薄集上双调和 Steklov 问题的特征值

Bauyrzhan Derbissaly 数学与数学建模研究所 哈萨克斯坦阿拉木图普希金街125号 derbissaly@math.kz
Nurbek Kakharman SDU大学 哈萨克斯坦卡斯克连阿布莱汗街1/1号 数学与数学建模研究所 哈萨克斯坦阿拉木图普希金街125号 n.kakharman@math.kz;
nurbek.kakharman@sdu.edu.kz

arXiv:2603.01828v1 [math.AP] 2 Mar 2026

摘要

本文研究带有 Steklov边界条件的薄集上双调和算子的特征值渐近行为。薄集取为平面光滑域的一个管状邻域。我们证明，当该邻域的厚度趋于零时，带有 Steklov边界条件的双调和算子的所有特征值都收敛于零。

2020年MSC分类： 35J40, 35P20。**关键词：** 双调和算子，Steklov边界条件，薄域。

1 引言与主要结果的陈述

我们旨在分析薄集上双调和 Steklov 问题的特征值的渐近行为。对于 $\varepsilon > 0$，我们将区域 ω_ε 定义为

$$\omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \varepsilon\},$$

其中，Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域。在 ω_ε 中，我们考虑以下关于双调和算子的 Steklov问题

$$\begin{cases} \Delta^2 u_\varepsilon = 0, & \text{in } \omega_\varepsilon, \\ \partial^2_{\nu\nu} u_\varepsilon = -\mu \partial_\nu u_\varepsilon, & \text{on } \partial\omega_\varepsilon, \\ -\operatorname{div}_{\partial\omega_\varepsilon} (D^2 u_\varepsilon \cdot \nu)_{\partial\omega_\varepsilon} - \partial_\nu \Delta u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon, & \text{on } \partial\omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{1}$$

未知量为 u_ε （Steklov特征函数）和 λ_ε （Steklov特征值）。这里， $\mu > 0$是固定常数， ν 表示 ω_ε的外单位法向量， $D^2 u_\varepsilon$ 表示u_ε的Hessian矩阵，$\operatorname{div}_{\partial\omega_\varepsilon}$ 表示 $\partial\Omega$上的切向散度，而 $(D^2 u_\varepsilon \cdot \nu)_{\partial\omega_\varepsilon}$ 表示 $D^2 u_\varepsilon \cdot \nu$ 在切空间 $T\partial\omega_\varepsilon$上的投影。

问题（1）的弱形式为

$$\int_{\omega_\varepsilon} D^2 u_\varepsilon : D^2 \varphi dx + \mu \int_{\partial\omega_\varepsilon} \partial_\nu u_\varepsilon \partial_\nu \varphi d\sigma = \lambda_\varepsilon \int_{\partial\omega_\varepsilon} u_\varepsilon \varphi d\sigma,$$

对所有 $\varphi \in H^2(\omega_\varepsilon)$ 均成立。记 $D^2 u : D^2 v := \sum_{i,\, j=1}^{2} \partial^2_{x_i x_j} u \partial^2_{x_i x_j} v$ 为 Hessian 矩阵的标准乘积。

由于 $\partial\Omega$ 是光滑的，因此存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得对所有 $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0)$，集合 ω_ε 也是一个光滑区域。在此范围内，问题（1）是适定的，并且存在一个发散至 $+\infty$的非负特征值离散序列：

$$0 = \lambda_{\varepsilon,0} < \lambda_{\varepsilon,1} \leq \ \cdots \leq \lambda_{\varepsilon,n} \leq \ldots$$

对应的特征函数为 $u_{\varepsilon,\ k}$，且在 $L^2(\partial\omega_\varepsilon)$ 中归一化。

本文旨在描述当 $\varepsilon \to 0$ 时，方程（$u_{\varepsilon,\ k}$，$\lambda_{\varepsilon,\ k}$）的解（1）的渐近行为。当 ε 很小时，我们称 ω_ε 为“薄域”，它在 $\varepsilon \to 0$ 趋于 $\partial\Omega$ 的曲线。

在极限情形 $\mu = +\infty$下，问题（1）化为（NBS）-Neumann 双调和 Steklov 问题：

$$\begin{cases} \Delta^2 u_\varepsilon = 0, & \text{in } \omega_\varepsilon, \\ \partial_\nu u_\varepsilon = 0, & \text{on } \partial\omega_\varepsilon, \\ -\mathrm{div}_{\partial\omega_\varepsilon} \left(D^2 u_\varepsilon \cdot \nu\right)_{\partial\omega_\varepsilon} - \partial_\nu \Delta u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon, & \text{on } \partial\omega_\varepsilon. \end{cases}$$

回顾一下，情形 $\mu = 0$ （见1）在 [10] 中被引入，作为拉普拉斯算子经典Steklov问题的一种自然的四阶推广。

我们的研究受到 [16], 的启发，其中作者考察了同一薄集 ω_ε上带Neumann边界条件的双调和算子的特征值渐近行为。他们证明，当 $\varepsilon \to 0$时，这些特征值收敛到一个极限微分方程组的特征值。相比之下，在（1）中的Steklov边界条件下，极限问题化为单个微分方程，且所有特征值都趋于零。为了便于与 [16], 比较，我们在分析中采用类似的策略。

在经典板理论中，当物体的惯性集中于边缘时，会出现Steklov边界条件：对于在 $\partial\Omega$上具有线质量密度的自由板的横向振动，分离时间变量可知，边界面力必须与位移的迹成正比，而比例常数便成为 $\partial\Omega$上的谱参数；这正是双调和Steklov模型（见 [10]）。

超越经典弹性力学，Eringen [13], [14] 的微极（Cosserat）弹性理论也适用类似的思想。在该理论中，基本场是位移 $\mathbf{u}$ 和微旋转 ϑ，应力伴有偶应力，而自然边界数据则是面力和偶面力。该理论还包含（体）微惯性，用以描述微结构的旋转动能。如果秉持上述思路，对一种薄结构进行建模，并假设其边缘承载部分平动线质量和旋转微惯性，那么 $\partial\Omega$ 上的时谐平衡将导出边界上的 Steklov型定律，其中谱参数乘以 $(\mathbf{u}\ \vartheta)$ 的迹。从物理上说，Steklov 条件由此表明，不可忽略的部分动能——包括平动动能和旋转动能——分布在边界上；特征模态则由体弯曲能与边缘惯性之间的竞争决定。我们仅将这种微极解释作为动机；下文的分析针对带有 $\sigma = 0$ 的双调和情形。

奇异扰动定义域（尤其是薄区域）上特征值问题的渐近分析，一直是谱理论与偏

微分方程领域 [5], [4], [8], [12], [21], [28], [29], [31], [27], [26], [30],[20], [6] 的热门研究课题，相关示例及参考文献见其中。经典研究主要关注具有各种边界条件的拉普拉斯算子；从薄域过渡到其低维极限对象，通常需要对相关能量型进行精细分析，例如， [23, 19]关于诺伊曼边界条件的研究，以及 [22]关于狄利克雷和罗宾边界条件的研究。其共同主题是确定塌缩结构上的极限算子，使其谱能够刻画原始特征值的渐近行为。

本文中，泊松比取为 $\sigma = 0$，如 [16]所示。在二维情况下，$\sigma \in (-1,\ 1)$ 通常成立，而选取 $\sigma \neq 0$ 则会改变弱形式中出现的二次型（1）。尽管也可以考虑更一般的情形 $\sigma \in (-1,\ 1)$，但当 $\varepsilon \to 0$ 趋于 [3]时，取极限的过程会复杂得多（参见 $\sigma = 0$）。因此，我们将注意力限制在具有代表性的情形 $\sigma = 0$。

本文的主要结果如下定理所示:

定理 1.1. 设 $\{\lambda_{\varepsilon,k}\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ 为问题(1)的特征值序列。那么，当 $\varepsilon \to 0$时，

$$\lambda_{\varepsilon,k} \ \sim \ \lambda_k\,\varepsilon,$$

其中， λ_k 是以下一维问题的第 k个特征值

$$\begin{cases} u^{(4)} - 2\big(\kappa^2 u'\big)' = 2\lambda u, & in\ (0,|\partial\Omega|), \\ u^{(k)}(0) = u^{(k)}(|\partial\Omega|), & k = 0,1,2,3, \end{cases} \tag{2}$$

其中未知函数为 $u = u(s)$，特征值为 λ。这里， s 表示 $\partial\Omega$上的弧长参数， $\kappa(s)$是点 $s \in (0,|\partial\Omega|)$处的曲率。此外，(2)在 $L^2\big((0,|\partial\Omega|)\ 2\,ds\big)$ 中存在一个特征函数的标准正交基 $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$，并且可能经过取子序列后，

$$u_{\varepsilon,k}\circ\Phi_\varepsilon \rightharpoonup u_k \ in\ H^2(\Sigma)\ as\ \varepsilon \to 0,$$

其中 u_k 仅依赖于变量 s。

映射 Φ_ε 和参考集 Σ 定义于第2节。

2 预备知识与记号

2.1 泛函几何框架

设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中一个 C^0 类的有界区域, 1 （即利普希茨区域）。记 $H^k(\Omega)$ 为标准索博列夫空间，它由所有满足以下条件的函数 $u \in L^2(\Omega)$ 构成：每个 $D^\alpha u$ 阶的弱导数 $|\alpha| \le k$ 均存在，且属于 $L^2(\Omega)$。

索博列夫空间 $H^2(\Omega)$ 自然地赋有范数

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \Big(\|D^2u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

在 [24] 中指出

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \Big(\|D^2u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

等价于 $H^2(\Omega)$ 的标准范数。

用 $H^k_p\big((0,|\partial\Omega|)\big)$ 表示空间 $C^\infty_p\big((0,|\partial\Omega|)\big)$ 在 $H^k\big((0,|\partial\Omega|)\big)$ 中的闭包，该空间由 $C^\infty\big((0,|\partial\Omega|)\big)$ 中满足 $u^{(k)}(0) = u^{(k)}(|\partial\Omega|)$ 的函数组成，对所有 $k \in \mathbb{N}$.

