自动出价的点击与转化估计不确定性量化

预印本

Ivan Zhigalskii Avito 与 HSE，莫斯科，俄罗斯
iazhigalskiy@edu.hse.ru

Andrey Pudovikov人工智能中心与 IAI MSU 罗蒙诺索夫莫斯科国立大学，莫斯科，俄罗斯
pudovikovad@my.msu.ru

Aleksandr Katrutsa Avito 与 IAI MSU，莫斯科，俄罗斯
amkatrutsa@gmail.com

Egor Samosvat Avito，莫斯科，俄罗斯
easamosvat@avito.ru

arXiv:2603.01825v1 [cs.LG] 2 Mar 2026

摘要

现代电子商务平台采用各种拍卖机制，为给定商品分配付费广告位。为了将这种方式扩展到数百万场拍卖，平台基于自动出价算法提供推广工具。这些算法通常依赖预训练机器学习模型提供的点击率（CTR）和转化率（CVR）估计值。然而，此类模型的预测具有不确定性，可能会显著影响自动出价算法的性能。为解决这一问题，我们提出了DenoiseBid方法，通过校正生成的CTR和CVR，使最终的出价在拍卖中更加高效。我们方法的基本思想是采用贝叶斯方法，用从恢复的分布中获得的CTR或CVR估计值替代含噪的估计值。为展示所提方法的性能，我们在Synthetic、iPinYou和BAT数据集上进行了广泛实验。为评估我们的方法对噪声规模的鲁棒性，我们使用了合成噪声，以及根据预训练机器学习模型的预测估计得到的噪声。

1. 引言

现代电子商务平台通过自动化拍卖机制分配广告位，每天处理数百万场拍卖。为应对如此庞大的规模，平台部署自动出价系统，为广告主计算最优出价。这些系统求解以点击率（CTR）和转化率（CVR）为参数的约束优化问题，而这些指标是根据数据估计得出的。

在广泛研究的第二价格拍卖（SPA）规则下 [17, 3, 7, 18, 10, 13, 14], ，自动出价系统的优化问题可表述为线性规划（LP）问题。由此可知，最优出价是点击率和转化率的线性函数 [17, 3]。因此，这些指标中的估计误差会直接传导至出价，可能导致预算分配不理想，并违反广告主的每次点击成本（CPC）约束。我们聚焦于第二价格拍卖，因为出价与外部指标（如点击率和转化率）之间由此产生的线性关系，使得可以对这些指标估计值的不确定性进行贝叶斯处理。扩展到第一价格拍卖是一个重要方向，需要采用其他方法，留待未来研究。

在实践中，点击率和转化率由机器学习模型预测，其输出本质上具有不确定性。这促使我们开发一种明确考虑预测噪声的竞价框架。我们提出 DenoiseBid，一种贝叶斯自动出价方法，它用点击率和转化率的后验期望替换其噪声估计，这些后验期望以模型的预测以及从历史数据中恢复的先验分布为条件。

本研究的主要贡献如下：

1. 我们在点击率（CTR）和转化率（CVR）存在噪声的情况下阐述自动出价问题，并基于二者的后验期望推导出闭式出价规则。2. 我们提出 DenoiseBid 方法，该方法根据观测数据恢复 CTR 和 CVR 的先验分布，并以闭式形式计算去噪出价。3. 我们在四个数据集上，针对合成噪声和实测噪声，对 DenoiseBid 进行了广泛的实证验证，并展示了其持续带来的收益。

2. 相关工作。

自动出价建模。自动出价问题可视为实时竞价（RTB） [12]的一种特例，其中平台在全局绩效目标下优化出价。现有方法采用优化 [3, 18], 、强化学习 [6, 7], 或控制技术 [17, 16]。据我们所知， [17]最早将广告主在预算和每次点击成本约束下的转化最大化问题建模为线性规划（LP）；此后，该建模及其基于对偶的出价规则已成为标准基线 [3, 14]。

点击率/转化率预测的不确定性量化。基于线性规划的出价依赖于估计的点击率和转化率，而自动出价问题本身也可以从贝叶斯视角来考察 [3]。从建模角度来看，点击率/转化率预测涵盖了表格特征交互模型和深度行为序列架构 [19]。对于梯度提升决策树（GBDT），虚拟集成将预测变异性分解为数据成分和知识成分 [11]。深度模型中的类似方法包括深度集成和变分贝叶斯方法 [1]。因此，实践中占主导地位的模型族都可以提供校准的不确定性估计。

将不确定性传递到出价中。剩下的关键问题是，如何将这些经过校准的不确定性纳入自动出价层。 [15] 对点击率值进行聚类，并将其与强化学习相结合，以构建出价策略；然而，当点击率分布为单峰或高度集中时，其基于聚类的离散化可能会造成信息损失。 [18] 提出了一种风险管理框架，通过贝叶斯逻辑回归对点击率的不确定性建模；尽管该方法有坚实的理论依据，但它将预测模型限制在特定的参数化族中，因此无法使用现代梯度提升决策树或深度学习预测器 [19]。近期的 RobustBid [14] 采用稳健优化，并基于点击率和转化率分布的分位数估计构造不确定性集，从而实现了较强的约束满足能力；然而，该方法并未纳入机器学习模型提供的逐预测不确定性估计。

DenoiseBid 联合利用点击率和转化率值的经验分布，以及每次预测的不确定性估计，来构造去噪出价（见表 1）。与以往方法不同，它是一种无模型方法，保留了闭式出价规则，并利用贝叶斯后验期望。

表 1：DenoiseBid 与其他方法的比较。

参考	多个 不确定性来源	点击率的使用 分布	预测不确定性 模型
[15]	✗	✓	✗
[18]	✗	✓	✗
[14]	✓	✓	✗
本文	✓	✓	✓

3. 问题陈述

本节在完全了解点击与转化概率的前提下，对确定性自动竞价优化问题进行形式化表述。由此得到的出价公式将作为基准，供第 4 节扩展至贝叶斯设定。

考虑一位广告主参与一系列 T 单广告位二价拍卖（SPAs）。对于每次拍卖$t \in [T] = \{1, \ldots, T\}$，我们分别用 CTR_t 表示点击率，用 CVR_t 表示转化率，用 $wp_t > 0$ 表示实际成交价，并用 $bid_t \geq 0$表示广告主的出价。我们采用一种离线设定，在该设定中，成交价

$\{wp_t\}_{t=1}^T$和真实概率 $\{CTR_t, CVR_t\}_{t=1}^T$均为已知。在SPA规则下，当 $bid_t \geq wp_t$ 时，广告主赢得拍卖 t，并支付 wp_t。

广告主寻求在预先给定的预算约束 B 与目标每次点击成本（CPC）上限 C下，最大化预期转化总数。遵循 [17, 3], ，我们将二元分配变量$x_t \in \{0,1\}$ 松弛为 $x_t \in [0,1]$，从而得到如下线性规划问题：

$$\begin{aligned} \max_{0\leq x_t\leq 1} \quad & \sum_{t=1}^{T} x_t \cdot CTR_t \cdot CVR_t \\ \text{s.t.} \ & \sum_{t=1}^{T} x_t \cdot wp_t \leq B, \\ & \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t \cdot wp_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t \cdot CTR_t} \leq C. \end{aligned} \tag{1}$$

需要注意的是，可以将每次点击成本约束推广至包含投资回报率约束 [7]的更一般情形；然而，每次点击成本的表述在文献 [3]中更为普遍。

最优出价通过构造(1)的拉格朗日对偶问题得出，其对偶变量 $p \geq 0$和 $q \geq 0$分别对应于预算约束与每次点击成本约束，并应用互补松弛条件。由此得到闭式表达式

$$bid_t = \frac{1}{p^* + q^*} CVR_t \cdot CTR_t + \frac{q^*}{p^* + q^*} C \cdot CTR_t, \tag{2}$$

其中 p^* 和 q^* 为最优对偶变量。详细推导遵循与 [17, 3] 中相同的思路，并在第4节中扩展至问题(1)的随机修改。

公式 (2) 表明， bid_t 是 CTR_t 和 CVR_t的线性函数，这意味着这些量的估计误差会直接传递到出价中，并影响竞价策略的表现。第 4 节从贝叶斯视角扩展优化问题 (1)，以处理此类不确定性。

4. DenoiseBid方法

我们假设竞价代理会观测到真实点击概率和转化概率的含噪估计。然而，代理的目标是最大化实际实现的转化量。因此，DenoiseBid 的核心思想是从确定性优化转向随机优化，在给定含噪观测的条件下，最大化真实转化概率的条件期望。将这一思想形式化，可得以下优化问题：

$$\begin{aligned} \max_{0\leq x_t\leq 1} \ & \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T} x_t \cdot CTR_t \cdot CVR_t \middle| \mathcal{O} \right], \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{t=1}^{T} x_t \cdot wp_t \leq B, \\ & \mathbb{E}\left[\frac{\sum_{t=1}^{T} x_t \cdot wp_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t \cdot CTR_t} \middle| \mathcal{O} \right] \leq C, \end{aligned} \tag{3}$$

其中，期望是针对潜在随机变量 $\{CTR_t, CVR_t\}_{t=1}^T$计算的，并以观测值为条件
$\mathcal{O} = \left\{ \left(\widehat{CTR}_t, \widehat{CVR}_t \right) \right\}_{t=1}^T$.

