论相关的开放性问题。

下面概述本文的主要贡献。

（1）我们通过研究无序钉扎模型的连续对应物——随机热方程（1.1），拓展了无序钉扎模型的研究范围。尽管特殊情形 $\rho=2$ 和 $H=\frac{1}{2}$ 此前已在[54], 中得到研究，但一般的连续形式尚未得到充分探索。对于 $\rho\in$ （$1,2$],随机热方程（1.1）是具有 $\alpha=1-\frac{1}{\rho}\in$（$0,\frac{1}{2}$]的无序钉扎模型的精确连续对应物。相比之下，对于 $\rho\in$（$0,1$], 不存在具有更新过程（1.20）且与随机热方程（1.1）相匹配的相应无序钉扎模型。我们通过构造一个全局 $L^1$-解，证明了随机热方程的适定性，其中 $\rho\in$（$\frac{1}{2H-1}$, 2]。

(2) 据我们所知，这是首次在不存在相应局部 $L^2$-解的情况下，构造出随机热方程的全局 $L^1$-解。我们的工作受到 [44], 的方法和结果的启发；他们构造了二维抛物Anderson模型的全局 $L^1$-解，而其技术关键依赖于局部$L^2$-解的存在。此外，我们证明了 $L^1$-解的正性，因此可以应用 Cole–Hopf 变换，即对解取对数，以研究系统的自由能。

(3) 我们的研究深化了对 Weinrib–Halperin 预测的理解。在早期的研究中，Quentin [3] 证明，对于相关函数足够弱的随机环境（$p>1$见（1.28））， Weinrib–Halperin 预测与 Harris 判据一致。然而，当 $p\leq1$时，经典的无序钉扎模型方法便不再适用，因为自由能始终严格为正，因此不存在临界指数。

在我们先前的工作 [36], 中，我们将分析拓展到了情形 $p<1$。特别地，我们确定了中间无序区域，在条件 $\alpha>\frac{1}{2}$和 $H\in$($\frac{1}{2}$, 1)下证实了无序相关性；这一条件比 Weinrib–Halperin 预测提出的条件 $\alpha+H>1$更强。在本文中，我们进一步将无序相关区域拓展至

$$\left\{(\alpha,H):\alpha<\frac{1}{2},\ H\in\left(\frac{1}{2},1\right),\ \alpha+2H>2\right\},$$

从而部分弥补了先前研究留下的空白。

作为引言的总结，我们列出了一些关于我们的随机热方程（1.1）中的 Weinrib–Halperin 预测，以及相关随机环境中的无序钉扎模型的开放问题。

(1) 要根据 Weinrib–Halperin 预测充分证实区域 $\alpha+H>1$ 具有无序相关性，仍需证明在该区域内

$$\left\{(\alpha,H):\alpha+H>1,\alpha+2H\leq2,\alpha<\frac{1}{2}\right\},$$

该模型确实具有无序相关性。然而，我们的方法依赖于局部时自能有限这一条件（见（1.10））， 因此在这种情况下失效，因为自能几乎处处有限，当且仅当 $\alpha+2H>2$ （见引理4.20）。因此，我们无法证明投影解 $\{u_n$（$t$, $x$）$\}_{n\geq1}$ 的一致可积性（见第4节）。

(2) Weinrib–Halperin判据 $\alpha + H < 1$ 预测的无关无序区域仍鲜有研究。先前的工作 [3, 36] 仅证明了条件$\alpha > \frac{1}{2}$ 足以确保无序相关性。相比之下，关于无关无序区域，无论是一般情形 $\alpha + H < 1$，还是附加假设$\alpha < \frac{1}{2}$ 下的特殊情形，均尚未得到研究。对于（1.28）中的 $p > 1$，文献 [3] 证明临界点$h_c(\beta)$（见（1.27））有限存在。因此，只需证明自由能（见（1.26））在 $\beta > 0$足够小时具有如下渐近性质$F(\beta, h) \approx (h - h_c(\beta))^{1/\alpha}$，如文献 [34], 所示，即可确立 $p > 1$ 和$\alpha < \frac{1}{2}$ 的无序无关性，从而说明含无序模型与均匀模型具有相同的临界指数。对于 $p \in (0, 1)$，即 $H \in (\frac{1}{2}, 1)$，由于 $F(\beta, h)$ 始终为正，且不存在临界指数，因此需要采用新的视角来研究无序无关性。

(3) $\alpha + H = 1$ 的情形对应边缘区域。特殊情形 $\alpha = H = \frac{1}{2}$ 已在 [5, 4, 11, 12, 54]中得到广泛研究。注意，$H = \frac{1}{2}$ 对应白噪声。因此，前述所有研究都处于 Harris 判据的框架内，他们所考虑的整个无序相关区域也与 $L^2$区域重合，这并不令人意外。然而，针对边缘相关聚合物模型所发展的现有方法似乎不适用于具有相关噪声的模型中无序呈边缘相关的情形，因为当 $\alpha + 2H > 2$ 且 $\alpha < \frac{1}{2}$ 时，$L^2$区域已经消失。

### 1.5. 组织 本文的其余部分安排如下

在第2节中，我们将介绍一些必要的预备知识，包括经典 Malliavin 演算和 $L^1$-可积 Skorohod 积分理论，这些内容将在全文中使用。主要结果定理1.2的证明分布在第3 节和4节。具体而言，第3 节利用经典 Malliavin 演算处理 $L^p$-解（$p > 1$），而第4 节则借助 $L^1$-Skorohod 积分（由 [44]中提出）将分析推广至 $L^1$-解。第5 节专门证明定理1.4，该定理涉及解的严格正性。最后，技术性引理汇集于附录A。

## 2. Preliminaries

本节首先回顾经典 Malliavin 演算的一些预备知识，并请读者参阅 [41, 42]以了解更多细节。随后，我们回顾 [44]中提出的 $L^1$-可积 Skorohod 积分理论。

### 2.1. Malliavin 演算。

设 $\xi$ 为高斯噪声，其协方差函数由（1.2）给出。记 $\mathcal{H}$ 为与 $\xi$相联系的希尔伯特空间，它是在内积下由紧支撑光滑函数空间完备化得到的

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^T \int_0^T f(s)g(t)|s - t|^{2H-2} ds dt. \tag{2.1}$$

要证明 $\langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ 确实是一个内积，请参阅 [42, 例 3.5.3]。 $\mathcal{H}$ 上的范数记为 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$。设 $\{e_k(t) \quad t \in [0, T]\}_{k\geq 1}$ 是 $\mathcal{H}$的一组标准正交基，其中的函数均为有界连续函数。因此，对每个 $f \in \mathcal{H}$，都有 $f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \quad e_k\rangle_{\mathcal{H}} e_k$。

设 $\{\xi(f) \quad f \in \mathcal{H}\}$ 是一个协方差为 $\mathbb{E}[\xi(f)\xi(g)] = \langle f, g\rangle_{\mathcal{H}}$. 的等距高斯过程。对每个 $f \in \mathcal{H}$，随机变量 $\xi(f)$ 称为 $f$ 的维纳积分，通常写成随机积分的形式：

$$\int_0^T f(s)\xi(s)\mathrm{d}s := \xi(f).$$

对于 $0 \neq f \in \mathcal{H}$, $f^{\otimes n}$ 的第 $n$ 重多重维纳积分 定义为

$$\mathbf{I}_n(f^{\otimes n}) := \|f\|_{\mathcal{H}}^n H_n\big(\xi(f)/\|f\|_{\mathcal{H}}\big), \tag{2.2}$$

其中

$$H_n(x) := (-1)^n \mathrm{e}^{x^2/2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$\hat{}$是 $n$阶厄米特多项式。令 $\mathcal{H}^{\otimes n}$ 为 $\mathcal{H}^{\otimes n}$ 中仅包含对称$\hat{}$函数的子空间。对于 $f \in \mathcal{H}^{\otimes n}$, $n$ 阶多重维纳积分 $\mathbf{I}_n(f)$ 可通过极限过程根据 (2.2) 定义；注意，形如 $f^{\otimes n}$ 的函数的线性组合在$\hat{}$ $\mathcal{H}^{\otimes n}$中稠密。此外,

$$\mathbb{E}[\mathbf{I}_m(f)\mathbf{I}_n(g)] = n!\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes n}} \mathbf{1}_{\{m=n\}}, \text{ for } f \in \mathcal{H}^{\hat{\otimes} m}, g \in \mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}.$$

对于一般的 $f \in \mathcal{H}^{\otimes n}$，定义$\mathbf{I}_n(f)$: $= \mathbf{I}_n(\hat{} f)$，其中 $\hat{} f$ 是 $f$的对称化（见 (1.5)）。

令 $\mathcal{S}$ 表示形如以下形式的光滑随机变量类

$$F = f(\xi(h_1), \cdots, \xi(h_n)), \text{ for } h_1, \ldots, h_2 \in \mathcal{H}, \tag{2.3}$$

其中 $f$： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是光滑函数，满足 $f$，且其所有偏导数至多具有多项式增长。

**定义 2.1** (马利亚万导数)。 设 $F$ 是形式为 (2.3)的光滑随机变量。的马利亚万导数是一个取值于 $\mathcal{H}$的随机变量，定义为

$$DF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi(h_1), \cdots, \xi(h_n)) h_i. \tag{2.4}$$

注意， $D$ 是从 $\mathcal{S} \subset L^2(\Xi)$ 到 $L^2(\Xi; \mathcal{H})$ 的线性算子。设 $\mathbb{D}^{1,p}$ 满足 $p > 1$，并记其在范数下的闭包为 $\mathcal{S}$

$$\|F\|_{1,p} = \Big(\mathbb{E}[|F|^p] + \mathbb{E}[\|DF\|_{\mathcal{H}}^p]\Big)^{1/p}.$$

**定义 2.2** ($L^2$-Skorohod 积分/散度)。 假设 $u \in L^2(\Xi; \mathcal{H})$，即 $u$ 是一个取值于 $\mathcal{H}$ 的平方可积随机变量。若存在一个 $L^2$-可积随机变量，记为 $\boldsymbol{\delta}(u)$，使得对任意 $F \in \mathbb{D}^{1,2}$，都有，则称 $u$ 是 ***($L^2$-)Skorohod*** 可积的

$$\mathbb{E}\left[\boldsymbol{\delta}(u)F\right] = \mathbb{E}\left[\langle DF, u\rangle_{\mathcal{H}}\right] \tag{2.5}$$

其中 $|\mathbb{E}\left[\boldsymbol{\delta}(u)F\right]| \leq c\|F\|_{L^2(\mathbb{P})}$，其中 $c$是依赖于 $u$ 的常数。我们称 $\boldsymbol{\delta}(u)$ 为 $u$ 的 ***$L^2$-Skorohod*** 积分，或称为 $u$的散度。

特别地，我们有 $\boldsymbol{\delta}(h) = \xi(h)$ 是关于 $h \in \mathcal{H}$ 的维纳积分。 $L^2$-Skorohod 可积过程的集合记为 Dom($\boldsymbol{\delta}$)。对于每个 $u \in$ Dom($\boldsymbol{\delta}$)，我们也将其散度写作一个积分:

$$\int_0^T u(s)\xi(s)\mathrm{d}s := \boldsymbol{\delta}(u).$$

2.2. **$L^1$-Skorohod 积分**。 现在我们汇总 $L^1$-Skorohod 积分理论的一些基本要素，该理论由 [44]提出。回顾（1.8）：

$$\xi_k := \xi(e_k) = \int_0^T e_k(s)\xi(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{H}$的标准正交基。因此， $\{\xi_k, k \in \mathbb{N}\}$ 是一族独立同分布的标准高斯随机变量。令 $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$表示由 $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$生成的 $\sigma$-域。

**定义 2.3** ($L^1$-随机序列的 Skorohod积分)。 设 $D=\{1,\cdots,\max(\mathrm{D})\}$ 有限，或设 $D=\mathbb{N}$，且 $U=\left(u_k\in L^1, k\in D\right)$ 是一个关于 $\sigma(\xi_k:\ k\in D)$可测的随机变量序列。若存在随机变量 $S\in L^1$，使得对于任意 $n\in D$ 以及任意有界可微的 $f:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ （其 $\nabla f$有界），均有

$$\mathbb{E}\left[Sf(\xi_1,\cdots,\xi_n)\right]=\mathbb{E}\left[U\cdot\nabla f(\xi_1,\cdots,\xi_n)\right],$$

则称 $S$ 为 $L^1$-*Skorohod*积分，并记为

$$S:=\int U\xi.$$

**定义 2.4** ($L^1$-Skorohod 随机过程积分)。 设 $D=\{1,\cdots,\max(\mathrm{D})\}$ 有限，或者设 $D=\mathbb{N}$，且 $u$ 是定义在 $[0,T]$ 上、关于 $\sigma(\xi_k:\ k\in D)$可测的随机过程。记

$$u_k:=\langle u,e_k\rangle_{\mathcal{H}}=\int_0^T\int_0^T e_k(t)u(s)|t-s|^{2H-2}\mathrm{d}t\mathrm{d}s.$$

若 $u$ 满足 $L^1$-*Skorohod* 可积，其 *Skorohod* 积分为 $S$，则称 $u_k\in L^1$ 对每个 $k\in D$ 以及$U=(u_k,k\in D)$ 满足 $L^1$-*Skorohod* 可积，其 *Skorohod* 积分为 $S$，其意义见定义 2.3。我们将随机过程 $L^1$的 -*Skorohod* 积分 $S$ 记为 $u$：

$$S:=\int u\,\xi.$$

**注 2.5**。 对于 $u\in\mathrm{Dom}(\boldsymbol{\delta})\subset L^2(\Xi;\ \mathcal{H})$，有

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}\langle u,e_k\rangle_{\mathcal{H}}e_k=:\sum_{k=1}^{\infty}u_ke_k.$$

对于任意 $F=f(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n)$ 具有(2.3) 形式且满足 $\xi_k:=\xi(e_k)$，我们有

$$DF=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\xi_1,\ldots,\xi_n)e_k.$$

由(2.5)，记 $U=(u_1,\ u_2,\ \cdots)$，则有

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{\delta}(u)F]=\mathbb{E}\left[\langle u,DF\rangle_{\mathcal{H}}\right]=\mathbb{E}\left[U\cdot\nabla f(\xi_1,\ldots,\xi_n)\right].$$

这表明，对于 $u\in\mathrm{Dom}(\boldsymbol{\delta})$，散度 $\boldsymbol{\delta}(u)=\int_0^T u(s)\xi(s)\mathrm{d}s$（定义于定义2.2中）与定义 $L^1$的 -*Skorohod* 积分$\int_{\mathbf{o}}u\,\xi=\int_{\mathbf{o}}U\xi$（定义于定义2.4中）一致。特别地，对于确定性过程 $u\in\mathcal{H}$，我们有

$$\boldsymbol{\delta}(u)=\int u\xi=\sum_{k=1}^{\infty}u_k\xi_k.\tag{2.6}$$

**定义 2.6** (投影)。令 $\mathcal{P}_nU:=(U_1,\cdots,U_n,0,0,\cdots)$，其中 $\mathcal{P}_n$ 是投影算子，它将 $U$ 中大于 $n$ 的所有坐标设为0。则 $L^1$-*Skorohod*积分 $\int_{\mathbf{o}}U\xi$ 的 $n$ 维投影定义为

$$\int_{[n]}U\xi:=\int\left(\mathcal{P}_nU\right)\xi.$$

下面的结果分别引自 [44]，中的命题 13 和推论 14。

**命题2.7**。 如果 $U$ 是 $L^1$-*Skorohod* 可积的，那么 $\mathbb{E}\left[\mathcal{P}_nU\middle|\mathcal{F}_n\right]$ 也 $L^1$-*Skorohod* 可积，并且

$$\mathbb{E}\left[\int U\xi\middle|\mathcal{F}_n\right]=\int\mathbb{E}\left[\mathcal{P}_nU\middle|\mathcal{F}_n\right]\xi=\int_{[n]}\mathbb{E}\left[U|\mathcal{F}_n\right]\xi.$$

**命题 2.8**。 设 $U=(u_1,u_2,\dots)$ 是一个取值于 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 的随机向量，且对所有$k\in\mathbb{N}$都有 $u_k\in L^1$。记 $H_n:=\mathbb{E}[\mathcal{P}_nU|\mathcal{F}_n]$。那么以下两个条件等价：

*(1)* 对每个 $n$, $S_n:=\int_0 H_n\xi$ 均存在，且 $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 一致可积。*(2)* $U$ 是 $L^1$-*Skorohod* 可积的。

若上述条件中任一条件成立，则 $S_n$ 是一个鞅，几乎处处收敛，并且在 $L^1$ 中收敛到$\int_0 U\mathrm{d}\xi$。

## 3. On $L^p$-solutions with $p>1$

本节中，我们运用 Malliavin演算 [41] 并沿用 [30, 51] 中的方法，以确定方程 (1.1) 是否存在一个 $L^p$-解，满足 $p>1$。我们证明，对于任意 $p>1$，若解存在且唯一（命题 3.1 和 3.4 以及注 3.5），则当 $\rho=2$ 时，方程不存在 $L^p$-解，但存在局部 $L^p$-解（命题3.2、3.4 以及注3.5）。

如第 1 节所述，我们假设 $\beta=1$ 在（1.1）中。回顾在（1.4）中定义的 $u$ 的 Wiener 混沌展开

$$u(t,x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{I}_n(f_n(t,x;s_1,\cdots,s_n))$$

及其二阶矩

$$\mathbb{E}[u(t,x)^2]=1+\sum_{n=1}^{\infty}n!\|f_n(t,x)\|^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}},\tag{3.1}$$

其中 $f_n(t,\ x)$ 由（1.5）给出。

**命题 3.1**。 当 $\rho\in(0,\ 2)$ 时，方程 $L^2$（1.1）不存在 -解。

证明。 根据（3.1），只需证明当 $\sum_{n=1}^{\infty}n!\|f_n(t,\ x)\|^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}}=\infty$ 时 $\rho\in(0,\ 2)$。注意到

$$\begin{aligned}n!\|f_n(t,x)\|^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}}&=n!\int_{[0,t]^n}\int_{[0,t]^n}f_n(t,x;s_1,\cdots,s_n)f_n(t,x;s_1',\cdots,s_n')\prod_{i=1}^{n}|s_i-s_i'|^{2H-2}\mathrm{d}\boldsymbol{s}\mathrm{d}\boldsymbol{s}'\\&\geq t^{(2H-2)n}n!\left(\int_{\boldsymbol{s}\in[0,t]^n_<}g_\rho(t-s_n,x)\prod_{i=1}^{n-1}g_\rho(s_{i+1}-s_i,0)\mathrm{d}\boldsymbol{s}\right)^2.\end{aligned}\tag{3.2}$$

