arXiv:2603.01833v1 [math.AP] 2 Mar 2026

含 Caputo 导数的多项时间分数阶扩散方程的反问题

RAVSHAN ASHUROV 和 DAMIR SHAMURATOV

ABSTRACT. 本文研究含 Caputo 导数的多项时间分数阶扩散方程的反源问题。源项可分离为 $f(x)g(t)$，其中未知空间分量 $f(x)$ 由内部时刻 $t_0 \in (0,T]$ 处的超定条件重构。椭圆部分由一个 $m \geq 2$ 阶自伴正微分算子 $A(x,D)$ 控制。该解具有基于多项式Mittag-Leffler函数的谱表示，我们为此推导了新的精确渐近展开。这些渐近展开为解的特征分母提供了一致下界，从而得出经典解存在的充分条件。在数据和 $g(t)$满足自然假设时，重构源项具有唯一性。尽管该问题适定性缺失，但在适当的结构条件下，仍可得到高正则性经典解。

CONTENTS

1. 引言 1 2. 预备知识 3 3. 多项式Mittag-Leffler函数的渐近行为 5 4. 无穷小分母的下界 9 5. 存在性 12 6. 唯一性 17 7. 算子 $A(x,D)$ 18 8. 结论 20 致谢 20 参考文献 20

1. INTRODUCTION

过去几十年来，分数阶微积分已成为刻画自然系统与工程系统中复杂现象的有力工具。它已广泛应用于数学、物理学、生物学、金融学、化学及其他领域 [1]，尤其适用于涉及非局部相互作用和记忆效应的过程 [2]–[6]。

2010 数学主题分类。 35R30, 35R11, 26A33, 33E12, 35K05 .关键词和短语。 反源问题、多项时间分数阶扩散方程、Caputo分数阶导数、多项式 Mittag–Leffler 函数、渐近行为、傅里叶方法、存在性与唯一性。所有作者对本文的贡献相同，并已阅读和批准最终稿。

为刻画更为丰富的动力学行为，人们引入了多项时分数阶微分方程。这类方程包含多个不同阶的Caputo分数阶导数，比单项模型提供了更为灵活的框架。例如，双项分数阶扩散方程已被用于区分溶质运移中的可动相与不可动相 [7],[8], 而具有不同阶数的模型则描述速度场中的亚扩散运动 [9],[10]。此类表述对非均质介质和复杂系统中的反常扩散尤为有效，同时也便于对分布阶导数进行数值处理。

近年来，多项时间分数阶扩散方程受到了广泛关注。文献[11],对强解进行了数值研究和近似，其中作者考虑了

$$\sum_{j=1}^{r} \partial_t^{\rho_j} u(x,t) = -(-\Delta)^{\alpha/2} u(x,t) + q(x) f(t), \quad x \in \Omega,\ t \in (0,T],$$

其中，分数阶拉普拉斯算子通过对 $-\Delta$ 进行谱分解来定义，适用于 $1 < \alpha \leq 2$。在反问题情形下，他们利用内部测量数据 $u(x_0,\ t) = \phi(t)$反演含时源项 $f(t)$。请注意，文献 [11] 中以及本文中所有分数阶导数均采用 Caputo 意义下的定义（具体定义见下文）。

文献 [12]给出了类似多项方程的基于Galerkin方法的数值解。文献 [13]建立了多项 Caputo 导数的强最大值原理，并结合分数阶Duhamel原理，将其应用于反演下述问题中的含时源项:

$$\sum_{j=1}^{m} a_j \partial_t^{\rho_j} u(x,t) + Au(x,t) = \rho(t) g(x), \quad x \in \Omega,\ 0 < t \leq T,$$

该问题具有齐次初始条件和狄利克雷边界条件，其中 A 是一个二阶一致椭圆算子。

进一步的研究利用 Levenberg-Marquardt 等正则化技术，针对积分观测 [15], 柯西数据 [16], 非局部超定条件[17], 以及带有非齐次边界条件的部分边界测量 [18]，开展了参数估计 [14], 时间相关系数的恢复。

