arXiv:2603.01832v1 [math.SG] 2 Mar 2026

Fueter 方程与对高维 Hamiltonian Floer 理论的探索 I：分析基础与紧性

Luca Asselle 和 Ronen Brilleslijper

2026年3月3日

摘要

我们研究一种 Floer 理论方法，用于研究从二维环面映射到非平坦 Kähler 流形的调和映射。基于 BF24]，的复正则化多辛（CRPS）形式体系——该体系为满足椭圆型相关方程的调和映射提供哈密顿量描述——我们分析 Fueter 映射相关模空间的紧性。对于复双曲空间的紧致商空间 Q，我们利用 Biquard-Gauduchon 超凯勒度量的结构，在对哈密顿量施加适当小性假设的条件下证明相对紧性。在平坦情形下，我们建立必要的定量L^∞估计，并概述一种适用于非平坦情形的微扰策略。

1 引言

自 20 世纪 80 年代 Floer 的研究以来，伪全纯曲线技术在辛几何中发挥了重要作用，尤其是在研究辛流形上 Hamilton 系统的周期轨道方面（M，ω）。本文聚焦于 $M = T^*Q$ 为余切丛且配备标准辛结构的情形。当哈密顿量等于动能时，周期轨道对应于 Q 上的测地线。Floer 理论的关键见解是，周期轨道是哈密顿作用泛函的临界点。相对于与 ω 相容的度量，取 L^2 梯度流可得 Floer 方程

$$\partial_s u + J\partial_t u = \nabla H(u),$$

其中 u：实数集 $\times S^1 \to T^*Q$。该理论的一个关键要素是 Floer 轨线的适当模空间的紧性。

调和映射可以看作测地线在更高维度上的类比。因此，自然会提出这样的问题：能否发展 Floer 型技术来研究调和映射的存在性？更准确地说，黎曼流形之间的一个光滑映射 $f\colon (M,h) \to (Q,g)$ 若是狄利克雷能量的临界点，则称为调和

$$\mathbb{E}(f) := \frac{1}{2}\int_M |\mathrm{d}f|^2 \,\mathrm{d}\mu_h,$$

其中 μ_h 表示 M 上由 h诱导的体积形式。调和映射理论由Eells 和 Sampson [ES64], 开创，他们引入了调和映射热流，并证明在适当的曲率假设下，任意映射均可形变为调和映射。此后，调和映射及其相关热流成为几何分析中的核心对象。特别值得关注的是 $M = \Sigma$ 为曲面的情形，这对应于狄利克雷能量的 Sobolev 临界情形。在这一维数下，由于能量集中与泡化，紧性现象变得尤为微妙。该背景下理论的基石是Sacks 和 Uhlenbeck [SU81]的工作。他们引入了狄利克雷能量的一种扰动（所谓的 α-能量），定义在巴拿赫流形上，并具有改进的紧性性质。通过分析取 $\alpha \downarrow 1$时的极限，他们证明了调和二球面的存在性，并发展了细致的泡化分析。他们的方法影响极为深远，并已被应用于众多其他几何变分问题。

尽管调和映射理论将测地线理论作为一个特例包含其中，但调和映射的研究要困难得多。原因之一是，狄利克雷能量的自然定义域，即$H^1(\Sigma,\ Q)$，除非 Q 是 $\mathbb{R}^n$的商空间，否则不具有希尔伯特流形的结构。这使得莫尔斯理论分析极为微妙。因此，开发适用于调和映射的 Floer 型技术将十分理想。然而，目前在这一方向上所知甚少。多辛与多重辛框架（参见例如 [Gün87, DLSV15]）为调和映射提供了 Hamilton 描述，但正如 [BF24], 所示，由此得到的方程并非椭圆型，因而不适用于 Floer 理论方法。为克服这一问题， [BF24] 引入了一种形式体系，为从 $\mathbb{T}^2$ 到任意 Kähler 流形的调和映射给出哈密顿量形式，且所关联的方程是椭圆型的。在这一框架下，利用 Floer 理论方法，建立了非线性拉普拉斯方程的解 $\mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^{2n}$ 数量的一个下界。本文旨在朝着将这些方法推广到非平坦靶流形迈出第一步，主要聚焦于相关 Floer 映射模空间的紧性性质。另一种受 [SU81] 启发、基于巴拿赫流形上泛函的莫尔斯同调的方法，最近已由第一作者及其合作者在 [AS24，ACS25]中开始研究。

在 [BF24] 中发展出的形式体系称为复正则化多辛（CRPS）几何。在第2节中，我们将回顾重要概念。其思路

是，在 CRPS 流形 W 上，我们有两个辛形式 ω_1 和 ω_2，因此可以构造哈密顿方程的高维类比

$$\omega_1(\cdot, \partial_x Z) + \omega_2(\cdot, \partial_y Z) = dH(Z), \tag{1}$$

其中 $Z: \mathrm{T}^2 \to W$。在命题2.4中，我们证明，对于 K¨ahler 流形 (Q, g) 和定义在 T^*Q 上的哈密顿量 $H(q,p) = \frac{1}{2}|p|_g^2$，该方程描述了调和映射 $\mathrm{T}^2 \to Q$。方程（1）的解是某个作用泛函的临界点，与辛情形相同；该作用泛函定义如下:

$$\mathcal{A}_H(Z) = \int_{\mathbb{T}^2} \left(\theta_1(\partial_x Z) + \theta_2(\partial_y Z) - H(Z)\right) dV,$$

其中 θ_1 和 θ_2 分别是 ω_1 和 ω_2 的原始形式。

注1.1。 方程 （1） 仅当 Z 的定义域是一个可平行化曲面时才有意义。对于任意黎曼曲面，相应的形式体系已在 *[BF26]*中建立。本文仅考虑从$\mathbb{T}^2$, 出发的映射，但我们预计类似结果也适用于更一般的情形。

在我们的设定中，伪全纯曲线的角色将由伪 Fueter 映射 $Z: \mathrm{R} \times \mathrm{T}^2 \to T^*Q$取代。

$$\partial_s Z + J(Z)\partial_x Z + K(Z)\partial_y Z = \nabla H(Z),$$

其中 J 和 K 是反交换的几乎复结构，与 T^*Q上的 CRPS 结构相容。一般而言，这些几乎复结构不一定可积，而相应伪 Fueter 映射模空间的紧性理论十分复杂，目前尚不可用。本文将把讨论限制在 T^*Q中零截面的一个适当邻域内，在此处我们可以假设 J 和 K 可积（见定理3.1）。这使我们能够运用 [Wal17] 的方法，为相关的 Fueter 映射模空间 $\mathcal{M}$ 证明紧致性结果。

定理 1.2。 设 Q 是复双曲空间关于某个等距变换群作用的紧致商空间，且$\mathbb{D}^*_{\delta_0} Q \subseteq T^*Q$ 是零截面的一个超凯勒邻域。那么，存在 $0 < \delta_* < \delta_0$，使得第 *3* 节中定义的 ***Fueter*** 映射模空间 $\mathcal{M}$在 C^∞_{loc}拓扑下相对紧，前提是满足以下两个条件:

- ***a)*** $\mathcal{M}$ 中的所有元素的像都包含在某个 $0 < \delta < \delta_*$ 的 $\mathbb{D}^*_\delta Q$ 中 .
- ***b)*** 该哈密顿量与动能哈密顿量充分 C^1 接近。

之所以将范围限制在复双曲空间的商空间，更一般地限制在局部对称厄米空间，是因为余切丛上的 Biquard-Gauduchon 超Kähler 度量基本上可以明确写出，并且相对于由基底上的 Kähler

度量诱导的水平-垂直分解呈分块对角形式（见 [BG21]）。这使得若干计算显著更加清晰。我们预期，该定理对一般的实解析 Kähler 流形也成立。

定理 1.2 的证明比[BF24]中的平坦情形复杂得多。原因之一是， [BF24] 中使用的 Heinz 技巧无法直接应用。在我们的分析中，需要借助 Walpuski 关于 Fueter 截面的紧致性理论（[Wal17]）。定理 1.2 中的条件 a）可以解释为一种定量 L^∞估计。我们预计，只要哈密顿量与动能哈密顿量足够 C^1接近，这样的界就成立。在第 7 节中，我们证明了这一点适用于平坦靶，并说明了如何处理非平坦靶流形。我们强调，定量约束仅用于排除 Walpuski 分析中出现的剩余奇异集，而在定性的约束假设下，已经可以排除起泡点集。若能更深入地理解 Biquard–Gauduchon 度量下的调和球面，特别是支配其出现的能量阈值函数，或许就能放宽这一条件。这指向一个有趣且尚未得到充分探索的几何研究方向。

本文将首先回顾 [BF24] 中的 CRPS 形式体系。然后在第 3 节中，我们将讨论范围限制在 hyperk¨ahler 邻域，并定义相关的 Floer 映射模空间。第 4 节回顾 Walpuski 的紧性结果，并证明应用该结果所需的能量界。接下来，在第 5 节和第 6 节中，我们考察非紧性的可能来源并予以排除。最后，第 7 节评述必要的 L^∞-界

致谢： 作者感谢 Oliver Fabert 和 Thomas Walpuski 的有益讨论。L.A. 部分受德国研究联合会资助项目 540462524“分析、动力学与几何中的 Morse 理论方法”支持。

2 CRPS 几何

本节简要回顾 [BF24] 中引入的复正则化多辛形式体系（简称 CRPS）。我们从定义开始。

定义 2.1. 设 (W, I) 为复流形。一对辛形式$\Omega = (\omega_1, \omega_2)$，对于 $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^2(W)$，若 $\omega_2 = -\omega_1(\cdot, I\cdot)$，则称为 CRPS 形式 。三元组 (W, I, Ω) 称为 CRPS 流形。

主要的例子是复流形的余切丛。

例2.2. 设(Q, i) 为一个复流形， $W = T^*Q$ 为其配备了诱导复结构 I的余切丛。*Liouville 1*-形式 λ定义为

$\lambda(Z) = p \circ d\pi(q)$，其中 $Z = (q, p) \in W$，且 $\pi\colon\ W \to Q$ 为投影。 W 上的典范 *CRPS* 形式由 $\omega_1 = d\lambda$ 和 $\omega_2 = -d(\lambda \circ I)$给出。

此外， [BF24] 还证明了，所有 CRPS 流形在局部都是标准的。

定理2.3。 对于任意 *CRPS* 流形 $(W, I, \Omega = (\omega_1, \omega_2))$ 以及任意 $Z \in W$，都存在局部坐标 $(q_1^j, q_2^j, p_j^1, p_j^2)_{j=1,\dots,n}$，定义在 Z附近，使得局部有

$$I\frac{\partial}{\partial q_1^j} = \frac{\partial}{\partial q_2^j} \qquad\qquad I\frac{\partial}{\partial p_j^1} = -\frac{\partial}{\partial p_j^2}$$

and

$$\omega_1 = dp_j^1 \wedge dq_1^j + dp_j^2 \wedge dq_2^j \qquad\qquad \omega_2 = dp_j^1 \wedge dq_2^j - dp_j^2 \wedge dq_1^j,$$