由引理 A.5，我们有

$$\begin{aligned}n!\|f_n(t,x)\|^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}}&\geq t^{(2H-2)n}n!C^{2n}\left(\int_{s\in[0,t]^n_<}(s_2-s_1)^{-\frac{1}{\rho}}\cdots(s_n-s_{n-1})^{-\frac{1}{\rho}}(t-s_n)\mathrm{d}\boldsymbol{s}\right)^2\\&=C^{2n}n!\frac{\Gamma(1-\frac{1}{\rho})^{2(n-1)}\Gamma(2)^2}{\Gamma(n(1-\frac{1}{\rho})+\frac{1}{\rho}+2)^2}t^{2n(H-\frac{1}{\rho})+\frac{2}{\rho}+2}\\&\geq C^{2n}\ n^{-4}n^{n(\frac{2}{\rho}-1)}t^{2n(H-\frac{1}{\rho})+\frac{2}{\rho}+2},\end{aligned}\tag{3.3}$$

其中等式由引理 A.4 得出，最后一个不等式则由斯特林近似得出。因此，对于 $\rho\in(0,2),\sum_{n=1}^{\infty}n!\|f_n\|^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}}=\infty$，这就证明了所需结果。□

**命题 3.2.** 当 $\rho=2$ （等价地， $\alpha=\frac{1}{2}$ ）时，方程 (1.1) 存在局部 $L^2$-解，即存在常数 $t_c\in(0,\infty)$ 使得 $L^2$-解在时间区间$[0,t_c)$上存在，而 $\sum_{n=1}^{\infty}n!\|f_n(t,x)\|^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}}=\infty$ 对所有 $t>t_c$均成立。

证明。 我们先证明当 $\rho = 2$时不存在全局 $L^2$-解。根据命题 3.1的证明中相同的论证，我们可得到相同的估计（3.3）。因此，注意到 $H > \frac{1}{2}$，对充分大的 $t$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\|f_n(t,x)\|_{\mathcal{H}^{\otimes n}}^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} C^{2n} n^{-4} t^{2n(H-\frac{1}{2})+3} = \infty. \tag{3.4}$$

还需证明存在一个局部 $L^2$-解。依次应用引理 A.3、A.4和 A.5，可得

$$\begin{aligned} & n!\|f_n(t,x)\|_{\mathcal{H}^{\otimes n}}^2 \leq C^{2n}\|f_n\|_{L^{1/H}(\mathbb{R}^n)}^2 \\ & \leq C^{2n}(n!)^{2H-1}\left(\int_{s\in[0,t]_<^n} (s_2-s_1)^{-\frac{1}{2H}}\cdots(s_n-s_{n-1})^{-\frac{1}{2H}}(t-s_n)^{-\frac{1}{2H}}\mathrm{d}s\right)^{2H} \\ & = C^{2n}(n!)^{2H-1}\frac{\Gamma(1-\frac{1}{2H})^{2nH}}{\Gamma(n(1-\frac{1}{2H})+1)^{2H}} t^{2nH(1-\frac{1}{2H})}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

注意到，根据 Stirling 近似，当 $n$足够大时，有

$$\frac{(n!)^{2H-1}}{\Gamma(n(1-\frac{1}{2H})+1)^{2H}} \leq C^n\sqrt{n},$$

这意味着

$$n!\|f_n(t,x)\|_{\mathcal{H}^{\otimes n}}^2 \leq C^n\sqrt{n}t^{n(2H-1)}. \tag{3.6}$$

因此，当 $t>0$ 足够小时，

$$\mathbb{E}[u(t,x)^2] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n!\|f_n(t,x)\|_{\mathcal{H}^{\otimes n}}^2 < \infty. \tag{3.7}$$

最后，注意到 $\|f_n(t,x)\|_{\mathcal{H}^{\otimes n}}^2$关于 $t$递增，因为 $f_n$非负，因此 $\mathbb{E}[u(t,x)^2]$关于 $t$递增。令 $t_c := \sup\{t>0 : \mathbb{E}[u(t,x)^2] < \infty\}$，证明完成。 □

**注 3.3**。 由上述论证可直接看出，对于一般的 $\beta > 0$ 在 (1.1)中，唯一的影响是在 $\beta^{2n}$ 的二阶矩中引入一个额外因子 $n$阶混沌。该因子在 $\rho \in (0,2)$范围内不产生影响，而在临界情形 $\rho = 2$ 下，它只会使临界点发生定量偏移 $t_c$。

为了证明对于任意 $L^p$，当 $\rho \in (0,2)$ 且 $p > 1$ 时不存在解，我们在解唯一的情况下证明，存在一个 $L^p$-解意味着存在一个 $L^2$-解，其对应的 $\beta$ 可能不同于 (1.1) 中的 $u_\lambda$。设 $u_\lambda$ 为满足 1.1且具有 $\beta = \sqrt{\lambda}$的温和解。下述结果的灵感来自 [32] (另见 [35, 引理 2])。

**命题 3.4**。 假设 (1.1) 的解唯一。对任意 $1 < p \leq q$，有

$$\left\|u_{\frac{p-1}{q-1}\lambda}(t,x)\right\|_{L^q(\mathbb{P})} \leq \|u_\lambda(t,x)\|_{L^p(\mathbb{P})}.$$

证明。 令 $\{T_\tau\}_{\tau\geq 0}$ 表示与噪声 $\xi$ 相关的高斯空间中的奥恩斯坦–乌伦贝克半群（见 [41, 第1.4节。1]）。对于定义在 $\mathbb{R}^{\mathcal{H}}$ 上的有界可测函数 $f$

根据 Mehler 公式（见 [41, 公式 (1.67)]），

$$T_\tau f(\xi) = \mathbb{E}'\left[f\left(e^{-\tau}\xi(s) + \sqrt{1-e^{-2\tau}}\xi'(s)\right)\right], \tag{3.8}$$

其中，$\xi'$ 是 $\xi$ 的一个独立副本，其概率和期望分别为 $\mathbb{P}'$ 和 $\mathbb{E}'$。注意，在联合概率 $\mathbb{P}\times\mathbb{P}'$下，$e^{-\tau}\xi(s)+\sqrt{1-e^{-2\tau}}\xi'(s)$ 与 $\xi$同分布。

对于每个 $\tau\geq 0$，令$u_{\tau,\lambda}$为由噪声 $e^{-\tau}\xi(s)$ 驱动的方程 (1.1) 的温和解，其中 $\beta=\sqrt{\lambda}+\sqrt{1-e^{-2\tau}}\xi'(s)$，即

$$u_{\tau,\lambda}(t,x)=1+\sqrt{\lambda}\int_0^t g_\rho(t-s,x)u_{\tau,\lambda}(s,0)\big(e^{-\tau}\xi(s)+\sqrt{1-e^{-2\tau}}\xi'(s)\big)\mathrm{d}s.$$

由 Mehler 公式 (3.8)，可得 $T_\tau u_\lambda(t,\ x)=\mathbb{E}'[u_{\tau,\lambda}(t,\ x)]$。于是，

$$\begin{aligned}T_\tau u_\lambda(t,x)&=1+\sqrt{\lambda}\mathbb{E}'\left[\int_0^t g_\rho(t-s,x)u_{\tau,\lambda}(s,0)\big(e^{-\tau}\xi(s)+\sqrt{1-e^{-2\tau}}\xi'(s)\big)\mathrm{d}s\right]\\&=1+\sqrt{\lambda}\int_0^t g_\rho(t-s,x)\mathbb{E}'[u_{\tau,\lambda}(s,0)]e^{-\tau}\xi(s)\mathrm{d}s\\&=1+\sqrt{\lambda}e^{-\tau}\int_0^t g_\rho(t-s,x)T_\tau u_\lambda(s,0)\xi(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

因此，$T_\tau u_\lambda$是方程 (1.1) 的一个解，其中$\beta=\sqrt{\lambda}e^{-\tau}$，由解唯一的假设可知 $T_\tau u_\lambda=u_{e^{-2\tau}\lambda}$。根据 Ornstein-Uhlenbeck 半群的超收缩性（见[41, 定理 1.4。1]），我们有

$$\|u_{e^{-2\tau}\lambda}(t,x)\|_{L^{q(\tau)}(\mathbb{P})}=\|T_\tau u_\lambda(t,x)\|_{L^{q(\tau)}(\mathbb{P})}\leq\|u_\lambda(t,x)\|_{L^p(\mathbb{P})}$$

对所有满足 $q(\tau)=1+e^{2\tau}(p-1)$的 $1<p<\infty$和 $\tau\geq 0$均成立。然后取$e^{-2\tau}=\frac{p-1}{q-1}$ 即可得到所需结果。□

注 *3.5.* 对于 $\rho=2$ 和 $\beta=1$，命题 *3.2* 表明，当 $t\in[0,t_c)$ 时，存在一个 $L^2$-解。随后，命题 *3.4* 使我们能够证明该解对任意 $r>1$ 都具有 $L^r$-可积性。若 $r\in(1,2)$，则显然，由 *Jensen* 不等式可得 $\|u(t,x)\|_{L^r(\mathbb{P})}\leq\|u(t,x)\|_{L^2(\mathbb{P})}<\infty$（当 $t\in[0,t_c)$ 成立；另一方面，将命题 *3.4* 应用于 $p=r$、$q=2$和 $\lambda=1$，可得 $\|u(t,x)\|_{L^r(\mathbb{P})}\geq\|u_{r-1}(t,x)\|_{L^2(\mathbb{P})}$，这意味着当 $t>0$ 足够大时，$\|u(t,x)\|_{L^r(\mathbb{P})}=\infty$。类似地，若$r>2$，则当 $t>t_c$ 时，$\|u(t,x)\|_{L^r(\mathbb{P})}\geq\|u(t,x)\|_{L^2(\mathbb{P})}=\infty$；将命题 *3.4* 应用于$p=2$、$q=r$ 和 $\lambda=r-1$，可得 $\|u(t,x)\|_{L^r(\mathbb{P})}\leq\|u_{r-1}(t,x)\|_{L^2(\mathbb{P})}<+\infty$，其中 $t>0$ 足够小。

对于 $\rho\in(0,\ 2)$，上述论证同样适用。如果存在某个 $L^p$-解，且 $p>1$，那么必定存在局部 $L^2$-解，这与命题 *3.1*矛盾。

## 4. On $L^1$-Skorohod solution

本节中，我们研究随机热方程（ $L^1$-Skorohod 解1.1）。在本节中，我们始终假设 $\rho\in(1,2]$。

**4.1. -稳定过程的局部时。** 为后续分析做准备，本小节汇集了关于 $\rho$-稳定过程 $X$ for $\rho\in(1,2]$ 的一些预备知识。

令 $L_s^x$ 表示 $X$ 在水平 $x$ 处截至时间 $s$ 的局部时，其定义为

$$L_s^x:=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^s\delta_\varepsilon(X_r-x)\mathrm{d}r=:\lim_{\varepsilon\to 0^+}L_{s,\varepsilon}^x,\tag{4.1}$$

其中 $\delta_\varepsilon$ 在（1.18）中定义。根据 [8, 第五章命题2], , 收敛在$t\in[0,T]$ 中关于 $L^2$（$\mathbf{P}$）一致，如果 $\rho\in$ $(1,2]$,, 即

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,T]}\left|L^x_{s,\varepsilon}-L^x_s\right|^2\right]=0, \tag{4.2}$$

因此， $L^x_s$ 几乎必然是关于 $t$ 的连续非减函数。下文中，为简化记号，当 $x=0$ 时，我们记作 $L_s=L^0_s$。

对于每个 $x\in\mathbb{R}$,

$$\nu^x_L(A):=\int_0^T \mathbf{1}_A(s)\mathrm{d}L^x_s,\ A\in\mathcal{B}([0,T]) \tag{4.3}$$

定义了博雷尔集 $\mathcal{B}([0,T])$ 上的一个随机测度。

记

$$\nu^x_{L,\varepsilon}(A):=\int_0^T \mathbf{1}_A(s)\mathrm{d}L^x_{s,\varepsilon},\ A\in\mathcal{B}([0,T]). \tag{4.4}$$

我们有如下关于 $\nu^x_{L,\ \varepsilon}$ 的弱收敛。

**引理 4.1.** 对每个 $x\in\mathbb{R}$，当 $\varepsilon\to 0$ 时，随机测度序列 $\nu^x_{L,\varepsilon}$ 在 $L^2(\mathbf{P})$ 中弱收敛于 $\nu^x_L$，即对任意 $f\in C([0,T])$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{E}\left|\int_0^T f(s)\mathrm{d}\nu^x_{L,\varepsilon}-\int_0^T f(s)\mathrm{d}\nu^x_L\right|^2=0.$$

证明. 不失一般性，我们假设 $x=0$ 并省略上标 $x$。我们证明，对任意 $\eta>0$，存在 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\eta)$，使得对任意 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$,

$$\left\|\int_0^T f(s)\mathrm{d}\nu_{L,\varepsilon}-\int_0^T f(s)\mathrm{d}\nu_L\right\|_{L^2(\mathbf{P})}<\eta.$$

给定 $f\in C([0,T])$，设 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为一列连续可微函数，使得 $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_\infty=0$ 在 $C([0,T])$ 上成立。我们有

$$\left\|\int_0^T f(s)\mathrm{d}\nu_L-\int_0^T f_n(s)\mathrm{d}\nu_L\right\|_{L^2(\mathbf{P})}\le\sup_{s\in[0,T]}\left|f(s)-f_n(s)\right|\left\|\nu_L([0,T])\right\|_{L^2(\mathbf{P})},$$

并且类似地

$$\left\|\int_0^T f(s)\mathrm{d}\nu_{L,\varepsilon}-\int_0^T f_n(s)\mathrm{d}\nu_{L,\varepsilon}\right\|_{L^2(\mathbf{P})}\le\sup_{s\in[0,t]}\left|f(s)-f_n(s)\right|\left\|\nu_{L,\varepsilon}([0,T])\right\|_{L^2(\mathbf{P})}.$$

注意到 $\sup_{\varepsilon>0}\|\nu_{L,\varepsilon}([0,T])\|_{L^2(\mathbf{P})}<\infty$ 由 (4.2)。对给定 $\eta>0$，存在 $n_0=n_0(\eta)\in\mathbb{N}$，使得对 $n\ge n_0$ 以及任意 $\varepsilon>0$,

$$\left\|\int_0^T f(s)\mathrm{d}\nu_L-\int_0^T f_n(s)\mathrm{d}\nu_L\right\|_{L^2(\mathbf{P})}\le\frac{\eta}{3}\quad\text{and}\quad\left\|\int_0^T f(s)\mathrm{d}\nu_{L,\varepsilon}-\int_0^T f_n(s)\mathrm{d}\nu_{L,\varepsilon}\right\|_{L^2(\mathbf{P})}\le\frac{\eta}{3}. \tag{4.5}$$

然后，通过分部积分，我们有

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^T f_{n_0}(s)\mathrm{d}\nu_L-\int_0^T f_{n_0}(s)\mathrm{d}\nu_{L,\varepsilon}\right\|_{L^2(\mathbf{P})}&=\left\|f_{n_0}(T)(L_T-L_{T,\varepsilon})-\int_0^T(L_s-L_{s,\varepsilon})f'_{n_0}(s)\mathrm{d}s\right\|_{L^2(\mathbf{P})}\\&\le\left(\left|f_{n_0}(T)\right|+\int_0^T\left|f'_{n_0}(s)\right|\mathrm{d}s\right)\left\|\sup_{s\in[0,T]}\left|L_s-L_{s,\varepsilon}(s)\right|\right\|_{L^2(\mathbf{P})}.\end{aligned}$$

由（4.2），存在 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\eta,n_0)$，使得对所有 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$，

$$\left\|\int_0^t f_{n_0}(s)\mathrm{d}\nu_L-\int_0^t f_{n_0}(s)\mathrm{d}\nu_{L,\varepsilon}\right\|_{L^2(\mathbf{P})}\leq\frac{\eta}{3}. \tag{4.6}$$

结合（4.5）和（4.6），由三角不等式可知，对于所有 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$，

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^T f(s)\mathrm{d}\nu_{L,\varepsilon}-\int_0^T f(s)\mathrm{d}\nu_L\right\|_{L^2(\mathbf{P})}\leq&\left\|\int_0^T f(s)\mathrm{d}\nu_L-\int_0^T f_{n_0}(s)\mathrm{d}\nu_L\right\|_{L^2(\mathbf{P})}\\&+\left\|\int_0^T f(s)\mathrm{d}\nu_{L,\varepsilon}-\int_0^T f_{n_0}(s)\mathrm{d}\nu_{L,\varepsilon}\right\|_{L^2(\mathbf{P})}\\&+\left\|\int_0^T f_{n_0}(s)\mathrm{d}\nu_L-\int_0^T f_{n_0}(s)\mathrm{d}\nu_{L,\varepsilon}\right\|_{L^2(\mathbf{P})}\leq\eta.\end{aligned}$$

□

对于每个 $t\in[0,T]$，注意到$\mathbf{P}_{(t,x)}\left((L_s)_{0\leq s\leq t}\in\cdot\right)=\mathbf{P}\left((L^x_{t-s})_{0\leq s\leq t}\in\cdot\right)$ 由时间反演可得。下面的引理给出了计算关于 $\mathrm{d}L_s$ 的积分的$\mathbf{E}^{(t,x)}$-期望的公式。

**引理 4.2**。设 $F_s$ 是一个适应过程，且 $f(s)$ 是一个确定性可测函数。那么

$$\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\int_0^t F_s\mathrm{d}L_s\right]=\int_0^t\mathbf{E}_{(s,0)}\left[F_s\right]g_\rho(t-s,x)\mathrm{d}\mathbf{s}, \tag{4.7}$$

$$\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\int_0^t f(s)\mathrm{d}L_s\right]=\int_0^t f(s)g_\rho(t-s,x)\mathrm{d}\mathbf{s}, \tag{4.8}$$

若右侧存在。对于确定性可测对称函数 $f(s_1,\cdots,s_n)$，有

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\int_{[0,t]^n}f(s_1,\cdots,s_n)\mathrm{d}L_{s_1}\cdots\mathrm{d}L_{s_n}\right]\\=&n!\int_{[0,t]^n_<}f(s_1,\cdots,s_n)g_\rho(s_2-s_1,0)\cdots g_\rho(t-s_n,x)\mathrm{d}\mathbf{s},\end{aligned} \tag{4.9}$$