为了将随机优化问题化简为线性规划，我们对平均每次点击成本约束中的比值期望采用一阶泰勒近似：

$$\frac{\sum_{t=1}^{T} x_t \cdot wp_t}{\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T} x_t \cdot CTR_t \middle| \mathcal{O} \right]} \leq C. \tag{4}$$

通过重新排列各项，我们得到标准原始形式：

$$\begin{aligned} &\max_{0\le x_t\le 1} \quad \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T} x_t \cdot CTR_t \cdot CVR_t \middle| \mathcal{O}\right], \\ \text{s.t.} \quad &\sum_{t=1}^{T} x_t \cdot wp_t \le B, \\ &\sum_{t=1}^{T} x_t \cdot (wp_t - C \cdot \mathbb{E}\left[CTR_t|\mathcal{O}\right]) \le 0. \end{aligned} \tag{5}$$

这种表示表明，智能体在考虑基于点击率后验均值的目标每次点击成本的同时，优化转化的后验均值。

与第 3 节类似，我们使用问题 (5) 的拉格朗日对偶和互补松弛条件，得到最优出价公式：

$$bid_t = \frac{1}{p^* + q^*}\mathbb{E}[CTR_t\, CVR_t \mid \mathcal{O}] + \frac{q^*}{p^* + q^*} C \cdot \mathbb{E}[CTR_t \mid \mathcal{O}], \tag{6}$$

其中， p^* 和 q^* 分别是与预算约束和每次点击成本约束相关的最优对偶变量。(6) 的完整推导见附录 A。

因此，最优出价问题可归结为计算条件期望。应用贝叶斯公式，我们将潜变量 X （表示 CTR 或 $CTR \cdot CVR$）的期望写成似然和先验分布的形式：

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{O}] = \int_X X \cdot p(X \mid \mathcal{O})\mathrm{d}X = \frac{\int_X X \cdot p(\mathcal{O} \mid X)p(X)\mathrm{d}X}{\int_X p(\mathcal{O} \mid X)p(X)\mathrm{d}X}. \tag{7}$$

因此，计算后验期望需要以下组成部分：噪声模型（似然） $p(\mathcal{O} \mid X)$以及先验分布 $p(X)$，后者刻画真实值的分布。在后续各节中，我们分析在不同设定下这些期望的计算，分别处理仅点击率不确定性与CTR-CVR联合不确定性场景。由此，我们推导出DenoiseBid方法实验评估的表达式。

4.1 仅点击率不确定性下的出价

为说明DenoiseBid框架的机制，我们首先考虑一个简单情形：噪声主要$\widehat{\text{集}}$中于点击率预测，即 $CVR_t = CVR_{t\circ}$ 此外，我们假设点击率与转化率预测彼此独立，且在不同拍卖之间也相互独立。在这些假设下，式(6)中价值的联合后验期望可分解为：

$$\mathbb{E}\left[CTR_t \cdot CVR_t \middle| \left\{\left(\widehat{CTR}_t, \widehat{CVR}_t\right)\right\}_{t=1}^{T}\right] = CVR_t \cdot \mathbb{E}\left[CTR_t \middle| \widehat{CTR}_t\right]. \tag{8}$$

因此，式(6)中的最优出价与此后验期望成正比：

$$bid_t = \frac{CVR_t + qC}{p + q}\mathbb{E}\left[CTR_t \middle| \widehat{CTR}_t\right]. \tag{9}$$

进而，期望等于：

$$\mathbb{E}\big[CTR_t \,\big|\, \widehat{CTR}_t\big] = \frac{\int CTR_t \cdot p\big(\widehat{CTR}_t \big| CTR_t\big) p(CTR_t)\, \mathrm{d}CTR_t}{\int p\big(\widehat{CTR}_t \,\big|\, CTR_t\big) p(CTR_t)\, \mathrm{d}CTR_t}. \tag{10}$$

噪声模型。虽然我们并不认为在所有实际场景中估计误差都严格服从高斯分布，但将噪声建模为 logit 空间中的加性正态分布，是一种依据充分且易于处理的近似方法 [4] 。对于点击率预测器而言，这种选择尤为自然，因为它们通常会先生成一个实数分值，再应用 sigmoid变换。此外，通过前两阶矩刻画 logit 分布，为量化预测不确定性提供了标准依据 [9]。

形式上，由于点击概率 $CTR_t \in [0,1]$，我们通过定义 logit 空间中的 logit-ˆ 点击率 ξ_t 及其含噪观测值 $\hat{\xi}_t$ 来进行估计：

$$\xi_t = \ln \frac{CTR_t}{1-CTR_t}, \quad \hat{\xi}_t = \ln \frac{\widehat{CTR}_t}{1-\widehat{CTR}_t}. \tag{11}$$

我们将观测模型假设为：

$$\hat{\xi}_t = \xi_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma_t^2\right), \tag{12}$$

其中，$\{\varepsilon_t\}_{t=1}^T$ 是相互独立的随机变量，并且与真实 logit 点击率 ξ_t相互独立。因此，似然可以写为：

$$p\left(\hat{\xi}_t \,\middle|\, \xi_t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} e^{-\frac{(\hat{\xi}_t - \xi_t)^2}{2\sigma_t^2}}. \tag{13}$$

高斯混合先验。现实世界中的点击率分布通常较为复杂且呈多峰形态。因此，我们将 logit 点击率 ξ 的先验分布建模为高斯混合分布：

$$\xi \sim \sum_{k=1}^{K} \pi_k \cdot \mathcal{N}\left(\mu_k, \theta_k^2\right), \tag{14}$$

其中，K 是混合成分的数量，π_k、μ_k 和 θ_k^2 分别是第 k个成分的权重、均值和方差。这种先验使框架能够适应在给定数据集上训练的机器学习模型所生成的点击率经验分布。

为计算 $\mathbb{E}\left[CTR_t \middle| \widehat{CTR}_t\right]$ (10)，我们首先进行变量变换，将变量转换到 logit 空间：

$$\mathbb{E}\left[CTR_t \middle| \widehat{CTR}_t\right] = \frac{\int \sigma(\xi_t) p\left(\hat{\xi}_t \middle| \xi_t\right) p(\xi_t)\, \mathrm{d}\xi_t}{\int p\left(\hat{\xi}_t \,\middle|\, \xi_t\right) p(\xi_t)\, \mathrm{d}\xi_t}. \tag{15}$$

接下来，将似然 (13) 和先验 (14) 代入 (15)：

$$\mathbb{E}\left[CTR_t \,\middle|\, \widehat{CTR}_t\right] = \frac{\sum_{k=1}^{K} \pi_k \int \sigma(\xi_t) \mathcal{N}\left(\hat{\xi}_t \,\middle|\, \xi_t, \sigma_t^2\right) \mathcal{N}\left(\xi_t \,\middle|\, \mu_k, \theta_k^2\right) \mathrm{d}\xi_t}{\sum_{k=1}^{K} \pi_k \int \mathcal{N}\left(\hat{\xi}_t \,\middle|\, \xi_t, \sigma_t^2\right) \mathcal{N}\left(\xi_t \,\middle|\, \mu_k, \theta_k^2\right) \mathrm{d}\xi_t}, \tag{16}$$

其中 $\mathcal{N}\left(\cdot \,\middle|\, \mu,\ \sigma^2\right)$ 表示均值为 μ、方差为 σ的正态概率密度函数wh
^{2}.

利用两个高斯核的乘积是一个缩放后的高斯分布这一性质，并对所得的 Sigmoid-高斯积分应用 Probit近似（详细推导见附录 B.1），我们可以得到一种计算效率高的闭式表达式：

$$\mathbb{E}\left[CTR_t \middle| \widehat{CTR}_t\right] \approx \sum_{k=1}^{K} \pi'_{t,k} \sigma\left(\frac{\mu'_{t,k}}{\sqrt{1+\frac{\pi}{8}{\sigma'_{t,k}}^2}}\right), \tag{17}$$

其中 $\mu'_{t,\,k}$和 ${\sigma'_{t,\,k}}^2$ 分别是第 k 个分量的后验均值和方差，而 $\pi'_{t,\,k} \propto \pi_k \cdot \mathcal{N}(\hat{\xi}_t \mid \mu_k,\ \sigma_t^2 + \theta_k^2)$ 是后验权重。

经验重建先验。实现 DenoiseBid 需要式 (14) 中引入的先验分布 $p(\xi)$ 的参数 π_k，μ_k，θ_k。在现实世界中，我们无法获得真实对数几率 ξ_t，因此只能使用噪声估计 $\hat{\xi}_t$ 来近似它们。

为了从含噪样本中恢复先验分布，我们将该任务表述为一个带测量误差的密度估计问题。由于我们假设先验 $p(\xi_t)$是高斯混合分布，噪声模型 $p\left(\hat{\xi}_t \mid \xi_t\right)$ 是高斯分布，且噪声与点击率不相关，因此观测对数几率的边缘分布同样是高斯混合分布：

$$p(\hat{\xi}_t) = \int p\left(\hat{\xi}_t \,\middle|\, \xi_t\right) \cdot p(\xi_t)\, \mathrm{d}\xi_t = \sum_{k=1}^{K} \pi_k \mathcal{N}\left(\hat{\xi}_t \,\middle|\, \mu_k, \theta_k^2 + \sigma_t^2\right), \tag{18}$$