现在我们来确立光滑边界的管状邻域几何性质以及适配的局部坐标系。回顾 [15] 中的以下结果。

定理 2.1。 *[15]* 设 $k \geq 2$ 并设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个属于 C^k 类的有界区域。那么存在 $\varepsilon > 0$，使得 ω_ε 中的每一点在 $\partial\Omega$上都有唯一的最近点。此外，函数 $dist(\cdot, \partial\Omega)$ 在 C^k 中属于 ω_ε 类。

在本文余下部分中，记 ε_0 为 Ω 的最大管状半径，即

$$\varepsilon_0 := \sup\{\varepsilon > 0\colon\ \omega_\varepsilon \text{ 中的每个点在 } \partial\Omega\}.\text{上都有唯一的最近点}$$

根据定理2.1，若 $\partial\Omega$ 是 C^k，则 $\varepsilon_0 > 0$。对于任意 $x \in \omega_\varepsilon$ 最近边界点为$y \in \partial\Omega$ 的点，有

$$1 - \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)\kappa(y) > 0,$$

其中 $\kappa(y)$ 是 $\partial\Omega$ 在 y 处相对于外法向量的曲率（例如参见 [25,引理 22]）。

固定基点 $x_0 \in \partial\Omega$，并通过弧长参数 s将 $\partial\Omega$ 与区间 $[0, |\partial\Omega|]$ 等同，其中 $s = 0$ 和 $s = |\partial\Omega|$ 对应于同一点 x_0。记 $\nu(s)$ 为由 s参数化的边界点处的外单位法向量。

定义坐标映射

$$\Phi_\varepsilon : \Sigma := \partial\Omega \times (0, 1) \to \omega_\varepsilon,\ \Phi_\varepsilon(s, t) := s - \varepsilon t\nu(s).$$

由于 $\partial\Omega$是 C^k 且 $\varepsilon < \varepsilon_0$， Φ_ε 是到 ω_ε 上的微分同胚（参见例如 [7, 第 2.4]节）。将 $\partial\Omega$与（0，$|\partial\Omega|$）等同，我们将 Φ_ε视为从（0，$|\partial\Omega|$）$\times$（0，1）到ω_ε上的微分同胚。在这些坐标下，

$$t = \varepsilon^{-1}\operatorname{dist}\big(s - \varepsilon t\nu(s), \partial\Omega\big).$$

（s， t）通常称为曲线或费米坐标。在 ω_ε中，它们构成一个全局坐标系。特别地，对于 ω_ε上的任意可积函数 f，

$$\int_{\omega_\varepsilon} f(x)\,dx = \int_\Sigma \big(f \circ \Phi_\varepsilon\big)(s, t)\varepsilon\big(1 - \varepsilon t\kappa(s)\big)dtds. \tag{3}$$

此外，若 $f, g \in H^2(\omega_\varepsilon)$，则 $f \circ \Phi_\varepsilon$ 和 $g \circ \Phi_\varepsilon$ 属于 $H^2(\Sigma)$。经过冗长但标准的计算（见 [16, 第 2.2 节，公式（2.7）]）可得

$$\begin{aligned}
&(D^2 f : D^2 g) \circ \Phi_\varepsilon \\
&\quad = \frac{\partial_{ss}^2(f \circ \Phi_\varepsilon)\partial_{ss}^2(g \circ \Phi_\varepsilon)}{(1 - \varepsilon t\kappa(s))^4} + \frac{2\partial_{st}^2(f \circ \Phi_\varepsilon)\partial_{st}^2(g \circ \Phi_\varepsilon)}{\varepsilon^2(1 - \varepsilon t\kappa(s))^2} + \frac{\partial_{tt}^2(f \circ \Phi_\varepsilon)\partial_{tt}^2(g \circ \Phi_\varepsilon)}{\varepsilon^4} \\
&\qquad + \frac{\varepsilon t\kappa'(s)}{(1 - \varepsilon t\kappa(s))^5}\big(\partial_s(f \circ \Phi_\varepsilon)\,\partial_{ss}^2(g \circ \Phi_\varepsilon) + \partial_{ss}^2(f \circ \Phi_\varepsilon)\,\partial_s(g \circ \Phi_\varepsilon)\big) \\
&\qquad - \frac{\kappa(s)}{\varepsilon(1 - \varepsilon t\kappa(s))^3}\big(\partial_{ss}^2(f \circ \Phi_\varepsilon)\partial_t(g \circ \Phi_\varepsilon) + \partial_t(f \circ \Phi_\varepsilon)\,\partial_{ss}^2(g \circ \Phi_\varepsilon)\big) \\
&\qquad + \frac{2\kappa(s)}{\varepsilon(1 - \varepsilon t\kappa(s))^3}\big(\partial_s(f \circ \Phi_\varepsilon)\partial_{st}^2(g \circ \Phi_\varepsilon) + \partial_{st}^2(f \circ \Phi_\varepsilon)\partial_s(g \circ \Phi_\varepsilon)\big) \\
&\qquad - \frac{t\kappa(s)\kappa'(s)}{(1 - \varepsilon t\kappa(s))^4}\big(\partial_s(f \circ \Phi_\varepsilon)\partial_t(g \circ \Phi_\varepsilon) + \partial_t(f \circ \Phi_\varepsilon)\partial_s(g \circ \Phi_\varepsilon)\big) \\
&\qquad + \frac{2\kappa(s)^2(1 - \varepsilon t\kappa(s))^2 + \varepsilon^2 t^2(\kappa'(s))^2}{(1 - \varepsilon t\kappa(s))^6}\partial_s(f \circ \Phi_\varepsilon)\partial_s(g \circ \Phi_\varepsilon) \\
&\qquad + \frac{\kappa(s)^2}{\varepsilon^2(1 - \varepsilon t\kappa(s))^2}\partial_t(f \circ \Phi_\varepsilon)\partial_t(g \circ \Phi_\varepsilon).
\end{aligned} \tag{4}$$

类似地，对于法向导数，我们有

$$(\nabla f \cdot \nu) \circ \Phi_\varepsilon(s,0) = -\frac{1}{\varepsilon}\partial_t(f \circ \Phi_\varepsilon)(s,0), \quad (\nabla f \cdot \nu) \circ \Phi_\varepsilon(s,1) = \frac{1}{\varepsilon}\partial_t(f \circ \Phi_\varepsilon)(s,1). \tag{5}$$

回想一下，若 $f, g \in H^2(\omega_\varepsilon)$，则 $f \circ \Phi_\varepsilon, g \circ \Phi_\varepsilon \in H^2(\Sigma)$，因为 Φ_ε 是光滑的。根据标准的稠密性论证，恒等式（4）对所有 $f, g \in H^2(\omega_\varepsilon)$ 均成立。

在下文中，我们记 $f^\varepsilon := f \circ \Phi_\varepsilon$ 表示任意函数 $f \in H^2(\omega_\varepsilon)$ 的拉回。

2.2 修正问题

令 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$。参照问题（1）弱形式的左端，我们引入一个平移后的特征值 $\lambda_\varepsilon := \lambda_\varepsilon + \varepsilon b$，其中 $b > 0$ 是一个稍后确定的常数。于是我们考虑修正的 Steklov 问题

$$\begin{cases} \Delta^2 u_\varepsilon = 0, & \text{in } \omega_\varepsilon, \\ \partial^2_{\nu\nu} u_\varepsilon = -\mu \partial_\nu u_\varepsilon, & \text{on } \partial\omega_\varepsilon, \\ -\mathrm{div}_{\partial\omega_\varepsilon}\left(D^2 u_\varepsilon \cdot \nu\right)_{\partial\omega_\varepsilon} - \partial_\nu \Delta u_\varepsilon + \varepsilon b u_\varepsilon = \overline{\lambda}_\varepsilon u_\varepsilon, & \text{on } \partial\omega_\varepsilon. \end{cases} \tag{6}$$

其变分形式为：

$$\int_{\omega_\varepsilon} D^2 u_\varepsilon : D^2 \varphi dx + \mu \int_{\partial\omega_\varepsilon} \partial_\nu u_\varepsilon \partial_\nu \varphi d\sigma + \varepsilon b \int_{\partial\omega_\varepsilon} u_\varepsilon \varphi d\sigma = \overline{\lambda}_\varepsilon \int_{\partial\omega_\varepsilon} u_\varepsilon \varphi d\sigma, \tag{7}$$

对所有 $\varphi \in H^2(\omega_\varepsilon)$ 均成立。显然，分析当 $\varepsilon \to 0$ 时 λ_ε 的渐近行为，等价于研究 λ_ε。