回顾一下 其中，Caputo意义下的分数阶导数 $\partial_t^{\rho_j}$ 定义如下。 :

$$\partial_t^{\rho_j} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\rho_j)} \int_0^t \frac{\partial u(x,s)}{\partial s} \frac{ds}{(t-s)^{\rho_j}}, \qquad 0 < \rho_j < 1,\ t > 0,$$

在右侧存在的条件下。此处 Γ 表示伽马函数。

现有关于多项时间分数阶扩散方程反源问题的研究，大多侧重于恢复时变源项，并依赖特定的空间算子（经典拉普拉斯算子或其分数幂）。相比之下，本文研究的是如何利用固定内部时刻 $t_0 \in (0,\ T]$ 的一个超定条件，识别可分离源项 $f(x)g(t)$ 中的空间依赖源项 $f(x)$。

我们考虑以下初边值反问题的经典解:

$$\sum_{j=1}^{M} q_j \partial_t^{\rho_j} u(x,t) + A(x,D)u(x,t) = f(x)g(t), \quad x \in \Omega,\ 0 < t \le T. \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.2}$$

$$B_j u(x,t) = \sum_{|\alpha| \le m_j} b_{\alpha,j}(x) D^{\alpha} u(x,t) = 0, \tag{1.3}$$

$$0 \le m_j \le m-1, \quad j = 1, \dots, l, \quad x \in \partial\Omega,\ 0 < t \le T.$$

$$u(x,t_0) = \Psi(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.4}$$

其中， t_0 是线段 $(0,T]$ 上的给定固定点。 $A(x,D)$ 是一个正的、形式自伴的偶数阶椭圆微分算子，具有光滑系数；各阶数满足 $0 < \rho_M < \cdots < \rho_1 < 1$, $q_j > 0$, $j = 1, \dots . M$ （其中$q_1 = 1$ 不失一般性），且所有给定函数都足够光滑。

本文的主要贡献是通过特征函数展开构造经典解，并对多项式 Mittag-Leffler 函数进行详细的渐近分析，包括首次推导出的精确展开。这些渐近行为为特征分母提供了一致下界，从而能够严格证明高正则性经典解的存在性与唯一性，尽管反问题本身具有适定性缺失。

本文的组织结构如下。第2节给出预备知识。第3节推导多项式 Mittag-Leffler函数的渐近行为。第4节中，我们为解分母中出现的项建立下界估计。这些结果是通过分析函数 $g(t)$的变号或保号性质，并结合第3节证明的多项式 Mittag–Leffler 函数的渐近行为而得到的。第5节中，我们运用傅里叶方法构造该问题的经典解，并严格证明解的存在性。第6节探讨反问题解的唯一性。研究表明，某些傅里叶系数为零时，唯一性可能不成立；同时，我们推导了非唯一情况下的必要且充分的可解性条件。第7节研究环面上的该问题。最后，我们在第8节给出结论。

2. Preliminaries

在求解反问题（1.1）–（1.4）时，我们采用傅里叶方法。

将傅里叶方法应用于反问题（1.1）–（1.4）可得到谱问题

$$A(x,D)v(x) = \lambda v(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.1}$$

$$B_j v(x) = 0, \quad j = 1, \dots, l, \quad x \in \partial\Omega. \tag{2.2}$$

本文 [19],[20] 为区域 $\partial\Omega$ 的边界以及算子系数 A 和 B_j 提出了充分条件，以确保相应逆算子的紧性；等价地，确保存在一个完备的

L_2（Ω）-正交归一特征函数系 $\{v_k(x)\}$ 以及问题（ $\lambda_k (0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_k \le \cdots \to \infty)$的一组可数正特征值2.1)–(2.2)。

以下条件确保谱问题具有正特征值的离散谱，并且存在完备的 L_2(Ω) 正交归一特征函数系[19]:

(1) 强椭圆性： A的主符号满足

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \ge c|\xi|^m, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N,\ x \in \bar{\Omega},\ c > 0.$$