这里我们对上、下指标 j采用爱因斯坦求和约定。

CRPS 形式体系的一个主要动机是，它为某些从二维环面 T^2到目标流形的映射所满足的偏微分方程类别提供了自然的哈密顿框架。更准确地说，二元组 $\Omega = (\omega_1, \omega_2)$ 扮演着一种具有两个特定方向的“多辛”结构的角色（在 T^2 上，这两个方向分别为 x 和 y），而恰当选取哈密顿量 H，便可得到映射 $Z : \mathrm{T}^2 \to W$ 的一阶系统，这些系统是某个作用泛函的欧拉-拉格朗日方程。特别地，当 Q 是一个 K¨ahler 流形时，这包括映射 $u\colon \mathrm{T}^2 \to Q$ 的调和映射方程。事实上，在命题2.4中，我们证明了调和映射方程可以写成余切丛 $W = T^*Q$ 上的 CRPS 哈密顿方程；该余切丛配备了例2.2中给出的典范 CRPS 结构，并将与 K¨ahler 度量 g相关的动能选作哈密顿量。从现在起，设 $(W, I, \Omega = (\omega_1, \omega_2))$ 是一个正合 CRPS 流形，因此对于 $i = 1,2$，有 $\omega_i = d\theta_i$ 。我们研究光滑映射$Z\colon \mathrm{T}^2 \to W$，其中 (x, y) 表示 T^2上的标准坐标，且 dV是一个固定的体积形式（例如 $dV = dx \wedge dy$）。类比经典辛作用，我们考虑 CRPS 作用泛函[i]

$$\mathcal{A}(Z) = \int_{\mathbb{T}^2} \big(\theta_1(\partial_x Z) + \theta_2(\partial_y Z)\big)\, \mathrm{d}\mathcal{V},$$

并且，给定一个哈密顿量 $H : \mathrm{T}^2 \times W \to \mathrm{R}$，我们定义哈密顿作用

$$\mathcal{A}_H(Z) = \mathcal{A}(Z) - \int_{\mathbb{T}^2} H(Z)\, \mathrm{d}\mathcal{V}.$$

标准的变分论证表明， $\mathcal{A}_H$ 的临界点恰好是满足偏微分方程的映射 Z

$$\omega_1(\cdot, \partial_x Z) + \omega_2(\cdot, \partial_y Z) = \mathrm{d}H(Z). \tag{2}$$

[i]与辛几何中一样，当 CRPS 形式不是恰当形式时，仍可通过选择封盖数据，在合适的映射类（例如零伦映射）上定义作用泛函。本文只讨论恰当情形。

命题2.4. 设(Q,i,g)为一个*K¨ahler*流形，并取其上由定理 *2.2* 定义的典范 *CRPS* 结构。定义 $H^0(q,p)=\frac{1}{2}|p|^2$在 T^*Q上，其中范数是相对于 g的对偶度量取的。那么， $Z:\mathbb{T}^2\to T^*Q$ 的临界点在 π下投影为调和映射。也就是说，若 $q=\pi\circ Z:\mathbb{T}^2\to Q$，则 q 是调和映射。

证明。我们可以在局部坐标中证明这一命题。取 Q 上关于 $j=1,\ldots,n$ 的全纯局部坐标 $q^j=q_1^j+iq_2^j$，以及 $p_j=p_j^1-ip_j^2$ 诱导的全纯局部坐标。注意， p_j 的定义中有一个负号，这是因为 $i^*=-i$。在这些局部坐标中，我们可以写成

$$g=h_{j\bar{k}}\mathrm{d}q^j\otimes\mathrm{d}\bar{q}^k+h_{\bar{j}k}\mathrm{d}\bar{q}^j\otimes\mathrm{d}q^k,$$

其中

$$h_{j\bar{k}}=\overline{h_{\bar{j}k}}\qquad\qquad h_{\bar{k}j}=h_{j\bar{k}}\qquad\qquad h_{jk}=h_{\bar{j}\bar{k}}=0.$$

我们用带上标的指标表示逆度量，并采用约定 $h^{j\bar{l}}h_{k\bar{l}}=\delta^j_k$。 g 是 K¨ahler 度量这一条件可转化为（见 [Jos05]）

$$\frac{\partial h_{j\bar{l}}}{\partial\bar{q}^k}=\frac{\partial h_{j\bar{k}}}{\partial\bar{q}^l}. \tag{3}$$

这意味着唯一非零的 Christoffel 符号是 $\Gamma^l_{jk}=h^{l\bar{r}}\frac{\partial h_{j\bar{r}}}{\partial q^k}$ 及其共轭项 $\Gamma^{\bar{l}}_{\bar{j}\bar{k}}$。 ——

方程 2 在这些全纯坐标下的局部表达式为

$$-\partial_{\bar{t}}\bar{p}_j=\frac{\partial H}{\partial\bar{q}^j}$$
$$\partial_t q^j=\frac{\partial H}{\partial p_j},$$

其中 $\partial_t=\frac{1}{2}(\partial_x-i\partial_y)$ 且 $\partial_{\bar{t}}=\frac{1}{2}(\partial_x+i\partial_y)$。现在，由于 H由下式给出

$$H(q,p)=\frac{1}{2}h^{j\bar{k}}p_j\bar{p}_k+\frac{1}{2}h^{\bar{j}k}\bar{p}_jp_k,$$

我们得到

$$-\partial_{\bar{t}}\bar{p}_j=\frac{1}{2}\frac{\partial h^{l\bar{k}}}{\partial\bar{q}^j}p_l\bar{p}_k+\frac{1}{2}\frac{\partial h^{\bar{l}k}}{\partial\bar{q}^j}\bar{p}_lp_k \tag{4}$$
$$\partial_t q^j=h^{j\bar{k}}\bar{p}_k. \tag{5}$$

第二个方程得到 $\bar{p}_l=h_{j\bar{l}}\partial_t q^j$，对其取全纯导数后得到

$$-\partial_{\bar{t}}\bar{p}_l=-\frac{\partial h_{j\bar{l}}}{\partial q^k}\partial_{\bar{t}}q^k\partial_t q^j-\frac{\partial h_{j\bar{l}}}{\partial\bar{q}^k}\partial_{\bar{t}}\bar{q}^k\partial_t q^j-h_{j\bar{l}}\partial_{\bar{t}}\partial_t q^j. \tag{6}$$

对 $h^{j\bar{l}}h_{k\bar{l}} = \delta_k^j$ 求导可得 $\frac{\partial h^{r\bar{k}}}{\partial \bar{q}^m} = -\frac{\partial h_{j\bar{l}}}{\partial \bar{q}^m} h^{r\bar{l}} h^{j\bar{k}}$。将其代入方程 (4), 并与方程 (5) 得出的 p 表达式结合，可得

$$-\partial_{\bar{t}}\bar{p}_m = -\frac{1}{2}\frac{\partial h_{j\bar{l}}}{\partial \bar{q}^m}\partial_{\bar{t}}\bar{q}^l\partial_t q^j - \frac{1}{2}\frac{\partial h_{\bar{j}l}}{\partial \bar{q}^m}\partial_t q^l \partial_{\bar{t}}\bar{q}^j. \tag{7}$$

现在，将方程(6)与方程(7)相等，两边乘以逆度量并重新命名指标，得到

$$\begin{aligned} -\partial_{\bar{t}}\partial_t q^l &= h^{\bar{m}l}\frac{\partial h_{j\bar{m}}}{\partial q^k}\partial_{\bar{t}}q^k\partial_t q^j + h^{\bar{m}l}\left(\frac{\partial h_{j\bar{m}}}{\partial \bar{q}^k} - \frac{\partial h_{j\bar{k}}}{\partial \bar{q}^m}\right)\partial_{\bar{t}}\bar{q}^k\partial_t q^j \\ &= \Gamma^l_{jk}\partial_{\bar{t}}q^k\partial_t q^j. \end{aligned} \tag{8}$$

这里，第一个等式右侧的第二项根据方程 (3) 消失。方程 (8) 恰好给出了 q : $\mathrm{T}^2 \to Q$ 为调和映射的条件（见 [Jos05]）。

□

在 [BF24], 中，采用了 CRPS 设置来证明包括平坦靶上的阿诺德猜想的一个版本在内的若干结果。

定理*2.5*（ [*BF*24]中的定理*7.2*）。在 $T^*\mathrm{T}^{2n}$上赋予标准 *CRPS* 结构，其中 T^{2n} 配备标准复结构。对于由 $H(t,q,p) = \frac{1}{2}|p|^2 + h(t,q,p)$定义的 $H : \mathrm{T}^2 \times T^*\mathrm{T}^{2n} \to R$，方程 *(2)* 至少有 $(2n+1)$ 个解 $Z : \mathrm{T}^2 \to T^*\mathrm{T}^{2n}$，前提是 h 是具有有限 C^2-范数的光滑函数。

定理2.5特别给出了非线性拉普拉斯方程 $-\Delta q = \nabla V(q)$ 的解的数量下界q : $\mathrm{T}^2 \to \mathrm{T}^{2n}$ ，其中 $V : Q \to \mathrm{R}$ 为光滑势。粗略来说，证明依赖于对哈密顿作用的有限能量 L^2梯度流线模空间 $\mathcal{M}$ 的研究；下文将这类流线称为 *Fueter/Floer*映射，它们渐近于零截面。证明的三个主要要素是:

- **先验 L^∞估计：** 方程 (2) 的解以及$\mathcal{M}$ 中的元素都处于 $T^*\mathrm{T}^{2n}$ 的有界区域内。
- **Fredholm理论：** $\mathcal{M}$ 对于 h的泛型选取是一个流形。
- **紧性：** $\mathcal{M}$ 相对紧。

本文旨在初步探讨将定理2.5推广至非平坦 K¨ahler 流形的余切丛。我们的主要结果是空间 $\mathcal{M}$ 的预紧性（见定理 3.3）。此外，在第 7 节中，我们将讨论所需的先验 L^∞-估计。

3 余切丛上的Hyperk¨ahler度量

从此处开始，我们固定一个实解析 K¨ähler 流形 $(Q,\ i,\ g)$，其 K¨ähler 形式为 $\omega = g(\cdot,\ ,\ i\cdot)$。按照例2.2，余切丛 T^*Q 配备了典范可积复结构 I 以及 CRPS 形式 ω_1和 $\omega_2 = -\omega_1(\cdot,\ I\cdot)$。下面的定理出自 Feix [Fei01]。

定理3.1 ([Fei01])**.** 设(Q, i, g) 为实解析*K¨ahler*流形。则存在 $\delta_0 > 0$ 以及开 δ_0-圆盘余切丛$\mathbb{D}^*_{\delta_0}Q \subseteq T^*Q$ 上与*CRPS*结构相容的*hyperk¨ahler*度量 G 。也就是说，在$\mathbb{D}^*_{\delta_0}Q$ 上存在可积复结构 J 与 K ，满足

- $\omega_1 = G(\cdot, J\cdot)\ and\ \omega_2 = G(\cdot, K\cdot),$
- $\omega_0 := G(\cdot, I\cdot)\ is\ closed,\ and$
- $IJ = K.$

此外， $G|_Q = g$。

注3.2. 当 $Q = \mathbb{T}^{2n}$ 且 Q为紧型对称空间时，*hyperk¨ahler*结构是整体定义的，参见例如 *[BG21]*。一般而言，*hyperk¨ahler*结构在 T^*Q上并非整体定义。例如，若 $Q = \mathbb{H}^2$ 为具有常曲率 -1的黎曼度量的双曲平面（或其某个紧商），则 $\delta_0 = 1$，且当趋近 $|p|_g = 1$时 G 会爆破。

关于由 G 诱导的 L^2-度量，哈密顿作用 $\mathcal{A}_H$ 的梯度为

$$\nabla^{L^2}\mathcal{A}_H(Z) = J(Z)\partial_x Z + K(Z)\partial_y Z - \nabla^G H(Z),$$