若右侧存在。

证明。我们仅证明（4.7），而（4.8）和（4.9）的证明类似。对于正的有界适应过程 $F_s$，有

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\int_0^t F_s\mathrm{d}L_s\right]&=\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^t F_s\delta_\varepsilon(X_s)\mathrm{d}s\right]=\lim_{\varepsilon\to0^+}\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\int_0^t F_s\delta_\varepsilon(X_s)\mathrm{d}s\right]\\&=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^t\mathbf{E}_{(t,x)}\left[F_s\delta_\varepsilon(X_s)\right]\mathrm{d}s=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\mathbf{E}_{(s,y)}\left[F_s\right]\delta_\varepsilon(y)g_\rho(t-s,x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\\&=\int_0^t\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\mathbb{R}}\mathbf{E}_{(s,y)}\left[F_s\right]\delta_\varepsilon(y)g_\rho(t-s,x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s=\int_0^t\mathbf{E}_{(s,0)}\left[F_s\right]g(t-s,x)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中第二个等式由控制收敛定理得出，并借助引理A.5，第三个等式由富比尼定理得出，第四个等式由稳定过程的马尔可夫性质以及 $F_s$的适应性得出，最后两个等式同样由控制收敛定理得出。这证明了（4.7）对正的有界 $F_s$成立。该结果可借助单调收敛定理推广到一般的正适应过程，而一般情形则由分解 $F=F^+-F^-$得出。□

回顾我们已假设 $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ 贯穿全文。我们有如下关于互能（4.27）与自能（4.43）的推论，它们将用于第4.4–4.6节。

**推论 4.3.** 对于 $\rho \in (1, 2]$,

$$\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\int_0^t \int_0^t |r-s|^{2H-2} \mathrm{d}L_r \mathrm{d}L_s\right] < \infty, \quad \textit{iff } -\frac{1}{\rho} + 2H > 1.$$

证明. 由 (4.9) 和 $g_\rho(r-s,0) = c(r-s)^{-1/\rho}$，可得

$$\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\int_0^t \int_0^t |r-s|^{2H-2} \mathrm{d}L_r \mathrm{d}L_s\right] = 2c \int_0^t \mathrm{d}r \int_0^r (r-s)^{-\frac{1}{\rho}+2H-2} g_\rho(t-r, x)\mathrm{d}s,$$

其中，当且仅当 $-\frac{1}{\rho} + 2H - 2 > -1 \Longleftrightarrow -\frac{1}{\rho} + 2H > 1$ 时，内层积分有限；根据引理 A.5，由于 $\rho > 1$，外层积分有限。□

**推论 4.4.** 设 $L'$ 是 $L$ 的一个独立副本。对于 $\rho \in (1, 2]$

$$\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,0)}\left[\int_0^t \int_0^t |r-s|^{2H-2} \mathrm{d}L_r \mathrm{d}L'_s\right] < \infty, \quad \textit{iff } H > \frac{1}{\rho},$$

对于 $x \neq 0$,

$$\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\int_0^t \int_0^t |r-s|^{2H-2} \mathrm{d}L_r \mathrm{d}L'_s\right] < \infty, \quad \textit{for all } H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

证明。与推论 4.3 的证明一样，当 $x = 0$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,0)}\left[\int_0^t \int_0^t |r-s|^{2H-2} \mathrm{d}L_r \mathrm{d}L'_s\right] =& c\int_0^t \int_0^t (t-r)^{-\frac{1}{\rho}}(t-s)^{-\frac{1}{\rho}}|r-s|^{2H-2}\mathrm{d}r\mathrm{d}s \\ =& c\int_0^t \int_0^t r^{-\frac{1}{\rho}} s^{-\frac{1}{\rho}}|r-s|^{2H-2}\mathrm{d}r\mathrm{d}s \le C\left(\int_0^t r^{-\frac{1}{\rho H}}\mathrm{d}r\right)^{2H}\end{aligned}$$

由引理 A.3，若 $H > \frac{1}{\rho}$ 则其为有限。另一方面，注意到

$$\begin{aligned}&\int_0^t \int_0^t r^{-\frac{1}{\rho}} s^{-\frac{1}{\rho}}|r-s|^{2H-2}\mathrm{d}r\mathrm{d}s \ge \int_0^t r^{-\frac{1}{\rho}}\mathrm{d}r \int_0^r s^{-\frac{1}{\rho}}(r-s)^{2H-2}\mathrm{d}s \\ \ge& \int_0^t r^{-\frac{2}{\rho}}\mathrm{d}r \int_0^r (r-s)^{2H-2}\mathrm{d}s = \frac{1}{2H-1}\int_0^t r^{-\frac{2}{\rho}+2H-1}\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

若 $-\frac{2}{\rho} + 2H - 1 > -1$ 则为有限，这与 $H > \frac{1}{\rho}$ 是同一条件。

当 $x \neq 0$, 我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\int_0^t \int_0^t |r-s|^{2H-2} \mathrm{d}L_r \mathrm{d}L'_s\right] &= \int_0^t \int_0^t g_\rho(t-r, x) g_\rho(t-s, x)|r-s|^{2H-2}\mathrm{d}r\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \int_0^t g_\rho(r, x) g_\rho(s, x)|r-s|^{2H-2}\mathrm{d}r\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

根据引理A.5，$g_\rho(t, x) \le C|x|^{-(1+\rho)}t$。因此，对于所有$H > \frac{1}{2}$，该积分均有限。□

4.2. **方程的投影。** 回顾定义1.1中随机热方程（1.1）的温和解，其中 $u_0(x) \equiv 1$，即1.1，即：

$$u(t,x) = 1 + \int g_\rho(t-\cdot,x)u(\cdot,0)\mathbf{1}_{[0,t]}(\cdot)\xi. \tag{4.10}$$

假设这样的温和解 $u$ 存在，我们将在下面的命题中证明，其条件期望 $\mathbb{E}[u|\xi_1,\dots,\xi_n]$ 满足由有限维噪声$\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$驱动的相应随机热方程。

**命题 4.5。** 设 $u \in L^1(\Xi)$ 是方程 (1.1) 在定义 *1.1*意义下的温和解。则$u_n := \mathbb{E}[u|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[u|\xi_1,\dots,\xi_n]$ 满足投影方程（见定义 *2.6*）

$$u_n(t,x) = 1 + \int_{[n]} \mathbf{1}_{[0,t]}(\cdot)g_\rho(t-\cdot,x)u_n(\cdot,0)\xi. \tag{4.11}$$

证明。 由命题 2.7，可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int g_\rho(t-\cdot,x)u(\cdot,0)\mathbf{1}_{[0,t]}(\cdot)\xi\middle|\mathcal{F}_n\right] &= \int_{[n]}\mathbb{E}\left[g_\rho(t-\cdot,x)u(\cdot,0)\mathbf{1}_{[0,t]}\middle|\mathcal{F}_n\right]\xi \\ &= \int_{[n]} g_\rho(t-\cdot,x)\mathbf{1}_{[0,t]}\mathbb{E}\left[u(\cdot,0)\middle|\mathcal{F}_n\right]\xi \\ &= \int_{[n]} g_\rho(t-\cdot,x)\mathbf{1}_{[0,t]}u_n(\cdot,0)\xi.\end{aligned}$$

对（ $\mathbb{E}[\cdot|\mathcal{F}_n]$4.10）取条件期望，得到（4.11）。 □

接下来，我们给出 $u_n$ 的一个显式公式。回顾一下， $\{e_k(t)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个有界正交归一基。为简化记号，在本文余下部分我们记

$$\tilde{e}_k(t) := \int_0^T e_k(r)|t-r|^{2H-2}\mathrm{d}r. \tag{4.12}$$

不难验证， $\tilde{e}_k(t)$ 也是一个有界函数。我们有如下命题。

**命题 4.6.** 存在方程的唯一解 (4.11)，其表达式为

$$u_n(t,x) = Z_n(t,x) := \mathbf{E}_{(t,x)}[M_n(t)], \tag{4.13}$$

其中

$$M_n(t) := \exp\left\{\sum_{k=1}^n\left(m_k(t)\xi_k - \frac{1}{2}m_k(t)^2\right)\right\} \tag{4.14}$$

其中 $m_k(t)$ 定义为

$$m_k(t) := \int_0^t \tilde{e}_k(s)\mathrm{d}L_s. \tag{4.15}$$

证明。 注意 $m_k(t) = \int_0^t \tilde{e}_k(s)\mathrm{d}L_s$ 是良定义的 $\mathbf{P}^{(t,x)}$-几乎处处（参见第 4.1节），因此 $G_n(t) := \sum_{k=1}^n\left(m_k(t)\xi_k - \frac{1}{2}m_k(t)^2\right)$ 也是良定义的（$\mathbf{P}_{(t,x)}\times\mathbb{P}$）-几乎处处。由（4.14），可得

$$\begin{aligned}M_n(t) &= 1 + \int_0^t M_n(s)\mathrm{d}G_n(s) = 1 + \int_0^t M_n(s)\sum_{k=1}^n\left(\xi_k - m_k(s)\right)\mathrm{d}m_k(s) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n\int_0^t\left(M_n(s)\xi_k - M_n(s)m_k(s)\right)\mathrm{d}m_k(s).\end{aligned}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} u_n(t,x) :=& \mathbf{E}_{(t,x)}\left[M_n(t)\right] = 1 + \mathbf{E}_{(t,x)}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_0^t \left(M_n(s)\xi_k - M_n(s)m_k(s)\right)\mathrm{d}m_k(s)\right] \\ =& 1 + \mathbf{E}_{(t,x)}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_0^t \tilde{e}_k(s)\left(M_n(s)\xi_k - M_n(s)m_k(s)\right)\mathrm{d}L_s\right] \\ =& 1 + \mathbf{E}_{(t,x)}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_0^t \tilde{e}_k(s)\left(M_n(s)\xi_k - \partial_{\xi_k}M_n(s)\right)\mathrm{d}L_s\right]. \end{aligned} \tag{4.16}$$

注意，在 $\xi$ 的条件分布下，$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k(s)^2$ 中的 exp( $M_n(s)$ 项支配了上述积分中的被积函数。因此，$\sum_{k=1}^{n}\left|\tilde{e}_k(s)\left(M_n(s)\xi_k - \partial_{\xi_k}M_n(s)\right)\right|$ 一致有界 $\mathbb{P}$-几乎处处成立，因此我们可以对 (4.2 右端的第二项应用引理 4.16)，得到

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_0^t \tilde{e}_k(s)\Big(M_n(s)\xi_k - \partial_{\xi_k}M_n(s)\Big)\mathrm{d}L_s\right] \\ =& \int_0^t \mathbf{E}_{(s,0)}\left[\sum_{k=1}^{n}\tilde{e}_k(s)\Big(M_n(s)\xi_k - \partial_{\xi_k}M_n(s)\Big)\right] g_\rho(t-s,x)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

根据 (4.11)，只需验证

$$\int_0^t \mathbf{E}_{(s,0)}\left[\sum_{k=1}^{n}\tilde{e}_k(s)\Big(M_n(s)\xi_k - \partial_{\xi_k}M_n(s)\Big)\right] g_\rho(t-s,x)\mathrm{d}s = \int_{[n]}\mathbf{1}_{[0,t]}(\cdot)g_\rho(t-\cdot,x)u_n(\cdot,0)\xi. \tag{4.17}$$

回顾定义 $L^1$-Skorohod积分，见定义 2.3 和 2.4。对于一个具有有界导数的光滑函数$F$： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，我们断言

$$\mathbb{E}\left[F(\xi)\sum_{k=1}^{n}\tilde{e}_k(s)\Big(M_n(s)\xi_k - \partial_{\xi_k}M_n(s)\Big)\right] = \mathbb{E}\Big[\nabla F(\xi)\cdot\big(\tilde{e}_1(s),\cdots,\tilde{e}_n(s)\big)M_n(s)\Big], \tag{4.18}$$

其中 $F(\xi) := F(\xi_1,\ldots,\xi_n)$。记 $\mathcal{J}_j := \sigma\{\xi_i, i\neq j\}$，以及 $\xi_k(x) := (\xi_1,\cdots,\xi_{k-1},x,\xi_{k+1},\cdots,\xi_n)$。由分部积分可得，

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\big[F(\xi)\tilde{e}_k(s)M_n(s)\xi_k\big|\mathcal{J}_{\hat{k}}\big] \\ =& \int_{\mathbb{R}} F\big(\hat{\xi}_k(x)\big)\tilde{e}_k(s)M_n\big(\hat{\xi}_k(x)\big)(s)\cdot x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x \\ =& \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\tilde{e}_k(s)\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\big(\hat{\xi}_k(x)\big)M_n\big(\hat{\xi}_k(x)\big)(s) + F\big(\hat{\xi}_k(x)\big)\partial_{\xi_k}M_n\big(\hat{\xi}_k(x)\big)(s)\right)\mathrm{d}x \\ =& \mathbb{E}\left[\frac{\partial F}{\partial x_k}(\xi)\tilde{e}_k(s)M_n(s) + F(\xi)\tilde{e}_k(s)\partial_{\xi_k}M_n(s)\Big|\mathcal{J}_{\hat{k}}\right]. \end{aligned} \tag{4.19}$$

对 $k$ 求和，并对（4.19）取期望，即可证明（4.18）。

于是我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[F(\xi)\int_0^t \mathbf{E}_{(s,0)}\sum_{k=1}^n \tilde{e}_k(s)\Big(M_n(s)\xi_k-\partial_{\xi_k}M_n(s)\Big)g_\rho(t-s,x)\mathrm{d}s\right]\\
&=\int_0^t \mathbf{E}_{(s,0)}\mathbb{E}\left[F\sum_{k=1}^n \tilde{e}_k(s)\Big(M_n(s)\xi_k-\partial_{\xi_k}M_n(s)\Big)\right]g_\rho(t-s,x)\mathrm{d}s\\
&\overset{(4.18)}{=\!=\!=}\int_0^t \mathbf{E}_{(s,0)}\mathbb{E}\Big[\nabla F\cdot\big(\tilde{e}_1(s),\cdots,\tilde{e}_n(s)\big)M_n(s)\Big]g_\rho(t-s,x)\mathrm{d}s\\
&=\int_0^t \mathbb{E}\Big[\nabla F\cdot\big(\tilde{e}_1(s),\cdots,\tilde{e}_n(s)\big)\mathbf{E}_{(s,0)}\big[M_n(s)\big]\Big]g_\rho(t-s,x)\mathrm{d}s\\
&=\mathbb{E}\left[\int_0^T \mathbf{1}_{[0,t]}(s)\nabla F\cdot\big(\tilde{e}_1(s),\cdots,\tilde{e}_n(s)\big)\,u_n(s,0)g_\rho(t-s,x)\mathrm{d}s\right]\\
&=\mathbb{E}\left[F(\xi)\int_{[n]}\mathbf{1}_{[0,t]}(\cdot)g_\rho(t-\cdot,x)u_n(\cdot,0)\xi\right],
\end{aligned}\tag{4.20}$$

这验证了（4.17），其中最后一个等号由定义2.4 和2.6以及记号（4.12）得出。因此， $u_n(t,x)$ $= Z_n(t,x) := \mathbf{E}_{(t,x)}[M_n(t)]$ 是（4.11）的一个解。

最后，我们证明解的唯一性。设 $u, v$ 是（4.11）的两个解。考虑傅里叶型测试函数 $F(\xi) = \exp\left(i\sum_{k=1}^n \lambda_k\xi_k\right)$. 令 $w := \mathbb{E}[(u-v)F(\xi)]$。由定义2.4，可得

$$\begin{aligned}
w(t,x)&=\mathbb{E}\left[F(\xi)\int_{[n]}\mathbf{1}_{[0,t]}(s)g_\rho(t-s,x)(u-v)(s,0)\xi\right]\\
&=\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^n i\lambda_j F(\xi)\langle\mathbf{1}_{[0,t]}(\cdot)g_\rho(t-\cdot,x)(u-v)(\cdot,0),e_j\rangle_{\mathcal{H}}\right]\\
&=\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^n\int_0^T i\lambda_j\mathbf{1}_{[0,t]}(s)g_\rho(t-s,x)(u-v)(s,0)F(\xi)\tilde{e}_j(s)\mathrm{d}s\right]\\
&=:\int_0^t \tilde{h}(s)g_\rho(t-s,x)w(s,0)\mathrm{d}s,
\end{aligned}\tag{4.21}$$

˜其中 $h(s) := \sum_{j=1}^n i\lambda_j\tilde{e}_j(s)$。因此，令 $x=0$，可得

$$\begin{aligned}
|w(t,0)|&\le C\int_0^t|\tilde{h}(s)|g_\rho(t-s,0)|w(s,0)|\mathrm{d}s\\
&\le C\|\tilde{h}\|_\infty\int_0^t(t-s)^{-\frac{1}{\rho}}|w(s,0)|\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

由 Henry-Gr¨onwall 不等式 [29, 引理 7.1.1], 可得 $|w(t,0)| \equiv 0, \forall t \in [0,T]$。再由 (4.21)， $w(t,x) \equiv 0$。记 $\xi_{[n]} := (\xi_1,\ldots,\xi_n)$，并注意到 $w(t,x)$ 是 $(u-v)(t,x,\xi_{[n]})(2\pi)^{-n/2}\exp(-\frac{1}{2}\|\xi_{[n]}\|^2)$ 在 $(\lambda_1,\ldots\lambda_n)$ 处的傅里叶变换。由于一个 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 函数几乎处处由其傅里叶变换确定，因此，对每个 $(t,x)$, $(u-v)(t,x,\xi_{[n]}) = 0$ 对几乎所有 $\xi_{[n]} \in \mathbb{R}^n$ 都成立，从而 $(u-v)(t,x) = 0$ $\mathbb{P}$-几乎必然成立。□

**注 4.7.** 我们引入重复记号 $Z_n$ 表示 $u_n$，因为稍后我们会将 $u_n$ 解释为配分函数，其标准记法为 $Z_n$ 。

不难验证，在 (4.13) 中定义的 $u_n(t,x)$ 是关于 $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 的非负鞅。因此，根据鞅收敛定理，极限 $u(t,x) := \lim_{n\to\infty} u_n(t,x)$ 几乎必然存在。如果能在 $L^1(\Xi)$ 中加强这一收敛性，那么 $u_n(t,x) = \mathbb{E}[u(t,x)|\mathcal{F}_n]$；鉴于命题 4.5，$u$ 应当是随机热方程 (1.1) 的解。具体而言，我们有如下结果。

命题 *4.8*（方程 *(1.1)* 的解的存在唯一性）。假设对于几乎处处的 $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}$，*(4.13)* 中给出的鞅 $u_n(t,x)$ 在 $L^1(\Xi)$ 中收敛。那么极限 $u(t,x)$ 是方程 *(1.1)* 的一个解。对于每个 $(t,x)$，该解均是 $\mathbb{P}$-几乎必然唯一的。