接下来，固定边界数据 $f_\varepsilon \in L^2(\partial\omega_\varepsilon)$，并考虑相应的非齐次问题：

$$\begin{cases} \Delta^2 u_\varepsilon = 0, & \text{in } \omega_\varepsilon, \\ \partial^2_{\nu\nu} u_\varepsilon = -\mu \partial_\nu u_\varepsilon, & \text{on } \partial\omega_\varepsilon, \\ -\mathrm{div}_{\partial\omega_\varepsilon}\left(D^2 u_\varepsilon \cdot \nu\right)_{\partial\omega_\varepsilon} - \partial_\nu \Delta u_\varepsilon + \varepsilon b u_\varepsilon = f_\varepsilon, & \text{on } \partial\omega_\varepsilon. \end{cases} \tag{8}$$

其弱形式为

$$\int_{\omega_\varepsilon} D^2 u_\varepsilon : D^2 \varphi dx + \mu \int_{\partial\omega_\varepsilon} \partial_\nu u_\varepsilon \partial_\nu \varphi d\sigma + \varepsilon b \int_{\partial\omega_\varepsilon} u_\varepsilon \varphi d\sigma = \int_{\partial\omega_\varepsilon} f_\varepsilon \varphi d\sigma, \tag{9}$$

对所有 $\varphi \in H^2(\omega_\varepsilon)$ 均成立。

类似地，我们引入一维极限问题的一个平移版本（2）。具体而言，我们定义

$$\begin{cases} u^{(4)} - 2\left(\kappa^2 u'\right)' + 2bu = 2\lambda u, & \text{in } (0, |\partial\Omega|), \\ u^{(k)}(0) = u^{(k)}(|\partial\Omega|), & k = 0,1,2,3. \end{cases} \tag{10}$$

给定数据 $f \in L^2\left(0, \ |\partial\Omega|\right)$，相应的非齐次极限问题为

$$\begin{cases} u^{(4)} - 2\left(\kappa^2 u'\right)' + 2bu = 2f, & \text{in } (0, |\partial\Omega|), \\ u^{(k)}(0) = u^{(k)}(|\partial\Omega|), & k = 0,1,2,3, \end{cases} \tag{11}$$

其弱形式为

$$\int_0^{|\partial\Omega|} u''\phi'' + 2\kappa^2 u'\phi' + 2bu\phi ds = 2\int_0^{|\partial\Omega|} f\phi ds,$$

对所有 $\phi \in H^2_p((0, |\partial\Omega|))$。

2.3 算子收敛及其谱

在本小节中，我们回顾算子收敛的若干定义，以及谱收敛的相关结果。

我们注意到，定义域 ω_ε 随 ε变化，因此，在 ω_ε中考虑双调和 Steklov 问题时，相应的希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\varepsilon$ 取决于 ε，这使得直接应用紧收敛的标准概念变得复杂。因此，我们将采用适当的连接系统，以便将可变的希尔伯特空间过渡到固定的极限希尔伯特空间。

这一方法融合了 Stummel 的相关研究成果和各种概念[32] 以及 Vainikko 的相关成果 [33], ，这些成果在 [1, 11]中得到了进一步阐述。值得注意的是，我们采用了 E-紧收敛的概念。

按照 [1], 的思想，我们用 $\mathcal{H}_\varepsilon$ 表示一族希尔伯特空间，其中 $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ ，并假设存在一族线性算子 E_ε ： $\mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_\varepsilon$ ，使得

$$\|E_\varepsilon f\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \|f\|_{\mathcal{H}_0}, \text{ for all } f \in \mathcal{H}_0. \tag{12}$$

定义 2.2。 如果一族 $\{f_\varepsilon\}_{0<\varepsilon\le\varepsilon_0}$满足 $f_\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon$， E-收敛到 $f \in \mathcal{H}_0$ ，则称其 $\|f_\varepsilon - E_\varepsilon f\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \to 0$在 $\varepsilon \to 0$时成立。记作 $f_\varepsilon \xrightarrow{E} f$。

定义 2.3. 设 $\{B_\varepsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\varepsilon)\colon \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]\}$ 是一族线性连续算子。若当 $\varepsilon \to 0$ 时，只要 $f_\varepsilon \xrightarrow{E} f$，就有 $B_\varepsilon f_\varepsilon \xrightarrow{E} B_0 f$，则称 $\{B_\varepsilon\}_{0<\varepsilon\le\varepsilon_0}$ E 收敛到 $B_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$。记作 $B_\varepsilon \xrightarrow{EE} B_0$。

定义 2.4. 设 $\{f_\varepsilon\}_{0<\varepsilon\le\varepsilon_0}$ 是一族满足 $f_\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon$ 的对象。若对任意序列 $\varepsilon_n \to 0$ ，都存在子序列 $\{\varepsilon_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $f \in \mathcal{H}_0$ ，使得当 $k \to \infty$ 时 $f_{\varepsilon_{n_k}} \xrightarrow{E} f$ ，则称 $\{f_\varepsilon\}_{0<\varepsilon\le\varepsilon_0}$ 是预紧的。

定义 2.5. 称 $\{B_\varepsilon\}_{0<\varepsilon\le\varepsilon_0}$ 在 $B_\varepsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\varepsilon)$ 和 B_ε 紧，并紧收敛到紧算子 $B_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$，若 $B_\varepsilon \xrightarrow{EE} B_0$ ，且对任意满足 $f_\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon$ 的族 $\{f_\varepsilon\}_{0<\varepsilon\le\varepsilon_0}$, $\|f_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} = 1$，都有 $\{B_\varepsilon f_\varepsilon\}_{0<\varepsilon\le\varepsilon_0}$ 按照定义 2.4 的意义是预紧的。记作 $B_\varepsilon \xrightarrow{C} B_0$。

E-紧收敛意味着谱稳定性。具体而言，我们有以下结果，其中，与 m 特征值相关的“广义特征函数”是指与这些特征值相关的 m 特征函数的线性组合。

定理 2.6。 设 $\{B_\varepsilon\}_{0\le\varepsilon\le\varepsilon_0}$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\varepsilon$上的一族非负紧自伴算子。假设其特征值由 $\{\lambda_k(\varepsilon)\}_{k=1}^\infty$给出。若 $B_\varepsilon \xrightarrow{C} B_0$，则当 $\varepsilon \to 0$时， B_ε 到 B_0 谱收敛。特别地，以下结论成立：

(i) 对每个 $k \in \mathbb{N}$ ，当 $\varepsilon \to 0$时，有 $\lambda_k(\varepsilon) \to \lambda_k(0)$ 。

(ii) 若 $u_k(\varepsilon)$， $k \in \mathbb{N}$是与特征值 $\lambda_k(\varepsilon)$ 相关的特征函数标准正交序列，则存在与 $\lambda_k(0)$， $k \in \mathbb{N}$ 相关的特征函数标准正交序列 $u_k(0), k \in \mathbb{N}$ ，使得在可能取一个子序列后，$u_n(\varepsilon) \xrightarrow{E} u_k(0)$。

(iii) 给定 m 特征值 $\lambda_k(0), \dots, \lambda_{k+m-1}(0)$，其中 $\lambda_k(0) \ne \lambda_{k-1}(0)$，且 $\lambda_{k+m-1}(0) \ne \lambda_{k+m}(0)$，以及相应的标准正交特征函数 $u_k(0), \dots, u_{k+m-1}(0)$，则存在$m$ 标准正交广义特征函数 $v_k(\varepsilon), \dots, v_{k+m-1}(\varepsilon)$，与 $\lambda_k(\varepsilon), \dots, \lambda_{k+m-1}(\varepsilon)$相关联，使得对所有 $j = 0, 1, \dots, m-1$，均有 $v_{k+j}(\varepsilon) \xrightarrow{E} u_{k+j}(0)$。

我们参见 [18, 定理 2。5], [33, 定理 6。3], [17, 定理 1], 另见 [1, 定理 4。10], [2, 定理 5。1] 和 [11, 定理 3。3] 有关谱收敛的更多详情。

3 定理 1.1 的证明

3.1 一个关键的强制性估计

首先，注意不等式 (9) 可在 (s,t)-坐标下，在 $(0,|\partial\Omega|)\times(0,1)$ 上（见 (3)、(5)）可改写为

$$
\begin{aligned}
&\int_\Sigma (D^2u_\varepsilon : D^2\varphi)\circ\Phi_\varepsilon(s,t)\,(1-\varepsilon t\kappa(s))dtds \\
&\quad +\frac{\mu}{\varepsilon^3}\int_0^{|\partial\Omega|}\partial_t(u_\varepsilon\circ\Phi_\varepsilon)(s,0)\partial_t(\varphi\circ\Phi_\varepsilon)(s,0)ds \\
&\quad +\frac{\mu}{\varepsilon^3}\int_0^{|\partial\Omega|}\partial_t(u_\varepsilon\circ\Phi_\varepsilon)(s,1)\partial_t(\varphi\circ\Phi_\varepsilon)(s,1)(1-\varepsilon\kappa(s))ds \qquad (13)\\
&\quad +b\int_0^{|\partial\Omega|}(u_\varepsilon\varphi)\circ\Phi_\varepsilon(s,0)ds+b\int_0^{|\partial\Omega|}(u_\varepsilon\varphi)\circ\Phi_\varepsilon(s,1)(1-\varepsilon\kappa(s))ds \\
&\quad =\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{|\partial\Omega|}(f_\varepsilon\varphi)\circ\Phi_\varepsilon(s,0)ds+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{|\partial\Omega|}(f_\varepsilon\varphi)\circ\Phi_\varepsilon(s,1)(1-\varepsilon\kappa(s))ds,
\end{aligned}
$$