对于 $Z : \mathrm{T}^2 \to D^*_{\delta_0}Q$。因此，将负梯度流方程

$$\partial_s Z = -\nabla^{L^2}\mathcal{A}_H(Z), \quad Z : \mathbb{R} \to C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{D}^*_{\delta_0}Q),$$

视为关于 $Z : \mathrm{R} \times \mathrm{T}^2 \to \mathrm{D}^*_{\delta_0}Q$ 的偏微分方程，我们得到*Fueter/Floer* 方程

$$\partial_s Z + J(Z)\partial_x Z + K(Z)\partial_y Z = \nabla^G H(Z). \tag{9}$$

现在我们严格定义 Fueter/Floer映射的模空间 $\mathcal{M}$ 。固定 $\delta \in (0, \delta_0)$，并令 $M \subseteq C^\infty(\mathrm{T}^2, \mathrm{D}^*_\delta Q)$ 为零伦映射的子集。定义一族截断函数 $\beta_\tau :$ 实数集 $\to [0,1]$ ，使得

- $\beta_\tau(s) = 0$ for $s \le -1$ and $s \ge \tau + 1$ for all $\tau \ge 0$,
- $\beta_\tau|_{[0,\tau]} \equiv 1$ for $\tau \ge 1$,

- $0 \le \beta_\tau'(s) \le 2$ 当 $s \in (-1, 0)$ 时，以及 $0 \ge \beta_\tau'(s) \ge -2$ 当 $s \in (\tau, \tau+1)$ 时，
- $\lim_{\tau \to 0^+} \beta_\tau = 0$ 在 C^∞ 上的强拓扑中。

该族用于修改哈密顿量 H。为此，定义

$$H^\tau : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \times T^*Q \to \mathbb{R}, \quad H_s^\tau(t, q, p) := \frac{1}{2}|p|_g^2 + \beta_\tau(s) h(t, q, p),$$

以及修正后的作用泛函 $G_{\tau,s} = \mathcal{A}_{H_s^\tau}$，它在 $\mathcal{A}_{H^0}$ 与 $\mathcal{A}_H$ 之间插值。我们用 $Q \subseteq M$ 表示映入 T^*Q 的零截面的常值映射集合。遵循 [BF24]，我们引入对 (τ, Z) 的模空间 $\mathcal{M}$，其中 $\tau \ge 0$ 且 Z：实数集 $\to M$，并满足下列条件：

1. 映射 Z 是哈密顿量为 H^τ 的(9)的解。
2. Z 具有有限能量，即

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{T}^2} |\partial_s Z(s,t)|^2 \mathrm{d}\mathcal{V} \mathrm{d}s < +\infty.$$

3. 当 $s \to \pm\infty$ 时，$|Z(s, \cdot)|_g \to 0$。

定理2.5的证明中一个关键步骤是，$\mathcal{M}$ 在 C^∞_{loc} 拓扑下相对紧。事实上，这保证了 $\tau \to \infty$ 存在极限 Fueter/Floer 映射，它们将收敛到 $\mathcal{A}_H$ 的临界点。我们的主要定理证明了在一类非平坦目标流形上 $\mathcal{M}$ 的紧性。

定理 3.3。设 Q 是复双曲空间关于某个等距变换群作用的紧致商空间，并设 $\mathbb{D}^*_{\delta_0} Q \subseteq T^*Q$ 配备定理*3.1*中的超¨凯勒度量 G。那么，存在 $0 < \delta_* < \delta_0$ 和 $C_* > 0$，使得只要 $0 < \delta < \delta_*$ 且 h 满足以下条件，$\mathcal{M}$ 就在 C^∞_{loc} 拓扑下相对紧：

a) For all $(\tau, Z) \in \mathcal{M}$ *we have that* $\mathrm{im}(Z) \subseteq \mathbb{D}^*_\delta Q$, *and*

b) $\|h\|_{C^1} < C_*$.

在继续之前，我们先作几点说明：

- 条件 *a)* 可以解释为一种定量的 L^∞-估计：它要求所有 Fueter/Floer 轨线都一致地先验限制在圆盘丛 $\mathrm{D}^*_\delta Q$ 内。我们预计，只要 $\|h\|_{C^1}$ 足够小，这样的界就成立。在第 7 章中，我们证明了这一结论适用于平坦情形 $Q = \mathrm{T}^{2n}$。环面情形更简单，因为粗略地说，在 Bochner 不等式中，

$|p|_g^2$不会出现曲率项（实际上，相关几何是平坦的）；而对于非平坦靶流形，曲率项会出现，Fueter/Floer 方程只能提供对它们的 L^2-控制，而不能给出逐点界。第 7 章还对此作了更详细的说明。

- 定理 3.3 的证明远比 [BF24]中所考虑的平坦情形更为复杂，并且建立在关于 Fueter 截面的 Walpuski 紧性理论之上，见 [Wal17]。一个关键原因在于，在平坦情形中，$|\nabla Z|^2$ 的 Bochner 不等式变为次临界，从而可以应用 Heinz 技巧（对照 [Wal17] 与 [HNS09]中的注 3.5）。这一机制对非平坦靶流形不再可用。

- 具体而言，我们的论证分两步进行。首先我们证明 Walpuski 的泡化集 Γ 为空（见第5节）。随后，利用 Esfahani 的结果——即 $\Gamma = \emptyset$ 迫使剩余奇异集探测到 G的非平凡三全纯映射，见 [Esf23], ——我们断定奇异集同样为空（第6节）。

- 我们强调，由条件a)所给出的定量约束仅在排除奇异集时才需要。要证明 Γ为空，只需假设 $\mathcal{M}$ 中所有元素的像都落在 $\mathrm{D}^*_{\delta_0}Q$的某个固定（不必很小）的紧子集中（定性 L^∞-估计）。

- 我们预期定理 3.3 的结论对任意实解析 K¨ahler 流形 Q都成立，但目前我们聚焦于复双曲空间的紧致商空间，因为其几何结构足够刚性，能够使上述策略奏效。将研究范围限制在复双曲空间的紧致商空间（更一般地说，限制在对称或局部对称 Hermitian 空间）还有一项优势：Feix 超 K¨ahler 度量与 Biquard-Gauduchon 度量 [BG21], 一致，而后者基本上可以显式表示。特别是，相对于由底空间上的 Levi-Civita 联络确定的水平/垂直分解，该度量是分块对角的。这种结构上的简化使若干计算变得清晰许多。

- 超 K¨ahler 性质对于我们的证明至关重要。特别是，Walpuski 的论文 [Wal17]中的单调性引理用到了复结构的可积性：当 G不是超 K¨ahler 时，目前尚无针对由此产生的伪 Fueter 映射的紧性理论，因此 [Wal17] 中的单调性引理证明无法成立。

如上所述，$\mathrm{D}^*_{\delta_0}Q$上的 hyperk¨ahler 度量难以用于计算。 [Fei01] 给出的构造以及 [Kal97] 对同一度量的构造都非常复杂，而且尚不清楚 J, K 以及关于该度量的梯度是什么样子。余切丛上最容易处理的度量是*Sasaki* 度量，其定义如下。回顾

即 g 在 Q 上的 Levi-Civita 联络将 TT^*Q 分裂为垂直丛与水平丛。也就是说，$TT^*Q \cong H \oplus V$，其中 $H \cong TQ$ 且 $V \cong T^*Q$。T^*Q 上的 Sasaki 度量在此分裂下定义为 $\bar{g} = g \oplus g$，其中我们通过 g将$T^*Q \cong TQ$ 等同起来。遗憾的是，除非 Q 是平坦的，否则 Sasaki 度量并非 hyperk¨ahler。这一事实使其目前不适用于紧性的证明。当Q为局部对称厄米空间时，情况会大为改善。在此情形下，[BG21]证明，来自 [Fei01]的 hyperk¨ahler 度量与由 g诱导的水平丛和垂直丛分裂相容。此外，还给出了 $\mathrm{D}^*_{\delta_0}Q$ 上该度量的显式公式，我们将在下文回顾。这里，我们用$R_{\xi,\xi'}: T_qQ \to T_qQ$ 表示 Q的曲率，由$R_{\xi,\xi'} = \nabla_{[\xi,\xi']} - [\nabla_\xi, \nabla_{\xi'}]$给出。

定理 3.4 ([BG21])。 度量 G 在$(q,\xi) \in TQ \cong T^*Q$ 处由下式给出

$$G_{(q,\xi)}(X,Y) = g(A_\xi X^H, Y^H) + g(A_\xi^{-1} X^V, Y^V),$$

对于 $X = X^H \oplus X^V$、$Y = Y^H \oplus Y^V \in T_{(q,\xi)}TQ \cong H_q \oplus V_q$ 以及

$$A_\xi = \mathrm{Id} + iR_{i\phi(iR_{i\xi,\xi})\xi,\phi(iR_{i\xi,\xi})\xi}, \qquad \phi := \left(\frac{\sqrt{1+w}-1}{w}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

注 3.5。 $iR(i\xi,\xi)$ 给出 T_qQ上的一个自伴端态射。因此，T_qQ可分解为特征子空间 E_λ，其对应于 $iR_{i\xi,\xi}$的实特征值 λ。根据定义，算子 $\phi(iR_{i\xi,\xi})$ 在 E_λ 上作用为乘以 $\phi(\lambda)$。当 Q 是复双曲空间的商时，对于所有满足 $iR_{i\xi,\xi}$ 的特征值的模都小于 *1* 的点，度量 G 均有良好定义。此条件确定了 δ_0。

为了说明算子 A_ξ的行为，我们将在复双曲空间上计算它们。令 H^{2n} 表示维数为$2n$的复双曲空间。也就是说，$\mathrm{H}^{2n} = \{q \in \mathrm{R}^{2n} \mid |q| < 1\}$ 配备度量 $g = \frac{4}{(1-|q|^2)^2} g_{\mathrm{flat}}$。该度量的全纯截面曲率为常数，等于 -4。

命题 3.6. 对于 $Q = \mathbb{H}^{2n}$，定理 *3.4* 中的算子 A_ξ 表示为

$$A_\xi = \begin{cases} 1 - 4|\xi|^2\phi(-4|\xi|^2)^2 & on \ \ \mathrm{span}\{\xi, i\xi\} \\ 1 - 2|\xi|^2\phi(-4|\xi|^2)^2 & on \ \ \mathrm{span}\{\xi, i\xi\}^\perp. \end{cases}$$

证明. 由于全纯截面曲率为常数，我们可以按照 [ii] [Bel23] 计算曲率张量：

$$R_{X,Y}v = g(Y,v)X - g(X,v)Y + g(iY,v)iX \tag{10}$$
$$- g(iX,v)iY + 2g(X,iY)iv, \tag{11}$$

其中 $X, Y, v \in T_qQ$。我们对 $X = i\xi$和 $Y = \xi$应用方程 **10**，得到

$$R_{i\xi,\xi}v = 2g(\xi,v)i\xi - 2g(i\xi,v)\xi + 2|\xi|^2 iv.$$

[ii]请注意，这里的符号约定与 [Bel23] 不同。

由此可知，$iR_{i\xi,\xi}$ 在由ξ 和 $i\xi$张成的平面上相当于乘以 $-4|\xi|^2$ ，而在与该平面正交的方向上相当于乘以 $-2|\xi|^2$ 。因此，

$$\phi(iR_{i\xi,\xi})\xi = \phi(-4|\xi|^2)\xi.$$

由线性性可知，

$$iR_{i\phi(iR_{i\xi,\xi})\xi,\phi(iR_{i\xi,\xi})\xi} = \phi(-4|\xi|^2)^2 iR_{i\xi,\xi}.$$