证明。注意到 $u_n$ 是投影方程（4.11）的唯一解。假设鞅 $u_n$ 在 $L^1(\Xi)$ 中收敛。那么 $u_n$ 一致可积。由命题2.8，可得

$$\int g_\rho(t-\cdot,x)u(\cdot,0)\mathbf{1}_{[0,t]}(\cdot)\xi = \lim_{n\to\infty}\int_{[n]} g_\rho(t-\cdot,x)u_n(\cdot,0)\mathbf{1}_{[0,t]}(\cdot)\xi.$$

因此，我们得到

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,t) = 1 + \int g_\rho(t-\cdot,x)u(\cdot,0)\mathbf{1}_{[0,t]}(\cdot)\xi,$$

因此 $u(t,x)$ 是方程（1.1）的解。唯一性由命题 4.5 和 4.6可得。 □

4.3. **随机化平移与配分函数**。本小节中，我们将鞅 $u_n(t,x) = Z_n(t,x) = Z_n$ 解释为随机化平移的配分函数或总质量（见定义 1.5），并建立其 $L^1$-收敛判据。

令 $\mathcal{P}_n m$ 表示序列 $m$，其中超出 $n$ 的所有坐标均设为零。注意，在命题 4.6中，$Z_n$ 由下式给出

$$Z_n(m(t)) := Z_n(t,x) = \mathbf{E}_{(t,x)}\left[\exp\left\{\sum_{k=1}^n\left(m_k(t)\xi_k - \frac{1}{2}m_k(t)^2\right)\right\}\right].$$

回忆一下，$\mathbf{P}^{(t,x)} = \mathbf{P}_{(t,x)}\times\mathbb{P}$ 和 $\mathbf{E}^{(t,x)} = \mathbf{E}_{(t,x)}\times\mathbb{E}$ 分别是乘积空间 $\mathfrak{X}\times\Xi$上的联合概率和期望。容易验证，对于任意有界的 $F\in\mathcal{F}$，有 $\mathbb{E}[Z_n(m)F] = \mathbf{E}_{(t,x)}[F(\xi+\mathcal{P}_n m)]$，这是一个吉尔萨诺夫变换，因此根据定义 1.5，$Z_n$ 是随机化平移 $\mathcal{P}_n m$的配分函数。对于 $A\in\mathcal{G}$，我们记$\mathbf{1}_A m = (\mathbf{1}_A m_1, \mathbf{1}_A m_2, \dots)$并记

$$Z_n(\mathbf{1}_A m(t)) := \mathbf{E}_{(t,x)}\left[\exp\left\{\mathbf{1}_A\sum_{k=1}^n\left(m_k(t)\xi_k - \frac{1}{2}m_k(t)^2\right)\right\}\right].$$

以下两个结果分别取自 [44], 中的命题 39 和引理 42。注意，我们需要 $m'$ 的一个独立副本 $m$，这可以通过将 $X$ 替换为一个独立副本 $X'$ 在(4.15)中得到。

**命题 4.9**。设 $Z_n$ 由 (4.13) 给出，且 $\mathcal{P}_n$ 为到前 $n$个坐标的投影。则对于任意 $F\in\mathcal{F}$ 满足 $\mathbb{E}|Z_n F| < \infty$ 或 $F\ge 0$的情形，有：

$$\mathbb{E}[Z_n F] = \mathsf{E}_{(t,x)}\left[F(\xi+\mathcal{P}_n m)\right].$$

特别地，有如下结果：

*(1)* $\mathbb{E}[Z_n] = 1$; *(2)* $\mathbb{E}[Z_n^2] = \mathbf{E}^{\otimes 2}{}_{(t,\ x)}\big[\exp\{\sum_{k=1}^n m_k m_k'\}\big]$; *(3)* 对任意 $A\in\mathcal{G}$, $\mathbb{E}|Z_n(m) - Z_n(\mathbf{1}_A m)| \le 2\mathbf{P}^{(t,x)}(A^c)$。

**引理 4.10.** 假设存在一个随机变量 $Z$，使得 $Z_n \to Z$ 属于 $L^1(\Xi, \mathcal{F}, \mathbb{P})$，或者等价地，$\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 一致可积。那么，$(\xi + m)$ 在 $(\Xi, \mathcal{F})$ 上的边缘分布由下式给出

$$\hat{\mathbb{P}}_{(t,x)}(A) := \mathsf{P}_{(t,x)}(\xi + m \in A), \quad \textit{for } A \in \mathcal{F},$$

$\hat{}$ 关于 $\mathbb{P}$ 绝对连续。此外，$Z = \mathrm{d}\hat{\mathbb{P}}/\mathrm{d}\mathbb{P}$ 是拉东–尼科迪姆导数。

接下来，我们定义该量

$$\mathfrak{e}(m) := \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big[Z_n^2\big] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_{(t,x)}^{\otimes 2}\left[\exp \sum_{k=1}^{n} m_k m_k'\right], \tag{4.22}$$

它在建立鞅 $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的 $L^1$-收敛中起着关键作用。下述结果是关于鞅的 $L^2$-收敛的标准结论。

**命题 4.11.** 若 $\mathfrak{e}(m) < \infty$，则存在一个随机变量 $Z$，使得当 $n \to \infty$ 时，$Z_n \to Z$ 几乎处处且在 $L^2(\Xi, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 中成立。此外，$\mathbb{E}[Z^2] = \mathfrak{e}(m)$。

证明. 注意到 $Z_n^2$ 是一个下鞅。因此，$\sup_n \mathbb{E}[Z_n^2] = \mathfrak{e}(m) < +\infty$。于是，由 $L^2$-鞅收敛定理即得所需结果。□

对于事件 $A \in \mathcal{G}$，我们记

$$\mathfrak{e}(\mathbf{1}_A m) := \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big[Z_n(\mathbf{1}_A m)^2\big] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_{(t,x)}^{\otimes 2}\left[\exp \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{1}_A m_k)(\mathbf{1}_{A'} m_k')\right], \tag{4.23}$$

其中 $A'$ 是 $A$的一个独立副本。我们有以下关于$Z_n$的 $L^1$-收敛判据。

**命题4.12.** 若对于任意 $p \in (0,1)$，存在一个集合 $A \in \mathcal{G}$，使得 $Q(A) > p$，且$\mathfrak{e}(\mathbf{1}_A m) < \infty$，则当 $n \to \infty$ $Z_n \to Z$ 时，几乎处处且在 $L^1(\Xi, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 中。

证明. 几乎处处收敛直接由 $Z_n$ 是一个非负鞅这一事实得出。接下来我们讨论 $L^1$-收敛。

条件 $\mathfrak{e}(\mathbf{1}_A m) < \infty$ 确保 $Z_n(\mathbf{1}_A m)$ 是一个 $L^2$-有界鞅，并且在 $L^2$ 中收敛。根据命题 4.9，可知对任意 $n \in \mathbb{N}$，$\mathbb{E}|Z_n(m) - Z_n(\mathbf{1}_A m)| \le 2(1-p)$。于是，由三角不等式和 Jensen 不等式可得，对任意 $k$，$n \in \mathbb{N}$，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|Z_k(m) - Z_n(m)| \le& \mathbb{E}|Z_k(m) - Z_k(\mathbf{1}_A m)| + \mathbb{E}|Z_k(\mathbf{1}_A m) - Z_n(\mathbf{1}_A m)| + \mathbb{E}|Z_n(\mathbf{1}_A m) - Z_n(m)| \\ \le& 4(1-p) + \|Z_k(\mathbf{1}_A m) - Z_n(\mathbf{1}_A m)\|_{L^2(\mathbb{P})},\end{aligned}$$

这表明 $Z_n(m)$是 $L^1(\mathbb{P})$中的一个柯西序列，证明完毕。 □

注意，如果 $Z_n$ 在 $L^1$中收敛到 $Z$ $(\mathbb{P})$，那么 $Z$ 根据命题4.8，满足随机热方程（1.1）。在以下小节中，我们应用命题4.12来建立 $L^1$-收敛性 $Z_n$。

4.4. **局部时的相互能量**。鉴于（4.22）和（4.23），一个关键要素是以下量

$$\mathscr{E}_n(m(t), m'(t)) := \sum_{i=1}^{n} m_i(t) m_i'(t). \tag{4.24}$$

为简化记号，下文将 $m(t)$记作 $m$。我们可以将 $m$ 视为 $\mathbb{N}$上的一个随机函数，其定义为 $m(i) = m_i$。$\mathbb{N}^k$ 上 $m$ 的张量积记作 $m^{\otimes k}$。令

$$\rho_{k,m}(\mathbf{i}) := \mathbf{E}_{(t,x)}\big[m^{\otimes k}(\mathbf{i})\big], \quad \text{for } \mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}^k. \tag{4.25}$$

那么，，$m$ 是 $\mathbb{N}^k$上的一个确定性函数，并且有

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{(t,x)}^{\otimes 2}\left[\mathscr{E}_n(m,m')^k\right] &= \mathbf{E}_{(t,x)}^{\otimes 2}\left[\sum_{\mathbf{i}\in\{1,\dots,n\}^k}\prod_{j=1}^k m_{i_j}m'_{i_j}\right]\\ &= \sum_{\mathbf{i}\in\{1,\dots,n\}^k}\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\prod_{j=1}^k m_{i_j}\right]\mathbf{E}'_{(t,x)}\left[\prod_{j=1}^k m'_{i_j}\right] = \left\|\mathbf{1}_{\{1,\dots,n\}^k}\rho_{k,m}\right\|^2_{l^2(\mathbb{N}^k)},\end{aligned} \tag{4.26}$$

wh这里 $l^2(\mathbb{N}^k)$是指标取自 $\mathbb{N}$的平方可和序列所构成的希尔伯特空间 $^k$.

回顾 $L_s$ 和 $\nu_L$ 分别来自（4.1）和（4.3）。接下来，我们建立$\mathscr{E}_n$、 $L_s$ 和 $\nu_L$之间的联系。对于独立同分布的局部时 $L$和 $L'$，定义

$$\mathscr{E}_*(\nu_L,\nu'_L) := \int_0^t\int_0^t |r-s|^{2H-2}\mathrm{d}L_r\mathrm{d}L'_s, \tag{4.27}$$

这是 $\mathfrak{X}^{\otimes 2}$上的一个非负随机变量。

在本小节中，我们旨在证明：若 $\mathscr{E}_*(\nu_L,\ \nu'_L) < +\infty$，则**P-几乎处处成立，**

$$\mathscr{E}_*(\nu_L,\nu'_L) = \lim_{n\to\infty}\mathscr{E}_n(m,m') := \mathscr{E}(m,m'),\quad \mathbf{P}\text{-a.s.},$$

这称为互能，属于 $L$ 和 $L'$ （见下文定义4.13 和命题4.16 ）。对这一量的分析是证明 $L^1$-收敛的关键步骤，所涉及的对象为 $u_n$（$t$，$x$）$= Z_n$（$t$，$x$）。

在 $[0,t]$ 上定义一个确定性测度如下

$$\mu_L(A) := \mathbf{E}_{(t,x)}\left[\int_A \mathrm{d}L_s\right] = \mathbf{E}_{(t,x)}\left[\nu_L(A)\right],\quad \text{for } A\in\mathcal{B}([0,t]).$$

注意

$$\frac{\mu_L(\mathrm{d}s)}{\mathrm{d}s} = \lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{E}_{(t,x)}[\delta_\varepsilon(X_s)] = g(t-s,x) =: \rho_L(s),$$

这是 $\mu_L$ 相对于勒贝格测度的密度。根据推论 4.4，我们有：当 $x=0$ 时，$\rho_L\in\mathcal{H}$ 对于 $H>\frac{1}{\rho}$ 成立；当 $x\neq 0$ 时， $H\in$ 对于 $(1_2,\mathbf{1})$ 成立。

上述定义可扩展到乘积空间 $[0,t]^k$，其中 $k\in\mathbb{N}$，从而与（4.25）建立联系。对于 $A\in\mathcal{B}$（$[0,t]^k$），根据引理 4.2，我们有：

$$\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\nu_L^{\otimes k}(A)\right] = \mathbf{E}_{(t,x)}\left[\int_{\boldsymbol{s}\in[0,t]^k}\mathbf{1}_A(s_1,\cdots,s_k)\mathrm{d}L_{s_1}\cdots\mathrm{d}L_{s_k}\right] = \int_{\boldsymbol{s}\in[0,t]^k}\mathbf{1}_A(s_1,\cdots,s_k)\rho_{k,L}(\boldsymbol{s})\mathrm{d}\boldsymbol{s},$$

其中

$$\rho_{k,L}(\boldsymbol{s}) := k!f_k(t,x;\boldsymbol{s}) \tag{4.28}$$

其中 $f_k$ 由（1.5）给出，表示 $\mathbf{E}_{(t,x)}[\nu_L^{\otimes k}]$ 的密度。同时，回顾 $\rho_{k,\ m}$ 由（4.25），可得

$$\rho_{k,m}(\mathbf{i}) = \mathbf{E}_{(t,x)}\left[m^{\otimes k}(\mathbf{i})\right] = \mathbf{E}_{(t,x)}\left[\int_{[0,t]^k}\tilde{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\tilde{e}_{i_k}\mathrm{d}\nu_L^{\otimes k}\right] = \int_{[0,t]^k}\prod_{j=1}^k\tilde{e}_{i_j}(s_j)\rho_{k,L}(\boldsymbol{s})\mathrm{d}\boldsymbol{s},$$

这意味着以下等距映射

$$\|\rho_{k,m}\|^2_{l^2(\mathbb{N}^k)} = \|\rho_{k,L}\|^2_{\mathcal{H}^{\otimes k}}. \tag{4.29}$$

类似地，对于定义在 $\mathfrak{X}$ 上的有界随机变量 $G$ ，若满足 $G \geq 0$，我们可以定义一个确定性测度

$$\mu_{GL}(A) := \mathbf{E}_{(t,x)}\left[\int_A G\mathrm{d}L_s\right], \quad \text{for } A \in \mathcal{B}([0,t]). \tag{4.30}$$

显然， $\mu_{GL}$ 关于勒贝格测度绝对连续，其拉东-尼科迪姆导数记为

$$\rho_{GL}(s) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\int_0^s G\mathrm{d}L_r\right]. \tag{4.31}$$

此外，在 $\rho_L \in \mathcal{H}$满足相同条件时，我们有 $\rho_{GL} \in \mathcal{H}$，这是因为根据 $G$的有界性， $\|\rho_{GL}\|_{\mathcal{H}} \leq C\|\rho_L\|_{\mathcal{H}}$。等价地， $\rho_{GL}$ 可由下式刻画：

$$\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\int_0^t f(s)G\mathrm{d}L_s\right] = \int_0^t f(s)\rho_{GL}(s)\mathrm{d}s, \quad \text{for all bounded measurable functions } f \text{ on } \mathbb{R}. \tag{4.32}$$

根据上述记号，我们定义如下互能。

**定义 4.13 (互能).** 若随机变量 $\mathscr{E}(\nu_L\nu_L') \in L^1(\mathfrak{X}^{\otimes 2})$ 满足：对于$\mathfrak{X}$上的任意有界非负随机变量 $F$ 和 $G$ ，均有

$$\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[FG'\mathscr{E}(\nu_L,\nu_L')\right] = \langle \rho_{FL}, \rho_{GL}\rangle_{\mathcal{H}} < \infty. \tag{4.33}$$

回顾 $m_k$ 在式（4.15）中的表达式，以及其中 $\tilde{e}_k$ 在式（4.12）中的表达式。则 $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $\nu_L$ 在 $\mathcal{H}$的标准正交基 $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 上的投影。我们可以将随机函数 $m = (m_1, m_2, \cdots) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 视为随机测度 $\nu_L$ 相对于 $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$的坐标。定义$\nu_{L,n} := \sum_{k=1}^n m_k e_k$ 和

$$\mathscr{E}_n(\nu_L,\nu_L') := \langle \nu_{L,n}, \nu_{L,n}'\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{k=1}^n m_k m_k' = \mathscr{E}_n(m,m'), \tag{4.34}$$

它们可以分别看作 $\nu_L$ 和 $\mathscr{E}(\nu_L,\nu_L')$ 在前 $n$ 维上的截断。在下面的命题中，我们证明 $\mathscr{E}_n(\nu_L,\nu_L')$ 确实是 $\mathscr{E}(\nu_L,\nu_L')$ 的一个近似。

**命题 4.14。** 对于 (4.28) 中定义的 $k_0 \in 2\mathbb{N}$ 和 $\rho_{k_0,L}$ ，若 $\rho_{k_0,L} \in \mathcal{H}^{\otimes k_0}$，则对所有整数$1 \leq k \leq k_0$,

*(1)* 当 $n \to \infty$ 时，$\mathscr{E}_n(\nu_L,\nu_L')$ 在 $L^k(\mathbf{P}^{\otimes 2}_{(t,x)})$ 中收敛，其极限为定义 *4.13* 中定义的互能 $\mathscr{E}(\nu_L,\nu_L')$ ；*(2)* $\|\mathscr{E}(\nu_L,\nu_L')\|^k_{L^k(\mathbf{P}^{\otimes 2}_{(t,x)})} = \|\rho_{k,L}\|^2_{\mathcal{H}^{\otimes k}}$.