对所有 $\varphi\in H^2(\Sigma)$ 均成立。我们假设 $\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)}\|\varepsilon^{-1}\tilde f_\varepsilon(\cdot,i)\|_{L^2((0,|\partial\Omega|))}\neq\infty,(i=0,1)$，且 $\varepsilon^{-1}f_\varepsilon(s,0)\rightharpoonup f_1(s)$ 属于 $L^2((0,|\partial\Omega|))$，并且 $\varepsilon^{-1}f_\varepsilon(s,1)\rightharpoonup f_2(s)$ 属于 $L^2((0,|\partial\Omega|))$。令 $a(\tilde u_\varepsilon,\varphi)$ 表示 (13) 的左端。

由（4）可得被积函数的如下展开式 $D^2u_\varepsilon:D^2\varphi$ 在新坐标下：

$$
\begin{aligned}
&(D^2u_\varepsilon:D^2\varphi)\circ\Phi_\varepsilon= && (14)\\
&\frac{\partial^2_{ss}(u_\varepsilon\circ\Phi_\varepsilon)\partial^2_{ss}(\varphi\circ\Phi_\varepsilon)}{(1-\varepsilon t\kappa(s))^4}+\frac{2\partial^2_{st}(u_\varepsilon\circ\Phi_\varepsilon)\partial^2_{st}(\varphi\circ\Phi_\varepsilon)}{\varepsilon^2(1-\varepsilon t\kappa(s))^2}+\frac{\partial^2_{tt}(u_\varepsilon\circ\Phi_\varepsilon)\partial^2_{tt}(\varphi\circ\Phi_\varepsilon)}{\varepsilon^4} && (15)\\
&+\frac{\varepsilon t\kappa'(s)}{(1-\varepsilon t\kappa(s))^5}(\partial_s(u_\varepsilon\circ\Phi_\varepsilon)\partial^2_{ss}(\varphi\circ\Phi_\varepsilon)+\partial^2_{ss}(u_\varepsilon\circ\Phi_\varepsilon)\partial_s(\varphi\circ\Phi_\varepsilon)) && (16)\\
&-\frac{\kappa(s)}{\varepsilon(1-\varepsilon t\kappa(s))^3}(\partial^2_{ss}(u_\varepsilon\circ\Phi_\varepsilon)\partial_t(\varphi\circ\Phi_\varepsilon)+\partial_t(u_\varepsilon\circ\Phi_\varepsilon)\partial^2_{ss}(\varphi\circ\Phi_\varepsilon)) && (17)\\
&+\frac{2\kappa(s)}{\varepsilon(1-\varepsilon t\kappa(s))^3}(\partial_s(u_\varepsilon\circ\Phi_\varepsilon)\partial^2_{st}(\varphi\circ\Phi_\varepsilon)+\partial^2_{st}(u_\varepsilon\circ\Phi_\varepsilon)\partial_s(\varphi\circ\Phi_\varepsilon)) && (18)\\
&-\frac{t\kappa(s)\kappa'(s)}{(1-\varepsilon t\kappa(s))^4}(\partial_s(u_\varepsilon\circ\Phi_\varepsilon)\partial_t(\varphi\circ\Phi_\varepsilon)+\partial_t(u_\varepsilon\circ\Phi_\varepsilon)\partial_s(\varphi\circ\Phi_\varepsilon)) && (19)\\
&+\frac{2\kappa(s)^2(1-\varepsilon t\kappa(s))^2+\varepsilon^2t^2(\kappa'(s))^2}{(1-\varepsilon t\kappa(s))^6}\partial_s(u_\varepsilon\circ\Phi_\varepsilon)\partial_s(\varphi\circ\Phi_\varepsilon) && (20)\\
&+\frac{\kappa(s)^2}{\varepsilon^2(1-\varepsilon t\kappa(s))^2}\partial_t(u_\varepsilon\circ\Phi_\varepsilon)\partial_t(\varphi\circ\Phi_\varepsilon). && (21)
\end{aligned}
$$

令 $\tilde u_\varepsilon=u_\varepsilon\circ\Phi_\varepsilon$。现在，我们证明存在一个常数 $c>0$，使得对于所有

$\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0/2)$,

$$\begin{aligned}\frac{\|\partial_{tt}^2\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)}^2}{\varepsilon^4}+\frac{\|\partial_{st}^2\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)}^2}{\varepsilon^2}+\frac{\|\kappa\partial_t\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)}^2}{\varepsilon^2}&\\ +\|\partial_{ss}^2\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)}^2+\|\kappa\partial_s\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)}^2+\|\tilde{u}_\varepsilon(\cdot,0)\|_{L^2((0,|\partial\Omega|))}^2+\|\tilde{u}_\varepsilon(\cdot,1)\|_{L^2((0,|\partial\Omega|))}^2&\\ \le c\|\varepsilon^{-1}\tilde{f}_\varepsilon(\cdot,0)\|_{L^2((0,|\partial\Omega|))}^2+c\|\varepsilon^{-1}\tilde{f}_\varepsilon(\cdot,1)\|_{L^2((0,|\partial\Omega|))}^2.&\end{aligned} \tag{22}$$

接下来，我们设

$$\varrho(s,t) := 1-\varepsilon t\kappa(s).$$

由于 $\varepsilon \le \varepsilon_0/2$，存在常数 $0<c_1\le c_2$ （与 ε 无关），使得 t

$$c_1 \le \varrho(s,t) \le c_2,\ \forall\ (s,t)\in\Sigma.$$

现在取 测试函数 $\varphi = u_\varepsilon$ 于（13）中。考察（15）中的各项，可得 t

$$\left\|\varrho^{-3/2}\,\partial_{ss}^2\tilde{u}_\varepsilon\right\|_{L^2(\Sigma)}^2,\ 2\left\|\varepsilon^{-1}\varrho^{-1/2}\partial_{st}^2\tilde{u}_\varepsilon\right\|_{L^2(\Sigma)}^2,\ \left\|\varrho^{1/2}\varepsilon^{-2}\partial_{tt}^2\tilde{u}_\varepsilon\right\|_{L^2(\Sigma)}^2,$$

而由（20）和（21）可得

$$2\left\|\kappa\varrho^{-3/2}\partial_s\tilde{u}_\varepsilon\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\left\|\varepsilon t\kappa'\varrho^{-5/2}\partial_s\tilde{u}_\varepsilon\right\|_{L^2(\Sigma)}^2,\ \left\|\varepsilon^{-1}\varrho^{-1/2}\kappa\partial_t\tilde{u}_\varepsilon\right\|_{L^2(\Sigma)}^2,$$

分别地。（16）中剩余的混合导数必须使用柯西–施瓦茨不等式和标准插值不等式进行估计。例如，对于任意 $\delta>0$ 以及充分小的$\theta>0$，有

$$\begin{aligned}\int_\Sigma\frac{2\varepsilon t\kappa'(s)}{\varrho^5}\partial_s\tilde{u}_\varepsilon\partial_{ss}^2\tilde{u}_\varepsilon\varrho\,dtds &\ge -c\int_\Sigma\left|\partial_s\tilde{u}_\varepsilon\partial_{ss}^2\tilde{u}_\varepsilon\right|dt\,ds\\ &\ge -\frac{c\delta}{2}\|\partial_{ss}^2\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)}^2-\frac{c}{2\delta}\|\partial_s\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)}^2\\ &\ge -\frac{c\delta}{2}\|\partial_{ss}^2\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)}^2-\frac{c\theta}{2\delta}\|\partial_{ss}^2\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)}^2-\frac{cc_0}{2\delta\theta}\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)}^2,\end{aligned} \tag{23}$$

其中

$$c=\max_{\substack{(s,t)\in\Sigma,\\ 0\le\varepsilon\le\varepsilon_0/2}}\frac{\varepsilon t|\kappa'(s)|}{(1-\varepsilon t\kappa(s))^4},$$

并且在推导最后一行时，我们应用了一维插值

$$\|v'\|_{L^2((a,b))}^2\le\theta\|v''\|_{L^2((a,b))}^2+\frac{c_0}{\theta}\|v\|_{L^2((a,b))}^2, \tag{24}$$

其中 $c_0>0$ 为某个常数。此外，我们结合

$$\|v'\|_{L^2((a,b))}^2\le\overline{\theta}_0\|v''\|_{L^2((a,b))}^2+\frac{\overline{c}_1}{\overline{\theta}_0}\left(|v(a)|^2+|v(b)|^2\right), \tag{25}$$

and

$$\|v\|_{L^2((a,b))}^2\le\tilde{\theta}_0\|v'\|_{L^2((a,b))}^2+\frac{\tilde{c}_1}{\tilde{\theta}_0}\left(|v(a)|^2+|v(b)|^2\right), \tag{26}$$