证明可由补足 $A_\xi = \mathrm{Id} + iR_{i\phi(iR_{i\xi,\xi})\xi,\ \phi(iR_{i\xi,\ \xi})\xi}$ 得出。 □

4 Fueter 曲线的紧性

定理 3.3 的证明的主要内容是[Wal17]中的以下结果。我们用 $\mathcal{H}^d$ 表示 $\mathbf{R}\times\mathbf{T}^2$ 上的 d 维豪斯多夫测度，并对 $\mathcal{K}\subseteq\mathbf{R}\times\mathbf{T}^2$ 定义

$$\mathcal{E}_{\mathcal{K}}(Z) := \int_{\mathcal{K}} |\mathrm{d}Z|^2 \mathrm{d}\mathcal{V}\wedge \mathrm{d}s,$$

其中 $d\mathcal{V}$ 是 $\mathbf{T}^2$ 上的体积元。

定理 4.1 (定理 1.9，出自 [Wal17])。 设 $\mathcal{K}=[-\mu,\mu]\times\mathbb{T}^2\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{T}^2$。令 $Z^m:\mathcal{K}\to\mathbb{D}^*_\delta Q$ 为以下方程的一列解

$$\partial_s Z^m + J(Z^m)\partial_x Z^m + K(Z^m)\partial_y Z^m = \nabla^G H^{\tau_m}_s(Z^m), \tag{12}$$

对于 $\tau_m\geq 0$，使得 $\mathcal{E}_{\mathcal{K}}(Z^m)$ 一致有界。于是存在一个子序列（仍记为 Z^m）、一个闭子集 $S\subseteq\mathcal{K}$ ，满足$\mathcal{H}^1(S)<\infty$，以及一个映射 $Z:\mathcal{K}\backslash S\to\mathbb{D}^*_\delta Q$ ，具有以下性质：

- 映射 Z 满足

  $$\partial_s Z + J(Z)\partial_x Z + K(Z)\partial_y Z = \nabla^G H^{\tau}_s(Z),$$

  其中 $\tau=\lim\tau_m$ 存在，且 $H^\tau = H$ 若$\lim\tau_m=+\infty$。
- 序列 $Z^m|_{\mathcal{K}\backslash S}$ 在 C^∞_{loc}中收敛到 Z 。
- 集合 S 可写为 $S=\Gamma\cup\mathrm{sing}(Z)$，其中

  $$\mathrm{sing}(Z) := \left\{ z\in\mathcal{K} \middle| \limsup_{\rho\to 0^+}\frac{1}{\rho}\int_{B_\rho(z)}|\mathrm{d}Z|^2>0 \right\}$$

  并且 $\mathcal{H}^1(\mathrm{sing}(Z))=0$。此外，在 $\mathcal{H}^1$几乎处处的点 $z\in\Gamma$ 处，切空间 $T_z\Gamma$ 有定义；对于每个这样的点 z ，都存在一个非平凡的全纯球面 $\psi_z:S^2\to\mathbb{D}^*_\delta Q$ ，它相对于$\mathbb{D}^*_\delta Q$ 上的一个复结构 $\mathcal{I}$，具有 $\mathcal{I}=c_0I+c_1J+c_2K$ 的形式，其中 $c_0^2+c_1^2+c_2^2=1$。

- $\Gamma = \mathrm{supp}(\Theta \mathcal{H}^1 \lfloor S)$, *for* $\Theta : S \to [0, \infty)$ *upper-semicontinuous.*

从定理 4.1 的假设显然可知，我们需要证明 $\mathcal{M}$中的元素具有一致能量界。

引理 4.2. 设 Q 是复双曲空间被等距变换群作用所得的紧致商空间，$(\tau, Z) \in \mathcal{M}$ 且 $\mathcal{K} = [-\mu, \mu] \times \mathbb{T}^2$，其中 $\mu \geq 0$。那么

$$\mathcal{E}_{\mathcal{K}}(Z) < C(\mathcal{K})(\delta^2 + \|h\|_{C^1}^2 + \|h\|_{C^1}),$$

存在常数 $C(\mathcal{K})$，它仅依赖于 $\mathcal{K}$的体积。

证明。 首先，通过标准计算可得

$$E(Z) = -\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{T}^2} \beta_\tau'(s) h(t, q, p) \mathrm{d}\mathcal{V} \mathrm{d}s \leq 2||h||_{\mathrm{Hofer}} \leq 4\|h\|_{C^1}, \tag{13}$$

其中，不等式由关于 β_τ 的假设推出（关于第一个等式，参见 [BF24, 引理 10.1] 或 [AH16] ）。现在注意到 Z 满足

$$\partial_s Z + J\partial_I Z = \nabla^G H_s^\tau(Z),$$

其中 $\partial_I = \partial_x - I\partial_y$。我们得到

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{K}} |\partial_I Z|^2 \mathrm{d}\mathcal{V} \wedge \mathrm{d}s &= \int_{\mathcal{K}} \left(|\partial_x Z|^2 + |\partial_y Z|^2 - 2G(\partial_x Z, I\partial_y Z) \right) \mathrm{d}\mathcal{V} \wedge \mathrm{d}s \\
&= \int_{\mathcal{K}} \left(|\partial_x Z|^2 + |\partial_y Z|^2 \right) \mathrm{d}\mathcal{V} \wedge \mathrm{d}s - 2\int_{\mathcal{K}} \mathrm{d}s \wedge Z^* \omega_0.
\end{aligned}$$

现在估计第二行中最后一项

$$\int_{\mathcal{K}} \mathrm{d}s \wedge Z^* \omega_0 = \int_{\partial \mathcal{K}} s Z^* \omega_0 = \mu \left(\int_{\mathbb{T}^2} Z(\mu)^* \omega_0 - \int_{\mathbb{T}^2} Z(-\mu)^* \omega_0 \right) = 0,$$

由于 $Z(\mu)$和 $Z(-\mu)$都是零伦的，且 ω_0 是闭的。因此，

$$\int_{\mathcal{K}} |\partial_I Z|^2 \mathrm{d}\mathcal{V} \wedge \mathrm{d}s = \int_{\mathcal{K}} \left(|\partial_x Z|^2 + |\partial_y Z|^2 \right) \mathrm{d}\mathcal{V} \wedge \mathrm{d}s.$$

我们用它来计算

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{K}} |dZ|^2 \mathrm{d}\mathcal{V} \wedge \mathrm{d}s &= \int_{\mathcal{K}} \left(|\partial_s Z|^2 + |\partial_I Z|^2 \right) \mathrm{d}\mathcal{V} \wedge \mathrm{d}s \\
&= \int_{\mathcal{K}} \left(|\partial_s Z|^2 + |\nabla^G H_s^\tau(Z) - \partial_s Z|^2 \right) \mathrm{d}\mathcal{V} \wedge \mathrm{d}s \\
&\leq \int_{\mathcal{K}} \left(3|\partial_s Z|^2 + 2|\nabla^G H_s^\tau|^2 \right) \mathrm{d}\mathcal{V} \wedge \mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{14}$$

注意

$$\nabla^G H_s^\tau = \begin{pmatrix} A_p^{-1} & 0 \\ 0 & A_p \end{pmatrix} \bar{\nabla} H_s^\tau,$$

¯其中， ∇ 表示关于第 3 节中定义的 Sasaki 度量 $\bar{g}$ 的梯度。Sasaki 梯度为

$$\bar{\nabla} H_s^\tau = \bar{\nabla} h + \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix},$$

因此

$$\nabla^G H_s^\tau = \nabla^G h + \begin{pmatrix} 0 \\ A_p p \end{pmatrix}.$$

此外，由于在复双曲空间的商空间上， A_p 的特征值的模均小于 1（见命题 3.6），我们得到

$$\left| \begin{pmatrix} 0 \\ A_p p \end{pmatrix} \right|_G^2 = g(A_p^{-1} A_p p, A_p p) \leq |p|_g^2 < \delta^2.$$

将其代入方程（14）可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}} |dZ|^2 \, d\mathcal{V} \wedge ds &\leq c \int_{\mathcal{K}} \left(|\partial_s Z|^2 + |\nabla^G h|^2 + \delta^2 \right) d\mathcal{V} \wedge ds \\ &\leq C(\mathcal{K}) \left(E(Z) + ||h||_{C^1}^2 + \delta^2 \right). \end{aligned}$$

结合（13）即可得到所需结果。 □

5 泡化分析

设 $Z : \mathcal{K} \backslash S \to \mathrm{D}_\delta^* Q$ 是定理 4.1 中的极限映射， $S = \Gamma \cup \mathrm{sing}(Z)$。本节将分析起泡点集 Γ。

命题5.1. 在定理 *3.3* 的假设下，我们有 $\Gamma = \emptyset$。

证明。 首先，注意到 Q 是非球面的，因为它的万有覆盖是 H^{2n}。特别地，($\mathrm{D}_\delta^* Q, \omega_0 := G(\cdot, I\cdot)$) 是辛非球面的。假设 $z \in \Gamma$ 是一个存在 $T_z\Gamma$ 的点。那么根据定理 4.1，存在一个非平凡的$\mathcal{I}$-全纯球面 $\psi_z : S^2 \to \mathrm{D}_\delta^* Q$，其中 $\mathcal{I} = c_0 I + c_1 J + c_2 K$ 对某个$c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 = 1$成立。注意到 $\mathcal{I}$ 与 G 相容，因此 $\omega_{\mathcal{I}} = G(\cdot, \mathcal{I}\cdot)$ 是一个辛形式。于是

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_{S^2} |d\psi_z|^2 \mathrm{dvol}_{S^2} &= \int_{S^2} \psi_z^* \omega_{\mathcal{I}} \\ &= c_0 \int_{S^2} \psi_z^* \omega_0 + c_1 \int_{S^2} \psi_z^* \omega_1 + c_2 \int_{S^2} \psi_z^* \omega_2. \end{aligned}$$

在最后一个等式中， $\psi_z^*\omega_0$ 的积分由无球性而为零。后两个积分也为零，因为 ω_1 和 ω_2 都是恰当的。因此， ψ_z 是一个常值映射，这就导致矛盾。这意味着 Γ不存在切空间存在的点。由于定理 4.1 表明，对于 Γ 中 $\mathcal{H}^1$-几乎处处的点，切空间都必须存在，因此可得 $\mathcal{H}^1(\Gamma) = 0$。

回顾 $\Gamma = \text{supp}(\Theta\mathcal{H}^1\lfloor S)$。由于 Θ在紧集上是上半连续的，因此它有上界。此外， $\mathcal{H}^1(S) \leq \mathcal{H}^1(\text{sing}(Z)) + \mathcal{H}^1(\Gamma) = 0$。因此，对于任意开集 A

$$\Theta\mathcal{H}^1\lfloor S(A) = \int_{A\cap S} \Theta \mathrm{d}\mathcal{H}^1 \leq \max\Theta \int_S \mathrm{d}\mathcal{H}^1 = 0.$$

因此 $\Theta\mathcal{H}^1\lfloor S$ 是零测度，且其支撑 Γ 为空。 □

6 奇点

既然我们已经知道 Γ为空，剩下唯一要做的就是分析奇异集 $\text{sing}(Z)$。我们将需要来自 [Esf23]的如下定理。注意，在[Esf23] 中，方程 (12) 没有哈密顿项。然而，该证明同样逐字适用于我们的设定。