其中 $\left\{\hat{\xi}_t,\ \sigma_t^2\right\}$ 是拍卖 t中的点击率模型输出。

为了估计参数 $\boldsymbol{\varphi}=\{\pi_k,\mu_k,\theta_k^2\}_{k=1}^K$，我们采用极端去卷积（XDGMM）技术 [5]，以最大化以下似然：

$$\mathcal{L}\Big(\boldsymbol{\varphi}\,\Big|\,\{\hat{\xi}_t\}_{t=1}^T,\,\{\sigma_t^2\}_{t=1}^T\Big)=\sum_{t=1}^T\ln p\big(\hat{\xi}_t\,|\,\boldsymbol{\varphi},\sigma_t^2\big)=\sum_{t=1}^T\ln\left(\sum_{k=1}^K\pi_k\mathcal{N}\left(\hat{\xi}_t\,\middle|\,\mu_k,\theta_k^2+\sigma_t^2\right)\right). \tag{19}$$

与将观测值视为精确值的标准 EM算法不同，XDGMM 会针对每个样本考虑其各自的噪声方差σ_t^2。因此，XDGMM 非常适合重建自动出价的点击率分布。

4.2 点击率-转化率联合不确定性下的出价

在上一节中，为简化推导，我们假设点击率与转化率相互独立。在更贴近现实场景的联合不确定性情形下，我们考虑点击率与转化率之间的相关性。为了捕捉

基于这种关系，我们将所提出的框架推广到联合逻辑值空间 $\boldsymbol{\eta}_t=(\xi_t\quad\zeta_t)^\top$，其中 ξ_t 和 ζ_t分别表示点击率和转化率的逻辑值：

$$\xi_t=\ln\frac{CTR_t}{1-CTR_t},\quad \zeta_t=\ln\frac{CVR_t}{1-CVR_t}. \tag{20}$$

在这种设定下，虽然我们仍假设不同拍卖之间的点击率和转化率相互独立，但允许它们在每次拍卖内可能相关。因此，式（6）中二者乘积的期望无法再分解，需要评估：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[CTR_t\,\big|\,\hat{\boldsymbol{\eta}}_t\big]&=\int\sigma(\xi_t)\,p(\boldsymbol{\eta}_t\,|\,\hat{\boldsymbol{\eta}}_t)\mathrm{d}^2\boldsymbol{\eta}_t,\\ \mathbb{E}\big[CTR_t\,CVR_t\,\big|\,\hat{\boldsymbol{\eta}}_t\big]&=\int\sigma(\xi_t)\sigma(\zeta_t)\,p(\boldsymbol{\eta}_t|\hat{\boldsymbol{\eta}}_t)\mathrm{d}^2\boldsymbol{\eta}_t,\end{aligned} \tag{21}$$

其中，$\hat{}\boldsymbol{\eta}_t=\big(\hat{}\xi_t\ \hat{}\zeta_t\big)^\top$ 是含噪点击率和转化率观测值的逻辑值向量。

类似于一维情形，我们用似然和先验来表示期望r:

$$\mathbb{E}\big[X\,\big|\,\hat{\boldsymbol{\eta}}_t\big]=\frac{\int X\cdot p\big(\hat{\boldsymbol{\eta}}_t\,\big|\,\boldsymbol{\eta}_t\big)p(\boldsymbol{\eta}_t)\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{\eta}_t}{\int p\big(\hat{\boldsymbol{\eta}}_t\,\big|\,\boldsymbol{\eta}_t\big)p(\boldsymbol{\eta}_t)\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{\eta}_t}, \tag{22}$$

其中，潜变量 X 表示 CTR_t 或 $CTR_t\cdot CVR_t$。

噪声模型。与一维情形类似，我们假设 CTR 和 CVR 的观测误差在逻辑值空间中均为加性高斯分布：

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_t=\boldsymbol{\eta}_t+\boldsymbol{\varepsilon}_t,\quad \boldsymbol{\varepsilon}_t\sim\mathcal{N}(\mathbf{0},\boldsymbol{\Sigma}_t), \tag{23}$$

其中，$\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}_{t=1}^T$ 是相互独立的二维随机向量，且与 $\{\boldsymbol{\eta}_t\}_{t=1}^T$ 相互独立。于是，似然函数可写为：

$$p\big(\hat{\boldsymbol{\eta}}_t\,\big|\,\boldsymbol{\eta}_t\big)=\frac{1}{2\pi\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}_t|}}e^{-\frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_t-\boldsymbol{\eta}_t)^\top\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_t-\boldsymbol{\eta}_t)}. \tag{24}$$

高斯混合先验。为捕捉 CTR 与 CVR 之间的相关性，我们将 logit 向量的联合先验分布建模为二元高斯混合：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_t&\sim\sum_{k=1}^K\pi_k\mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}_k,\boldsymbol{\Theta}_k\right),\\ p(\boldsymbol{\eta}_t)&=\sum_{k=1}^K\frac{\pi_k}{2\pi\sqrt{|\boldsymbol{\Theta}_k|}}e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\eta}_t-\boldsymbol{\mu}_k)^\top\boldsymbol{\Theta}_k^{-1}(\boldsymbol{\eta}_t-\boldsymbol{\mu}_k)},\end{aligned} \tag{25}$$

其中，K 是混合成分的数量，π_k、$\boldsymbol{\mu}_k$ 和 $\boldsymbol{\Theta}_k$ 分别是第 k 个二维高斯分布的权重、均值向量和协方差矩阵。

将似然 (24) 和先验 (25) 代入 (22)，可得到以下期望表达式：

$$\mathbb{E}\big[X\,\big|\,\hat{\boldsymbol{\eta}}_t\big]=\frac{\sum_{k=1}^K\pi_k\int X\mathcal{N}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_t\mid\boldsymbol{\eta}_t,\boldsymbol{\Sigma}_t)\mathcal{N}(\boldsymbol{\eta}_t\mid\boldsymbol{\mu}_k,\boldsymbol{\Theta}_k)\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{\eta}_t}{\sum_{k=1}^K\pi_k\int\mathcal{N}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_t\mid\boldsymbol{\eta}_t,\boldsymbol{\Sigma}_t)\mathcal{N}(\boldsymbol{\eta}_t\mid\boldsymbol{\mu}_k,\boldsymbol{\Theta}_k)\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{\eta}_t}. \tag{26}$$

与前一种情况类似，我们可以应用高斯分布的性质，得到以下公式：

$$\mathbb{E}\big[X \,\big|\, \hat{\boldsymbol{\eta}}_t\big] = \sum_{k=1}^{K} \pi'_{t,k} \int X \cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{\eta}_t \,|\, \boldsymbol{\mu}'_{t,k}, \boldsymbol{\Sigma}'_{t,k})\, \mathrm{d}^2\boldsymbol{\eta}_t, \tag{27}$$

其中 $\pi'_{t,\,k}$ 为后验权重，$\mu'_{t,\,k}$、$\Sigma'_{t,\,k}$ 分别为每个分量更新后的后验均值向量和协方差矩阵（详细推导见附录 B.2）

为计算点击率期望，我们利用 ξ_t 的边缘后验分布仍服从正态分布这一性质，从而可以对每个分量使用 Probit 近似：

$$\mathbb{E}\big[CTR_t \,\big|\, \hat{\boldsymbol{\eta}}_t\big] \approx \sum_{k=1}^{K} \pi'_{t,k}\, \sigma\left(\frac{(\boldsymbol{\mu}'_{t,k})_0}{\sqrt{1+\frac{\pi}{8}(\boldsymbol{\Sigma}'_{t,k})_{0,0}}}\right), \tag{28}$$

其中（·）$_0$和（·）$_{0,\,0}$分别表示均值向量的第一个元素和协方差矩阵的左上角元素 x.

然而，值 ($X = \sigma(\xi_t)\sigma(\zeta_t)$) 涉及在相关分布上对两个 Sigmoid 函数求乘积。我们采用高斯-厄米特求积 [2, 8]来计算期望。为考虑相关性，我们使用 Cholesky分解 $\boldsymbol{\Sigma}'_{t,\,k} = \mathbf{L}\mathbf{L}^{\top}$ 将标准节点转换为与每个分量的均值和协方差相匹配的节点：

$$\mathbb{E}\big[CTR_t\, CVR_t \,\big|\, \hat{\boldsymbol{\eta}}_t\big] \approx \sum_{k=1}^{K} \pi'_{t,k} \sum_{i,j=1}^{M} \lambda_i \lambda_j\, \sigma\left(\xi_{t,k}^{(i,j)}\right) \sigma\left(\zeta_{t,k}^{(i,j)}\right), \tag{29}$$

其中，节点 $\boldsymbol{\eta}_t^{(i,j)}{}_{,\,k} = \begin{pmatrix}\xi_{t,k}^{(i,j)} & \zeta_{t,k}^{(i,j)}\end{pmatrix}^{\top}$ 通过对后验协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}'_{t,\,k} = \mathbf{L}_{t,\,k}\mathbf{L}_{t}^{\top}{}_{,\,k}$ 进行 Cholesky分解得到（详见附录 B.3）。

由于 Sigmoid 函数是平滑的，少量节点（例如 $M = 5$）即可为出价提供足够的精度。经验表明，进一步增加 M 不会显著提高准确度。后验协方差矩阵只有 2×2，因此可以通过解析方法计算该 Cholesky分解。因此，这种近似方案速度快，能够满足实时竞价系统的时间要求。

经验重建先验。与之前一样，必须根据含噪观测 $\hat{\boldsymbol{\eta}}_t$ 估计式（25）中引入的先验参数 $\boldsymbol{\psi} = \{\pi_k, \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k\}_{k=1}^{K}$。为进行这项估计，我们利用观测到的 Logit 向量的边缘分布为二元高斯混合分布这一性质：

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_t \sim \sum_{k=1}^{K} \pi_k \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Theta}_k + \boldsymbol{\Sigma}_t). \tag{30}$$