证明。回顾（4.34），我们有 $\mathscr{E}_n(\nu_L,\nu_L') = \mathscr{E}_n(m,m')$。由（4.26）和（4.29），以及假设 $\rho_{k_0,L} \in \mathcal{H}^{\otimes k_0}$，可得

$$\lim_{n\to\infty}\|\mathscr{E}_n(m,m')\|^{k_0}_{L^{k_0}(\mathbf{P}^{\otimes 2}_{(t,x)})} = \lim_{n\to\infty}\left\|\mathbf{1}_{\{1,\ldots,n\}^{k_0}}\rho_{k_0,m}\right\|^2_{l^2(\mathbb{N}^{k_0})} = \|\rho_{k_0,m}\|^2_{l^2(\mathbb{N}^{k_0})} = \|\rho_{k_0,L}\|^2_{\mathcal{H}^{\otimes k_0}} < \infty.$$

因此，(2) 是 (1) 的直接推论。接下来我们致力于证明 (1)。我们首先证明，当 $n \to \infty$, $\mathscr{E}_n(\nu_L,\nu_L')$ 在 $\mathscr{E}_\infty(\nu_L,\nu_L')$ 中收敛到极限 $L^k(\mathbf{P}^{\otimes 2}{}_{(t,x)})$，然后验证 $\mathscr{E}_\infty(\nu_L,\nu_L')$ 满足定义 4.13。

记 $\zeta(A) := \sum_{z\in A}\rho_{k_0,m}(z)^2$ 对于 $A \subset \mathbb{N}^k$，它是 $\mathbb{N}^k$ 上的一个测度。于是，对于 $n \geq l$，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\mathscr{E}_n(m,m')^{k_0}\right] =& \zeta\left(\{1,\ldots,n\}^{k_0}\right) \geq \zeta\left(\{1,\ldots,l\}^{k_0}\right) + \zeta\left(\{l+1,\ldots,n\}^{k_0}\right)\\ =& \mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\mathscr{E}_l(m,m')^{k_0}\right] + \mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\left(\mathscr{E}_n(m,m') - \mathscr{E}_l(m,m')\right)^{k_0}\right].\end{aligned}$$

因此，对于 $1 \le k \le k_0$， $\mathscr{E}_n(\nu_L, \nu_L') = \mathscr{E}_n(m, m')$ 是 $L^k(\mathbf{P}^{\otimes 2}{}_{(t,x)})$ 中的一个柯西序列。我们将其极限记为 $\mathscr{E}_\infty(\nu_L,\nu_L')$。

为验证 $\mathscr{E}_\infty(\nu_L, \nu_L')$ 是互能，令 $F, G \ge 0$ 为 $\mathfrak{X}$上的有界随机变量。回顾 (4.34) 和 (4.31)，有

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[FG'\mathscr{E}_n(\nu_L, \nu_L')\right] &= \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_{(t,x)}\left[Fm_i\right]\mathbf{E}_{(t,x)}\left[Gm_i\right] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_{(t,x)}\left[\int_0^t F\tilde{e}_i(s)\mathrm{d}L_s\right]\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\int_0^t G\tilde{e}_i(s)\mathrm{d}L_s\right] \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \rho_{FL}, \tilde{e}_i\rangle_{L^2([0,t])}\langle \rho_{GL}, \tilde{e}_i\rangle_{L^2([0,t])} \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \rho_{FL}, e_i\rangle_{\mathcal{H}}\langle \rho_{GL}, e_i\rangle_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

其中第三个等号由 (4.32) 得出。

由 $F$、$G$, $\rho_{FL}$、$\rho_{GL} \in \mathcal{H}$ 以及 $FG'\mathscr{E}_n(\nu_L, \nu_L') \to FG'\mathscr{E}_\infty(\nu_L, \nu_L')$ 在 $L^k(\mathbf{P}^{\otimes 2}{}_{(t,x)})$ 中有界。令 $n \to \infty$，则得到

$$\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}[FG'\mathscr{E}_\infty(\nu_L, \nu_L')] = \langle \rho_{FL}, \rho_{GL}\rangle_{\mathcal{H}},$$

由此验证了 $\mathscr{E}_\infty(\nu_L, \nu_L') = \mathscr{E}(\nu_L, \nu_L')$，根据定义 4.13。 □

回顾 $\rho = \frac{1}{1-\alpha}$，其中 $\alpha$ 是 (1.20) 中引入的更新过程的指数。由于 Weinrib-Halperin 预测可以用 $\alpha$ 来刻画，更明确地说，从现在起，我们同时给出关于 $\rho$ 和 $\alpha$ 的条件下的结果。接下来，我们需要验证命题 4.14 中的条件$\rho_{k,L} \in \mathcal{H}^{\otimes k}$ 可以满足。下面给出一个引理。

**引理 4.15**。 对于 $\rho \in (\frac{1}{H}, 2] \Longleftrightarrow \alpha \in (1-H, \frac{1}{2}]$, $\rho_{k,L} \in \mathcal{H}^{\otimes k}$ 对所有 $k \ge 1$均成立。

证明。 由（4.28），可得对于 $s_0 := 0 < s_1 < \cdots < s_k < s_{k+1} := t$:

$$\rho_{k,L}(\boldsymbol{s}) = g_\rho(t - s_k, x)\prod_{i=2}^k \frac{C_\rho}{(s_i - s_{i-1})^{\frac{1}{\rho}}}.$$

所需结果随即由引理 A.3和A.5得到，即

$$\|\rho_{k,L}\|^2_{\mathcal{H}^{\otimes k}} \le C_H^k \|\rho_{k,L}\|^2_{L^{1/H}(\mathbb{R}^k)} \le C_H^k \left((k!)^{1-\frac{1}{H}} C^k \int_{s\in[0,t]^k_<} \prod_{i=1}^k \frac{1}{(s_{i+1} - s_i)^{\frac{1}{\rho H}}}\mathrm{d}s\right)^{2H} < \infty.$$

□

接下来，我们证明，定义 4.13 中定义的局部时 $\mathscr{E}(\nu_L, \nu_L')$ 的互能 $L$ 和 $L'$ 实际上与（4.13 ）中的 $\mathscr{E}_*(\nu_L, \nu_L')$ 相同；后者为 4.27中 $\mathscr{E}(L, L')$ 提供了一个更易处理且显式的公式。

**命题 4.16.** 对于 $\rho \in (\frac{1}{H}, 2] \Longleftrightarrow \alpha \in (1-H, \frac{1}{2}]$, $\mathscr{E}(\nu_L,\nu_L')$ 根据定义 *4.13*有限存在，且等于 $\mathscr{E}_*(\nu_L, \nu_L')$ 在 (4.27)中定义的量，$\mathbf{P}^{(t,x)}$-几乎处处。

证明. 由引理 4.15 和命题 4.14， $\mathscr{E}(\nu_L,\nu'_L)$ 可良好定义为 $L^k(\mathbf{P}^{\otimes 2}{}_{(t,x)})$-极限，即$\mathscr{E}_n(\nu_L,\nu'_L)$。回顾 (4.31) 并记

$$\tilde{\rho}_{GL}(s) := \int_0^t \rho_{GL}(r)|r-s|^{2H-2}\mathrm{d}r.$$

根据定义 4. 13，我们有，对于所有有界非负随机变量 $F$ 和 $G$在 $\mathfrak{X}$ ，

$$\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[FG'\mathscr{E}(\nu_L,\nu'_L)\right] = \langle \rho_{FL},\rho_{GL}\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \rho_{FL},\tilde{\rho}_{GL}\rangle_{L^2([0,t])}.$$

因此，只需证明

$$\langle \rho_{FL},\tilde{\rho}_{GL}\rangle_{L^2([0,t])} = \mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[FG'\mathscr{E}_*(\nu_L,\nu'_L)\right]. \tag{4.35}$$

注意 $\mathbf{E}^{\otimes 2}{}_{(t,x)}\left[FG'\mathscr{E}(\nu_L,\nu'_L)\right] \le \|F\|_\infty\|G\|_\infty\|\rho_{1,\ L}\|^2_{\mathcal{H}} < \infty$根据命题 4.14。因此，

$$\begin{aligned}
\langle \rho_{FL},\tilde{\rho}_{GL}\rangle_{L^2([0,t])} &= \lim_{N\to\infty}\langle \rho_{FL}, N\wedge\tilde{\rho}_{GL}\rangle_{L^2([0,t])}\\
&= \lim_{N\to\infty}\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\int_0^t F(N\wedge\tilde{\rho}_{GL}(s))\mathrm{d}L_s\right]\\
&= \mathbf{E}_{(t,x)}\left[\int_0^t F\tilde{\rho}_{GL}(s)\mathrm{d}L_s\right]\\
&= \mathbf{E}_{(t,x)}\left[\int_0^t\int_0^t F\rho_{GL}(r)|r-s|^{2H-2}\mathrm{d}r\mathrm{d}L_s\right]\\
&= \mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\int_0^t\int_0^t FG'|r-s|^{2H-2}\mathrm{d}L'_r\mathrm{d}L_s\right]\\
&= \mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[FG'\mathscr{E}_*(\nu_L,\nu'_L)\right],
\end{aligned}$$

其中，第一和第三个等式由 $\rho_{FL}$ 和 $\tilde{\rho}_{GL}$ 的正性以及单调收敛定理得出，第二个等式由（4.32）得出，第五个等式再次由（4.32）和富比尼定理得出。于是我们得到 $\mathscr{E}_*(\nu_L,\nu'_L) = \mathscr{E}(\nu_L,\nu'_L)$。□

在命题 4.16中，我们将 $\mathscr{E}_*(\nu_L,\nu'_L)$ 在 (4.27) 中对应为定义 $\mathscr{E}(\nu_L,\nu'_L)$ 中定义的互能 4.13。我们的方法是用 $\nu_L$ (或 $\mathrm{d}L_s$) 在 $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的标准正交基 $\mathcal{H}$上的有限维投影来近似它。或者，注意到根据引理 4.1，我们可以用$\nu_L$ 来近似 $\nu_{L,\ \varepsilon}$ 其定义见 (4.4)。类似于 (4.34)，我们定义

$$m_{\varepsilon,k}(t) := \int_0^t \tilde{e}_k(s)\mathrm{d}L_{s,\varepsilon} = \int_0^t \tilde{e}_k(s)\delta_\varepsilon(X_s)\mathrm{d}s, \quad \forall k\in\mathbb{N}, \tag{4.36}$$

$$\nu^{(n)}_{L,\varepsilon} := \sum_{k=1}^n m_{\varepsilon,k}e_k, \tag{4.37}$$

$$\mathscr{E}_n(\nu_{L,\varepsilon},\nu'_{L,\varepsilon}) := \langle \nu^{(n)}_{L,\varepsilon},(\nu^{(n)}_{L,\varepsilon})'\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{k=1}^n m_{\varepsilon,k}m'_{\varepsilon,k} = \mathscr{E}_n(m_\varepsilon,m'_\varepsilon). \tag{4.38}$$

按照命题 4.14 中的相同论证，我们可以证明，对于任意 $\varepsilon>0$, $\mathscr{E}_n(\nu_{L,\varepsilon},\nu'_{L,\varepsilon})$， $\mathscr{E}(\nu_{L,\varepsilon},\nu'_{L,\varepsilon})$ 在 $L^2(\mathbf{P}^{\otimes 2}{}_{(t,x)})$ 中收敛到一个极限。另一方面，再次根据引理 4.1，我们有，对于任意 $k,n\in\mathbb{N}$，当 $\varepsilon\to 0$, $m_{\varepsilon,k}\to m_k$ 且 $\mathscr{E}_n(\nu_{L,\varepsilon},\nu'_{L,\varepsilon}) \to \mathscr{E}_n(\nu_L,\nu'_L) = \mathscr{E}_n(m,m')$ 时，在$L^2(\mathbf{P}^{\otimes 2}{}_{(t,x)})$ 中成立。因此，自然会问，上述经典的磨光方法是否能为互能 $\mathscr{E}(\nu_L,\nu'_L) = \mathscr{E}_*(\nu_L,\nu'_L)$ 提供一个等价的近似，即通过 $\mathscr{E}(\nu_{L,\varepsilon},\nu'_{L,\varepsilon})$ 进行近似。下面的命题给出了肯定的回答。

**命题 4.17。** 若 $\rho \in (\frac{1}{H}, 2] \Longleftrightarrow \alpha \in (1-H, \frac{1}{2}]$，则有 $\mathscr{E}(\nu_{L,\varepsilon}, \nu'_{L,\varepsilon}) \to \mathscr{E}(\nu_L, \nu'_L)$ $in L^2(\mathbf{P}^{\otimes 2}{}_{(t,x)})$ 当 $\varepsilon \to 0$。

证明。我们证明，对于任意 $\eta > 0$，存在一个 $\varepsilon_0 > 0$，使得对于任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，$\|\mathscr{E}(\nu_L,\nu'_L) - \mathscr{E}(\nu_{L,\varepsilon},\nu'_{L,\varepsilon})\|_{L^2(\mathbf{P}^{\otimes 2}{}_{(t,x)})} < \eta$。首先，由三角不等式可得

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{E}(\nu_L,\nu'_L) - \mathscr{E}(\nu_{L,\varepsilon},\nu'_{L,\varepsilon})\|_{L^2(\mathbf{P}^{\otimes 2}_{(t,x)})} \\
\leq &\|\mathscr{E}(\nu_L,\nu'_L) - \mathscr{E}_n(\nu_L,\nu'_L)\|_{L^2(\mathbf{P}^{\otimes 2}_{(t,x)})} + \|\mathscr{E}_n(\nu_L,\nu'_L) - \mathscr{E}_n(\nu_{L,\varepsilon},\nu'_{L,\varepsilon})\|_{L^2(\mathbf{P}^{\otimes 2}_{(t,x)})} \\
&+ \|\mathscr{E}_n(\nu_{L,\varepsilon},\nu'_{L,\varepsilon}) - \mathscr{E}(\nu_{L,\varepsilon},\nu'_{L,\varepsilon})\|_{L^2(\mathbf{P}^{\otimes 2}_{(t,x)})} \\
=: &\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3.
\end{aligned}$$

对于项 $\Delta_1$，命题 4.14 与引理 4.15 共同推出 $\mathscr{E}_n(\nu_L,\nu'_L)$ 在 $L^k(\mathbf{P}^{\otimes 2}{}_{(t,x)})$ 中收敛到 $\mathscr{E}(\nu_L,\nu'_L)$，对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。因此，对于任意给定的 $\eta > 0$，存在 $n_1 = n_1(\eta) \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \geq n_1$，都有 $\Delta_1 < \frac{\eta}{4}$。

对于项 $\Delta_3$，我们有，

$$\begin{aligned}
(\Delta_3)^2 =&\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} m_{\varepsilon,k} m'_{\varepsilon,k}\right)^2\right] \\
=&\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\sum_{k,j=n+1}^{\infty}(m_{\varepsilon,k}m_{\varepsilon,j})(m'_{\varepsilon,k}m'_{\varepsilon,j})\right] = \sum_{k,j=n+1}^{\infty}\left(\mathbf{E}_{(t,x)}\left[m_{\varepsilon,k}m_{\varepsilon,j}\right]\right)^2.
\end{aligned}$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{(t,x)}\left[m_{\varepsilon,k}m_{\varepsilon,j}\right] &= \mathbf{E}_{(t,x)}\left[\int_0^t\int_0^t \tilde{e}_k(r_1)\delta_\varepsilon(X_{r_1})\tilde{e}_j(r_2)\delta_\varepsilon(X_{r_2})\mathrm{d}r_1\mathrm{d}r_2\right] \\
&= \mathbf{E}_{(t,x)}\left[\int_{[0,t]^4} e_k(s_1)e_j(s_2)\delta_\varepsilon(X_{r_1})\delta_\varepsilon(X_{r_2})|r_1-s_1|^{2H-2}|r_2-s_2|^{2H-2}\mathrm{d}\boldsymbol{s}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right] \\
&= \langle \rho_{2,\varepsilon}, e_k\otimes e_j\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}},
\end{aligned}$$

其中 $\rho_{2,\varepsilon}(s_1, s_2) := \mathbf{E}_{(t,x)}[\delta_\varepsilon(X_{s_1})\delta_\varepsilon(X_{s_2})]$。根据三角不等式，$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$，并回想$\rho_{2,L}$ 由（4.28）可得

$$(\Delta_3)^2 = \sum_{k,j=n+1}^{\infty}\langle \rho_{2,\varepsilon}, e_k\otimes e_j\rangle^2_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} \leq 2\sum_{k,j=n+1}^{\infty}\left(\langle \rho_{2,L}, e_k\otimes e_j\rangle^2_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} + \langle \rho_{2,\varepsilon}-\rho_{2,L}, e_k\otimes e_j\rangle^2_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}\right). \tag{4.39}$$

由引理 4.15，$\rho_{2,L} \in \mathcal{H}^{\otimes 2}$因此 $\sum_{k,j=n+1}^{\infty}\langle \rho_{2,L}, e_k\otimes e_j\rangle^2_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}$ 当 $n \to \infty$ 时趋于零。这意味着对于任意给定的 $\eta > 0$，我们可以找到 $n_2 = n_2(\eta) \in \mathbb{N}$，使得当 $n \geq n_2$ 时，$\sum_{k,j=n+1}^{\infty}\langle \rho_{2,L}, -e_k\otimes e_j\rangle^2_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} < \frac{1}{16}\eta^2$。对于上面的第二项，注意到当 $s_1 > s_2$ 时，

$$\begin{aligned}
\rho_{2,\varepsilon}(s_1,s_2) &= \int_{\mathbb{R}^2}\delta_\varepsilon(y_1)\delta_\varepsilon(y_2)g_\rho(t-s_1,y_1-x)g_\rho(s_1-s_2,y_1-y_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^2}\delta_\varepsilon(y_1)\delta_\varepsilon(y_2)(t-s_1)^{-\frac{1}{\rho}}(s_1-s_2)^{-\frac{1}{\rho}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 = C(t-s_1)^{-\frac{1}{\rho}}(s_1-s_2)^{-\frac{1}{\rho}}
\end{aligned}$$

由引理 A.5，因此对于 $s_1 > s_2$，$\left|\rho_{2,\ L}(\boldsymbol{s}) - \rho_{2,\ \varepsilon}(\boldsymbol{s})\right| \leq C(t-s_1)^{-1/\rho}(s_1-s_2)^{-1/\rho}$ 由（4.28）。接着由引理 A.3 和A.4，可得

$$\|\rho_{2,L} - \rho_{2,\varepsilon}\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} \leq C\left(\int_{[0,t]^2_<} (t-s_1)^{-\frac{1}{\rho H}}(s_2-s_1)^{-\frac{1}{\rho H}}\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\right)^{2H} < \infty$$

对于 $\rho \in (\frac{1}{H}, 2]$. 注意到 $\rho_{2,\varepsilon} \to \rho_{2,L}$ 几乎处处成立，其中 $\varepsilon \to 0$，由控制收敛定理可得

$$\|\rho_{2,L} - \rho_{2,\varepsilon}\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} = \sum_{k,j=1}^{\infty} \langle \rho_{2,\varepsilon} - \rho_{2,L}, e_k \otimes e_j\rangle^2_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} \longrightarrow 0, \quad \text{as } \varepsilon \to 0.$$

因此，存在 $\varepsilon_1$ 使得对于任意 $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1), \|\rho_{2,L} - \rho_{2,\varepsilon}\|^2_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} \leq \frac{1}{16}\eta^2$. 结合对式 (4.39) 中两项的分析，可得对于 $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$ 和 $n \geq n_2$,

$$(\Delta_3)^2 \leq \frac{\eta^2}{8} + 2\|\rho_{2,L} - \rho_{2,\varepsilon}\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} < \frac{\eta^2}{4}.$$