从而推得

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(\Sigma)} \leq & \tilde{\theta}_0\|\partial_t\tilde{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(\Sigma)} + \frac{\tilde{c}_1}{\tilde{\theta}_0}\int_0^{|\partial\Omega|}\left(|\tilde{u}_\varepsilon(s,0)|^2+|\tilde{u}_\varepsilon(s,1)|^2\right)ds\\ \leq & \overline{\theta}_0\tilde{\theta}_0\|\partial^2_{tt}\tilde{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(\Sigma)} + \frac{\tilde{c}_1}{\tilde{\theta}_0}\int_0^{|\partial\Omega|}\left(|\tilde{u}_\varepsilon(s,0)|^2+|\tilde{u}_\varepsilon(s,1)|^2\right)ds\\ & + \frac{\overline{c}_1}{\overline{\theta}_0}\int_0^{|\partial\Omega|}\left(|\tilde{u}_\varepsilon(s,0)|^2+|\tilde{u}_\varepsilon(s,1)|^2\right)ds\\ = & \theta_0^2\|\partial^2_{tt}\tilde{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(\Sigma)} + \frac{c_1}{\theta_0}\int_0^{|\partial\Omega|}\left(|\tilde{u}_\varepsilon(s,0)|^2+|\tilde{u}_\varepsilon(s,1)|^2\right)ds,\end{aligned} \tag{27}$$

whe 这里我们设定 $c_1 := \tilde{c}_1 + c_1$ 并且 $\theta_0 = \overline{\theta}_0 = \theta_{0\circ}$ 结合（23）和（27）可得

$$\begin{aligned}&\int_\Sigma \frac{2\varepsilon t\kappa'(s)}{\varrho^5}\partial_s\tilde{u}_\varepsilon\partial^2_{ss}\tilde{u}_\varepsilon\varrho dtds\\ &\geq -\frac{c(\delta^2+\theta)}{2\delta}\|\partial^2_{ss}\tilde{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(\Sigma)} - \frac{cc_0\theta_0^2}{2\delta\theta}\frac{\|\partial^2_{tt}\tilde{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(\Sigma)}}{\varepsilon^4}\\ &-\frac{cc_0c_1}{\theta_0\theta}\int_0^{|\partial\Omega|}|\tilde{u}_\varepsilon(s,0)|^2ds - \frac{cc_0c_1c'}{\theta_0\theta}\int_0^{|\partial\Omega|}|\tilde{u}_\varepsilon(s,1)|^2(1-\varepsilon\kappa(s))ds,\end{aligned} \tag{28}$$

其中

$$c' = \frac{1}{\min\limits_{\substack{s\in[0,|\partial\Omega|],\\ 0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0/2}}(1-\varepsilon\kappa(s))}.$$

对（18）和（19）应用类似论证，也可得到（必要时重新定义常数）

$$\begin{aligned}&\int_\Sigma \frac{4\kappa(s)}{\varepsilon\varrho^3}\partial_s\tilde{u}_\varepsilon\partial^2_{st}\tilde{u}_\varepsilon\varrho dtds\\ &\geq -\frac{c\delta}{2}\frac{\|\partial^2_{st}\tilde{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(\Sigma)}}{\varepsilon^2} - \frac{c\theta}{2\delta}\|\partial^2_{ss}\tilde{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(\Sigma)} - \frac{cc_0\theta_0^2}{2\delta\theta}\frac{\|\partial^2_{tt}\tilde{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(\Sigma)}}{\varepsilon^4}\\ &-\frac{cc_0c_1}{\theta_0\theta}\int_0^{|\partial\Omega|}|\tilde{u}_\varepsilon(s,0)|^2ds - \frac{cc_0c_1c'}{\theta_0\theta}\int_0^{|\partial\Omega|}|\tilde{u}_\varepsilon(s,1)|^2(1-\varepsilon\kappa(s))ds,\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}&\int_\Sigma \frac{2t\kappa(s)\kappa'(s)}{\varrho^4}\partial_s\tilde{u}_\varepsilon\partial_t\tilde{u}_\varepsilon\varrho dtds\\ &\geq -\frac{c\delta}{2}\frac{\|\kappa\partial_t\tilde{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(\Sigma)}}{\varepsilon^2} - \frac{c\theta}{2\delta}\|\partial^2_{ss}\tilde{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(\Sigma)} - \frac{cc_0\theta_0^2}{2\delta\theta}\frac{\|\partial^2_{tt}\tilde{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(\Sigma)}}{\varepsilon^4}\\ &-\frac{cc_0c_1}{\theta_0\theta}\int_0^{|\partial\Omega|}|\tilde{u}_\varepsilon(s,0)|^2ds - \frac{cc_0c_1c'}{\theta_0\theta}\int_0^{|\partial\Omega|}|\tilde{u}_\varepsilon(s,1)|^2(1-\varepsilon\kappa(s))ds.\end{aligned} \tag{30}$$

这里， δ、 θ_0、 $\theta > 0$ 可以任意选取得足够小，且与 ε无关； c、 c_0、 c_1、 c' 是与 ε无关的正常数。

最 微妙的贡献来自（17）。对 s 分部积分，并再次利用

（24）-（26）可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Sigma} \frac{2\kappa(s)}{\varepsilon\varrho^3}\partial_{ss}^2\tilde{u}_\varepsilon\partial_t\tilde{u}_\varepsilon\varrho dtds \\
&\quad\geq -2\left|\int_{\Sigma}\frac{\kappa(s)}{\varrho^2}\partial_s\tilde{u}_\varepsilon\frac{\partial_{st}^2\tilde{u}_\varepsilon}{\varepsilon}+\partial_s\left(\frac{\kappa(s)}{\varrho^2}\right)\partial_s\tilde{u}_\varepsilon\frac{\partial_t\tilde{u}_\varepsilon}{\varepsilon}dsdt\right| \\
&\quad\geq -\frac{c\delta}{2}\frac{\|\partial_{st}^2\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)}^2}{\varepsilon^2}-\frac{c\theta}{2\delta}\|\partial_{ss}^2\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)}^2-\frac{cc_0\theta_0^2}{2\delta\theta}\frac{\|\partial_{tt}^2\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)}^2}{\varepsilon^4} \\
&\qquad-\frac{cc_0c_1}{\theta_0\theta}\int_0^{|\partial\Omega|}|\tilde{u}_\varepsilon(s,0)|^2ds-\frac{cc_0c_1c'}{\theta_0\theta}\int_0^{|\partial\Omega|}|\tilde{u}_\varepsilon(s,1)|^2(1-\varepsilon\kappa(s))ds \\
&\qquad-\frac{c\delta'}{2}\frac{\|\partial_t\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)}^2}{\varepsilon^2}-\frac{c\theta'}{2\delta'}\|\partial_{ss}^2\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)}^2-\frac{cc_0\theta_0^2}{2\delta'\theta'}\frac{\|\partial_{tt}^2\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)}^2}{\varepsilon^4} \\
&\qquad-\frac{cc_0c_1}{\theta_0\theta'}\int_0^{|\partial\Omega|}|\tilde{u}_\varepsilon(s,0)|^2ds-\frac{cc_0c_1c'}{\theta_0\theta'}\int_0^{|\partial\Omega|}|\tilde{u}_\varepsilon(s,1)|^2(1-\varepsilon\kappa(s))ds,
\end{aligned}
\tag{31}
$$

其中 c、c_0、c_1、$c'>0$ 均与 ε 无关，而 δ、δ'、θ、θ'、$\theta_0>0$ 则可供我们选取。我们的目标是使所有导数项前的系数都足够小，代价可能是增大边界项前的系数。最终可以看出，式（31）中的一阶 t 导数项必须有如下下界

$$
\frac{\|\kappa\partial_t\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)}^2}{\varepsilon^2}.
$$

由于 κ 可能在 $\partial\Omega$ 的一个正测度子集上为零，因此我们不能直接将这些范数等同起来。然而，根据高斯–博内定理，

$$
\int_{\partial\Omega}\kappa(s)ds=2\pi;
$$

因此存在一个开子集 $J_a\subset\partial\Omega$ 和一个常数 $a>0$，使得 $|\kappa(s)|\geq a$ 对所有 $s\in J_a$ 均成立。特别地，可以证明（参见 [16]）存在一个常数 $c_a>0$ 满足

$$
\frac{\|\partial_t\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)}^2}{\varepsilon^2}\leq 4c_a^2\frac{\|\partial_{tt}^2\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)}^2}{\varepsilon^2}+4c_a^2\frac{\|\partial_{st}^2\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)}^2}{\varepsilon^2}+\frac{2}{a^2}\frac{\|\kappa\partial_t\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)}^2}{\varepsilon^2} \tag{32}
$$

证明见 [16]。然后，我们将（32）代入（31）。

最后，利用13式的右端项 $\varphi=u_\varepsilon$ 进行估计。由杨不等式可得，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{|\partial\Omega|}\tilde{f}_\varepsilon(s,0)\tilde{u}_\varepsilon(s,0)ds+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{|\partial\Omega|}\tilde{f}_\varepsilon(s,1)\tilde{u}_\varepsilon(s,1)(1-\varepsilon\kappa(s))ds \\
&\quad\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{|\partial\Omega|}\tilde{f}_\varepsilon^2(s,0)ds+\frac{1}{2}\int_0^{|\partial\Omega|}\tilde{u}_\varepsilon^2(s,0)ds \\
&\qquad+\frac{c'}{\varepsilon^2}\int_0^{|\partial\Omega|}\tilde{f}_\varepsilon^2(s,1)ds+\frac{1}{2}\int_0^{|\partial\Omega|}\tilde{u}_\varepsilon^2(s,1)(1-\varepsilon\kappa(s))ds.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

汇总所有估计式（28）–（31），并取 δ、δ'、θ、θ'、$\theta_0>0$ 充分小（如有需要，还可增大 b），便可得到常数 $c_0>0$ 和 $c_1>1$，它们与 ε 无关，使得

$$
\begin{aligned}
a(\tilde{u}_\varepsilon,\tilde{u}_\varepsilon)\geq\ & c_0\left(\frac{\left\|\partial_{tt}^2\tilde{u}_\varepsilon\right\|_{L^2(\Sigma)}^2}{\varepsilon^4}+\frac{\left\|\partial_{st}^2\tilde{u}_\varepsilon\right\|_{L^2(\Sigma)}^2}{\varepsilon^2}+\frac{\left\|\kappa\partial_t\tilde{u}_\varepsilon\right\|_{L^2(\Sigma)}^2}{\varepsilon^2}\right) \\
&+c_0\left(\left\|\partial_{ss}^2\tilde{u}_\varepsilon\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\left\|\kappa\partial_s\tilde{u}_\varepsilon\right\|_{L^2(\Sigma)}^2\right) \\
&+c_1\int_0^{|\partial\Omega|}\tilde{u}_\varepsilon^2(s,0)ds+c_1\int_0^{|\partial\Omega|}\tilde{u}_\varepsilon^2(s,1)(1-\varepsilon\kappa(s))ds,
\end{aligned}
\tag{34}
$$