其中，$\boldsymbol{\Sigma}_t$ 是点击率和转化率模型提供的噪声协方差（通常为对角矩阵，但 DenoiseBid 也可以纳入误差相关性）。我们通过 XDGMM [5] 最大化对数似然，从而推断 $\boldsymbol{\psi}$：

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\psi} \mid \{\hat{\boldsymbol{\eta}}_t\}_{t=1}^{T}, \{\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{t}}\}_{t=1}^{T}) = \sum_{t=1}^{T} \ln p\left(\hat{\boldsymbol{\eta}}_t \mid \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\Sigma}_t\right) = \sum_{t=1}^{T} \ln\left(\sum_{k=1}^{K} \pi_k \mathcal{N}\left(\hat{\boldsymbol{\eta}}_t \mid \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Theta}_k + \boldsymbol{\Sigma}_t\right)\right). \tag{31}$$

请注意，XDGMM 可以并行处理数据，也可以在后台模式下运行，以避免重复开销。这一特性使其能够实际部署到实时竞价系统中。

5. 计算实验

本节将 DenoiseBid 框架与两个基线进行比较：非鲁棒策略 [17] 和鲁棒优化方法 [14]。我们在 logit 空间中采用两种先验分布来测试 DenoiseBid：正态分布和双分量高斯混合分布。在噪声建模方面，我们采用两种设置：合成噪声，以及从预训练点击率模型中提取的经验噪声。若要复现本文展示的结果，可在代码仓库中找到源代码：https://anonymous.4open.science/r/denoise-bid-uai26-1A60/。

设定。我们采用离线设定来比较所考虑的算法。为确保行为模式稳定，我们使用由固定缩放因子 k_B 和 k_C 定义的相对预算和每次点击成本约束，这些缩放因子适用于所有广告活动：

$$B = k_B \sum_{t=1}^{T} wp_t, \quad C = k_C \frac{\sum_{t=1}^{T} wp_t}{\sum_{t=1}^{T} CTR_t}. \tag{32}$$

此外，我们使用 $k_B = 0.2$ 和 $k_C = 0.2$ 来定义预算和每次点击费用上限。

数据集。首先，我们使用完全合成的数据验证仅基于点击率的方法和联合方法在数学上的一致性。随后，我们通过使用包含经验获胜价格和模型预测的 iPinYou 和 BAT 数据集，转向真实场景。最后，我们在 Criteo 归因数据集上测试 DenoiseBid。我们在该数据集上训练 CatBoost 点击率模型，并使用 CatBoost 虚拟集成来估计点击率值中的知识不确定性。此设置不包含任何合成噪声或数据的采样。

表 2：各数据集实验设置摘要。红色叉号表示该数据集存在此类噪声，但我们跳过了此设置。短横线表示该噪声类型不适用于该数据集。

数据集	合成噪声	经验噪声
Synthetic	✓	—
iPinYou	✓	✗
BAT	✓	—
Criteo归因	✗	✓

5.1 使用合成噪声进行实验

这些 实验使用已知的噪声结构验证了我们方法的数学一致性 .

数据集与设置。 我们在三个数据集上评估所提出的方法。在**Synthetic** 数据集中，成交价由对数正态分布生成，CTR/CVR 对数几率由高斯混合生成。对于**iPinYou**，我们使用经验获胜价格，并由高斯混合生成 CTR/CVR 对数几率。最后，**BAT**数据集同时利用真实世界获胜价格，以及直接从历史竞价日志中获得的 CTR/CVR 模型预测。实验详情见附录 C.1。

评估指标。 为评估性能和约束遵循情况，我们定义了两个关键指标：

- 问题 (3) 中目标函数最优值与问题 (1) 中理论最优值的比率，记为 R/R^*。
- $\overline{CPC}/\overline{CPC}_{\text{广告活动}}$：实际平均每次点击成本除以广告活动的平均每次点击成本。由于目标上限设为 $C = k_C \cdot CPC_{\text{广告活动}}$，只有该比率低于阈值$k_C$时，策略才被视为符合成本约束。

仅点击率不确定性的主要结果。 图1展示了随着噪声增加，各策略的表现 σ^{CTR}。非鲁棒基线在噪声增加时表现失效，违反CPC限制，导致效率降低。虽然 RobustBid 仍符合 CPC 限制，但其表现下降 R/R^*。相比之下，随着噪声增加，DenoiseBid 表现出最高的稳定性，在转化量和约束遵循之间实现了最佳平衡。

CTR-CVR联合不确定性的主要结果。 图2展示了BAT数据集在双变量噪声下的指标 R/R^* 和 $\overline{CPC}/\overline{CPC}_{\text{camp}}$热力图。非鲁棒策略无法在整个噪声范围内保持成本合规，而 RobustBid 虽能实现合规，但代价是 R/R^*显著降低。相比之下，DenoiseBid 在几乎严格遵循约束的同时，保持了稳定且接近最优的转化量。Synthetic 和 iPinYou 数据集的类似热力图见附录D。

5.2 基于经验噪声的实验

此设置使用**Criteo归因** 日志评估实际实现的结果。

方法论。 我们使用虚拟集成训练了 CatBoost 点击率和转化率模型，以获取预测和 logit方差。我们考虑了两种场景来模拟不同的噪声水平：

1. **特征移除**，即按重要性递增的顺序排除特征，以此作为不确定性的代理；2. **数据缩放**，即缩小训练集规模（从 100% 降至 0.1%），以增加知识不确定性。

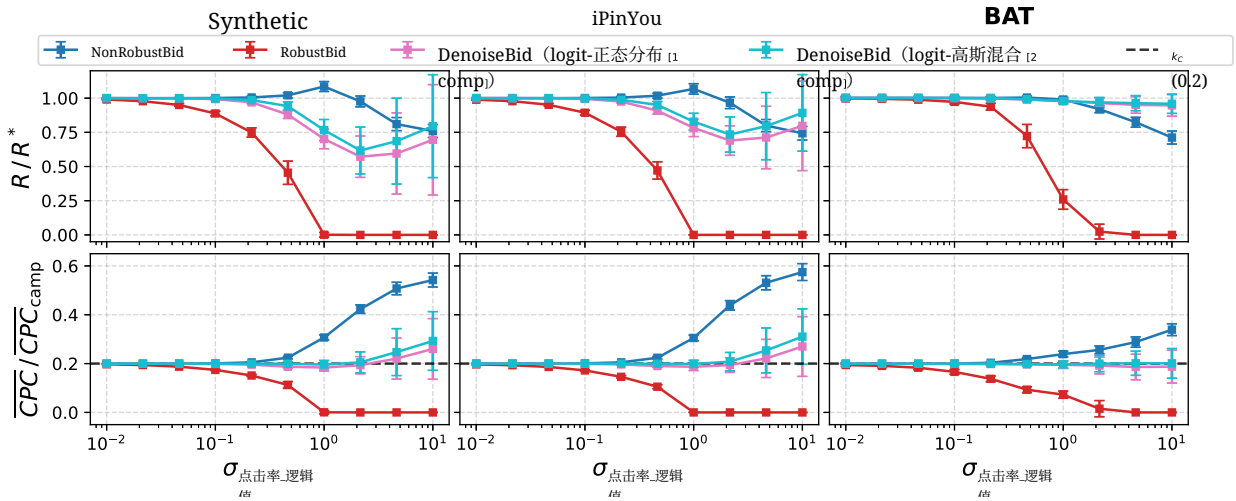


图1： 在点击率不确定性条件下，Synthetic、iPinYou 和 BAT 数据集上的性能比较。

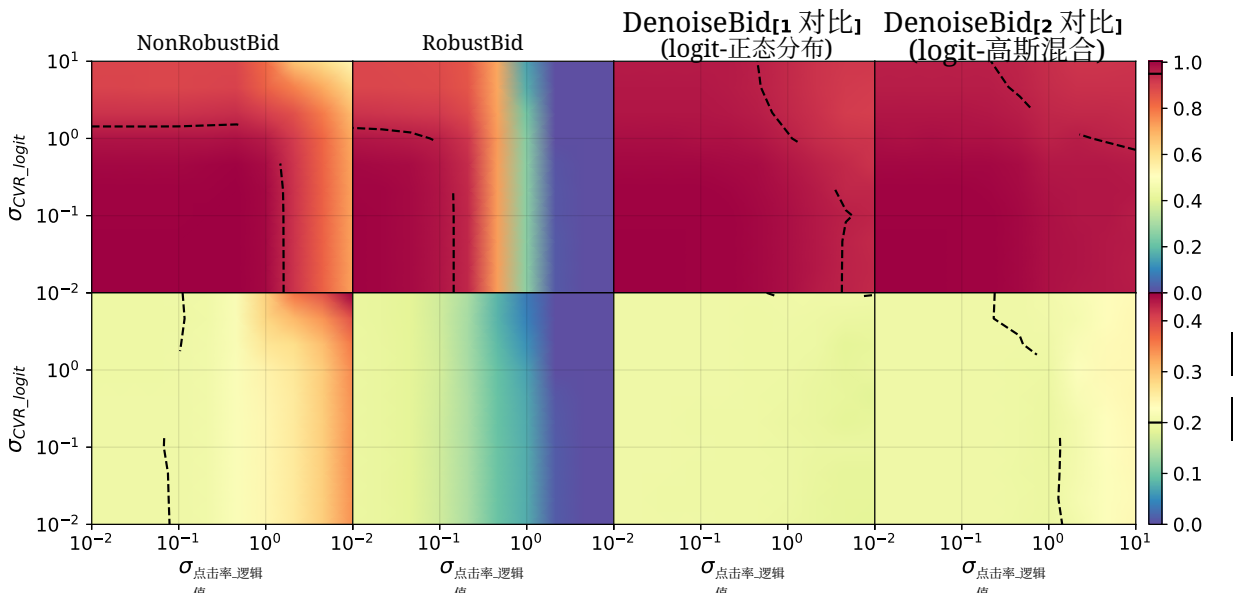


图2：CTR-CVR联合不确定性下 BAT数据集上的性能比较。

该过程的详细信息见附录 C.2。

指标。 与合成情形相比，我们使用以下指标评估提升幅度：

- 转化数量的相对误差：$(conv - conv_{nr})/conv_{nr}$，其中 nr 表示非鲁棒基线。
- $(\overline{CPC} - \overline{CPC}_{nr})/C$，表示相对于目标值 C归一化后的成本变化。