(2)自伴性：最高阶系数为实数且对称，即$a_\alpha(x) = a_\alpha(x)$，其中 $|\alpha| = m$。

(3) **正性：** $(Av,\ v)_{L^2(\Omega)} \ge c\|v\|^2_{H^l(\Omega)} \quad c > 0.$

(4)补充边界条件（Lopatinskii–Shapiro 条件）：每个边界算子 B_j 都必须与A的椭圆性相容，从而避免相关半空间问题出现非平凡的衰减解。典型例子包括:

- **边界条件：**
- $m = 2$: 狄利克雷条件（$v = 0$）、诺伊曼条件（$\partial_\nu v = 0$）、罗宾条件（$av + b\partial_\nu v = 0$）；
- $m = 4$ （双调和）：固支条件（$v = 0,\ \partial_\nu v = 0$）、简支条件（$v = 0,\ \Delta v = 0$）。
- $\forall m = 2l$: $\partial^k_\nu v\big|_{\partial\Omega} = 0$、 $k = 0$、...、 $l - 1$.

（5）**光滑性：** $\partial\Omega \in C^{2l}$、 $a_\alpha(x) \in C^m(\Omega)$，以及 $b_{\alpha,\ j}(x) \in C^{m_j}(\partial\Omega)$。

设 τ 为任意实数。在空间 L_2（Ω）中，我们引入算子$\sim A^\tau$，其作用规则为

$$\widehat{A}^\tau h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\tau h_k v_k(x), \qquad h_k = (h, v_k).$$

显然，算子 A^τ 的定义域为

$$D(\widehat{A}^\tau) = \left\{ h \in L_2(\Omega) : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\tau} |h_k|^2 < \infty \right\},$$

是自伴的。若 A 是作用于 L_2(Ω) 上的算子，其作用公式为 $Ah(x) = A(x,\ D)h(x)$，定义域为 $D(A) = \{h \in C^m(\Omega) : B_j h(x) = 0,\ j = 1,\ \ldots,\ l,\ x \in \partial\Omega\}$，则算子 $\widehat{A} \equiv \widehat{A}^1$ 是 L_2(Ω) 中 A 的一个自伴扩张。

我们引入以下引理，它保证算子$D^\alpha \widehat{A}^{-\sigma}$ 从 L^2(Ω) 到 C(Ω) 的连续性。该结果使我们能够在 C(Ω)-范数下估计相应的傅里叶级数，并为逐项应用算子 D^α提供依据。

引理 2.1. [20] 设 $\sigma > \frac{|\alpha|}{m} + \frac{N}{2m}$. 则算子 $D^\alpha \widehat{A}^{-\sigma}$ 从 L_2(Ω) 到 C(Ω)（完全）连续，且有如下估计

$$\|D^\alpha \widehat{A}^{-\sigma} h\|_{C(\Omega)} \le C\|h\|_{L^2(\Omega)},$$

成立。

问题（1.1）–（1.4）的解涉及多变量 Mittag–Leffler 函数。因此，我们首先给出多变量 Mittag–Leffler 函数的定义。

多项式 Mittag–Leffler 函数定义为 [21]

$$E_{(\beta_1,\ldots,\beta_M),\beta_0}(z_1,\ldots,z_M)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k_1+\cdots+k_M=k}\binom{k}{k_1,\ldots,k_M}\frac{\prod_{j=1}^{M}z_j^{k_j}}{\Gamma\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{M}\beta_j k_j\right)},$$

其中假设 $\beta_0>0$, $0<\beta_j<1$, $z_j\in\mathbb{C}(j=1,\ldots,M)$, 且 $\binom{k}{k_1\ldots,k_M}$ 表示多项式系数

$$\binom{k}{k_1,\ldots,k_M}:=\frac{k!}{k_1!\cdots k_M!},\quad \text{with}\quad k=\sum_{j=1}^{M}k_j,$$