定理 6.1 ([Esf23])**.** 设 Z 为来自定理 *4.1* 的极限映射，并假设 $\Gamma = \emptyset$。则对每个 $z \in \text{sing}(Z)$ ，存在一个非平凡的可收缩调和[iii] 球面 $\phi_z : S^2 \to \mathbb{D}_\delta^* Q$。

了解这些调和球面是如何产生的会很有帮助。令 $z \in \text{sing}(Z)$，并令r_i 为一个趋于 0 的正数序列。思路是将映射 Z 在点 z附近放大。定义

$$Z_{r_i}(y) = Z(\exp_z(r_i y)),$$

它是定义在 $T_z(\mathbb{R}\times\mathbb{T}^2)$ 的一个开子集上的良定义映射。在 [Esf23], 中证明了，这些映射的一个子序列弱收敛到映射 $\Phi_z : T_z(\mathbb{R}\times\mathbb{T}^2)\setminus\{0\} \to \mathbb{D}_\delta^* Q$，且满足 $\partial_r\Phi_z = 0$。这里， ∂_r 表示关于径向的导数。现在，将 ϕ_z 定义为 Φ_z在单位球面 $S^2 \subseteq T_z(\mathbb{R}\times\mathbb{T}^2)$上的限制。

我们还需要另一项要素：非恒定调和球面能量的正下界。对于 $\delta < \delta_0$，定义 $\epsilon(\delta)$ 为满足以下条件的所有$\epsilon > 0$ 的下确界：存在一个能量为 ϵ 且其像包含于 $\mathbb{D}_\delta^* Q$ 中的非恒定调和球面。这里，调和球面 ϕ的能量为

$$\mathbb{E}(\phi) := \frac{1}{2}\int_{S^2} |\nabla\phi|_G^2.$$

[iii] [Esf23] 中的结果实际上断言， ϕ_z 是三全纯的，因此尤其是调和的，因为 G 是超凯勒的。就我们的目的而言，我们不需要这一额外信息。

根据 [SU81 定理 3.3], ，我们有 $\epsilon(\delta) \in (0, +\infty]$ 对每个 $\delta < \delta_0$ 均成立（约定若不存在这样的球面，则 $\epsilon(\delta) = +\infty$ ）。

引理 6.2。 函数 $\delta \mapsto \epsilon(\delta)$ 是递减的且右连续。

证明。 单调性是显然的：若 $\delta > \delta'$，则 $\mathrm{D}^*_{\delta'}Q \subset \mathrm{D}^*_{\delta}Q$，因此 $\epsilon(\delta) \leq \epsilon(\delta')$。下面只需证明右连续性。由于 ϵ是递减的，只需证明右下半连续性。反设 ϵ在某个 $\delta_* < \delta_0$处不具有右下半连续性。那么存在 $\alpha > 0$ 以及一个序列 $\delta_i \downarrow \delta_*$ ，使得

$$\epsilon(\delta_i) \leq \epsilon(\delta_*) - \alpha \qquad \text{for all } i.$$

根据 $\epsilon(\delta_i)$的定义，对每个 i ，存在一个非恒定调和球面$\phi_i : S^2 \to \mathrm{D}^*_{\delta_0}Q$ ，其像集 $\mathrm{im}(\phi_i) \subset \mathrm{D}^*_{\delta_i}Q$ ，并且

$$\mathbb{E}(\phi_i) \leq \epsilon(\delta_*) - \alpha.$$

由于对所有 i都有 $\delta_i \leq \delta_1$ ，我们也有 $\mathrm{im}(\phi_i) \subset \overline{\mathrm{D}^*_{\delta_1}Q}$，从而 $\mathrm{E}(\phi_i) \geq \epsilon(\delta_1) > 0$（该不等式是有意义的，因为这些映射的存在 ϕ_i 迫使$\epsilon(\delta_1) < +\infty$）。由调和映射的气泡收敛 [Par96], ，取一个子序列后，存在一个非恒定调和球面 ϕ_* : $S^2 \to \mathrm{D}^*_{\delta_0}Q$，使得 $\mathrm{im}(\phi_*) \subset \mathrm{D}^*_{\delta_*}Q$ ，并且

$$0 < \epsilon(\delta_1) \leq \mathbb{E}(\phi_*) \leq \liminf_{i\to\infty} \mathbb{E}(\phi_i) \leq \epsilon(\delta_*) - \alpha < \epsilon(\delta_*).$$

这与 $\epsilon(\delta_*)$的定义矛盾。因此， ϵ 是右下半连续的，因而右连续。

□

根据引理 6.2，我们有

$$\epsilon(0) := \lim_{\delta\downarrow 0} \epsilon(\delta) \in (0, +\infty].$$

在定理 3.3 的设定下，我们有 $\epsilon(0) = +\infty$：事实上，根据假设， Q不含非恒定调和球面，而对于 G ，若其像位于零截面内，则任何调和球面都是 Q上的 K¨ahler 度量 g 的调和球面。然而，我们要强调的是，即使 Q不含非恒定调和球面，也不 能自动排除 Feix 度量 G 在 $\mathrm{D}^*_{\delta_0}Q$内存在非恒定调和球面，除非处于平坦情形 $Q = \mathrm{T}^{2n}$。原因在于， G是 Ricci平坦的（如同任何超K¨ahler度量），因此其截面曲率没有确定的符号。下一个引理要说明的是，只要 h 足够小，且 Z 的像包含在足够小的 $\mathrm{D}^*_{\delta}Q$内，奇异集就无法检测到非恒定调和球面：爆破分析所产生的任何调和球面，其能量都小到低于 $\epsilon(\delta)$，而根据定义这是不可能的。

对于 $s \in \mathbb{R}$，令

$$\mathcal{K}_s = [s - \mu_0, s + \mu_0] \times \mathbb{T}^2,$$

其中，$\mu_0 = r_0 + 1$ 和 $r_0 = \pi$ 是 $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$ 的单射半径。令 $C_1 = C(\mathcal{K}_s)$ 为引理 4.2 中的常数；注意，C_1 与 s无关。下文中，$\alpha > 0$ 取充分小，使得对于某个 $\delta > 0$，下面的方程 (15) 和 (16) 得以满足。

命题 6.3。在定理 *3.3* 的假设下，选取 $\delta > 0$ 使得：

$$\delta < \min\left\{\delta_0, \frac{\alpha}{2C_1}\right\}, \tag{15}$$

$$\epsilon(\delta) > \alpha. \tag{16}$$

进一步假设：

a) $\mathcal{M}$ 中的所有元素的像都包含于 $\mathbb{D}^*_\delta Q$ 中，并且

b) $\|h\|^2_{C^1} + \|h\|_{C^1} < \dfrac{\alpha}{2C_1} =: C_*$.

令 Z 为定理 *4.1* 中的极限映射。则 $\mathrm{sing}(Z) = \emptyset$。

证明。反设 $z = (s, x, y) \in \mathrm{sing}(Z)$。根据定理 6.1，存在一个非恒定调和球面 $\phi_z : S^2 \to \mathbb{D}^*_\delta Q$，其在 z 处被检测到。此外，如 [Esf23]，中所示，有

$$\frac{1}{2}\int_{B_1(0)} |\nabla Z_{r_i}|^2 \leq \frac{1}{2}\int_{B_{r_0}(z)} |\nabla Z|^2.$$

右端由 $\mathcal{E}_{\mathcal{K}_s}(Z)$ 有界。取放大极限 Φ_z，得到

$$\frac{1}{2}\int_{B_1(0)} |\nabla \Phi_z|^2 \leq \mathcal{E}_{\mathcal{K}_s}(Z).$$

由于 $\partial_r \Phi_z = 0$，映射 Φ_z 沿径向为常数。记 Φ_z 在半径为 ρ 的球面 ρS^2 上的限制为 ϕ^ρ_z。则 Φ_z 在 $B_1(0)$ 上的能量可写为

$$\int_{B_1(0)} |\nabla \Phi_z|^2 = \int_{\rho=0}^1 \int_{\rho S^2} |\nabla \phi^\rho_z|^2 = \int_{S^2} |\nabla \phi_z|^2,$$

从而

$$\mathbb{E}(\phi_z) = \frac{1}{2}\int_{S^2} |\nabla \phi_z|^2 = \frac{1}{2}\int_{B_1(0)} |\nabla \Phi_z|^2 \leq \mathcal{E}_{\mathcal{K}_s}(Z).$$

最后，由引理 4.2 和这些假设可知

$$\mathbb{E}(\phi_z) \leq C_1\left(\delta^2 + \|h\|_{C^1} + \|h\|^2_{C^1}\right) < \alpha < \epsilon(\delta),$$

其中，最后一个不等式用到了 (16)。这与 $\epsilon(\delta)$的定义矛盾，因为ϕ_z 不是常数，且其像包含于 $\mathrm{D}^*_\delta Q$ 中。因此，$\mathrm{sing}(Z) = \emptyset$。 □

注记 6.4. 命题 *6.3* 只需稍作修改，在 $\epsilon(0) < +\infty$ 的情形下仍然成立，例如当 Q 是一个紧对称空间时。在这种情况下，只需选择 $\alpha < \epsilon(0)$，然后按上述方法继续即可。显然，要得到 $\Gamma = \emptyset$，还需要附加条件（例如 h 足够小）。我们在此不再探讨这一方向，将其留待未来研究。

定理 *3.3* 的证明. 取 $0 < \delta_* < \delta_0$，使得对所有 $\delta < \delta_*$，方程 (15) 和 (16) 均成立，并按照命题 6.3 选择 C_*。取一个序列$\{(\tau_m, Z^m)\}_{m\in\mathbb{N}}$，其中 $\mathcal{M}$。我们要证明在所有 $\mathcal{K} = [-\mu, \mu] \times \mathrm{T}^2$ 上，C^∞ 中存在一个子序列收敛。由引理 4.2 可知，$\mathcal{E}_\mathcal{K}(Z^m)$ 有一个关于m一致的界。因此，根据定理 4.1，存在一个定义在 $\mathcal{K}\backslash S$上的极限映射 Z。由命题 5.1 和 6.3 可知，$S = \Gamma \cup \mathrm{sing}(Z) = \emptyset$。□

注记 6.5。进一步理解复双曲空间的紧商上的 *Biquard–Gauduchon* 度量 G 所对应的函数 $\delta \mapsto \epsilon(\delta)$，可能会显著改进引理*6.3*，进而改进定理 *3.3*。在当前论证中，需要 δ 足够小，以确保奇异集检测到的任意调和球面的能量严格小于 $\epsilon(\delta)$。如果能够对 $\epsilon(\delta)$ 获得更精确的下界，则可以放宽对 δ 的限制。例如，如果能够证明

$$\epsilon(\delta) \geq C_1\delta_0 \quad for\ all\ \delta \leq \delta_0/2,$$

那么就可以选取 $\alpha = C_1\delta_0$，并简单地施加 $\delta_* = \delta_0/2$。这样便无需在紧性证明中使用定量的 L^∞估计。不过，我们强调，由于度量 G 在 $|p|_g \to \delta_0$时退化，因此可以设想，当 $\delta \uparrow \delta_0$时，$\epsilon(\delta) \to 0$。对 *Biquard–Gauduchon* 度量的 $\epsilon(\delta)$ 的行为进行精确分析，本身就是一个有趣的几何问题，并将成为未来研究的主题。