对所有 $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0/2]$均成立。然后根据（33），我们最终推出（22）成立。强制性估计得证。

3.2 极限问题的推导

强制性估计（22）表明这些族

$$\left\{\frac{\partial_{tt}^2 \tilde{u}_\varepsilon}{\varepsilon^2}\right\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)}, \left\{\frac{\partial_{st}^2 \tilde{u}_\varepsilon}{\varepsilon}\right\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)}, \{\partial_{ss}^2 \tilde{u}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)}$$

对所有 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，在 $L^2(\Sigma)$ 中一致有界。特别地，$\{\tilde{u}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)}$ 是 $H^2(\Sigma)$ 中的有界序列。因此，存在 $u \in H^2(\Sigma)$ 和一个子序列（仍以 ε 为指标），使得

$$\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ in } H^2(\Sigma), \text{ and hence strongly in } H^1(\Sigma).$$

此外，存在一个函数 $v \in L^2(\Sigma)$，使得在取子序列后，

$$\frac{\partial_{tt}^2 \tilde{u}_\varepsilon}{\varepsilon^2} \rightharpoonup v \text{ in } L^2(\Sigma) \text{ as } \varepsilon \to 0. \tag{35}$$

接下来，由（22）（更准确地说，由（32）和（34））可知，序列

$$\left\{\frac{\partial_t \tilde{u}_\varepsilon}{\varepsilon}\right\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)}$$

在 $L^2(\Sigma)$ 中一致有界。因此，取子序列后，存在一个函数$w \in H^1(\Sigma)$，使得

$$\frac{\partial_t \tilde{u}_\varepsilon}{\varepsilon} \rightharpoonup w \quad \text{in } H^1(\Sigma) \quad \text{as } \varepsilon \to 0.$$

由紧嵌入 $H^1(\Sigma) \hookrightarrow L^2(\Sigma)$，还可得

$$\frac{\partial_t \tilde{u}_\varepsilon}{\varepsilon} \to w \text{ in } L^2(\Sigma) \text{ as } \varepsilon \to 0.$$

I特别地，$\partial_t \tilde{u}_\varepsilon \to 0$ 属于 $L^2(\Sigma)$。因此，$\partial_t u = 0$ 在 Σ 上几乎处处成立，所以 u 关于 t 变量为常数。进一步，由于以下事实，我们推得极限函数 w 关于 t 为常数：

$$\frac{\partial_{tt}^2 \tilde{u}_\varepsilon}{\varepsilon} \to 0 \text{ in } L^2(\Sigma).$$

另一方面，由（13）可得

$$\frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^{|\partial\Omega|} (\partial_t \tilde{u}_\varepsilon(s,0))^2 ds \le c.$$

则有如下不等式

$$\int_0^{|\partial\Omega|} \left(\frac{\partial_t \tilde{u}_\varepsilon(s,0)}{\varepsilon}\right)^2 ds \le \varepsilon,$$

可得

$$\left\|\frac{\partial_t \tilde{u}_\varepsilon(s,0)}{\varepsilon}\right\|_{L^2((0,|\partial\Omega|))} \to 0 \text{ as } \varepsilon \to 0.$$

因此，在 $(0, |\partial\Omega|)$ 上，$w(s, 0) = 0$ 几乎处处成立。由于与 w 无关，t 迫使 $w \equiv 0$ 在 Σ 上成立。

现在我们在弱形式（13）中取极限。首先，取

$$\varphi = \varepsilon^2 \zeta \quad \text{for some } \zeta \in H^2(\Sigma).$$

(13) 中的所有项在 $\varepsilon \to 0$时均趋于零，除非

$$\frac{1}{\varepsilon^4}\partial_{tt}^2\big(u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon\big)\partial_{tt}^2\big(\varepsilon^2\zeta\big).$$

由 (35) 和 (13)，我们进而推出

$$\int_\Sigma \big(D^2 u_\varepsilon : D^2(\varepsilon^2\zeta)\big) \circ \Phi_\varepsilon(s,t)(1-\varepsilon t\kappa(s))dtds \to \int_\Sigma v\partial_{tt}^2\zeta ds dt = 0 \text{ as } \varepsilon \to 0.$$

由于 ζ 是 $H^2(\Sigma)$ 中的任意函数，我们得出 $v = 0$。

接下来，令

$$\varphi(s,t) = \psi(s),\ s \in \big(0, |\partial\Omega|\big),\ \psi \in H_p^2\big(0, |\partial\Omega|\big).$$

将 φ 作为测试函数代入 (13)，我们推出

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma \Bigg(\frac{\partial_{ss}^2\tilde{u}_\varepsilon \partial_{ss}^2\varphi}{(1-\varepsilon t\kappa(s))^4} + \frac{\varepsilon t\kappa'(s)}{(1-\varepsilon t\kappa(s))^5}\big(\partial_s\tilde{u}_\varepsilon\partial_{ss}^2\varphi + \partial_{ss}^2\tilde{u}_\varepsilon\partial_s\varphi\big) \\
&\quad - \frac{\kappa(s)}{\varepsilon(1-\varepsilon t\kappa(s))^3}\partial_t\tilde{u}_\varepsilon\partial_{ss}^2\varphi + \frac{2\kappa(s)}{\varepsilon(1-\varepsilon t\kappa(s))^3}\partial_{st}^2\tilde{u}_\varepsilon\partial_s\varphi \\
&\quad - \frac{t\kappa(s)\kappa'(s)}{(1-\varepsilon t\kappa(s))^4}\partial_t\tilde{u}_\varepsilon\partial_s\varphi + \frac{2\kappa(s)^2(1-\varepsilon t\kappa(s))^2 + \varepsilon^2t^2\kappa'(s)^2}{(1-\varepsilon t\kappa(s))^6}\partial_s\tilde{u}_\varepsilon\partial_s\varphi \Bigg)(1-\varepsilon t\kappa(s))dsdt \\
&\quad + b\int_0^{|\partial\Omega|}\tilde{u}_\varepsilon(s,0)\varphi(s,0)ds + b\int_0^{|\partial\Omega|}\tilde{u}_\varepsilon(s,1)\varphi(s,1)(1-\varepsilon\kappa(s))ds \\
&\quad = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{|\partial\Omega|}\tilde{f}_\varepsilon(s,0)\varphi(s,0)ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{|\partial\Omega|}\tilde{f}_\varepsilon(s,1)\varphi(s,1)(1-\varepsilon\kappa(s))ds.
\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0$ 趋于极限，并利用弱收敛

$$\int_\Sigma \big(\partial_{ss}^2 u\partial_{ss}^2\psi + 2\kappa(s)^2\partial_s u\partial_s\psi\big)\,dsdt + 2b\int_0^{|\partial\Omega|} u\psi ds = \int_0^{|\partial\Omega|}(f_1+f_2)\psi ds, \tag{36}$$

并注意到 u，ψ 不依赖于 t，我们得到

$$\begin{cases} u^{(4)} - 2\big(\kappa^2u'\big)' + 2bu = f_1 + f_2, & \text{in } (0,|\partial\Omega|), \\ u^{(k)}(0) = u^{(k)}(|\partial\Omega|), & k = 0,1,2,3. \end{cases} \tag{37}$$

特别是，如果 $f_1 = f_2 = f$，那么（37）恰好化为前面陈述的问题（11）。

3.3 紧收敛的证明

首先，我们引入第 2.3 节所需的希尔伯特空间。对于每个 $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0)$，我们定义

$$\mathcal{H}_\varepsilon = L^2\left(\partial\omega_\varepsilon; \varepsilon^{-2}d\sigma\right),\ \mathcal{H}_0 = L^2\left((0,|\partial\Omega|), 2ds\right).$$

令 $\mathcal{E}_\varepsilon\colon\ \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_\varepsilon$ 为由下式定义的延拓算子

$$\left(\mathcal{E}_\varepsilon u \circ \Phi_\varepsilon\right)(s,0) = \left(\mathcal{E}_\varepsilon u \circ \Phi_\varepsilon\right)(s,1) = \varepsilon u(s) \text{ for all } s \in \partial\Omega.$$

注意，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\|\mathcal{E}_\varepsilon u\right\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}=\|u\|_{\mathcal{H}_0}.$$

因此，该族 $\{\mathcal{E}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)}$ 满足 (12)，并且是一个可容许连接系统。

现在定义算子 B_ε 和 B_0。算子 B_ε 是与问题 (9相关联的预解算子，经 ε缩放。具体而言，定义

$$B_\varepsilon:\ \mathcal{H}_\varepsilon\to\mathcal{H}_\varepsilon,$$

by

$$B_\varepsilon f_\varepsilon=\varepsilon u_\varepsilon,\ \text{for all}\ f_\varepsilon\in\mathcal{H}_\varepsilon, \tag{38}$$