其中 k_j, $1\le j\le M$ 均为非负整数。

为了推导多项式 Mittag–Leffler 函数的上界并证明解的收敛性，我们回顾以下引理。

引理 2.2. [22] 设 $0<\beta<2$ 和 $1>\rho_1>\cdots>\rho_M>0$ 已给定。假设 $\frac{\rho_1\pi}{2}<\mu<\rho_1\pi$, $\overline{\mu}\le|\arg(z_1)|\le\pi$，且存在常数 $K>0$ 使得 $-K\le z_j<0, j=2,..,M$. 那么存在常数 $C>0$，它仅依赖于 μ, K, $\rho_j(j=1,\ldots,M)$ 和 β，使得

$$\left|E_{(\rho_1,\rho_1-\rho_2,\ldots,\rho_1-\rho_M),\beta}(z_1,\ldots,z_M)\right|\le\frac{C}{1+|z_1|}.$$

引理 2.3. [22] 设 $1>\rho_1>\cdots>\rho_M>0$. 则，对于多重指标 *Mittag– Leffler* 函数，

$$\frac{d}{dt}\left[t^{\rho_1}E_{\rho',\rho_1+1}(-\lambda_k t^{\rho_1},*)\right]=t^{\rho_1-1}E_{\rho',\rho_1}(-\lambda_k t^{\rho_1},*),$$

其中，

$$E_{\rho',\rho_1}(-\lambda_k t^{\rho_1},*)=E_{(\rho_1,\rho_1-\rho_2,\ldots,\rho_1-\rho_M),\rho_1}(-\lambda_k t^{\rho_1},-q_2 t^{\rho_1-\rho_2},\ldots,-q_M t^{\rho_1-\rho_M}),$$

$$\rho'=(\rho_1,\rho_1-\rho_2,\ldots,\rho_1-\rho_M).$$

引理 2.4. [23] 设 $1>\rho_1>\cdots>\rho_M>0$. 则函数 $t^{\rho_1-1}E_{\rho',\ \rho_1}(-\lambda_k t^{\rho_1},*)$ 在 $t>0$ 时为正。

3. Asymptotic behavior of the multinomial Mittag-Leffler function

本节将确立并论证下列多项式 Mittag–Leffler 函数的渐近行为：

$$E_{\rho',\beta}(z_1,\ldots,z_M)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k_1+\cdots+k_M=k}\binom{k}{k_1,\ldots,k_M}\frac{\prod_{j=1}^{M}z_j^{k_j}}{\Gamma\left(\beta+\rho_1 k_1+\sum_{j=2}^{M}(\rho_1-\rho_j)k_j\right)}.\tag{3.1}$$

$$\rho'=(\rho_1,\rho_1-\rho_2,\ldots,\rho_1-\rho_M).$$

多位数和多变量 Mittag-Leffler 函数的渐近估计已由多位研究者进行研究。例如，以下学者曾对此进行探讨：

在论文 [24] 中，Virginia S. Kiryakova 证明了多指标米塔格-莱夫勒函数的一个渐近估计。该函数定义为

$$E_{(1/\rho_i);(\mu_i)}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma\left(\mu_1+\frac{k}{\rho_1}\right)\cdots\Gamma\left(\mu_m+\frac{k}{\rho_m}\right)} \tag{3.2}$$

其中 $m\geq 1$ 是一个整数，ρ_1，……，$\rho_m>0$，且 μ_1，……，μ_m 是任意实数。多指标米塔格-莱夫勒函数满足以下渐近估计（3.2）：

$$\left|E_{(1/\rho_i);(\mu_i)}(z)\right|\leq\exp\left((\sigma+\varepsilon)\,|z|^{\rho}\right),\qquad |z|\geq r_0(\varepsilon),$$

其中

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho_1}+\cdots+\frac{1}{\rho_m},$$

and

$$\sigma=\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^{\rho/\rho_1}\cdots\left(\frac{\rho_m}{\rho}\right)^{\rho/\rho_m}.$$