7 关于先验 L^∞估计的注记

将定理2.5推广到非平坦靶流形的下一步，是建立应用定理 3.3所需的先验 L^∞ 界。正如定理 3.3的陈述之后已经解释过的，我们目前实际需要的是一个定量的 L^∞估计：也就是说，我们希望确保，只要选择的扰动 h 足够小（按适当的范数衡量），每条 $\mathcal{M}$中的Fueter/Floer轨迹都被限制在 T^*Q零截面的一个足够小的邻域内。本章将首先在平坦环面的模型情形 $Q = \mathrm{T}^{2n}$ 中证明这样的局限结果——据我们所知，文献中此前尚无此类结果。

定理 7.1。 设 $Q=\mathbb{T}^{2n}$ 为一个平坦环面，且(G,I,J,K) 为 $T^*\mathbb{T}^{2n}$上的标准超K¨ *ähler*结构。令 H_s:实数集 $\times\mathbb{T}^2\times T^*\mathbb{T}^{2n}\to$实数集 定义如下:

$$H_s(t,q,p)=\frac{1}{2}|p|^2+\beta(s)\,h(t,q,p),$$

其中 $\|h\|_{C^2}<+\infty$ $\delta\in\ 0\ +\infty$ $\nu=\nu\big(\delta\ \|h\|_{C^2}\big)>$。
0 $Z\ \times\ ^2\to T^*\ ^{2n}$
那么，对于每个(,)，都存在，使得若 $\|h\|_{C^1}<\nu$，则每个:$\mathbb{R}\,\mathbb{T}\mathbb{T}$解

$$\partial_s Z+J\partial_x Z+K\partial_y Z=\nabla^G H_s(Z) \tag{17}$$

满足 $|Z(s,\cdot)|\to 0$ 当 $s\to\pm\infty$ 时，其像包含于 $\mathbb{D}_\delta^*\mathbb{T}^{2n}$。

证明。 我们将定理 7.1 的证明分为四步。令 Z: 实数集 $\times\mathrm{T}^2\to T^*\mathrm{T}^{2n}$ 如定理陈述所述，并设

$$\Phi:\mathbb{R}\times\mathbb{T}^2\to\mathbb{R},\qquad \Phi(s,x,y):=\frac{1}{2}\,|Z(s,x,y)|^2. \tag{18}$$

在整个证明过程中， $C>0$ 表示一个常数，其值可能随行而变化。

步骤 1（Φ 是一个椭圆型偏微分方程的次解）。存在一个常数$\alpha=\alpha(\|h\|_{C^2})\ >0$ 使得 Φ 满足

$$-\Delta\Phi+\partial_s\Phi-\alpha\Phi\le\alpha, \tag{19}$$

其中 $\Delta:=\partial_s^2+\partial_x^2+\partial_y^2$。

按照 [BF24],，在 $T^*\mathrm{T}^{2n}$ 上的坐标（q， p）中，Fueter/Floer 方程（17）可写为

$$\begin{cases}\partial_s q=\partial_q h+2\bar{\partial}\,p,\\ \partial_s p=p+\partial_p h-2\partial\,q,\end{cases} \tag{20}$$

¯其中 ∂ 和 ∂ 分别是通常的 Cauchy–Riemann 算子和反 Cauchy–Riemann 算子。为简化记号，我们用 h（s， $\cdot$）代替 β（s） h（$\cdot$）。利用（20）直接计算可得

$$\Delta p=\partial_s p+\partial_s(\partial_p h)-2\partial(\partial_q h). \tag{21}$$

利用 $\Phi=\frac{1}{2}|p|^2$ （因为在平坦模型中 $|Z|^2=|p|^2$ ），我们得到

$$\Delta\Phi=|\nabla p|^2+\partial_s\Phi+\underbrace{\langle p,\partial_s(\partial_p h)\rangle}_{=:(*)}-\underbrace{2\langle p,\partial(\partial_q h)\rangle}_{=:(**)}. \tag{22}$$

我们估计 (2$\|h\|_{C^2}$ $|\bar{\partial}^* p|^2 \le \frac{1}{2}\,|\partial_x p|^2 + |\partial_y p|^2$ $\nu =$)。利用 (20)、带有 的不等式 $ab \le \frac{-1}{2}(\nu a^2 + \nu^{-1} b^2)$，以及 ( )，经过一些计算后可得

$$\begin{aligned}
|(*)| &\le |\langle p, \partial_{sp}^2 h\rangle| + |\langle p, \partial_{qp}^2 h \cdot \partial_s q\rangle| + |\langle p, \partial_{pp}^2 h \cdot \partial_s p\rangle| \\
&\le \|h\|_{C^2}\Big(|p| + |p|\,|\partial_s q| + |p|\,|\partial_s p|\Big) \\
&\le \|h\|_{C^2}\Big(|p| + |p|\,|\partial_q h| + 2|p|\,|\bar{\partial} p| + |p|\,|\partial_s p|\Big) \\
&\le \big(\|h\|_{C^2} + \|h\|_{C^2}^2\big)\sqrt{2\Phi} + 4\|h\|_{C^2}^2\,\Phi + \frac{1}{2}\big(|\partial_x p|^2 + |\partial_y p|^2\big) + \frac{1}{4}|\partial_s p|^2.
\end{aligned}$$

类似的计算给出估计

$$|(**)| \le \big(2\|h\|_{C^2} + \|h\|_{C^2}^2\big)\sqrt{2\Phi} + 2\big(\|h\|_{C^2} + 2\|h\|_{C^2}^2\big)\Phi + \frac{1}{2}\big(|\partial_s p|^2 + |\partial_x p|^2 + |\partial_y p|^2\big).$$

将这些估计代入（22），并使用初等不等式 $\sqrt{\Phi} \le 1 + \Phi$，整理后得到 —

$$\Delta\Phi \ge \partial_s \Phi - 16\|h\|_{C^2}\big(1 + \|h\|_{C^2}\big)(1 + \Phi).$$

因此，（19）成立，其中

$$\alpha(\|h\|_{C^2}) := 16\|h\|_{C^2}\big(1 + \|h\|_{C^2}\big).$$

步骤 2（关于 Φ 的平均值不等式）。存在 $R_0 = R_0(\alpha) \le 1$ 和$C_{\mathrm{mv}} > 0$，使得对于任意 $\xi_0 \in \mathbf{R} \times \mathbf{T}^2$ 以及任意 $r \in (0, R_0]$,

$$\|\Phi\|_{L^\infty(B_r(\xi_0))} \le C_{\mathrm{mv}}\Big(⨍_{B_{2r}(\xi_0)} \Phi + \alpha r^2\Big). \tag{23}$$

固定 $\xi_0 \in \mathbf{R} \times \mathbf{T}^2$ 和 $r \in (0, R_0]$，其中 $R_0 \le 1$ 将在下文选取。考虑重标度函数

$$\psi : B_2(0) \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad \psi(z) := \Phi(\xi_0 + rz),$$

其中，由于 $r \le 1$，我们将 $B_2(\xi_0) \subset \mathbf{R} \times \mathbf{T}^2$ 与 $\mathbf{R}^3$ 中的一个球等同。于是 ψ 满足

$$-\Delta\psi + r\,\partial_s \psi - \alpha r^2 \psi \le \alpha r^2.$$

记作 $z = (\sigma,\ x,\ y)$，并令

$$\eta : B_2(0) \to \mathbb{R}, \qquad \eta(z) := e^{-\frac{r}{2}\sigma}\psi(z),$$

我们注意到 $|\eta| \le e|\psi| \le e^2|\eta|$ 在 $B_2(0)$ 上。因此只需证明

$$\|\eta\|_{L^\infty(B_1(0))} \le C\Big(⨍_{B_2(0)} \eta + \alpha r^2\Big). \tag{24}$$

简单计算可知， η 满足

$$(-\Delta+\mu)\eta \le \alpha r^2 e^{-\frac{r}{2}\sigma}, \qquad \text{where} \qquad \mu := \frac{r^2}{4} - \alpha r^2.$$

令 τ :$B_2(0) \to$ 实数集 为方程的（唯一）解[iv]

$$\begin{cases} (-\Delta+\mu)\tau &= e^{-\frac{r}{2}\sigma} & \text{in } B_2(0), \\ \tau &= 0 & \text{on } \partial B_2(0), \end{cases}$$

并令 $W := \eta - \alpha r^2 \tau$。于是 $(-\Delta+\mu)W \le 0$，因此在分布的意义下，$(-\Delta+\mu)W^+ \le 0$ 也成立，其中 $W^+ := \max\{W, 0\}$。由于 $0 \le \eta = W + \alpha r^2\tau \le W^+ + \alpha r^2 \tau$，只需证明以下结论，估计式 (24) 即得：

$$\begin{aligned} &i) \quad 0 \le \tau \le C \ \text{ on } B_2(0), \\ &ii) \quad \|W^+\|_{L^\infty(B_1(0))} \le C \fint_{B_2(0)} W^+. \end{aligned}$$

事实上，$i)$蕴含 $W^+ \le \eta$和 $\eta \le W^+ + C\alpha r^2$，而$ii)$给出

$$\|\eta\|_{L^\infty(B_1(0))} \le \|W^+\|_{L^\infty(B_1(0))} + C\alpha r^2 \le C\Big(\fint_{B_2(0)} \eta + \alpha r^2\Big).$$

我们对 $\alpha > \frac{1}{4}$ 证明$i)$ 和$ii)$；$-\alpha \le \frac{1}{4}$ 的情形更简单，因为此时 $\mu \ge 0$，且这两个结论均可通过直接比较以及次调和函数的平均值性质得到。令

$$R_0 = R_0(\alpha) := \min\Big\{1, \frac{\pi}{\sqrt{2(4\alpha-1)}}\Big\},$$

使得对所有 $r \in (0, R_0]$,

$$0 \le -\mu = \alpha r^2 - \frac{r^2}{4} \le \alpha R_0^2 - \frac{R_0^2}{4} \le \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2}\lambda_1,$$

其中 λ_1 是 $-\Delta$ 在 $B_2(0)$ 上的 $-\Delta + \mu \ge 0$ 的第一个狄利克雷特征值。用 $\tau^- := \max(-\tau, 0) \in H_0^1(B_2(0))$ 测试 $(-\Delta+\mu)\tau \le 0$，得到

$$\int_{B_2(0)} |\nabla \tau^-|^2 + \mu \int_{B_2(0)} |\tau^-|^2 \le 0.$$

由Poincaré不等式，$\lambda_1 \int |\tau^-|^2 \le \int |\nabla \tau^-|^2$，因此

$$(\lambda_1 + \mu) \int_{B_2(0)} |\tau^-|^2 \le 0.$$

[iv]该狄利克雷问题的存在性和唯一性是标准结果；例如参见 [Eva97]。

由于 $\lambda_1+\mu \geq \frac{1}{2}\lambda_1 > 0$，我们得出 $\tau^- \equiv 0$，即 $\tau \geq 0$。接下来，令 κ 为（唯一的）解[v]，满足

$$\begin{cases} (-\Delta+\mu)\kappa &= 1 \qquad \text{in } B_2(0), \\ \kappa &= 0 \qquad \text{on } \partial B_2(0). \end{cases}$$

直接计算可得 $\kappa(z) = f(\rho)$，其中 $\rho = |z|$ 且

$$f(\rho) = -\frac{1}{\mu}\Big(\frac{2\sin(\sqrt{-\mu}\,\rho)}{\rho\sin(2\sqrt{-\mu})} - 1\Big).$$