其中，u_ε 满足边界数据为 f_ε的方程(9)。非零实数 $\lambda(\varepsilon)$是 B_ε的特征值，当且仅当 $\lambda_\varepsilon=\frac{\varepsilon}{(1-b\lambda(\varepsilon))\lambda(\varepsilon)}$是问题(1)的特征值，且具有相同的特征函数。等价地，$\lambda(\varepsilon)\neq 0$是 B_ε 的特征值，当且仅当$\lambda_\varepsilon=\frac{\varepsilon}{\lambda(\varepsilon)}$是问题(7)的特征值。由于迹算子 $H^2(\omega_\varepsilon)\to L^2(\partial\omega_\varepsilon)$是紧的，因此 B_ε 是紧的。

接下来，B_0 是与问题 (11) 相关联的预解算子。定义

$$B_0:\ \mathcal{H}_0\to\mathcal{H}_0,$$

by

$$B_0 f=u,\ \ \text{for all}\ f\in\mathcal{H}_0, \tag{39}$$

其中 u 满足右端项为 11 的方程 f。非零实数 $\lambda(0)$ 是 B_0 的特征值，当且仅当 $\lambda=\frac{1-b\lambda(0)}{\lambda(0)}$ 是具有相同特征函数的问题 (2) 的特征值。此外，

$$B_0\left(\mathcal{H}_0\right)\subset H_p^4\big((0,|\partial\Omega|)\big)$$

且嵌入

$$H_p^4\big((0,|\partial\Omega|)\big)\hookrightarrow\mathcal{H}_0$$

是紧的。因此，B_0 是紧的。

定理 3.1。设 B_ε，$\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$由 (38)定义，且 B_0 由 (39)定义。那么B_ε 紧收敛到 B_0 当 $\varepsilon\to 0$ 时。

证明。由于我们只关心极限 $\varepsilon\to 0$，因此可以将范围限制为 $\varepsilon\in\left[0,\min\{1,\varepsilon_0/2\}\right]$。

设 $f_\varepsilon\in\mathcal{H}_\varepsilon$ 满足

$$\|f_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}=1.$$

Then

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\partial\omega_\varepsilon}f_\varepsilon^2 d\sigma=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{|\partial\Omega|}\tilde{f}_\varepsilon^2(s,0)ds+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{|\partial\Omega|}\tilde{f}_\varepsilon^2(s,1)(1-\varepsilon\kappa(s))ds=1.$$

因此，当 $\varepsilon\to 0$ 时，沿某个子序列，$\varepsilon^{-1}\tilde{f}_\varepsilon(s,0)\rightharpoonup f_1(s)$ 于 $L^2((0,|\partial\Omega|))$，且 $\varepsilon^{-1}\tilde{f}_\varepsilon(s,1)\rightharpoonup f_2(s)$ 于 $L^2((0,|\partial\Omega|))$。根据第3.2节，进一步取子序列后，$\tilde{u}_\varepsilon\rightharpoonup u$ 在 $H^2(\Sigma)$ 中，其中 u 满足与边界数据 f_1+f_2 对应的极限问题 (37)。

接下来，注意到

$$\|B_\varepsilon f_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}^2=\|\varepsilon u_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}^2=\int_{\partial\omega_\varepsilon}u_\varepsilon^2 d\sigma=\int_0^{|\partial\Omega|}\tilde{u}_\varepsilon^2(s,0)ds+\int_0^{|\partial\Omega|}\tilde{u}_\varepsilon^2(s,1)(1-\varepsilon\kappa(s))ds,$$

and

$$< \varepsilon u_\varepsilon, \mathcal{E}_\varepsilon u >_{\mathcal{H}_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial\omega_\varepsilon} u_\varepsilon \mathcal{E}_\varepsilon u d\sigma$$
$$= \int_0^{|\partial\Omega|} \tilde{u}_\varepsilon(s,0)u(s)ds + \int_0^{|\partial\Omega|} \tilde{u}_\varepsilon(s,1)u(s)(1-\varepsilon\kappa(s))ds.$$

由于迹映射是紧的，且 $\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u$ in $H^2(\Sigma)$，我们得到

$$\|\varepsilon u_\varepsilon - \mathcal{E}_\varepsilon u\|^2_{\mathcal{H}_\varepsilon} = \|\varepsilon u_\varepsilon\|^2_{\mathcal{H}_\varepsilon} - 2 < \varepsilon u_\varepsilon, \mathcal{E}_\varepsilon u >_{\mathcal{H}_\varepsilon} + \|\mathcal{E}_\varepsilon u\|^2_{\mathcal{H}_\varepsilon} \to 0, \tag{40}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时。

设 $f_\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon$ 和 $f \in \mathcal{H}_0$ 满足

$$\|f_\varepsilon - \mathcal{E}_\varepsilon f\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \to 0 \text{ as } \varepsilon \to 0. \tag{41}$$

令 $f = \mathcal{E}_1 f_1 = \mathcal{E}_1 f_2 = \varepsilon^{-1}(\mathcal{E}_\varepsilon f_1)(s,\ 0) = \varepsilon^{-1}(\mathcal{E}_\varepsilon f_2)(s,\ 1)$。则

$$\int_0^{|\partial\Omega|} (\varepsilon^{-1}\tilde{f}_\varepsilon(s,0) - f_1(s))^2 ds + \int_0^{|\partial\Omega|} (\varepsilon^{-1}\tilde{f}_\varepsilon(s,1) - f_2(s))^2(1-\varepsilon\kappa(s))ds$$
$$= \int_0^{|\partial\Omega|} (\varepsilon^{-1}\tilde{f}_\varepsilon - \varepsilon^{-1}(\mathcal{E}_\varepsilon f)(s,0))^2 ds + \int_0^{|\partial\Omega|} (\varepsilon^{-1}\tilde{f}_\varepsilon(s,1) - \varepsilon^{-1}(\mathcal{E}_\varepsilon f)(s,1))^2(1-\varepsilon\kappa(s))ds$$
$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\partial\omega_\varepsilon} (f_\varepsilon - \mathcal{E}_\varepsilon f)^2 d\sigma \to 0,$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时。因此，$\varepsilon^{-1}\tilde{f}_\varepsilon(s,0) \rightharpoonup f_1$ 属于 $L^2((0,|\partial\Omega|))$，且 $\varepsilon^{-1}\tilde{f}_\varepsilon(s,1) \rightharpoonup f_2$ 属于 $L^2((0,|\partial\Omega|))$，当$\varepsilon \to 0$时；由第3.2节可知，取一个子序列后，$\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u$ 属于 $H^2(\Sigma)$。随后，与式（40）相同的论证可得

$$\|\varepsilon u_\varepsilon - \mathcal{E}_\varepsilon u\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \to 0,$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时。由于 $u = B_0 f$，这表明

$$B_\varepsilon f_\varepsilon = \varepsilon u_\varepsilon \to \mathcal{E}_\varepsilon\big(B_0 f\big) \quad \text{in } \mathcal{H}_\varepsilon,$$

完成定理 3.1的证明。 □

3.4 谱收敛：特征值的渐近行为

结合定理 3.1（B_ε 到 B_0的紧收敛）与定理 2.6（紧算子的谱收敛）可知，B_ε 的谱收敛到 B_0 的谱，$\varepsilon \to 0$趋于 λ_k（ε）表示 k的第 B_ε 个特征值（按递增顺序排列，并计入重数），而 $\lambda_k(0)$ 表示 k的第 B_0个特征值，则

$$\frac{\lambda_{\varepsilon,k}}{\varepsilon} = \frac{1-b\lambda_k(\varepsilon)}{\lambda_k(\varepsilon)} \sim \frac{1-b\lambda_k(0)}{\lambda_k(0)} = \lambda_k \tag{42}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时。

接下来，令 $u_{\varepsilon,k}$ 为与 $\lambda_{\varepsilon,k}$对应的(1)的特征函数，并将其归一化，使得$\|u_{\varepsilon,k}\|_{L^2(\partial\omega_\varepsilon)} = 1.$。于是，$u_{\varepsilon,k} := \varepsilon u_{\varepsilon,k}$ 在 $\mathcal{H}_\varepsilon$中是归一化的，即$\|u_{\varepsilon,k}\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} = 1.$。根据定理 2.6（$B_\varepsilon$的谱收敛），存在 B_0 的特征函数标准正交基 $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}^+} \subset \mathcal{H}_0$，使得在必要时取一个子序列后，

$$\|\overline{u}_{\varepsilon,k} - \mathcal{E}_\varepsilon u_k\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \to 0 \text{ as } \varepsilon \to 0. \tag{43}$$

为了证明在 Σ中的收敛，我们沿用之前的论证。因此，我们得到如下问题：

$$\begin{aligned}
&\int_{\Sigma} (D^2 u_{\varepsilon,k} : D^2\varphi) \circ \Phi_\varepsilon(s,t)\,(1-\varepsilon t\kappa(s))dtds \\
&\quad + \frac{\mu}{\varepsilon^3}\int_0^{|\partial\Omega|} \partial_t(u_{\varepsilon,k}\circ\Phi_\varepsilon)(s,0)\partial_t(\varphi\circ\Phi_\varepsilon)(s,0)ds \\
&\quad + \frac{\mu}{\varepsilon^3}\int_0^{|\partial\Omega|} \partial_t(u_{\varepsilon,k}\circ\Phi_\varepsilon)(s,1)\partial_t(\varphi\circ\Phi_\varepsilon)(s,1)(1-\varepsilon\kappa(s))ds \\
&\quad = \frac{\lambda_{\varepsilon,k}}{\varepsilon}\int_0^{|\partial\Omega|} (u_{\varepsilon,k}\varphi)\circ\Phi_\varepsilon(s,0)ds + \frac{\lambda_{\varepsilon,k}}{\varepsilon}\int_0^{|\partial\Omega|} (u_{\varepsilon,k}\varphi)\circ\Phi_\varepsilon(s,1)(1-\varepsilon\kappa(s))ds.
\end{aligned} \tag{44}$$