最后，对于项 $\Delta_2$，对于任意固定的 $n \in \mathbb{N}$，有

$$\begin{aligned}
(\Delta_2)^2 =& \mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\left(m_{\varepsilon,k}m'_{\varepsilon,k} - m_k m'_k\right)\right)^2\right] \\
=& \sum_{k,j=1}^{n} \mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\left(m_{\varepsilon,k}m'_{\varepsilon,k} - m_k m'_k\right)\left(m_{\varepsilon,j}m'_{\varepsilon,j} - m_j m'_j\right)\right] \\
=& \sum_{k,j=1}^{n}\left(\mathbf{E}_{(t,x)}[m_{\varepsilon,k}m_{\varepsilon,j}]^2 + \mathbf{E}_{(t,x)}[m_k m_j]^2 - \mathbf{E}_{(t,x)}[m_{\varepsilon,k}m_j]^2 - \mathbf{E}_{(t,x)}[m_k m_{\varepsilon,j}]^2\right).
\end{aligned}$$

注意到对于任意固定的 $k \in \mathbb{N}$, $m_{\varepsilon,k} \to m_k$，由引理 4.1 可知 $L^2(\mathbf{P}^{\otimes 2}_{(t,x)})$。因此，当 $\varepsilon \to 0$ 时，对于任意固定的 $k,j \in \mathbb{N}$，$\mathbf{E}_{(t,x)}[m_{\varepsilon,k}m_{\varepsilon,j}] \to \mathbf{E}_{(t,x)}[m_k m_j]$ 且 $\mathbf{E}_{(t,x)}[m_{\varepsilon,k}m_j] \to \mathbf{E}_{(t,x)}[m_k m_j]$。固定 $n_3 = n_1 \vee n_2$，则存在 $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(n_3,\eta) = \varepsilon_2(\eta) > 0$，使得对于任意 $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2)$，$\Delta_2 < \frac{\eta}{4}$。

综合上述所有估计，我们得到：对于任意 $\eta > 0$，存在仅依赖于 $\eta$ 的 $n_3 \in \mathbb{N}$，以及依赖于 $n_3$ 和 $\eta$ 的 $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$，使得对于任意 $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0)$,

$$\|\mathscr{E}(\nu_L, \nu'_L) - \mathscr{E}(\nu_\varepsilon, \nu'_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbf{P}^{\otimes 2}_{(t,x)})} \leq \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \leq \frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{2} = \eta,$$

由此得证。 □

**注 4.18.** 如注 *1.8*中所述，构造随机热方程 (1.1) 解的另一种方法是确定极限 $\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon$，其中 $u_\varepsilon$ 在 (1.19) 中是光滑化随机热方程 (1.17)的解。若能够证明 $L^1$-收敛性，则命题 $u_\varepsilon$ ***4.17*** 保证 $\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon$ 与由 $u$ 给出的解相同，即 (1.15) 和 (1.16)。

此外，命题 *4.17* 本身也具有独立的研究价值，因为它在互能研究中建立了经典光滑化方法与投影方法之间的桥梁。关于互能的进一步讨论，参见第 *4.6*节。

4.5. 对于 $\rho \in (\frac{1}{2H-1}, 2] \Longleftrightarrow \alpha + 2H > 2$ 和 $\alpha \leq \frac{1}{2}$ 的 $L^1$-收敛。本节将证明，对于 $\rho \in (\frac{1}{2H-1}, 2] \Longleftrightarrow \alpha + 2H > 2$ 和 $\alpha \leq \frac{1}{2}$，我们的随机热方程 (1.1) 存在一个 $L^1$-解。回顾由 (4.13) 定义的投影方程 (4.11) 的解 $u_n(t,x) = Z_n(t,x)$。下面的结果结合命题 4.8 中的唯一性，完成了定理 1.2 (3) 的证明。

**命题 4.19**。 若 $\rho\in(\frac{1}{2H-1},2]\Longleftrightarrow\alpha+2H>2$ 和 $\alpha\le\frac{1}{2}$，则当 $n\to\infty$, $Z_n(t,x)\to Z(t,x)$在 $L^1(\mathbb{P})$ 中时。

证明。回忆 互能 $\mathscr{E}(\nu_L,\ \nu'_L)=\mathscr{E}_*(\nu_L,\ \nu'_L)$ 根据（4.33）和（4.27）。注意到

$$|r-s|^{2H-2}=C_H\int_{\mathbb{R}}|r-u|^{-\frac{3-2H}{2}}|s-u|^{-\frac{3-2H}{2}}\mathrm{d}u, \tag{4.40}$$

我们有

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}(\nu_L,\nu'_L)&=\int_0^t\int_0^t|r-s|^{2H-2}\mathrm{d}L_r\mathrm{d}L'_s\\
&=C_H\int_R\left(\int_0^t|r-u|^{-\frac{3-2H}{2}}\mathrm{d}L_r\right)\left(\int_0^t|s-u|^{-\frac{3-2H}{2}}\mathrm{d}L'_s\right)\mathrm{d}u\\
&\le C_H\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^t|r-u|^{-\frac{3-2H}{2}}\mathrm{d}L_r\right)^2\mathrm{d}u\cdot\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^t|s-u|^{-\frac{3-2H}{2}}\mathrm{d}L'_s\right)^2\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le\frac{C_H}{2}\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^t|r-u|^{-\frac{3-2H}{2}}\mathrm{d}L_r\right)^2\mathrm{d}u+\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^t|s-u|^{-\frac{3-2H}{2}}\mathrm{d}L'_s\right)^2\mathrm{d}u\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\int_0^t\int_0^t|r-s|^{2H-2}\mathrm{d}L_r\mathrm{d}L_s+\int_0^t\int_0^t|r-s|^{2H-2}\mathrm{d}L'_r\mathrm{d}L'_s\right),
\end{aligned}$$

其中我们有 u 第二处和最后一处等式中使用了柯西-施瓦茨不等式及（4.40） es.

根据推论4.3,

$$\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\int_0^t\int_0^t|r-s|^{2H-2}\mathrm{d}L_r\mathrm{d}L_s\right]<\infty,\quad\text{iff }\rho\in\left(\frac{1}{2H-1},2\right]. \tag{4.41}$$

那么，定义

$$A_l:=\left\{\omega:\int_0^t\int_0^t|r-s|^{2H-2}\mathrm{d}L_r\mathrm{d}L_s<l\right\},$$

并且 $A'_l$ 以相同方式定义，只需将 $L$ 替换为 $L'$。由（4.41），对于任意 $p\in(0,\ \mathbf{1})$，我们都可以找到足够大的 $l>0$，使得$\mathbf{P}^{(t,x)}(A_l)>p$。与（4.26）中的计算相同，可得对于任意 $k\in\mathbb{N}$,

$$\mathbf{E}^{\otimes2}_{(t,x)}\left[\mathbf{1}_{A_l\times A'_l}\mathscr{E}_n^k\right]=\|\mathbf{1}_{\{1,\cdots,n\}^k}\rho_{k,\mathbf{1}_{A_l}m}\|^2_{l^2(\mathbb{N}^k)}\le\|\rho_{k,\mathbf{1}_{A_l}m}\|^2_{l^2(\mathbb{N}^k)}=\mathbf{E}^{\otimes2}_{(t,x)}\left[\mathbf{1}_{A_l\times A'_l}\mathscr{E}^k\right].$$

最后，回忆 $\mathfrak{e}(\mathbf{1}_Am)$，由（4.23）。根据命题4.12，要证明当 $n\to\infty$时， $Z_n$ 在 $L^1(\mathbb{P})$ 中收敛，只需验证 $\mathfrak{e}(\mathbf{1}_Am)<+\infty$。我们有

$$\begin{aligned}
\mathfrak{e}(\mathbf{1}_{A_l}m)&=\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}^{\otimes2}_{(t,x)}\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^n\mathbf{1}_{A_l\times A'_l}m_im'_i\right\}\right]=\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}^{\otimes2}_{(t,x)}\left[\exp\left\{\mathbf{1}_{A_l\times A'_l}\mathscr{E}_n\right\}\right]\\
&\le2\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}^{\otimes2}_{(t,x)}\left[\cosh\left(\mathbf{1}_{A_l\times A'_l}\mathscr{E}_n\right)\right]=2\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}^{\otimes2}_{(t,x)}\left[\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{(2k)!}\left(\mathbf{1}_{A_l\times A'_l}\mathscr{E}_n\right)^{2k}\right]\\
&=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{(2k)!}\mathbf{E}^{\otimes2}_{(t,x)}\left[\mathbf{1}_{A_l\times A'_l}\mathscr{E}_n^{2k}\right]=2\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{(2k)!}\mathbf{E}^{\otimes2}_{(t,x)}\left[\mathbf{1}_{A_l\times A'_l}\mathscr{E}^{2k}\right]\\
&=2\mathbf{E}^{\otimes2}_{(t,x)}\left[\cosh\left(\mathbf{1}_{A_l\times A'_l}\mathscr{E}\right)\right]<\infty,
\end{aligned} \tag{4.42}$$

其中第三行使用了富比尼定理和有界收敛定理，第二行和最后一行使用了泰勒展开，从而完成证明。□

4.6. 关于条件 $\rho \in (\frac{1}{2H-1}, 2] \iff \alpha+2H>2$ 与 $\alpha \le \frac{1}{2}$ 的讨论。回顾第 1.2 节中的 Weinrib–Halperin 预测。它猜想，只要对 $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ 有 $\alpha + H > 1$，我们的随机热方程 (1.1) 或其离散对应物——无序钉扎模型 (1.22)–(1.23) 就应当是无序相关的。这表明，若 $\rho > \frac{1}{H} \iff \alpha + H > 1$，则随机热方程 (1.1) 应当存在 $L^1$-解。在第 4.1–4.5 节的全部分析中，我们依赖更强假设 $\rho \in (\frac{1}{2H-1}, 2] \iff \alpha + 2H > 2$ 与 $\alpha \le \frac{1}{2}$ 的唯一之处，是在第 4.5 节中建立当 $n \to \infty$ 时 $Z_n(t,x) \to Z(t,x)$ 的 $L^1$-收敛，而这经由推论 4.3 依赖于 $\alpha + 2H > 2$。除此之外，所有其他分析在较弱条件 $\alpha + H > 1$ 下仍然成立。

在命题 4.19的证明中，我们应用柯西-施瓦茨不等式将 $L_s$ 和 $L'_s$ 解耦，从而引入关键事件 $A_l$，这可能会通过引入 $\mathscr{E}(\nu_L, \nu'_L)$ 来增大互能 自能

$$I_t := \int_0^t \int_0^t |r-s|^{2H-2} \mathrm{d}L_r \mathrm{d}L_s. \tag{4.43}$$

不过，除此之外，我们强调，另一种推导已经是最优的。为定义事件 $A_l$，我们利用了如下事实：$\mathbf{E}_{(t,x)}[I_t] < \infty$ 当且仅当 $\rho \in (\frac{1}{2H-1}, 2]$，该结论来自推论 4.3，它是 $\mathbf{P}^{(t,x)}(I_t = \infty) = 0$的充分条件。令人惊讶的是，下面的结果表明，该条件也是必要的；其证明依赖于对豪斯多夫 $\varphi$-测度和黎斯容量的精妙应用。

**引理 4.20.** 若 $\rho \in (\frac{1}{2H-1}, 2] \iff \alpha + 2H \le 2$ 且 $\alpha \le \frac{1}{2}$，则 $\mathbf{P}^{(t,x)}(I_t = \infty | L_t > 0) = 1$。

证明。 定义 $\mathcal{Z}_t := \{s \in [0,t] : X_s = 0\}$ 为 $X$ 在 $[0,t]$ 上的零水平集。由 [37, 定义 8.4]，黎斯容量 $C_{2-2H}(\mathcal{Z}_t) \ge L_t^2 I_t^{-1}$。因此，为证明 $\mathbf{P}^{(t,x)}(I_t = \infty | L_t > 0) = 1$，只需证明 $\mathbf{P}^{(t,x)}(C_{2-2H}(\mathcal{Z}_t) = 0) = 1$，注意到 $L_t < \infty$ $\mathbf{P}^{(t,x)}$-a.s.。然后由 [37, 定理 8.9(1)], , 进一步只需证明由 $\psi(s) := s^{2-2H}$ 诱导的豪斯多夫 $\psi$-测度 $\mathcal{H}^\psi$ 在 $\mathcal{Z}_t$上具有有限测度。

回顾 $\rho > 1$。然后由 [52, 定理 1], $\mathbf{P}^{(t,x)}$-a.s., $\mathrm{d}L_s$ 等价于 $\mathcal{Z}_t$ 上的一个有限正豪斯多夫 $\varphi$-测度 $\mathcal{H}^\varphi$，且

$$\varphi(s) := s^{1-1/\rho} (\log |\log s|)^{1/\rho} = s^\alpha (\log |\log s|)^{1-\alpha}.$$

注意，由 $\alpha + 2H \le 2$ 和 $\alpha \le \frac{1}{2}$，

$$\lim_{s \to 0} \frac{\psi(s)}{\varphi(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{s^{2-2H}}{s^\alpha (\log |\log s|)^{1-\alpha}} = 0.$$

因此，由比较原理 [47, 定理 40], 可知， $\mathcal{H}^\varphi$ 在 $\mathcal{Z}_t$ 上的有限性意味着 $\mathcal{H}^\psi$在 $\mathcal{Z}_t$上的测度为零，从而得证。□

由上述引理，我们推测条件 $\alpha + 2H = 2$ 也可能标志着某种形式的临界性，其性质目前仍不清楚。还需回顾的是，Weinrib–Halperin 预测指出， $\alpha + H = 1$ 是无序相关性与无关性的分界阈值，而 $\alpha = \frac{1}{2}$ 则区分 $L^2$- 和 $L^1$-区域。该区域

$$\left\{ (\alpha, H) : \alpha + H > 1, \alpha + 2H \le 2, \alpha < \frac{1}{2} \right\}$$

在很大程度上仍未得到探索，我们认为需要采用新的方法来研究这一参数范围。下文的结果表明，当 $\alpha+2H>2$时，我们的模型确实呈现出更精细的结构性质，为这一猜想提供了进一步的证据。

**命题 4.21**。 在条件 $\rho\in(\frac{1}{2H-1},2]\Longleftrightarrow\alpha+2H>2$和 $\alpha\leq\frac{1}{2}$, $\{\delta_\varepsilon(X_\cdot)\}_{\varepsilon>0}$是 $L^2(\mathfrak{X};\mathcal{H})$ 中的柯西序列，当 $\varepsilon\to0$。

证明。 对于任意 $\varepsilon,\eta>0$,

$$\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\langle\delta_\varepsilon(X_\cdot),\delta_\eta(X_\cdot)\rangle_{\mathcal{H}}\right]=\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\int_0^t\int_0^t\delta_\varepsilon(X_r)\delta_\eta(X_s)|s-r|^{2H-2}\mathrm{d}r\mathrm{d}s\right].$$

取 $s<r$，由引理 A.5,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\delta_\varepsilon(X_r)\delta_\eta(X_s)\right]=&\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\delta_\varepsilon(y_1)\delta_\eta(y_2)g_\rho(s-r,y_1-y_2)g_\rho(t-s,x-y_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\\ \leq&C(s-r)^{-\frac{1}{\rho}}(t-s)^{-\frac{1}{\rho}}.\end{aligned}$$

因此，由 $\rho\in(\frac{1}{2H-1},2]$、富比尼定理和引理 A.4,

$$\mathbf{E}_{(t,x)}[\langle\delta_\varepsilon(X_\cdot),\delta_\eta(X_\cdot)\rangle_{\mathcal{H}}]\leq2C\int_0^t\int_0^s(s-r)^{2H-2-\frac{1}{\rho}}(t-s)^{-\frac{1}{\rho}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s<+\infty.$$

因此，对于任意固定的 $\varepsilon>0$, $\delta_\varepsilon(X_\cdot)\in\mathcal{H}$, $\mathbf{P}^{(t,x)}$-几乎处处成立。

由此，根据控制收敛定理，我们有

$$\lim_{\varepsilon,\eta\to0}\mathbf{E}_{(t,x)}[\langle\delta_\varepsilon(X_\cdot),\delta_\eta(X_\cdot)\rangle_{\mathcal{H}}]=2\int_0^t\int_0^s g_\rho(s-r,0)g_\rho(t-s,x)|s-r|^{2H-2}\mathrm{d}r\mathrm{d}s<\infty.\tag{4.44}$$

因此,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\|\delta_\varepsilon(X_\cdot)-\delta_\eta(X_\cdot)\|_{\mathcal{H}}^2\right]=&\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\langle\delta_\varepsilon(X_\cdot)-\delta_\eta(X_\cdot),\delta_\varepsilon(X_\cdot)-\delta_\eta(X_\cdot)\rangle_{\mathcal{H}}\right]\\ =&\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\|\delta_\varepsilon(X_\cdot)\|_{\mathcal{H}}^2\right]+\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\|\delta_\eta(X_\cdot)\|_{\mathcal{H}}^2\right]-2\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\langle\delta_\varepsilon(X_\cdot),\delta_\eta(X_\cdot)\rangle_{\mathcal{H}}\right],\end{aligned}$$

当 $\varepsilon,\eta\to0$ 时，根据 (4.44)。这表明 $\{\delta_\varepsilon(X_\cdot)\}_{\varepsilon>0}$ 是$L^2(\mathfrak{X};\mathcal{H})$ 中的柯西序列，证明完毕。 □

注 *4.22.* 回顾 *(4.1)* 和 *(4.2)*，当 $\rho\in(\frac{1}{2H-1},2]$ 时，根据命题 *4.21*，我们可以写成 $dL_s=\delta_0(X_s)ds$ 其中 $\delta_0(X_\cdot)=\lim_{\varepsilon\to0}\delta_\varepsilon(X_\cdot)\in L^2(\mathfrak{X};\mathcal{H})$. 因此，我们有

$$\sum_{k=1}^\infty m_k^2=\sum_{k=1}^\infty\langle e_i,\delta_0(X)\rangle_{\mathcal{H}}^2=\langle\delta_0(X),\delta_0(X)\rangle_{\mathcal{H}}=\int_0^t\int_0^t|r-s|^{2H-2}\mathrm{d}L_r\mathrm{d}L_s$$

是 $L^1(\mathbf{P}_{t,x})$-可积的（另见推论 *4.3*），因此是有限的 $\mathbf{P}^{(t,x)}$-几乎必然。另一方面，当 $\alpha+2H\leq2$, 引理 *4.20* 可得 $\sum_{k=1}^\infty m_k^2=\infty$, $\mathbf{P}^{(t,x)}$-几乎必然，给定 $L_t>0$。