特别地，$0 \leq \kappa \leq \kappa(0)$ 在 $B_2(0)$ 上成立，并利用 $\kappa(0)$ 关于 $\mu \in \big[-\frac{\pi^2}{8}, 0\big)$ 单调递减这一点，可得一致有界性

$$0 \leq \kappa(z) \leq \kappa(0) \leq \frac{4\sqrt{2}}{\pi\sin(\frac{\pi}{\sqrt{2}})} - \frac{8}{\pi^2} \sim 1.45.$$

由于 $(-\Delta+\mu)\tau = e^{-\frac{r}{2}\sigma} \leq e$ 在 $B_2(0)$ 上成立，因此我们有

$$(-\Delta+\mu)(e\kappa-\tau) \geq e-e = 0, \qquad \text{and} \qquad (e\kappa-\tau)|_{\partial B_2(0)} = 0,$$

因此，先前的论证蕴含 $e\kappa - \tau \geq 0$。于是

$$0 \leq \tau(z) \leq e\,\kappa(z) \leq e\,\|\kappa\|_{L^\infty(B_2(0))} \sim 1.45\,e,$$

这就证明了*i)*。对于*ii)*，令 φ_1 为 $-\Delta$ 在$B_2(0)$上的第一个狄利克雷特征函数，即径向函数

$$\varphi_1(\rho) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}\rho)}{\rho}.$$

它在 $[0,2]$, 上严格递减，特别是在 $[0,\frac{3}{2}]$ 上，我们有 –

$$\frac{\pi}{2} = \varphi_1(0) \;\geq\; \varphi_1(\rho) \;\geq\; \varphi_1\Big(\frac{3}{2}\Big) = \frac{\sqrt{2}}{3}. \tag{25}$$

由于 $(-\Delta+\mu)W^+ \leq 0$ 在 $B_2(0)$ 上，因此这尤其在 $B_{3/2}(0)$ 上成立。定义

$$V : B_{3/2}(0) \to \mathbb{R}, \qquad V := \frac{W^+}{\varphi_1}.$$

由 (25)，只需证明

$$\|V\|_{L^\infty(B_1(0))} \leq C \fint_{B_{3/2}(0)} V. \tag{26}$$

[v]再次参见 [Eva97]。

注记 7.2. 我们在 $B_{3/2}(0) \subset B_2(0)$ 上工作，因为 φ_1 在 $\partial B_2(0)$上消失；因此，下面引入的算子在 $\partial B_2(0)$处并非一致椭圆。证明了(26) 后，即可推出

$$\|W^+\|_{L^\infty(B_1(0))} \le C \fint_{B_{3/2}(0)} W^+,$$

而后者通过对平均值作简单比较即可推出 *ii)*。

在 $B_{3/2}$(0) 上作形式计算，

$$\begin{aligned}(-\Delta+\mu)W^+ &= (-\Delta+\mu)(\varphi_1 V)\\ &= -\varphi_1\Delta V - 2\nabla\varphi_1\cdot\nabla V - V\Delta\varphi_1 + \mu\varphi_1 V\\ &= -\varphi_1\Delta V - 2\nabla\varphi_1\cdot\nabla V + (\lambda_1+\mu)\varphi_1 V,\end{aligned}$$

因此乘以 $-\varphi_1$ 后得到

$$\varphi_1^2\Delta V + 2\varphi_1\nabla\varphi_1\cdot\nabla V - (\lambda_1+\mu)\varphi_1^2 V = -\varphi_1(-\Delta+\mu)W^+ \ge 0.$$

因此， V是算子 L 的次解，该算子在 [GT01], 中具有形式 (9.1)，其零阶项为 $c = -(\lambda_1+\mu)\varphi_1^2 \le 0$。在 [GT01] 中应用定理 9.20（并按标准方式扩展至 $B_R \subset B_{\theta R}$，此处为 $\theta = \frac{3}{2}$ ），可得 (26)，进而得到 $\bar{ii})$。步骤 2 至此完成。

步骤 3（关于 Φ 的 L^∞ 界，依赖于 α 和 $\|h\|_{C^1}$）。存在一个常数 $C_\infty > 0$ 使得

$$\|\Phi\|_{L^\infty} \le C_\infty\, \alpha^{\frac{3}{5}}\, \|h\|_{C^1}^{\frac{2}{5}}. \tag{27}$$

不失一般性，我们可以假设

$$\|h\|_{C^1} \le \min\Big\{1,\ \frac{2\alpha}{3}R_0^5\Big\},$$

其中 $R_0 = R_0(\alpha) \le 1$ 与步骤 2 中的定义相同。为了推导（27），只需证明存在 $C>0$ ，使得

$$\int_{B_{2r}(\xi_0)} \Phi \le C\,\|h\|_{C^1} \qquad \text{for all } \xi_0 \in \mathbb{R}\times\mathbb{T}^2,\ r\in(0,R_0]. \tag{28}$$

事实上，结合（28）与（23）可得

$$\|\Phi\|_{L^\infty(B_r(\xi_0))} \le C\Big(\frac{\|h\|_{C^1}}{r^3} + \alpha r^2\Big).$$

在 r 中优化 r_* 得到$= \big(\frac{3\|h\|_{C^1}}{2\alpha}\big)^{1/5} \le R_0$ 和

$$\|\Phi\|_{L^\infty(B_{r_*}(\xi_0))} \le C\Big(\big(\tfrac{2}{3}\big)^{\frac{3}{5}} + \big(\tfrac{3}{2}\big)^{\frac{2}{5}}\Big)\alpha^{\frac{3}{5}}\|h\|_{C^1}^{\frac{2}{5}}.$$

用半径为 r_* 的球覆盖实数集 $\times \mathbb{T}^2$，即可得到（27）。接下来证明（28）。对于每个 $s \in \mathbb{R}$，定义平均值

$$\bar{p}(s) := \int_{\mathbb{T}^2} p(s,x,y)\,dx\,dy.$$

将 (20) 中的第二个方程在 $\mathbb{T}^2$ 上积分，我们得到

$$\bar{p}'(s) = \bar{p}(s) + \underbrace{\int_{\mathbb{T}^2} \partial_p h\big(s,\cdot,q(s,\cdot),p(s,\cdot)\big)}_{=:a(s)} - 2\underbrace{\int_{\mathbb{T}^2} \partial q}_{=0}.$$

显然，对所有 s，$|a(s)| \le \|h\|_{C^1}$。渐近条件 $|Z(s,\cdot)| \to 0$ 当 $s \to \pm\infty$ 时蕴含 $|\bar{p}(s)| \to 0$ 当 $s \to \pm\infty$ 时成立，因此

$$\bar{p}(s) = -\int_s^{+\infty} e^{s-t} a(t)\,dt, \qquad \text{so that} \qquad |\bar{p}(s)| \le \|h\|_{C^1} \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{29}$$

现在令 $p_0(s,\cdot) := p(s,\cdot) - \bar{p}(s)$。由 $\mathbb{T}^2$, 上的庞加莱不等式

$$\|p_0(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} \le 4\|\bar{\partial} p_0(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} = 4\|\bar{\partial} p(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}.$$

在 $[s_0-2r, s_0+2r]$ 上积分并再次利用 (20)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{s_0-2r}^{s_0+2r} \|p_0(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\,ds \\
&\qquad \le 4\int_{s_0-2r}^{s_0+2r} \|\bar{\partial} p(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\,ds \\
&\qquad \le 2\int_{s_0-2r}^{s_0+2r} \|\partial_q h(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\,ds + 2\int_{s_0-2r}^{s_0+2r} \|\partial_s q(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\,ds \qquad (30)\\
&\qquad \le 8r\,\|h\|^2_{C^1} + 2\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}^2} |\partial_s Z|^2.
\end{aligned}$$

结合 (29) 和 (30) 得到

$$\begin{aligned}
\int_{B_{2r}(\xi_0)} \Phi &\le \frac{1}{2}\int_{s_0-2r}^{s_0+2r} \|p(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\,ds \\
&\le \int_{s_0-2r}^{s_0+2r} |\bar{p}(s)|^2\,ds + \int_{s_0-2r}^{s_0+2r} \|p_0(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\,ds \\
&\le 4r\,\|h\|^2_{C^1} + 8r\,\|h\|^2_{C^1} + 2\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}^2} |\partial_s Z|^2 \\
&= 12r\,\|h\|^2_{C^1} + 4\|h\|_{\text{Hofer}} \\
&\le 12r\,\|h\|^2_{C^1} + 8\|h\|_{C^1} \le 20\,\|h\|_{C^1},
\end{aligned}$$

其中我们用到：对于形如 $h(s,\cdot) = \beta(s)h(\cdot)$ 的哈密顿量，有$\int_{\text{实数集}\times\mathbb{T}^2} |\partial_s Z|^2 \le 2\|h\|_{\text{Hofer}}$（例如参见 [AH16]），$\|h\|_{\text{Hofer}} \le 2\|h\|_{C^1}$，以及 $r \le R_0 \le 1$结合 $\|h\|_{C^1} \le 1$。这证明了 (28)，从而完成步骤 3。

步骤 4（结论）。由步骤 3 可知，只需施加

$$\|h\|_{C^1} < \min\Big\{1,\ \frac{2\alpha}{3}R_0^5,\ \Big(\frac{\delta^2}{2C_\infty}\Big)^{\frac{5}{2}}\alpha^{-\frac{3}{2}}\Big\} =: \nu(\delta, \|h\|_{C^2}),$$

这确保了 $\|\Phi\|_{L^\infty} \le \frac{\delta^2}{2}$，即 $|Z| \le \delta$ 处处成立。 □

非平坦情形下的总结性评论。

现在我们转而讨论 $(Q,\ g,\ i)$ 是复双曲空间的一个紧致商空间的情形。令 G 表示 $\mathrm{D}^*_{\delta_0}Q$ 上的 Biquard–Gauduchon 超凯勒度量，并令 $(I,\ J,\ K)$ 表示相应的复结构，其中 I 由 i自然诱导。与上文一样，令 H_s 定义为

$$H_s(t,q,p) = \frac{1}{2}|p|_g^2 + \beta(s)h(t,q,p),$$

其中 h 关于 G 具有有限的 C^2-范数（例如，h在 $\mathrm{D}^*_{\delta_0}Q$ 中可能具有紧支撑）。我们考虑 Fueter/Floer 方程

$$\partial_s Z + J(Z)\partial_x Z + K(Z)\partial_y Z = \nabla^G H_s(Z). \tag{31}$$

我们需要的是以下类型的陈述：

1. **定性先验估计：**存在一个函数 $\delta_1 : [0,+\infty) \to [0,\delta_0)$，使得

$$\mathrm{im}(Z) \subset \mathbb{D}^*_{\delta_1(\|h\|_{C^2})}Q$$

for every solution Z of (31) satisfying $|Z(s,\cdot)|_g \to 0$ as $s \to \pm\infty$.