若在（44）中令 $\varphi = u_{\varepsilon,\,k}$，则结合（42）以及归一化条件 $\|u_{\varepsilon,\,k}\|_{L^2(\partial\omega_\varepsilon)} = 1$，可得 $\|\tilde{u}_{\varepsilon,\,k}\|_{H^2(\Sigma)} \le c$。进而可推出，存在一个函数 $v_k \in H^2(\Sigma)$，使得不妨经过一个子序列，

$$\tilde{u}_{\varepsilon,k} \rightharpoonup v_k \text{ in } H^2(\Sigma), \text{ and hence strongly in } H^1(\Sigma).$$

在方程（44）中，选取一个测试函数

$$\varphi(s,t) = \psi(s),\ s \in \big(0,|\partial\Omega|\big),\ \psi \in H_p^2\big(0,|\partial\Omega|\big).$$

并结合（42）以及第 3.2 节中的收敛结果，当 $\varepsilon \to 0$ 时取极限，可得

$$\int_{\Sigma} \left(\partial_{ss}^2 v_k \partial_{ss}^2\psi + 2\kappa(s)^2\partial_s v_k\partial_s\psi\right) dsdt = 2\lambda_k \int_0^{|\partial\Omega|} v_k\psi ds. \tag{45}$$

注意，（45）中出现的所有函数在 t 上均为常数。由于 $\psi \in H_p^2\big(0,\ |\partial\Omega|\big)$ 是任意函数，（45）即为下述问题的弱形式：

$$\begin{cases} v_k^{(4)} - 2\big(\kappa^2 v_k'\big)' = 2\lambda_k v_k, & \text{in } (0,|\partial\Omega|), \\ v_k^{(l)}(0) = v_k^{(l)}(|\partial\Omega|), & l = 0,1,2,3. \end{cases}$$

将（43）用 $u_{\varepsilon,\,k}$ 重写，容易推出，可能需要取一个子序列，$\tilde{u}_{\varepsilon,\,k}(s,\ 0) \to u_k(s)$ 在 $L^2((0,\ |\partial\Omega|))$ 中当 $\varepsilon \to 0$ 时成立，因此 $u_k = v_k$，证明完成。

备注 3.2。 也可以允许管状邻域 ω_ε 具有可变厚度。具体而言，固定一个光滑函数 $g:\ \partial\Omega \to (0,1)$，并定义

$$\omega_{\varepsilon,g} := \big\{x \in \omega_\varepsilon : 0 < \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) < \varepsilon g(s(x))\big\},$$

对所有 $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$成立，其中 $s(x)$ 是 x在 $\partial\Omega$ 上的最近点。计算可以完全按照之前的方式进行。重复相同的估计可得，极限问题变为

$$\begin{cases} (gu'')'' - 2(\kappa^2 gu')' = \lambda u, & in\ (0,|\partial\Omega|), \\ u^{(k)}(0) = u^{(k)}\big(|\partial\Omega|\big), & k = 0,1,2,3, \end{cases}$$

关于未知量 u 和 λ。关于可变宽度极限的更多细节，请参见 [3], [9]。

致谢

本研究由哈萨克斯坦共和国科学和高等教育部科学委员会资助（资助编号：BR31714735）。

利益冲突

本研究不存在任何利益冲突。

参考文献

[1] Arrieta, J.M., Carvalho, A.N., Losada-Cruz, G.: 哑铃形区域中的动力学 I. 平衡态集合的连续性. 《微分方程杂志》231, 551–597 (2006)[2] Arrieta, J.M., L´opez-Fern´andez, M., Z uazua, E.: 用非局部方程的平衡态逼近行波. 渐近分析 78(3), 145–186 (2012)[3] Arrieta, J.M., Ferraresso, F., Lamberti, P.D.: 哑铃形区域上具有 Neumann边界条件的双调和算子的谱分析. 积分方程与算子理论 89, 377–408 (2017)[4] Arrieta, J.M., Villanueva-Pesqueira, M.: 具有双重弱振荡边界的薄区域中的椭圆和抛物问题. 纯粹与应用分析通讯 19(4), 1891–1914 (2020)[5] Arrieta, J.M., Nakasato, J.M., Pereira, M.C.: 薄区域中的 p-拉普拉斯方程：展开方法. 《微分方程杂志》274, 1–34 (2021)[6] Arrieta, J.M., Nakasato, J.C., Villanueva-Pesqueira, M., Panasenko, G., Piatnitski, A.: 具有不同阶振荡边界的三维薄区域中的均匀化. 非线性分析 251, 113797 (2025)[7] Balinsky, A.A., Evans, W.D., Lewis, R.T.: 哈代不等式的分析与几何. 施普林格, Cham (2015)[8] Borisov, D., Freitas, P.: $\mathbb{R}^d$中薄区域上拉普拉斯算子的狄利克雷特征值和特征函数的渐近性质. 《泛函分析杂志》258(3), 893–912 (2010)[9] Bucur, D., Henrot, A., Michetti, M.: 哑铃形区域上斯捷克洛夫谱的渐近行为. 偏微分方程通讯 46(2), 362–393 (2021)[10] Buoso, D., Provenzano, L.: 双调和 Steklov 问题的若干形状优化结果. 《微分方程杂志》259(5), 1778–1818 (2015)[11] Carvalho, A.N., Piskarev, S.: 抽象抛物问题吸引子的一般逼近方案. 数值泛函分析与优化 27(7–8), 785–829 (2006)[12] Casado-Diaz, J., Luna-Laynez, M., Suarez-Grau, F.J.: 薄区域中流体压力的分解结果及其在弹性问题中的推广. 工业与应用数学学会数学分析杂志 52(3), 2201–2236 (2020)[13] Eringen, A.C.: 微极弹性理论. 载于：Liebowitz, H. (编)《断裂》. 学术出版社, 纽约 (1968)[14] Eringen, A.C.: 《微连续体场论：I. 基础与固体》. 施普林格出版社, 纽约 (1999)[15] Federer, H.: 曲率测度. 《美国数学会会刊》93, 418–491 (1959)[16] Ferraresso, F., Provenzano, L.: 关于薄集上具有 Neumann边界条件的双调和算子的特征值. 伦敦数学会通报 55(3), 1154–1177 (2023)[17] Ferrero, A., Lamberti, P.D.: 区域扰动下某类四阶斯捷克洛夫问题的谱稳定性. 变分法与偏微分方程 58, 文章 33 (2019)

[18] Ferrero, A., Lamberti, P.D.: Steklov问题的谱稳定性. 非线性分析 222, 112989 (2022)[19] Friesecke, G., James, R.D., M¨uller, S.: 关于几何刚性以及从三维弹性推导非线性板理论的一个定理. 《纯粹与应用数学通讯》55(11), 1461–1506 (2002)[20] Gaudiello, A., Panasenko, G., Piatnitski, A.: 薄多结构中双调和问题的渐近分析与区域分解. 《当代数学通讯》18(5), 1550062 (2016)[21] Gaudiello, A., Gomez, D., Perez-Martinez, M.-E.: 薄T形结构中拉普拉斯算子高频的渐近分析. 《纯粹与应用数学杂志》134(9), 299–327 (2020)[22] Grieser, D.: 数理物理、整体分析与谱几何中的细管. 载于：《图上的分析及其应用》，第77卷，第589–614页. 美国数学学会 (2008)[23] Henry, D.: 偏微分方程边值问题中的边界扰动. 剑桥大学出版社, 剑桥 (1981)[24] Lamberti, P.D., Provenzano, L.: 关于迹空间的显式表示 $H^{3/2}$ 以及通过多参数Steklov问题表示Lipschitz区域上的双调和狄利克雷问题的解. 《马德里康普顿斯大学数学评论》35, 53–88 (2022)[25] Lewis, R.T., Li, J., Li, Y.: 尖锐哈代不等式的几何刻画. 《泛函分析杂志》262(7), 3159–3185 (2012)[26] Li, F., Li, D., Freitas, M.M.: 无界薄区域上随机时滞p-Laplace方程的极限动力学. 《Banach数学分析杂志》18(2), 文章 13 (2024)[27] Miura, T.-H.: 弯曲薄区域中Ginzburg-Landau热流的薄膜极限. 《微分方程杂志》422, 1–56 (2025)[28] Nakasato, J.C., Pazanin, I., Pereira, M.C.: 具有振荡边界和变化的厚度阶的薄区域中的反应扩散问题. 《应用数学与物理学杂志》72(1), 文章 5 (2021)[29] Nazarov, S.A., Perez, E., Taskinen, J.: 薄非光滑区域中狄利克雷特征函数的局域化效应. 《美国数学会会刊》368(7), 4787–4829 (2016)[30] Nogueira, A., Nakasato, J.C.: 粗糙薄区域中含边界集中项的 p-拉普拉斯方程. 《纯粹与应用数学年刊》199(5), 1789–1813 (2020)[31] Pereira, M.C., Rossi, J.D., Saintier, N.: 薄区域中的分数阶问题. 非线性分析 193, 111471 (2020)[32] Stummel, F.: 椭圆边值问题中的区域扰动. 载于：《数学讲义》第503卷，第110–136页. 施普林格, 柏林 (1976)[33] Vainikko, G.M.: 算子的正则收敛与方程的近似解. 《苏联数学》16, 949–980 (1981)