主要结果。 图 3 总结了相对提升幅度。logit-正态配置在数据缩放区间为 1% 和 3% 时，显著降低了每次点击成本偏差（$p < 0.05$）。采用 logit 空间高斯混合的变体则表现出更强的成本稳定性，在 0.3%、1% 和 3% 的数据缩放区间内均显著改善了每次点击成本。此外，当排除信息量最低的 8 个变量时，该变体在特征移除场景中也显著提升了转化。图中包含误差线，表示均值标准误，以展示观察到的性能提升具有统计显著性。

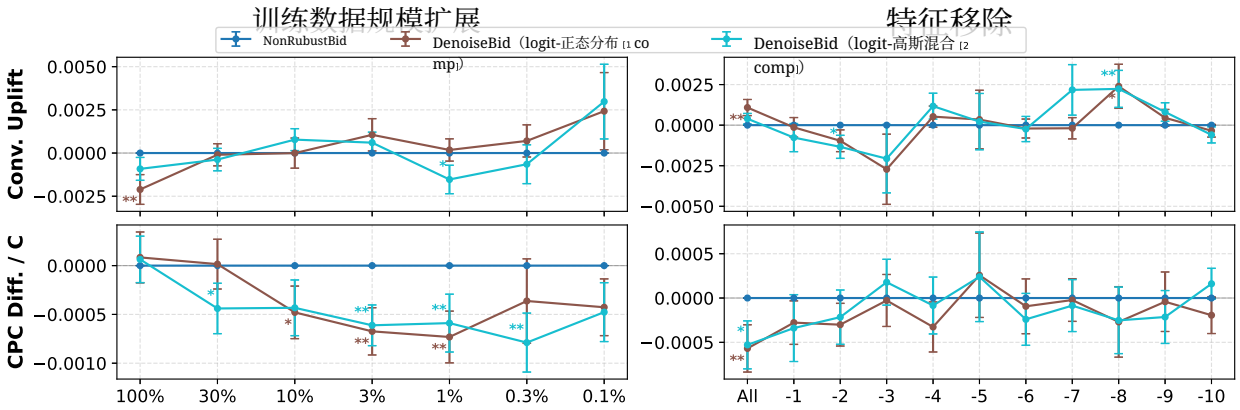


图 3：Criteo 归因数据集上的转化量相对提升幅度及每次点击成本偏差。标记 * 和 ** 分别表示在 10% 和 5% 水平上具有统计显著性。

6. 局限性与未来工作

我们仅使用梯度提升决策树模型进行转化预测实验；然而，随着深度学习方法日益普及，这类模型可能会逐渐不那么常用。因此，我们计划将 [19] 中的最先进模型适配到我们的 DenoiseBid 框架中。整体框架将保持不变，主要区别在于处理不确定性时所采取的具体步骤。

7. 结论

我们提出了 DenoiseBid，这是一种贝叶斯自动出价方法，可显式考虑点击率和转化率估计中的不确定性。其核心思想是将确定性的基于线性规划的出价模型替换为随机优化问题，根据点击与转化概率的贝叶斯后验期望计算出价。我们的方法主要有三项贡献。首先，我们在点击率和转化率含噪的情况下构建了自动出价问题，并基于贝叶斯后验期望推导出闭式出价规则。其次，我们开发了一套实用流程，通过极端反卷积（XDGMM）从含噪观测中恢复点击率和转化率的先验分布，并以闭式形式计算去噪出价。第三，我们在四个数据集——Synthetic、iPinYou、BAT 和 Criteo Attribution——上，针对合成噪声和经验噪声两种设置开展了大量实验。结果一致表明，在满足每次点击成本约束的同时，DenoiseBid 能保持接近最优的转化量；在广泛的噪声水平下，其表现优于非鲁棒基线和 RobustBid 策略。

参考

[1] Moloud Abdar、Farhad Pourpanah、Sadiq Hussain、Dana Rezazadegan、Li Liu、Mohammad Ghavamzadeh、Paul Fieguth、Xiaochun Cao、Abbas Khosravi、U Rajendra Acharya 等。《深度学习中的不确定性量化综述：技术、应用与挑战》。信息融合，76：243–297，2021。[2] Milton Abramowitz 和 Irene A Stegun。《带公式、图表和数学表格的数学函数手册》，第 55 卷。美国政府印刷局，1948。[3] Gagan Aggarwal、Ashwinkumar Badanidiyuru、Santiago R Balseiro、Kshipra Bhawalkar、Yuan Deng、Zhe Feng、Gagan Goel、Christopher Liaw、Haihao Lu、Mohammad Mahdian 等。《在线广告中的自动出价与拍卖：综述》。*ACMSIGecomExchanges*，22(1)：159–183，2024。[4] Christopher M Bishop 和 Nasser M Nasrabadi。《模式识别与机器学习》，第 4 卷。Springer，2006。[5] Jo Bovy、David W Hogg 和 Sam T Roweis。极端去卷积：从含噪、异质且不完整的观测中推断完整分布函数。应用统计年刊，5(2B)：1657，2011。[6] Han Cai、Kan Ren、Weinan Zhang、Kleanthis Malialis、Jun Wang、Yong Yu 和 Defeng Guo。展示广告中的强化学习实时竞价。载于第十届 *ACM* 网络搜索与数据挖掘国际会议论文集，第 661–670 页，2017。

[7] Yue He、Xiujun Chen、Di Wu、Junwei Pan、Qing Tan、Chuan Yu、Jian Xu 和 Xiaoqiang Zhu。在线展示广告约束出价的统一解决方案。载于第 *27* 届 *ACM SIGKDD*知识发现与数据挖掘大会论文集，第 2993–3001 页，2021。[8] Peter J¨ackel。关于多元高斯-厄米特求积的说明。伦敦：*ABN-Amro*。*Re*，2005。[9] Alex Kendall 和 Yarin Gal。计算机视觉的贝叶斯深度学习需要哪些不确定性？神经信息处理系统进展，30，2017。[10] Alexandra Khirianova、Ekaterina Solodneva、Andrey Pudovikov、Sergey Osokin、Egor Samosvat、Yuriy Dorn、Alexander Ledovsky 和 Yana Zenkova。BAT：自动出价任务基准。载于*2025* 年 *ACM*网络会议论文集，第 2657–2667 页，2025。[11] Andrey Malinin、Liudmila Prokhorenkova 和 Aleksei Ustimenko。通过集成方法量化梯度提升中的不确定性。*arXiv* 预印本 *arXiv:2006.10562*，2020。[12] Weitong Ou、Bo Chen、Xinyi Dai、Weinan Zhang、Weiwen Liu、Ruiming Tang 和 Yong Yu。实时竞价展示广告中的出价优化综述。*ACM*数据知识发现汇刊，18(3)：1–31，2023。[13] Andrey Pudovikov、Alexandra Khirianova、Ekaterina Solodneva、Aleksandr Katrutsa、Egor Samosvat 和 Yuriy Dorn。自动出价竞技场：经典自动出价算法与基于强化学习的自动出价算法的统一评估。*arXiv* 预印本 *arXiv:2510.19357*，2025。[14] Andrey Pudovikov、Alexandra Khirianova、Ekaterina Solodneva、Gleb Molodtsov、Aleksandr Katrutsa、Yuriy Dorn 和 Egor Samosvat。面向含噪转化预测模型的鲁棒自动出价。*arXiv* 预印本 *arXiv:2510.08788*，2025。[15] Wen-Yueh Shih、Hsu-Chao Lai 和 Jiun-Long Huang。利用聚类预期胜率制定应对不准确点击率预测的鲁棒实时竞价策略。*IEEE Access*，11：126917–126926，2023。[16] Rotem Stram、Rani Abboud、Alex Shtoff、Oren Somekh、Ariel Raviv 和 Yair Koren。Mystique：用于在线广告性能优化的预算节奏控制系统。载于*2024* 年 *ACM*网络会议伴随论文集，第 433–442 页，2024。[17] Xun Yang、Yasong Li、Hao Wang、Di Wu、Qing Tan、Jian Xu 和 Kun Gai。展示广告中的多变量控制出价优化。载于第 *25* 届 *ACM SIGKDD*国际知识发现与数据挖掘会议论文集，第 1966–1974 页，2019。[18] Haifeng Zhang、Weinan Zhang、Yifei Rong、Kan Ren、Wenxin Li 和 Jun Wang。管理展示广告中的出价风险。载于第十届 *ACM* 网络搜索与数据挖掘国际会议论文集，第 581–590 页，2017。[19] Jieming Zhu、Quanyu Dai、Liangcai Su、Rong Ma、Jinyang Liu、Guohao Cai、Xi Xiao 和 Rui Zhang。BARS：迈向推荐系统开放基准测试。载于第 *45* 届 *ACM SIGIR*信息检索研究与发展大会论文集，第 2912–2923 页，2022。