2. **定量先验估计：**对于每个 $\delta \in (0,\delta_1)$，存在$\nu = \nu(\delta,\delta_1) > 0$，使得若 $\|h\|_{C^1} < \nu$，则每个解

$$Z : \mathbb{R}\times\mathbb{T}^2 \to \mathbb{D}^*_{\delta_1}Q$$

在 $s \to \pm\infty$ 的意义下满足 $|Z(s,\cdot)|_g \to 0$ 的 (31) 的解，其像均包含于 $\mathrm{D}^*_\delta Q$ 中。

证明陈述 2 时需要陈述 1，以便处理有界的几何量，因为当趋近 $\mathrm{D}^*_{\delta_0}Q$ 的边界时，Biquard-Gauduchon 度量会发散。与定理 7.1 一样，我们考虑式 (18) 中定义的函数 Φ : 实数集 $\times \mathrm{T}^2 \to$ 实数集，并将其写成 Z 与 H^0 的复合：$T^*Q \to$ 实数集 $H^0(q,p) = \frac{1}{2}|p|_g^2$. 按照 [Jos05，引理 9.2。2], 我们得到

$$\Delta(H^0 \circ Z) = \mathrm{tr}\big(\nabla^2 H^0[\mathrm{d}Z, \mathrm{d}Z]\big) + G(\nabla^G H^0(Z), \tau(Z)), \tag{32}$$

其中 $\nabla^2 H^0$ 是 H^0 的黎曼海森矩阵，$\tau(Z)$ 是Z的张力场。我们首先分析右侧的第二项。正如引理 4.2 的证明中所示，梯度 $\nabla^G H^0(Z)$ 纯粹是垂直的，其垂直分量由 $A_Z Z$ 给出。以下引理给出了 Z的张力场 $\tau(Z)$ 的显式公式。

引理 7.3. 设 $Z:$ 实数集 $\times\mathbb{T}^2 \to \mathbb{D}^*_{\delta_0}Q$ 是 (31) 的一个解，并记 $Z_s = \partial_s Z$, $Z_x = \partial_x Z$, $Z_y = \partial_y Z$。设 ∇ 为 G的列维-奇维塔联络。那么， Z 的张力场 $\tau(Z)$ 由下式给出

$$\begin{aligned}\tau(Z) &= 2\nabla^2 H_s(Z)[Z_s] - \nabla^2 H_s(Z)[\nabla^G H(Z)] \\ &\quad + \nabla^G(\partial_s H_s)(Z) - J(Z)\nabla^G(\partial_x H_s)(Z) - K(Z)\nabla^G(\partial_y H_s)(Z), \end{aligned} \tag{33}$$

因此尤其是

$$|\tau(Z)| \lesssim \|H_s\|_{C^2}\big(|Z_s| + \|H_s\|_{C^1}\big).$$

证明。 由于 ∇ 无挠且 $[\partial_s,\partial_x] = [\partial_s,\partial_y] = [\partial_x,\partial_y] = 0$，我们得到拉回联络的交换关系:

$$\nabla_s Z_x = \nabla_x Z_s, \qquad \nabla_s Z_y = \nabla_y Z_s, \qquad \nabla_x Z_y = \nabla_y Z_x, \tag{34}$$

其中我们令 $\nabla_s = \nabla_{Z_s}$, $\nabla_x = \nabla_{Z_x}$, $\nabla_y = \nabla_{Z_y}$. 相对于实数集 $\mathrm{R} \times \mathrm{T}^2$, 上的平坦度量，张力场为

$$\tau(Z) = \nabla_s Z_s + \nabla_x Z_x + \nabla_y Z_y.$$

利用 Fueter/Floer 方程 (31)，我们写出

$$Z_s = -J(Z)Z_x - K(Z)Z_y + \nabla^G H_s(Z).$$

沿 s 方向求导并利用 $\nabla J = \nabla K = 0$，得到

$$\begin{aligned}\nabla_s Z_s &= -J(Z)\nabla_s Z_x - K(Z)\nabla_s Z_y + \nabla_s\big(\nabla^G H_s(Z)\big) \\ &= -J(Z)\nabla_x Z_s - K(Z)\nabla_y Z_s + \nabla_s\big(\nabla^G H_s(Z)\big),\end{aligned}$$

这里我们用到了 (34)。再次代入并展开，得到

$$\begin{aligned}\nabla_s Z_s &= -J(Z)\nabla_x\big(-J(Z)Z_x - K(Z)Z_y + \nabla^G H_s(Z)\big) \\ &\quad - K(Z)\nabla_y\big(-J(Z)Z_x - K(Z)Z_y + \nabla^G H_s(Z)\big) + \nabla_s\big(\nabla^G H_s(Z)\big) \\ &= -\nabla_x Z_x - \nabla_y Z_y - J(Z)\nabla_x\big(\nabla^G H_s(Z)\big) - K(Z)\nabla_y\big(\nabla^G H_s(Z)\big) \\ &\quad - JK\,\nabla_x Z_y - KJ\,\nabla_y Z_x + \nabla_s\big(\nabla^G H_s(Z)\big).\end{aligned}$$

混合项相互抵消，因为 $\nabla_x Z_y = \nabla_y Z_x$ 根据(34)以及 $JK = -KJ$。因此

$$\begin{aligned}\nabla_s Z_s &= -\nabla_x Z_x - \nabla_y Z_y \\ &\quad - J(Z)\nabla_x\big(\nabla^G H_s(Z)\big) - K(Z)\nabla_y\big(\nabla^G H_s(Z)\big) + \nabla_s\big(\nabla^G H_s(Z)\big).\end{aligned}$$

在两边加上 $\nabla_x Z_x + \nabla_y Z_y$，得到

$$\tau(Z) = \nabla_s\big(\nabla^G H_s(Z)\big) - J(Z)\nabla_x\big(\nabla^G H_s(Z)\big) - K(Z)\nabla_y\big(\nabla^G H_s(Z)\big). \tag{35}$$

现在注意到，由于 $\nabla J = \nabla K = 0$，我们有

$$J(Z)\nabla_x + K(Z)\nabla_y = \nabla_{J(Z)Z_x + K(Z)Z_y}$$

因此，再次利用 Fueter/Floer 方程 (31)，

$$\begin{aligned}
\tau(Z) &= \nabla_s\big(\nabla^G H_s(Z)\big) - \nabla_{J(Z)Z_x+K(Z)Z_y}\big(\nabla^G H_s(Z)\big) \\
&= \nabla^2 H_s(Z)[Z_s] + \nabla^G(\partial_s H_s)(Z) - \nabla^2 H_s(Z)[J(Z)Z_x + K(Z)Z_y] \\
&\quad - J(Z)\nabla^G(\partial_x H_s)(Z) - K(Z)\nabla^G(\partial_y H_s)(Z) \\
&= 2\nabla^2 H_s(Z)[Z_s] - \nabla^2 H_s(Z)[\nabla^G H(Z)] \\
&\quad + \nabla^G(\partial_s H_s)(Z) - J(Z)\nabla^G(\partial_x H_s)(Z) - K(Z)\nabla^G(\partial_y H_s)(Z),
\end{aligned}$$

如所断言。 □

引理 7.3 中的估计表明，张力场至少在形式上与平坦情形中的表现相同：它逐点受哈密顿量的 C^2-范数以及 Z_s 的大小所控制。特别地，(32) 中张力项的贡献可以像定理 7.1 的证明中那样处理。非平坦情形中的主要困难则在于 (32) 的第一项，即

$$\operatorname{tr}\big(\nabla^2 H^0[\mathrm{d}Z, \mathrm{d}Z]\big).$$

与平坦情形不同，$H^0(q,p) = \frac{1}{2}|p|_g^2$ 关于 Biquard–Gauduchon 度量的海森矩阵一般并非非负。在双曲平面这一模型情形中的显式计算表明，其水平分量带有负号。然而，这一水平贡献乘以一个阶为 $|p|_g^2$ 的因子。因此，在靠近零截面处处于微扰区域，其中海森矩阵的负部关于 $|p|_g$ 是二次的，因而很小。对这一海森矩阵作更系统的分析——或许利用底空间的局部对称结构以及度量在水平/垂直分解中的分块对角性质，并结合 Fueter/Floer 方程 (31) 给出 $\mathrm{d}Z$ 的水平分量关于垂直分量与哈密顿量的 L^2-控制——应当能导出非平坦情形中所需的定量约束估计。我们将此问题留待今后研究。

注 7.4。与 *[BF24* 第 *7],* 节类似，可以预期，作用泛函 $\mathcal{A}_H$ 的所有零伦临界点都包含在 $\mathbb{D}^*_{\delta_0}Q$ 的一个紧子集中，其大小仅取决于 $\|h\|_{C^2}$。因此，通过引入合适的截断函数，可以不失一般性地假设，$h \equiv 0$ 在 $\mathbb{D}^*_{\delta_0}Q$ 的一个紧子集之外。

参考文献

[ACS25] Luca Asselle、Silvia Cingolani 和 Maciej Starostka。巴拿赫空间中一类椭圆型偏微分方程的莫尔斯同调。《当代数学通讯》，2025。https://doi.org/10.1142/S0219199726500082。[AH16] Peter Albers 和 Doris Hein。莫尔斯上同调中的杯长估计。《拓扑与分析杂志》，8(02):243–272，2016。[AS24] Luca Asselle 和 Maciej Starostka。关于巴拿赫空间中涉及 $2p$-面积泛函的一类泛函的莫尔斯同调的注记。《NoDEA 非线性微分方程及其应用》，31(75):109–160，2024。https://doi.org/10.1007/s00030-024-00962-3。[Bel23] Gherici Beldjilali。关于一类 K¨ahler 流形。《计算机科学与数学开放问题国际期刊》，16(1)，2023。[BF24] Ronen Brilleslijper 和 Oliver Fabert。将辛拓扑从一维推广到二维。arXiv 预印本 arXiv:2412.16223，2024。[BF26] Ronen Brilleslijper 和 Oliver Fabert。多辛几何中的弗洛尔截面。《现代物理几何方法国际期刊》，2026。已接受发表。https://doi.org/10.1142/S0219887826501446。[BG21] Olivier Biquard 和 Paul Gauduchon。厄米对称空间余切丛上的超 K¨ahler 度量。载于《几何与物理》，第 287–298 页。CRC出版社，2021。[DLSV15] Manuel De Le´ón、Modesto Salgado 和 Silvia Vilarino。《经典场论中的微分几何方法：k-辛与 k-余辛方法》。世界科学出版社，2015。[ES64] J ames Jr. Eells 和 J. H. Sampson。黎曼流形上的调和映射。《美国数学杂志》，86(1):109–160，1964。[Esf23] Saman Habibi Esfahani。迈向单极子 Fueter-Floer 同调 I：一个紧性定理。arXiv 预印本 arXiv:2305.09456，2023。[Eva97] Lawrence C. Evans。《偏微分方程》，第 19 卷。数学研究生教材，美国数学会，1997。[Fei01] Birte Feix。余切丛上的超 K¨ahler 度量。《纯粹与应用数学杂志》，第 33–46 页，2001。[GT01] David Giblarg 和 Neil S. Trudinger。《二阶椭圆型偏微分方程》，第 224 卷。Springer，2001。

[G¨un87] Christian G¨unther. 场论与变分法中的多辛哈密顿形式体系。I. 局部情形。微分几何杂志，25(1):23–53，1987.[HNS09] Sonja Hohloch、Gregor Noetzel 和 Dietmar A Salamon。超接触结构与 Floer 同调。《几何与拓扑》，13(5):2543–2617，2009.[Jos05] J¨urgen Jost。黎曼几何与几何分析。Springer，2005.[Kal97] Dmitry Kaledin。全纯余切丛全空间上的超凯勒结构。*arXiv* 预印本 *alg-geom/9710026*，1997.[Par96] Thomas H Parker。调和映射的泡树收敛。微分几何杂志，44(3):595–633，1996.[SU81] Jonathan Sacks 和 Karen Uhlenbeck。2-球面极小浸入的存在性。《数学年刊》，113(1):1–24，1981.[Wal17] Thomas Walpuski。Fueter 截面的紧性定理。《瑞士数学评论》，92(4):751–776，2017.