这里 $r_0(\varepsilon)>0$ 足够大，也就是说，该估计对所有 $|z|\geq r_0(\varepsilon)$ 均成立。

此外，在 [25], 中，Christian Lavault 建立了二元米塔格-莱夫勒函数的渐近行为

$$E_{\alpha,\beta}(x,y;\mu)=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{x^n y^m}{\Gamma(n\alpha+m\beta+\mu)},\quad(\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \alpha,\beta>0,\ \mu\in\mathbb{C}).$$

本文建立了形式（3.1）下 Mittag-Leffler 多项式函数的渐近行为。我们指出，这一行为使我们能够为逆问题解的表示中出现的谱分母推导出一致下界。据我们所知，这是首次建立此类渐近估计。还应强调的是，这一渐近估计无疑具有独立的研究价值。

下面的定理给出了形式（3.1）下多项式 Mittag-Leffler 函数的渐近行为。

定理 3.1. 设 $\beta>2\rho_1$ 和 $1>\rho_1>\cdots>\rho_M>0$ 已知。假设 $\rho_1\pi/2<\mu<\rho_1\pi$，$\mu\leq|\arg(z_1)|\leq\pi$，$|z_1|\to\infty$，且存在 $K>0$ 使得 $-K\leq z_j<0\,(j=2,\ldots,M)$。则有以下渐近公式，其中 p 为任意正整数：

$$E_{\rho',\beta}(z_1,\ldots,z_M)=-\frac{1}{z_1}\frac{1}{\Gamma(\beta-\rho_1)}-\frac{1}{z_1^2}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta-2\rho_1)}-\sum_{j=2}^{M}\frac{z_j}{\Gamma(\beta-\rho_1-\rho_j)}\right)$$

$$-\sum_{k=3}^{p}\frac{C_k(z_2,..,z_M,\rho_j,\beta)}{z_1^k}+O\left(|z_1|^{-p-1}\right).$$

证明。 我们有如下积分表示 [22]:

$$E_{\rho',\beta}(z_1,\ldots,z_M)=\frac{1}{2\rho_1\pi i}\int_{\gamma(R,\theta)}\frac{\exp(s^{1/\rho_1})s^{(1-\beta)/\rho_1}}{s-z_1-\sum_{j=2}^{M}z_j s^{\rho_j/\rho_1}}\,ds. \tag{3.3}$$

其中 $\rho_1\pi/2<\theta<\mu$ 和 $\gamma(R,\theta)$ 表示积分路径

$\gamma(R,\ \theta):=\{s\in C;\quad |s|=R,\quad |\arg(s)|\le\theta\}\cup\{s\in C;\quad |s|>R,\quad |\arg(s)|=\pm\theta\}$, 以及 ,

$$R>K+K\sum_{j=2}^{M}R^{\rho_j/\rho_1}.$$

在 [22], β 被限制在区间 (0,2) 内; 然而, 如 [26], 所示, 积分表示 (3.3) 对所有 $\beta>0$均成立。

现在我们引入以下记号:

$$Q(z_2,..,z_M,s)=s-\sum_{j=2}^{M}z_j s^{\rho_j/\rho_1},$$

于是, 我们有

$$E_{\rho',\beta}(z_1,\ldots,z_M)=\frac{1}{2\rho_1\pi i}\int_{\gamma(R,\theta)}\frac{\exp\left(s^{1/\rho_1}\right)\ s^{\frac{1-\beta}{\rho_1}}}{Q(z_2,..,z_M,s)-z_1}\,ds.$$

对于任意 $a\neq 1$, 以下恒等式成立:

$$\frac{1}{1-a}=\sum_{k=1}^{p}a^{k-1}+\frac{a^p}{1-a}.$$

为证明这一点, 我们注意到

$$(1-a)\left(1+a+\cdots+a^{p-1}\right)=1-a^p.$$

两边同时除以 $1-a$ （其中 $a\neq 1$）, 即可得到所需结果。

将该表达式写成如下形式:

$$\frac{1}{Q(z_2,..,z_M,s)-z_1}=-\frac{1}{z_1}\frac{1}{1-\frac{Q(z_2,..,z_M,s)}{z_1}}$$