附录

A. 随机优化问题的求解

本节将详细推导随机优化问题的最优出价策略。我们从 DenoiseBid 问题的线性化原始问题表述开始：

$$\begin{aligned} \max_{x_t} \quad & \sum_{t=1}^{T} x_t v_t, \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{t=1}^{T} x_t \cdot wp_t \le B, \\ & \sum_{t=1}^{T} x_t \cdot (wp_t - C \cdot c_t) \le 0, \\ \text{where} \quad & 0 \le x_t \le 1, \quad \forall t, \end{aligned} \tag{33}$$

其中， $v_t = \mathbb{E}[CTR_t \cdot CVR_t \mid \mathcal{O}]$ 和 $c_t = \mathbb{E}[CTR_t \mid \mathcal{O}]$ 分别是转化价值和点击概率的后验均值。

拉格朗日形式。为求解问题 (33)，我们推导其拉格朗日对偶。我们引入非负对偶变量 $p \geq 0$和 $q \geq 0$，分别对应预算和每次点击成本约束。为处理盒约束$x_t \leq 1$，我们还为每场拍卖引入辅助对偶变量 $r_t \geq 0$。拉格朗日函数 $\mathcal{L}$ 的形式如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{x}, p, q, \mathbf{r}) = \sum_{t=1}^{T} x_t v_t - p\left(\sum_{t=1}^{T} x_t w p_t - B\right) - \\ - q\left(\sum_{t=1}^{T} x_t (w p_t - C \cdot c_t)\right) - \sum_{t=1}^{T} r_t (x_t - 1),\end{aligned} \tag{34}$$

其中， $c_t = \mathbb{E}\left[CTR_t|\mathcal{O}\right]$和 $v_t = \mathbb{E}\left[CTR_t \cdot CVR_t|\mathcal{O}\right]$ 分别表示拍卖 t中的点击概率和价值的后验均值。通过重新排列各项，将变量 x_t归组，可通过对$\mathbf{x}$最小化拉格朗日函数得到对偶目标。

$$\begin{aligned}\min_{p,q,r_t} \quad & B \cdot p + \sum_{t=1}^{T} r_t, \\ \text{s.t.} \quad & w p_t \cdot p + (w p_t - C \cdot c_t) \cdot q + r_t \geq v_t, \quad \forall t, \\ \text{where} \quad & p \geq 0, q \geq 0, r_t \geq 0.\end{aligned} \tag{35}$$

最优性条件。根据互补松弛定理，最优原始解 $\mathbf{x}^*$ 以及对偶解 p^*, q^* 和$\mathbf{r}^*$ 必须满足:

$$x_t^* \cdot (v_t - w p_t \cdot p^* - (w p_t - C \cdot c_t) \cdot q^* - r_t^*) = 0, \tag{36}$$

$$(x_t^* - 1) \cdot r_t^* = 0. \tag{37}$$

我们将最优出价价格 bid_t^* 定义为:

$$bid_t^* = \frac{1}{p^* + q^*} v_t + \frac{q^*}{p^* + q^*} C \cdot c_t, \tag{38}$$

将（38）代入条件（36），得到:

$$x_t^* \cdot ((bid_t^* - w p_t)(p^* + q^*) - r_t^*) = 0. \tag{39}$$

然后，由（37）和（39）可知,

- 如果竞价代理赢得拍卖（$x_t^* > 0$），那么（$bid_t^* - w p_t$）（$p^* + q^*$）$- r_t^* = 0$。因此，由于 p^*, q^*, $r_t^* \geq 0$，必有 $bid_t^* \geq w p_t$。
- 如果竞价代理在拍卖中落败（$x_t^* = 0$），那么 $r_t^* = 0$。因此，根据对偶条件 $w p_t \cdot p + (w p_t - C \cdot c_t) \cdot q \geq v_t$，可将其改写为 $w p_t \geq bid_t^*$。

因此，如果 p和 q 是对偶问题 (35) 的最优解，则最优出价公式为:

$$bid_t = \frac{1}{p + q} \mathbb{E}\left[CTR_t \cdot CVR_t|\mathcal{O}\right] + \frac{q}{p + q} C \cdot \left[CTR_t|\mathcal{O}\right]. \tag{40}$$

B. 期望计算公式的推导

B.1 仅点击率不确定性

高斯乘积的化简。为简化该表达式:

$$\mathbb{E}\left[CTR_t \middle| \widehat{CTR_t}\right] = \frac{\sum_k \pi_k \int \sigma(\xi_t) \cdot \mathcal{N}\left(\hat{\xi}_t \,\middle|\, \xi_t, \sigma_t^2\right) \mathcal{N}\left(\xi_t \,|\, \mu_k, \theta_k^2\right) \, \mathrm{d}\xi_t}{\sum_k \pi_k \int \mathcal{N}\left(\hat{\xi}_t \,\middle|\, \xi_t, \sigma_t^2\right) \mathcal{N}\left(\xi_t \,|\, \mu_k, \theta_k^2\right) \, \mathrm{d}\xi_t}, \tag{41}$$

我们利用正态密度的一个基本性质：两个高斯核的乘积本身也是一个经过缩放的高斯核：

$$\mathcal{N}\left(\hat{\xi}_t \,\middle|\, \xi_t, \sigma_t^2\right) \cdot \mathcal{N}\left(\xi_t \middle| \mu_k, \theta_k^2\right) = \alpha_{t,k} \cdot \mathcal{N}\left(\xi_t \,\middle|\, \mu'_{t,k}, {\sigma'_{t,k}}^2\right), \tag{42}$$

其中，缩放因子 $\alpha_{t,k} = \mathcal{N}\left(\hat{\xi}_t \,\middle|\, \mu_k, \sigma_t^2 + \theta_k^2\right)$ 表示第 k 个分量的证据，并且

$$\begin{aligned} \alpha_{t,k} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\sigma_t^2 + \theta_k^2\right)}} e^{-\frac{\left(\hat{\xi}_t - \mu_k\right)^2}{2\left(\sigma_t^2 + \theta_k^2\right)}}, \\ {\sigma'_{t,k}}^2 &= \frac{1}{1/\sigma_t^2 + 1/\theta_k^2}, \\ \mu'_{t,k} &= {\sigma'_{t,k}}^2 \left(\frac{\hat{\xi}_t}{\sigma_t^2} + \frac{\mu_k}{\theta_k^2}\right). \end{aligned} \tag{43}$$

将高斯乘积性质（42）代入期望（41），可以看到，后验期望是若干 Sigmoid-高斯积分的加权平均：

$$\mathbb{E}\left[CTR_t \middle| \widehat{CTR}_t\right] = \frac{\sum_k \pi_k \alpha_{t,k} \int \sigma(\xi_t) \mathcal{N}\left(\xi_t \,\middle|\, \mu'_{t,k}, {\sigma'_{t,k}}^2\right) \mathrm{d}\xi_t}{\sum_k \pi_k \alpha_{t,k}}. \tag{44}$$

Probit近似。 Sigmoid函数与高斯密度函数的积分无法用初等函数表示为精确的闭式解。为了获得计算效率更高的结果，我们采用 Probit近似：

$$\int \sigma(\xi) \mathcal{N}\left(\xi \,|\, \mu, \sigma^2\right) \mathrm{d}\xi \approx \sigma\left(\frac{\mu}{\sqrt{1 + \frac{\pi}{8}\sigma^2}}\right). \tag{45}$$

将此近似应用于（44）中的每个分量后，我们给出去噪点击率的最终闭式表达式：

$$\mathbb{E}\left[CTR_t \middle| \widehat{CTR}_t\right] \approx \sum_k \pi'_{t,k} \sigma\left(\frac{\mu'_{t,k}}{\sqrt{1 + \frac{\pi}{8}{\sigma'_{t,k}}^2}}\right), \tag{46}$$

其中 $\mu'_{t,k}$ 和 ${\sigma'_{t,k}}^2$ 可通过（43）计算，而 $\pi'_{t,k}$ 表示给定第 t 个观测时第 k 个高斯分布的后验概率：

$$\pi'_{t,k} = \frac{\pi_k \alpha_{t,k}}{\sum_k \pi_k \alpha_{t,k}}. \tag{47}$$

B.2 联合不确定性

二元高斯乘积的化简。我们有如下表达式：

$$\mathbb{E}\left[X \,\middle|\, \hat{\boldsymbol{\eta}}_t\right] = \frac{\sum_k \pi_k \int X \cdot \mathcal{N}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_t \mid \boldsymbol{\eta}_t, \boldsymbol{\Sigma}_t) \mathcal{N}(\boldsymbol{\eta}_t \mid \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Theta}_k) \,\mathrm{d}^2\boldsymbol{\eta}_t}{\sum_k \pi_k \int \mathcal{N}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_t \mid \boldsymbol{\eta}_t, \boldsymbol{\Sigma}_t) \mathcal{N}(\boldsymbol{\eta}_t \mid \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Theta}_k) \,\mathrm{d}^2\boldsymbol{\eta}_t}. \tag{48}$$

完全类比一维高斯分布（42），正态密度的乘积等于一个带有缩放因子的正态密度：

$$\mathcal{N}\left(\hat{\boldsymbol{\eta}}_t \,\middle|\, \boldsymbol{\eta}_t, \boldsymbol{\Sigma}_t\right) \cdot \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\eta}_t \,\middle|\, \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Theta}_k\right) = \alpha_{t,k} \cdot \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\eta}_t \,\middle|\, \boldsymbol{\mu}'_{t,k}, \boldsymbol{\Sigma}'_{t,k}\right), \tag{49}$$