4.7. **重新考察** $\rho=2$。 在第 3 节中，我们证明了对于 $\rho=2$，我们的随机热方程（1.1）存在局部 $L^p$-解，其中 $p\geq1$ 可通过经典的 Wiener 混沌展开得到。本小节借助互能 $\mathscr{E}(\nu_L,\nu_L')=\mathscr{E}_*(\nu_L,\nu_L')$，给出比（1.6）更明确、简洁的（1.1）解的二阶矩表达式。我们采用的工具是命题 4.11，首先需要以下预备结果。

**引理 4.23**。 回忆一下 $\mathfrak{e}(m)$，由 (4.22) 可知。如果 $\mathbf{E}^{\otimes2}{}_{(t,x)}[e^{\mathscr{E}(\nu_L,\nu_L')}]<\infty$，那么 $\mathfrak{e}(m)=\mathbf{E}^{\otimes2}{}_{(t,x)}[e^{\mathscr{E}(\nu_L,\nu_L')}]$。

证明。证明与（4.42）类似。注意，由（4.27）可知，$\mathscr{E}(\nu_L,\nu'_L)$ 非负；对于 $x>0$，$\exp(x)/\cosh(x)\in[1,2]$。因此，只需证明 $\mathbf{E}^{\otimes 2}{}_{(t,x)}[\cosh\mathscr{E}(\nu_L,\nu'_L)]<+\infty$，然后应用控制收敛定理。

回顾 $\mathscr{E}_n(\nu_L,\nu'_L)$，见（4.24）。由泰勒展开和富比尼定理，我们得到

$$\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\cosh\mathscr{E}_n(\nu_L,\nu'_L)\right]=\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\mathscr{E}_n(\nu_L,\nu'_L)^{2k}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\mathscr{E}_n(\nu_L,\nu'_L)^{2k}\right].$$

由（4.26），对任意 $k\in\mathbb{N}$，我们有

$$\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\mathscr{E}_n(\nu_L,\nu'_L)^{k}\right]=\|\mathbf{1}_{\{1,\cdots,n\}^k}\rho_{k,m}\|^2_{l^2(\mathbb{N}^k)}\le\|\rho_{k,m}\|^2_{l^2(\mathbb{N}^k)}=\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\mathscr{E}(\nu_L,\nu'_L)^{k}\right].$$

然后由我们的假设可得

$$\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\cosh\mathscr{E}(\nu_L,\nu'_L)\right]\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\mathscr{E}(\nu_L,\nu'_L)^{k}\right]=\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\exp\mathscr{E}(\nu_L,\nu'_L)\right]<\infty.$$

因此，我们可以应用控制收敛定理得到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\cosh\mathscr{E}_n(\nu_L,\nu'_L)\right]&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\mathscr{E}_n(\nu_L,\nu'_L)^{2k}\right]\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\mathscr{E}(\nu_L,\nu'_L)^{2k}\right]=\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\cosh\mathscr{E}(\nu_L,\nu'_L)\right].\end{aligned}$$

最后，再次由控制收敛定理，我们有

$$\mathfrak{e}(m)=\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\exp\mathscr{E}_n(\nu_L,\nu'_L)\right]=\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\exp\mathscr{E}(\nu_L,\nu'_L)\right].$$

□

以下命题是本小节的主要结果。

**命题 4.24.** 当 $\rho=2$ 和 $t>0$ 足够小时，对于 (1.1) 的温和解的二阶矩，我们有

$$\mathbb{E}\big[u(t,x)^2\big]=\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\exp\sum_{k=1}^{\infty}m_k m'_k\right]=\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\exp\left\{\int_0^t\int_0^t|r-s|^{2H-2}\mathrm{d}L_r\mathrm{d}L'_s\right\}\right]<\infty.\tag{4.45}$$

证明. (4.45) 中的第一个等式由直接计算二阶矩并借助 Feynman-Kac公式 (1.15 得出。对于第二个等式，根据命题 4.11，只需证明 $\mathbf{E}^{\otimes 2}{}_{(t,x)}[e^{\mathscr{E}(\nu_L,\nu'_L)}]<\infty$，然后由引理 4.23 和单调收敛定理即可得到结论。

根据泰勒展开和 Tonelli 定理，

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\exp\mathscr{E}(\nu_L,\nu'_L)\right]&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\mathscr{E}(\nu_L,\nu'_L)^{n}\right]\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathbf{E}^{\otimes 2}_{(t,x)}\left[\left(\int_0^t\int_0^t|r-s|^{2H-2}\mathrm{d}L_r\mathrm{d}L'_s\right)^{n}\right]\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{[0,t]^n}\int_{[0,t]^n}\prod_{i=1}^{n}|s_i-s'_i|^{2H-2}\rho_{n,L}(\boldsymbol{s})\rho_{n,L'}(\boldsymbol{s}')\mathrm{d}\boldsymbol{s}\mathrm{d}\boldsymbol{s}'\end{aligned}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n! \int_{[0,t]^n} \int_{[0,t]^n} \prod_{i=1}^{n} |s_i - s_i'|^{2H-2} f_n(t,x;\boldsymbol{s}) f_n(t,x;\boldsymbol{s}') \mathrm{d}\boldsymbol{s}\mathrm{d}\boldsymbol{s}'$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n! \|f_n(t,x)\|^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} < +\infty,$$

其中第四个等式由（4.28）得出，而有限性则源于命题 3.2 适用于$t \in (0, t_c)$。□

**注 4.25**。 对于 $\rho \in (\frac{1}{2H-1}, 2]$，解的 *Feynman-Kac*公式 (1.15) 对 (1.1) 对所有 $t > 0$均成立。因此，(4.45) 中的第一个等式对所有 $t > 0$也成立，尽管其值可能为无穷大。

4.8. **关于 Stratonovich 解的讨论**。 假设 Stratonovich 解 $u(t, x)$ of (1.1) 存在。那么，Feynman-Kac公式表明

$$u(t,x) = \mathbf{E}_{(t,x)} \left[ \exp\left\{ \int_0^t \delta_0(X_s) \xi(t-s) \mathrm{d}s \right\} \right].$$

For 为简洁起见，我们可以假设 $x = 0$。根据泰勒展开和 Tonelli 定理 ，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[u(t,0)] &= \mathbf{E}_{(t,0)} \left[ \exp\left\{ \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t \delta_0(X_r)\delta_0(X_s)|s-r|^{2H-2} \mathrm{d}r\mathrm{d}s \right\} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \mathbf{E}_{(t,0)} \left[ \left( \int_0^t \int_0^t \delta_0(X_r)\delta_0(X_s)|s-r|^{2H-2} \mathrm{d}r\mathrm{d}s \right)^n \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_{2n}} \int_{[0,t]^{2n}_{<}} C^{2n} s_1^{-\frac{1}{\rho}} \prod_{k=2}^{2n} (s_k - s_{k-1})^{-\frac{1}{\rho}} \prod_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}s_{2i-1}\mathrm{d}s_{2i}}{|s_{\sigma(2i)} - s_{\sigma(2i-1)}|^{2-2H}} \qquad (4.46) \\
&\geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{(2H-2)n}}{2^n n!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_{2n}} \int_{[0,t]^{2n}_{<}} C^{2n} s_1^{-\frac{1}{\rho}} \prod_{k=2}^{2n} (s_k - s_{k-1})^{-\frac{1}{\rho}} \mathrm{d}\boldsymbol{s} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n(\alpha+H-1)n} C^{2n} (2n)!}{2^n n! \Gamma(2n\alpha + 1)},
\end{aligned}$$

其中，在第三个等式中我们还用到了引理 4.2 ，在最后一个等式中用到了引理 A.4 。根据 Stirling 近似，右侧是 $\mathbb{E}[u(t, 0)]$ 的下界；当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 或 $\alpha = \frac{1}{2}$ 且 $t > 0$ 充分小时，该下界为有限值。

另一方面，采用 [36, 引理 4.1], 中的相同策略，我们可以调整核 $|s_{\sigma(2i)} - s_{\sigma(2i-1)}|^{2H-2}$ ，使 (4.46) 第三行中的被积函数有一个上界，该上界由以下因子相乘得到：因子 $C^{2n}$， $n$ 形如 $|s_k - s_{k-1}|^{-1/\rho}$的因子，以及另外一些 $n$ 形如 $|s_k - s_{k-1}|^{2H-1/\rho-2}$的因子。再由引理 A.4 可得

$$\mathbb{E}[u(t,0)] \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^{2n}(2n)!}{2^n n! \Gamma(2n(\alpha + H - 1))},$$

根据 Stirling 近似，当 $\alpha + H > \frac{3}{2}$ 时该式有限。注意， $\alpha + H > \frac{3}{2}$ 比 $\alpha + 2H > 2$ 更强，因为 $H \in (\frac{1}{2}, 1)$。

鉴于上述分析，在我们的假设 $\alpha \leq \frac{1}{2}$和 $\alpha + 2H > 2$下，只有在特殊情形 $\alpha = \frac{1}{2}$ 中才能考虑 $L^1$-Stratonovich 解，而且时间 $t > 0$还必须足够短。因此我们不再讨论这种情形，因为它不属于本文的主要研究范围，而本文篇幅已经相当长。

## 5. 0-1 LAW AND STRICT POSITIVITY OF THE SKOROHOD SOLUTION

回顾 (4.13) 中的 $Z_n = Z_n(t,x)$。极限 $Z = Z(t,x) := \lim_{n\to\infty} Z_n$ 始终存在，因为 $Z_n$ 是一个非负鞅。在本节中，我们证明 $Z$ 满足零一律，即 $\mathbb{P}(Z>0) \in \{0,1\}$。特别地，根据定理 1.2，$Z = u(t,x)$ 是 SHE (1.1) 的一个 $L^1$-解（当 $\alpha + 2H > 2$ 时），并且我们证明在这种情况下 $\mathbb{P}(Z>0) = 1$，也就是说，该解是非平凡的。

**命题 5。** **1 (零一律)。** 对于任意 $(t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}$，有 $\mathbb{P}(Z(t,x) > 0) \in \{0,1\}$。

证明。我们的策略是证明 $\{Z=0\}$ 与关于滤过 $A$ (见（5.3）) 的尾事件 $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 至多相差一个概率为零的集合 $\mathbb{P}$，其中 $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \cdots, \xi_n)$。注意到$Z(t, x) =$极限$_{n\to\infty} \mathbf{E}_{(t,x)}[M_k Y_{k,n}]$，其中 $k \in \mathbb{N}$ 为固定任意值，$M_k$ 由（4.14）给出，并且

$$Y_{k,n} = \exp\left\{ \sum_{i=k+1}^{n} \left( m_i\xi_i - \frac{m_i^2}{2} \right) \right\}. \tag{5.1}$$

对于任意固定的 $k$，以及 $\mathbb{P}$-几乎处处成立的噪声 $\xi$, $C = C_{k,\,\xi} :=$ 上确界$_{m_1,\,\cdots,\,m_k} M_k < +\infty$ 乘以 $\exp(x\xi - \frac{1}{2}x^2) < +\infty$。因此，根据控制收敛定理，我们有 $\mathbb{P}$-几乎处处，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_{(t,x)}[Y_{k,n}] = 0 \implies \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_{(t,x)}[CY_{k,n}] = 0 \implies Z = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_{(t,x)}[M_k Y_{k,n}] = 0. \tag{5.2}$$

记

$$\Xi_1 := \left\{ \xi : \sup_{m_1,\cdots,m_k} M_k < +\infty, \forall k \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{and} \quad A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_{(t,x)}[Y_{k,n}] = 0 \right\}, \tag{5.3}$$

其中 $\mathbb{P}(\Xi_1) = 1$ 且 $A$ 是关于 $\mathcal{F}_n$的尾事件。于是，(5.2) 蕴含 $A \cap \Xi_1 \subset \{Z=0\} \cap \Xi_1$。

因此，若我们能证明对某个 $\Xi_2$，满足 $\mathbb{P}(\Xi_2) = 1$, $\{Z=0\}\cap\Xi_2 \subset A \cap \Xi_2$，那么根据 Kolmogorov 零一律，由 $\mathbb{P}(Z=0) = \mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$ 即可得出结论。只需证明在 $\Xi_2$ 上，对任意固定的 $k \in \mathbb{N}$,

$$Z = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_{(t,x)}[M_k Y_{k,n}] = 0 \implies \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_{(t,x)}[Y_{k,n}] = 0. \tag{5.4}$$

接下来，我们先证明以下引理。

**引理 5.2。** 设

$$a_{m,n} = a_{m,n}^{(k)} := \mathbf{E}_{(t,x)}\left[ \mathbf{1}_{\{\frac{1}{m} \le M_k < \frac{1}{m-1}\}} Y_{k,n} \right],$$
$$S_{M,n} = S_{M,n}^{(k)} := \sum_{m=M+1}^{\infty} a_{m,n}^{(k)} = \mathbf{E}_{(t,x)}\left[ \mathbf{1}_{\{0 < M_k < \frac{1}{M}\}} Y_{k,n} \right].$$

那么我们有 $\mathbb{P}$-几乎处处，

$$\lim_{M\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{M} a_{m,n} = \lim_{n\to\infty} \lim_{M\to\infty} \sum_{m=1}^{M} a_{m,n}. \tag{5.5}$$

证明。注意，（5.5）是交换极限次序的随机版本。由引理 A.2可知，只需证明 $\mathbb{P}$-几乎必然地，$\lim_{M\to\infty}\sup_{n\ge k+1} S_{M,n} = 0$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立，这正是一致收敛的经典条件。

对固定的 $k, M \in \mathbb{N}$, $S_{M,n}$ 关于 $n \geq k+1$ 是相对于滤过 $\mathcal{F}_n^{(k)} := \sigma(\xi_{k+1}, \cdots, \xi_n)$ 的鞅。因此，对任意 $N \geq k+1$ 和 $\varepsilon > 0$，由 Doob 最大不等式可得，

$$\mathbb{P}\Big( \sup_{k+1 \leq n \leq N} S_{M,n} > \varepsilon \Big) \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[S_{M,N}] = \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[S_{M,k+1}] = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{E}_{(t,x)} \Big[ \mathbb{P}\Big( 0 < M_k < \frac{1}{M} \Big) \Big].$$

令 $N \to \infty$，由单调收敛定理可知，

$$\mathbb{P}\Big( \sup_{n \geq k+1} S_{M,n} > \varepsilon \Big) \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{E}_{(t,x)} \Big[ \mathbb{P}\Big( 0 < M_k < \frac{1}{M} \Big) \Big].$$

回忆 $M_k$ 在（4.14）中的表达式，并利用其中 $m_i$ 的适定性（见第4节），令 $M \to \infty$，则对任意固定的 $k \in \mathbb{N}$，$\sup_{n \geq k+1} S_{M,\, n}$ 依 $\mathbb{P}$概率收敛于 0。另注意，$S_{M,\, n}$ 关于 $M$ 递减，因此 $\sup_{n \geq k+1} S_{M,\, n}$也递减。因此，由单调收敛定理，$\lim_{M \to \infty} \sup_{n \geq k+1} S_{M,\, n} = 0$，$\mathbb{P}$-几乎必然成立。□

现在证明（5.4）。注意，对所有 $m \geq 1$,

$$\mathbf{E}_{(t,x)}[M_k Y_{k,n}] \geq \mathbf{E}_{(t,x)} \Big[ \mathbf{1}_{\{\frac{1}{m} \leq M_k < \frac{1}{m-1}\}} M_k Y_{k,n} \Big] \geq \frac{1}{m} \mathbf{E}_{(t,x)} \Big[ \mathbf{1}_{\{\frac{1}{m} \leq M_k < \frac{1}{m-1}\}} Y_{k,n} \Big],$$

其中采用约定 $1/0 := +\infty$。记 $\Xi_3$ 且 $\mathbb{P}(\Xi_3) = 1$ 为等式（5.5）成立的集合。则在 $\{Z = 0\} \cap \Xi_3$上，对所有 $m \geq 1$,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{E}_{(t,x)} \Big[ \mathbf{1}_{\{\frac{1}{m} \leq M_k < \frac{1}{m-1}\}} Y_{k,n} \Big] = 0,$$

这意味着对所有 $M \geq 1$,

$$0 = \sum_{m=1}^{M} \lim_{n \to \infty} \mathbf{E}_{(t,x)} \Big[ \mathbf{1}_{\{\frac{1}{m} \leq M_k < \frac{1}{m-1}\}} Y_{k,n} \Big] = \lim_{n \to \infty} \mathbf{E}_{(t,x)} \Big[ \mathbf{1}_{\{\frac{1}{M} \leq M_k < \infty\}} Y_{k,n} \Big].$$

根据引理 5.2和单调收敛定理，可得

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{M \to \infty} \lim_{n \to \infty} \mathbf{E}_{(t,x)} \Big[ \mathbf{1}_{\{\frac{1}{M} \leq M_k < \infty\}} Y_{k,n} \Big] = \lim_{n \to \infty} \lim_{M \to \infty} \mathbf{E}_{(t,x)} \Big[ \mathbf{1}_{\{\frac{1}{M} \leq M_k < \infty\}} Y_{k,n} \Big] \\ &= \lim_{n \to \infty} \mathbf{E}_{(t,x)} \Big[ \mathbf{1}_{\{0 < M_k < \infty\}} Y_{k,n} \Big]. \end{aligned}$$

最后，与引理 5.2的证明类似，$m_i$ 在 $M_k$ 中的适定性给出 $\mathbf{P}^{(t,x)}(M_k = 0) = \mathbf{P}^{(t,x)}(M_k = \infty) = 0$, $\mathbb{P}$-几乎处处成立。因此，存在集合 $\Xi_4$ 满足 $\mathbb{P}(\Xi_4) = 1$，使得

$$0 = \lim_{n \to \infty} \mathbf{E}_{(t,x)} \Big[ \mathbf{1}_{\{0 < M_k < \infty\}} Y_{k,n} \Big] = \lim_{n \to \infty} \mathbf{E}_{(t,x)}[Y_{k,n}]. \tag{5.6}$$

取 $\Xi_2 = \Xi_3 \cap \Xi_4$，我们便得到 $\{Z = 0\} \cap \Xi_2 \subset A \cap \Xi_2$，从而完成证明。□

直接推论如下命题。

**命题 5.3** (严格正性)。若 $\rho \in (\frac{1}{2H-1}, 2] \iff \alpha + 2H > 2$ 且 $\alpha \leq \frac{1}{2}$，则对所有$(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$, 有 $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$。