其中 $\alpha_{t,k} = \mathcal{N}\left(\hat{\boldsymbol{\eta}}_t \,\middle|\, \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_t + \boldsymbol{\Theta}_k\right)$ 是第 k 个高斯分布的证据，并且

$$\begin{aligned} \alpha_{t,k} &= \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\hat{\boldsymbol{\eta}}_t - \boldsymbol{\mu}_k\right)^\top \left(\boldsymbol{\Sigma}_t + \boldsymbol{\Theta}_k\right)^{-1} \left(\hat{\boldsymbol{\eta}}_t - \boldsymbol{\mu}_k\right)}}{2\pi\sqrt{\left|\boldsymbol{\Sigma}_t + \boldsymbol{\Theta}_k\right|}}, \\ \boldsymbol{\Sigma}'_{t,k} &= \left(\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1} + \boldsymbol{\Theta}_k^{-1}\right)^{-1}, \\ \boldsymbol{\mu}'_{t,k} &= \boldsymbol{\Sigma}'_{t,k}\left(\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1}\hat{\boldsymbol{\eta}}_t + \boldsymbol{\Theta}_k^{-1}\boldsymbol{\mu}_k\right). \end{aligned} \tag{50}$$

接下来，我们将正态密度乘积（49）的简化形式代入后验期望表达式（48）：

$$\mathbb{E}\left[X \,\middle|\, \hat{\boldsymbol{\eta}}_t\right] = \frac{\sum_k \pi_k \alpha_{t,k} \int X \cdot \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\eta}_t \,\middle|\, \boldsymbol{\mu}'_{t,k}, \boldsymbol{\Sigma}'_{t,k}\right) \mathrm{d}^2\boldsymbol{\eta}_t}{\sum_k \pi_k \alpha_{t,k}}, \tag{51}$$

或者，更简洁地说，重新定义给定第 t 个估计值时第 k 个高斯分布的后验概率 $\pi'_{t,k} = \frac{\pi_k \alpha_{t,k}}{\sum_k \pi_k \alpha_{t,k}}$：

$$\mathbb{E}\left[X \mid \hat{\boldsymbol{\eta}}_t\right] = \sum_k \pi'_{t,k} \int X \cdot \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\eta}_t \mid \boldsymbol{\mu}'_{t,k}, \boldsymbol{\Sigma}'_{t,k}\right) \mathrm{d}^2\boldsymbol{\eta}_t. \tag{52}$$

B.3 积分的数值近似

点击率期望的 Probit 近似。现在，我们重点近似（52）中的积分。对于点击率期望 $X = CTR_t = \sigma(\xi_t)$ 的情况，该积分仅涉及二元正态分布上的单个 Sigmoid 函数。由于 ξ_t 的边缘分布仍为高斯分布，我们可以直接应用一维情形中的 Probit 近似：

$$\mathbb{E}\left[CTR_t \mid \hat{\boldsymbol{\eta}}_t\right] \approx \sum_k \pi'_{t,k} \sigma\left(\frac{\left(\boldsymbol{\mu}'_{t,k}\right)_0}{\sqrt{1 + \frac{\pi}{8}\left(\boldsymbol{\Sigma}'_{t,k}\right)_{0,0}}}\right), \tag{53}$$

其中，$(\cdot)_0$ 和 $(\cdot)_{0,0}$ 分别表示向量的第一个元素和矩阵的左上元素。

通过高斯-厄米特求积对价值期望进行数值近似。当 $X = CTR_t \cdot CVR_t = \sigma(\xi_t) \cdot \sigma(\zeta_t)$ 时，转化价值的期望涉及两个 Sigmoid 函数的乘积。由于 Probit 近似没有多维推广，为了在保持准确度的同时实现高计算效率，我们采用高斯-厄米特求积进行计算。

该方法通过在预先设定的节点集合 $M \times M$处对函数 $f(\boldsymbol{\eta})$ 求值，近似计算其与正态核的卷积：

$$\int f(\boldsymbol{\eta}) \cdot \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\eta} \mid \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}\right) \mathrm{d}^2\boldsymbol{\eta} \approx \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} \lambda_i \lambda_j f\left(\boldsymbol{\eta}^{(i,j)}\right), \tag{54}$$

其中，求积节点 $\boldsymbol{\eta}^{(i,j)}$ 通过对后验协方差矩阵$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$ 进行 Cholesky分解得到：

$$\boldsymbol{\eta}^{(i,j)} = \boldsymbol{\mu} + \sqrt{2}\mathbf{L}\begin{pmatrix} a_i \\ a_j \end{pmatrix}, \tag{55}$$

而 $\{a_i\}_i$、$\{\lambda_i\}_i$ 分别是标准高斯-厄米特节点和权重。

由于 Sigmoid 函数是平滑的，只需少量节点（例如 $M = 5$）即可满足出价所需的精度。后验协方差矩阵只有 2×2，因此可以通过解析方式计算该 Cholesky分解。由此，该近似方案具有很高的性能，能够满足实时竞价的时间要求。

因此，对于每个拍卖 t，我们可以分别计算：

$$\int \sigma(\xi_t)\sigma(\zeta_t) \cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{\eta}_t \mid \boldsymbol{\mu}'_{t,k}, \boldsymbol{\Sigma}'_{t,k})\, \mathrm{d}^2\boldsymbol{\eta}_t \approx \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} \lambda_i \lambda_j \cdot \sigma\left(\xi_{t,k}^{(i,j)}\right) \sigma\left(\zeta_{t,k}^{(i,j)}\right), \tag{56}$$

计算公式。因此，我们可以近似计算求和式（52）中的每个积分，并得到最终表达式：

$$\mathbb{E}[CTR_t \cdot CVR_t \mid \boldsymbol{\eta}_t] \approx \sum_k \pi'_{t,k} \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} \lambda_i \lambda_j \cdot \sigma\left(\xi_{t,k}^{(i,j)}\right) \sigma\left(\zeta_{t,k}^{(i,j)}\right), \tag{57}$$

其中 $\pi'_{t,k} = \frac{\pi_k \alpha_t}{\sum_k \pi_k \alpha_{t,k}}$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \xi_{t,k}^{(i,j)} \\ \zeta_{t,k}^{(i,j)} \end{pmatrix} &= \boldsymbol{\mu}'_{t,k} + \sqrt{2}\mathbf{L}_{t,k}\begin{pmatrix} a_i \\ a_j \end{pmatrix}, \\ \mathbf{L}_{t,k} &= \begin{pmatrix} \sqrt{s_1} & 0 \\ s_0/\sqrt{s_1} & \sqrt{s_2 - s_0^2/s_1} \end{pmatrix}, \\ \text{where } \begin{pmatrix} s_1 & s_0 \\ s_0 & s_2 \end{pmatrix} &= \boldsymbol{\Sigma}'_{t,k}. \end{aligned} \tag{58}$$

参数 在（43）中定义的参数 $\alpha_{t,k}$，$\boldsymbol{\mu}'_{t,k}$，$\boldsymbol{\Sigma}'_{t,k}$，而 a_k、λ_k 是表格型高斯-埃尔米特节点和权重 .

C. 实验细节

本节将详尽介绍我们在评估中使用的数据集、模型架构和数值设置。

如第5节所述，我们使用相对约束：

$$B = k_B \cdot \sum_t wp_t,$$
$$C = k_C \cdot \frac{\sum_t wp_t}{\sum_t CTR_t}. \tag{59}$$

在所有实验中均使用了 $k_C = 0.2$和 $k_B = 0.2$。

C.1 合成噪声实验（Synthetic、iPinYou、BAT）

Synthetic

- 拍卖数量 $T = 1000$，广告活动数量 $N = 200$。
- wp从对数正态分布 ln $wp \sim \mathcal{N}(\mu_{wp}, \sigma_{wp}^2)$ 中抽样，其中 $\mu_{wp} =$ ln $100.0 - \sigma_{wp}$, $\sigma_{wp} = 1.0$。
- 点击率从对数正态分布逻辑值 $CTR \sim \sum_{k=1}^{K} \pi_k \mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$ 中抽样，其中 $K = 3$, $\{\pi_1 =$0.6, $\pi_2 = 0.2, \pi_3 = 0.2\}$, $\{\mu_1 = -3.0, \mu_2 = -2.5, \mu_3 = -1.0\}$, $\{\sigma_1 = 0.3, \sigma_2 = 0.3, \sigma_3 = 0.4\}$。
- 转化率从对数正态分布逻辑值 $CVR \sim \sum_{k=1}^{K} \pi_k \mathcal{N}\ \mu_k\ \sigma_k^2$ $K = 2$ $\{\pi_1 =$(,) 中抽样，其中，，，。 $0.6, \pi_2 = 0.4\}$ $\{\mu_1 = -2.0, \mu_2 = -1.0\}$ $\{\sigma_1 = 0.7, \sigma_2 = 0.4\}$
- 在仅点击率不确定性实验中，CTR逻辑值中采样的正态噪声标准差从10^{-2} 到10$_1$。

- 在联合不确定性实验中，CVR逻辑值中也采样了标准差从10^{-2} 到 10$_1$的正态噪声，该噪声与CTR逻辑值中的噪声不相关。
- 每个广告活动中抽取400个拍卖作为子样本，并通过XDGMM拟合高斯混合模型。EM算法最多运行300次迭代，或直至达到对数似然容差 $2.0 \cdot 10^{-5}$。
- 对于CTR-CVR联合不确定性情形，我们使用了 5×5 高斯-厄米特求积网格。

iPinYou

- 拍卖数量 $T = 1000$，广告活动数量 $N = 200$。
- wp 从日志中抽取的样本。
- 从对数正态分布中抽取的点击率逻辑值 $CTR \sim \sum_{k=1}^{K} \pi_k \mathcal{N}(\mu_k,\ \sigma_k^2)$，其中 $K = 3$, $\{\pi_1 =$0。6, $\pi_2 = 0.2,\ \pi_3 = 0.2\}$, $\{\mu_1 = -3.0, \mu_2 = -2.5, \mu_3 = -1.0\}$, $\{\sigma_1 = 0.3, \sigma_2 = 0.3, \sigma_3 = 0.4\}$。
- 从对数正态分布中抽取的转化率逻辑值 $CVR \sim \sum_{k=1}^{K} \pi_k \mathcal{N}(\mu_k,\ \sigma_k^2)$，其中 $K = 2$, $\{\pi_1 =$0。6, $\pi_2 = 0.4\}$, $\{\mu_1 = -2.0, \mu_2 = -1.0\}$, $\{\sigma_1 = 0.7, \sigma_2 = 0.4\}$。
- 在仅点击率不确定性的实验中，CTR逻辑值中采样的正态噪声标准差从10^{-2} 到10$_1$。

- 在联合不确定性实验中，CVR逻辑值中也采样了标准差从10^{-2} 到 10$_1$的正态噪声，且该噪声与CTR逻辑值中的噪声不相关。
- 使用XDGMM在每个广告活动中抽取的400场拍卖子样本上拟合高斯混合模型。EM算法最多运行300次迭代，或直到达到 $2.0 \cdot 10^{-5}$ 的对数似然容差。
- 对于CTR-CVR联合不确定性情况，我们使用了 5×5 高斯-埃尔米特求积网格。

BAT

- 广告活动数量 $N = 334$（以及每个广告活动中的拍卖数量）。
- wp 从日志中采样。
- 从日志中抽样得到的点击率。

• 从日志中抽样得到的转化率。

• 在仅点击率不确定性实验中，对CTR逻辑值采样正态噪声，其标准差从10^{-2} 到10_1。

• 在联合不确定性实验中，还对CVR逻辑值采样正态噪声，其标准差从10^{-2} 到10_1，且与CTR逻辑值中的噪声不相关。
• 在每个广告活动中，从300次拍卖的子样本上通过XDGMM拟合GMM。EM算法最多运行300次迭代，或直到达到 $2.0 \cdot 10^{-5}$ 的对数似然容差。
• 对于CTR-CVR联合不确定性情况，我们使用了 5×5 高斯-厄米特求积网格。

C.2 使 用经验噪声进行实验（Criteo 归因)

本实验使用基于实际模型的估计不确定性，评估框架的性能 y.

场景：

• **特征移除：** 我们迭代移除了重要性较低的前 N 个特征，从而增加预测不确定性。

• **数据缩放：** 模型使用原始数据的不同子集（100%、30%、10%、3%、1%、0.3%、0.1%）进行训练，同时保持验证集不变以供评估。

模型训练。 我们针对点击率和转化率任务训练了 CatBoost 分类器。我们使用虚拟集成模式（后验采样 = True），该模式会计算虚拟集成中多个子模型预测值的方差。

• **特征：** 共 12 个特征（其中 11 个为类别特征），包括广告活动 ID、距上次点击时间以及匿名用户元数据。

• **不确定性量化：** logit 空间中的输出方差 $\Sigma_t^2 = \text{diag}(\sigma_{\text{点击率}_t}{}^2, \sigma_{\text{转化率}_t}{}^2)$ 被直接用作 DenoiseBid 的噪声参数。

实验规格：

• 广告活动数量 $N = 505$（以及每个广告活动中的拍卖数量）。
• 在每个广告活动中，对 400 次拍卖的子样本使用 XDGMM 拟合高斯混合模型（GMM）。EM算法最多运行 300 次迭代，或直到达到 $2.0 \cdot 10^{-5}$ 的对数似然容差。

D. 热力图：合成数据集和 iPinYou 数据集上的实验

本节展示 Synthetic 和 iPinYou数据集上 CTR-CVR联合不确定性场景的可视化结果。图 4 和图 5 展示了联合logit空间（σ^{CTR} 和 σ^{CVR}）中不同噪声水平下的指标 R/R^* 和 CPC/CPC_{camp} 。

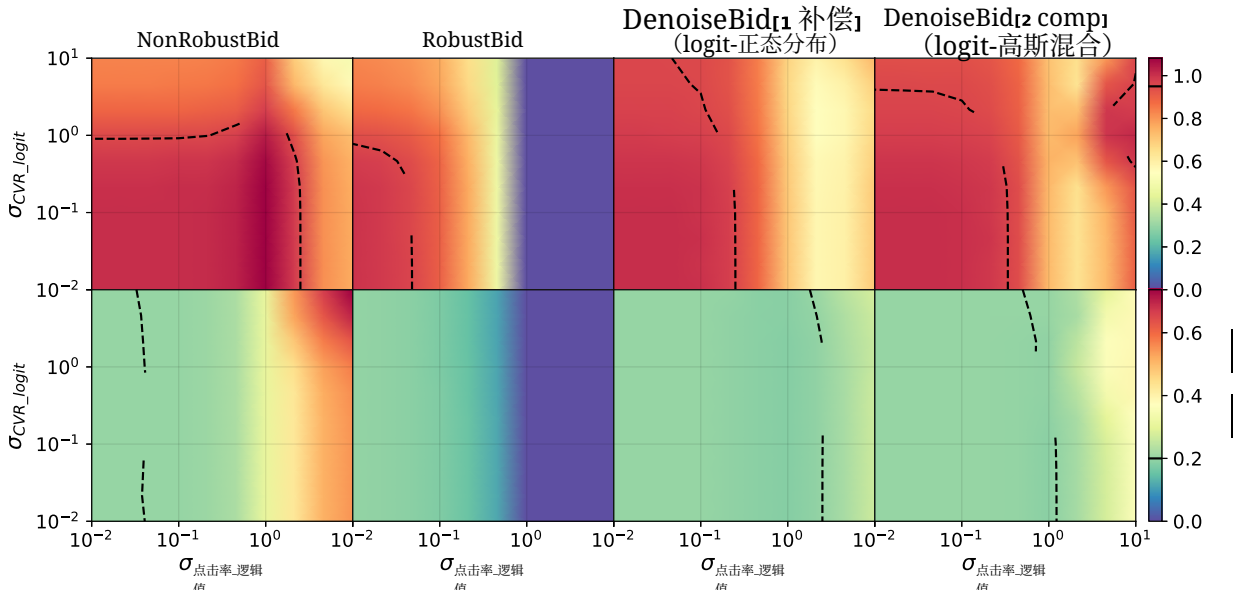


图4：CTR-CVR联合不确定性下合成数据集上的性能比较。

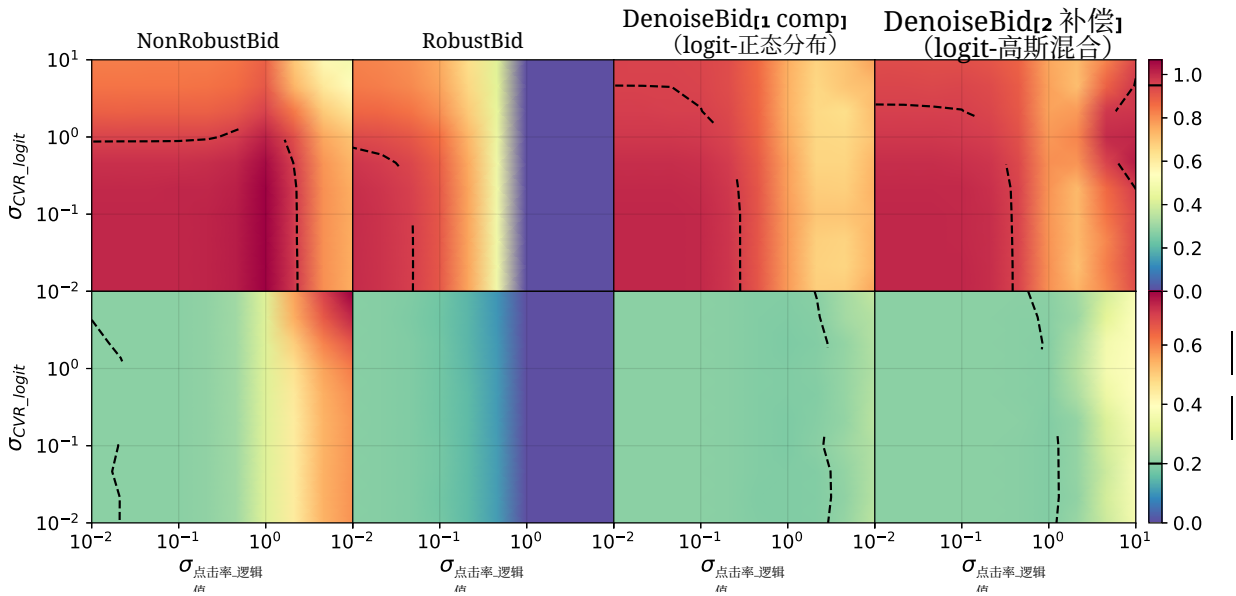


图5：iPinYou数据集上联合点击率-转化率不确定性的性能比较 y.