证明。所需结果由以下事实推出：$\mathbb{E}[Z] = 1$ 当 $\rho \in (\frac{1}{2H-1}, 2]$ 以及命题 5.1。□

回忆 $M_k$ 和 $m_i$，它们来自（4.14）和（4.15）。注意，对于 $X_t$ 的任意固定路径，只要 $|m_i| < \infty$ 对所有 $i \in \mathbb{N}$均成立，$M_k$ 就是关于 $\mathcal{F}_k = \sigma(\xi_1, \cdots, \xi_k)$ 的非负鞅。由鞅收敛定理，极限 $J = J(X) := \lim_{k \to \infty} M_k$ 几乎必然存在 $\mathbf{P}^{(t,x)}$。当 $J$ 时，$\alpha + 2H \leq 2$ 关于 分数阶矩 有如下结果。

**命题 5.4**。假设 $\rho \in (1, \frac{1}{2H-1}] \iff \alpha + 2H \leq 2$. 那么，给定 $L_t > 0$，我们有$\mathbb{E}[J^p] = 0$，$\mathbf{P}^{(t,x)}$-几乎必然地，对所有 $p \in (0, 1)$。

证明。 记 $A_k := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} m_i^2$。给定 $L_t > 0$，注记 4.22 给出 $\lim_{k\to\infty} A_k = \infty$， $\mathbf{P}^{(t,x)}$- 几乎必然地，并且我们得到 $\mathbf{P}^{(t,x)}$-几乎必然，

$$\mathbb{E}\left[(M_k)^p\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^{k} p m_i \xi_i - p A_k\right\}\right] = \exp\left\{\left(p^2 - p\right) A_k\right\} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

于是，由 Fatou 引理，$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[(M_k)^p] \geq \mathbb{E}[\lim_{k\to\infty}(M_k)^p] = \mathbb{E}[J^p]$。因此， $\mathbb{E}[J^p] = 0$注意到 $J$ 非负。□

注 *5.5.* 注意到 $L_t > 0$，$\mathbf{P}^{(t,0)}$-*a.s.*，命题 *5.4* 得出 $J = 0$, $\mathbb{P} \times \mathbf{P}^{(t,0)}$-*a.s.*，当$\alpha + 2H \leq 2$时。我们强调， $J = \lim_{k\to\infty} M_k$ 并非随机热方程 *(1.1)* 的解 $Z(t,x) = \lim_{k\to\infty} E_{(t,x)}[M_k]$。人们很容易猜想 $E_{(t,x)}[J] = Z(t,x)$，进而可推出在条件 $\alpha + 2H \leq 2$ 下，$E_{(t,0)}[J] = 0$, $\mathbb{P}$-*a.s.*。然而，这将与 *Weinrib–Halperin* 预测相矛盾；根据该预测，只要 $\alpha + H > 1$，$E_{(t,0)}[J]$ 就应当是非平凡的。尽管如此，当 $\alpha + 2H > 2$ 时，定理 *1.6* 保证 $E_{(t,x)}[J] = Z$。

**致谢**。J. Song 的部分经费由国家自然科学基金（编号：12471142）和中央高校基本科研业务费资助。R. Wei 的经费由国家自然科学基金（编号：12401170）和西交利物浦大学研究发展基金（编号：RDF-23-01-024）资助。

## Appendix附录 A. Miscellaneous results

以下结果建立了重尾随机游走 $S = \{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ 的击中时刻与更新过程（1.20）之间的联系。

**引理 A.1.** 设重尾随机游走 $S = \{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ 属于对称 $\rho$-稳定分布的常态吸引域，且 $\rho \in (1, 2]$。那么， $S$ 的返回零点时间是一个更新过程 (1.20)，其 $\alpha = 1 - \frac{1}{\rho} \in (0, \frac{1}{2}]$。

证明。 令 $\phi(t) := \mathbb{E}_S[\exp\{itS_1\}]$ 为 $S$ 增量的特征函数。众所周知，$\lim_{n\to\infty} \phi(\frac{t}{n^{1/\rho}})^n = \exp(-c_\rho|t|^\rho)$，这意味着 $\log\overline{\phi}(\frac{t}{n^{1/\rho}}) \sim -\frac{1}{n}c_\rho|t|^\rho$ 当 $n \to \infty$ 时。注意，$\lim_{n\to\infty} \phi(\frac{t}{n^{1/\rho}}) = 1$。因此，$-\frac{1}{n}c_\rho|t|^\rho \sim \log\ \phi(\frac{t}{n^{1/\rho}}) \sim \phi(\frac{t}{n^{1/\rho}}) - 1$ 当 $n \to \infty$ 时。记作 $x = \frac{t}{n^{1/\rho}}$，于是有 $\phi(x) - 1 \sim -c_\rho|x|^\rho$ 当 $x \to 0$ 时。由 [23, 定理 A.11], , 证明得证。 □

以下引理是 [48, 定理 7.11] 的直接推论。

**引理 A.2.** 考虑双重指标级数$\{a_{m,n}\}_{m\geq 1, n\geq 1}$。若

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{n} \sum_{m>M} |a_{n,m}| = 0,$$

*then*

$$\lim_{M\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{M} a_{m,n} = \lim_{n\to\infty} \lim_{M\to\infty} \sum_{m=1}^{M} a_{m,n}.$$

以下不等式引自 [38]。

**引理 A.3.** 对于 $H \in (\frac{1}{2}, 1]$，以下不等式成立：

$$\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m} f(\boldsymbol{t}) f(\boldsymbol{s}) \prod_{i=1}^{m} |t_i - s_i|^{2H-2} d\boldsymbol{t} d\boldsymbol{s} \leq C_H^m \|f\|^2_{L^{1/H}(\mathbb{R}^m)},$$

其中 $C_H$ 是一个取决于 $H$ 的常数，我们记 $\boldsymbol{t} = (t_1, \cdots, t_m)$ $\boldsymbol{s} = (s_1, \cdots, s_m)$。

通过直接计算可得以下等式。

**引理 A.4.** 假设 $\alpha_i < 1,\ i = 1, \cdots, m$ 和 $\alpha := \sum_{i=1}^m \alpha_i$，则

$$\int_{[0=r_0<r_1<r_2<\cdots<r_m\le t]} \prod_{i=1}^m (r_i - r_{i-1})^{-\alpha_i} d\boldsymbol{r} = \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(1-\alpha_i)}{\Gamma(m-\alpha+1)} t^{m-\alpha},$$

其中 $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ 是伽马函数。

以下引理给出了$\rho$-稳定过程转移密度的一致上下界。

**引理 A.5.** 对于1维 $\rho$-稳定过程的转移密度 $g_\rho(t,x)$，我们有以下一致上下界：

$$\frac{C_1 t}{\left(t^{\frac{1}{\rho}} + |x|\right)^{1+\rho}} \le g_\rho(t,x) \le \frac{C_2 t}{\left(t^{\frac{1}{\rho}} + |x|\right)^{1+\rho}} \le C_2 t^{-\frac{1}{\rho}}, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}\ \ and\ t > 0, \tag{A.1}$$

其中 $C_1, C_2$ 是仅依赖于 $\rho$ 的正常数。此外，对于 $t \le T$，下界可简化为 $g_\rho(t,x) \ge \frac{C_1 t}{\left(T^{1/\rho} + |x|\right)^{1+\rho}}$。

证明。 根据 [40,第 1 节中的定理 1.2。5],

$$g_\rho(1,x) \sim c_\rho (1+|x|)^{-(1+\rho)}, \quad \text{as } x \to \infty.$$

于是存在 $A > 0$，使得，

$$\frac{1}{2} c_\rho (1+|x|)^{-(1+\rho)}) \le g_\rho(1,x) \le 2c_\rho (1+|x|)^{-(1+\rho)}, \quad \forall\ |x| \ge A.$$

注意，$g_\rho(1,x)$ 在 $[-A, A]$ 上为正且有下界，$(1+|x|)^{-(1+\rho)}$ 也是如此。因此，存在 $c_1, c_2 > 0$，使得

$$c_1 (1+|x|)^{-(1+\rho)} \le g_\rho(1,x) \le c_2 (1+|x|)^{-(1+\rho)}, \quad \forall\ |x| \le A.$$

于是我们可以取 $C_1 = \min\{c_1, \frac{1}{2}c_\rho\}$ 和 $C_2 = \max\{c_2, 2c_\rho\}$，使得对于任意 $x \in \mathbb{R}$，

$$C_1 (1+|x|)^{-(1+\rho)}) \le g_\rho(1,x) \le C_2 (1+|x|)^{-(1+\rho)}.$$

最后，根据标度性质，我们有

$$\frac{C_1 t}{\left(t^{\frac{1}{\rho}} + |x|\right)^{1+\rho}} \le g_\rho(t,x) = t^{-\frac{1}{\rho}} g_\rho(1, t^{-\frac{1}{\rho}}x) \le \frac{C_2 t}{\left(t^{\frac{1}{\rho}} + |x|\right)^{1+\rho}} \le C_2 t^{-\frac{1}{\rho}}.$$

□

## References


[1] Tom Alberts、Konstantin Khanin 和 Jeremy Quastel。维度为 $1+1$ 的定向聚合物的中间无序区域。*The Annals of Probability*，42(3):1212–1256，2014。[2] Christian Bayer、Peter K Friz、Paul Gassiat、Jorg Martin 和 Benjamin Stemper。粗糙波动率的正则性结构。*Mathematical Finance*，30(3):782–832，2020。[3] Quentin Berger。关于无序对相关高斯环境中钉扎模型影响的评述。*ALEA: Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics*，10(2):953–977，2013。[4] Quentin Berger 和 Hubert Lacoin。维度为 $1+$ 的定向聚合物的高温行为。，():–。[5] Quentin Berger 和 Hubert Lacoin。缺陷线上的钉扎：边缘无序相关性的刻画及临界点偏移的精确渐近性质。

2 *Annales de l'Institut Henri Poincaré-Probabilités et Statistiques* 53 1 430 450, 2017

*Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* 17 2 305 346, , ():–。2018

[6] Quentin Berger 和 Julien Poisat。相关高斯环境中钉扎模型和共聚物模型的临界曲线。 *Electronic Journal of Probability*，20(71):1–35，2015。[7] Lorenzo Bertini 和 Nicoletta Cancrini。随机热方程：Feynman-Kac公式与间歇性。 *Journal of Statistical Physics*，78(5):1377–1401，1995。[8] Jean Bertoin。 *Lévy processes*，第121卷。剑桥大学出版社，1996。[9] Nicholas H Bingham、Charles M Goldie 和 Jef L Teugels。 *Regular variation*。剑桥大学出版社，1989。[10] Francesco Caravenna、Rongfeng Sun 和 Nikos Zygouras。多项式混沌与无序系统的标度极限。 *Journal of the European Mathematical Society*，19(1):1–65，2017。[11] Francesco Caravenna、Rongfeng Sun 和 Nikos Zygouras。边缘相关无序系统中的普适性。*The Annals of Applied Probability*，27(5):3050–3112，2017。[12] Francesco Caravenna、Rongfeng Sun 和 Nikos Zygouras。临界

2 *Inventiones* 维随机热流。，( ): *Mathematicae* 233 1 325 460, 2023 – 。[13] Ren´e Carmona 和 Stanislav A Molchanov。 *Parabolic Anderson problem and intermittency*，第 518 卷。美国数学会，1994。[14] Le Chen、Yuhui Guo 和 Jian Song。带时空白噪声的一类随机偏微分方程的矩与渐近性质。 *Transactions of the American Mathematical Society*，2024。[15] Le Chen 和 Jingyu Huang。 $\mathbb{R}^d$上的随机热方程的比较原理。 *The Annals of Probability*，47 2 989 1035，2019 ( ): – 。[16] Xia Chen。具有粗糙或临界高斯噪声的抛物型安德森模型。 *Annales de l'Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques* 55 2 941 976, 2019 ，( ): – 。[17]

Xia Chen、Aur´elien Deya、Cheng Ouyang 和 Samy Tindel。若干重整化抛物型安德森模型的矩估计。 *The Annals of Probability*，49(5):2599–2636，2021。[18] Xia Chen、Yaozhong Hu、Jian Song 和 Xiaoming Song。分数阶抛物型安德森模型的时间渐近性质。 *Electronic Journal of Probability*，23(14):1–39，2018。[19] Xia Chen、Yaozhong Hu、Jian Song 和 Fei Xing。时空哈密顿量的指数渐近性质。 *Annales de l'Institut Henri Poincaré-Probabilités et Statistiques* 51 4 1529 1561, 2015 ，( ): – 。[20]

Yingxia Chen 和 Fuqing Gao。空间相关环境中定向聚合物的标度极限。 *Electronic Journal of Probability* 28 1 57, 2023 ，: – 。[21]

Robert Dalang。扩展鞅测度随机积分及其在空间齐次随机偏微分方程中的应用。 *Electronic Journal of Probability*，4(6):1–29，1999。[22] Gregorio R Moreno Flores。关于随机热方程解的（严格）正性。 *The Annals of Probability* 42 4 1635 1643, 2014 ，( ): – 。[23]

Giambattista Giacomin。*Random polymer models*。Imperial College Press，2007。[24] Giambattista Giacomin。 *Disorder and Critical Phenomena Through Basic Probability Models: École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XL–2010* 2025 2011 ，第 卷。

Springer Science & Business Media，。[25] Giambattista Giacomin 和 Fabio Lucio Toninelli。淬火无序对聚合物脱钉转变的平滑效应。 *Communications in Mathematical Physics*，266(1):1–16，2006。[26] Martin Hairer 和 Cyril Labb´e。在 $R^2$ 上构造连续抛物型安德森模型的一种简单方法。*Electronic Communications in Probability*，2015。[27] Martin Hairer 和 Cyril Labb´e。全空间上的乘 *Journal of the European Mathematical Society* 20 4 1005 1054, 2018 性随机热方程。，( ): – 。[28] A Brooks Harris。随机缺陷对伊辛模型临界行为的影响。*Journal of Physics C: Solid State Physics* 7 9 1671, 1974 ，( ): 。[29]

Daniel Henry。 *Geometric theory of semilinear parabolic equations*，第840卷。Springer，2006。[30] Yaozhong Hu。带白噪声势的热方程的混沌展开。 *Potential Analysis* 16 1 45 66, 2002 ，( ): – 。[31]

Yaozhong Hu、David Nualart 和 Jian Song。分数阶白噪声驱动的热方程的 Feynman–Kac 公式。 *The Annals of Probability*，39(1):291–326，2011。[32] Jingyu Huang、Khoa Lˆe 和 David Nualart。空间相关噪声驱动的抛物型安德森模型的大时间渐近性质。 *Annales de l'Institut Henri Poincaré-Probabilités et Statistiques* 53 3 1305 1340, 2017 ，( ): – 。

[33] Davar Khoshnevisan。 *Analysis of stochastic partial differential equations*，第119卷。美国数学会，2014。[34] Hubert Lacoin。钉扎模型中无序无关性的鞅方法。 *Electronic Communications in Probability* 15 418 427, 2010 ，: – 。[35]

Khoa Lˆe。关于 Xia Chen 一项结果的评注。 *Statistics & Probability Letters*，118:124–126，2016。

[36] Zian Li、Jian Song、Ran Wei 和 HANG ZHANG。相关高斯随机环境中的钉扎模型。*Bernoulli*，即将出版。[37] Pertti Mattila。 *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces: fractals and rectifiability*。剑桥大学出版社，1999。[38] Jean M´emin、Yulia Mishura 和 Esko Valkeila。关于分数布朗运动维纳积分矩的不等式。 *Statistics & Probability Letters*，51(2):197–206，2001。[39] Carl Mueller。关于带噪声热方程解的支集。 *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes* 37 4 225 245, 1991 ，( ): – 。[40] John P Nolan。单变量稳定分布。 *Springer Series in Operations Research and Financial Engineering*，10 978 3，2020: – 。[41] David Nualart。 *The Malliavin calculus and related topics*，第1995卷。Springer，2006。[42] David Nualart 和 Eulalia Nualart。 *Introduction to Malliavin calculus*。剑桥大学出版社，2018。[43] David Nualart 和 Moshe Zakai。广义布朗泛函与随机偏微分方程的解。 *Journal of Functional Analysis*，84(2):279–296，1989。[44] Jeremy Quastel、Alejandro Ramirez 和 B´alint Vir´ag。平面随机热方程中的KPZ涨落。 *Duke Mathematical Journal*，174(7):1261–1340，2025。[45] Guanglin Rang。从空间相关环境中的定向聚合物到由分数噪声驱动的随机热方程，维数为 1+ 1 。 *Stochastic Processes and their Applications*，130(6):3408–3444，2020。[46] Guanglin Rang、Jian Song 和 Meng Wang。时间相关随机环境中长程随机游走的标度极限。 *Electronic Journal of Probability*，2024。[47] Claude Ambrose Rogers。 *Hausdorff measures*。剑桥大学出版社，1970。[48] Walter Rudin。 *Principles of Mathematical Analysis*。麦格劳-希尔科学出版社，1976。[49] Alexander Shamov。关于高斯乘性混沌。 *Journal of Functional Analysis*，270(9):3224–3261，2016。[50] Hao Shen、Jian Song、Rongfeng Sun 和 Lihu Xu。独立随机游走泊松场中的定向聚合物的标度极限。 *Journal of Functional Analysis*，281(5):109066，2021。[51] Jian Song。关于一类随机偏微分方程。 *Stochastic Processes and their Applications*，127 1 37 79，2017 ( ): – 。[52] S James Taylor 和 James G Wendel。稳定过程零点集的精确豪斯多夫测度。 *Probability Theory and Related Fields* 6 2 170 180, 1966 ，( ): – 。[53] John B Walsh。随机偏微分方程导论。载于 *École d'Été de Probabilités de Saint Flour XIV-1984* 265 439 2006 ，第 – 页。Springer，。[54] Ran Wei 和 Jinjiong Yu。临界无序钉扎测度。 *The Annals of Applied Probability*，35(6):3844– 3905，2025。[55] Abel Weinrib 和 Bertrand I Halperin。具有长程相关淬火无序的系统中的临界现象。 *Physical Review B*，27(1):413，1983。[56] Nikos Zygouras。随机环境中的定向聚合物：相变综述。 *Stochastic Processes and their Applications* 177 104431, 2024 ，：。

Research Center for Mathematics and Interdisciplinary Sciences, Shandong University, Qingdao 266237, China

*Email address*: 202117106@mail.sdu.edu.cn

Research Center for Mathematics and Interdisciplinary Sciences, Shandong University, Qingdao 266237, China

*Email address*: txjsong@sdu.edu.cn

Department of Financial and Actuarial Mathematics, Xi'an Jiaotong-Liverpool University, 111 Ren'ai Road, Suzhou 215123, China

*Email address*: ran.wei@xjtlu.edu.cn

Research Center for Mathematics and Interdisciplinary Sciences, Shandong University, Qingdao 266237, China

*Email address*: 202217118@mail.sdu.edu.cn