$$=-\sum_{k=1}^{p}\frac{Q^{k-1}(z_2,..,z_M,s)}{z_1^k}+\frac{Q^p(z_2,..,z_M,s)}{z_1^p(Q(z_2,..,z_M,s)-z_1)}$$

$$=-\frac{1}{z_1}-\frac{s-\sum_{j=2}^{M}z_j s^{\rho_j/\rho_1}}{z_1^2}-\sum_{k=3}^{p}\frac{Q^{k-1}(z_2,..,z_M,s)}{z_1^k}+\frac{Q^p(z_2,..,z_M,s)}{z_1^p(Q(z_2,..,z_M,s)-z_1)}.$$

将其代入积分,

$$E_{\rho',\beta}(z_1,\ldots,z_M)=\frac{1}{2\rho_1\pi i}\int_{\gamma(R,\theta)}\exp\left(s^{1/\rho_1}\right)\ s^{\frac{1-\beta}{\rho_1}}\times$$

$$\times\left(-\frac{1}{z_1}-\frac{s-\sum_{j=2}^{M}z_j s^{\rho_j/\rho_1}}{z_1^2}-\sum_{k=3}^{p}\frac{Q^{k-1}(z_2,..,z_M,s)}{z_1^k}+\frac{Q^p(z_2,..,z_M,s)}{z_1^p(Q(z_2,..,z_M,s)-z_1)}\right)ds,$$

or

$$E_{\rho',\beta}(z_1,\dots,z_M)=-\frac{1}{z_1}\frac{1}{2\rho_1\pi i}\int_{\gamma(R,\theta)}\exp\left(s^{1/\rho_1}\right)\ s^{\frac{1-\beta}{\rho_1}}ds$$
$$-\frac{1}{z_1^2}\frac{1}{2\rho_1\pi i}\int_{\gamma(R,\theta)}\exp\left(s^{1/\rho_1}\right)\ s^{\frac{1-\beta}{\rho_1}}\left(s-\sum_{j=2}^{M}z_j s^{\rho_j/\rho_1}\right)ds$$
$$-\frac{1}{2\rho_1\pi i}\int_{\gamma(R,\theta)}\exp\left(s^{1/\rho_1}\right)\ s^{\frac{1-\beta}{\rho_1}}\left(\sum_{k=3}^{p}\frac{Q^{k-1}(z_2,..,z_M,s)}{z_1^k}\right)ds$$
$$+\frac{1}{2\rho_1\pi i}\int_{\gamma(R,\theta)}\exp\left(s^{1/\rho_1}\right)\ s^{\frac{1-\beta}{\rho_1}}\frac{Q^p(z_2,..,z_M,s)}{z_1^p(Q(z_2,..,z_M,s)-z_1)}ds.$$

利用 $1/\Gamma$（z）（见 [3], 第16页），我们推导出以下涉及伽马函数的表达式： $\beta>2\rho_1$,

$$E_{\rho',\beta}(z_1,\dots,z_M)=-\frac{1}{z_1}\frac{1}{\Gamma(\beta-\rho_1)}$$
$$-\frac{1}{z_1^2}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta-2\rho_1)}-\sum_{j=2}^{M}\frac{z_j}{\Gamma(\beta-\rho_1-\rho_j)}\right)-\sum_{k=3}^{p}\frac{C_k(z_2,..,z_M,\rho_j,\beta)}{z_1^k}$$
$$+\frac{1}{2\rho_1\pi i}\int_{\gamma(R,\theta)}\exp\left(s^{1/\rho_1}\right)\ s^{\frac{1-\beta}{\rho_1}}\frac{Q^p(z_2,..,z_M,s)}{z_1^p(Q(z_2,..,z_M,s)-z_1)}ds.$$

其中

$$C_k(z_2,..,z_M,\rho_j,\beta)=\frac{1}{2\rho_1\pi i}\int_{\gamma(R,\theta)}\exp\left(s^{1/\rho_1}\right)\ s^{\frac{1-\beta}{\rho_1}}Q^{k-1}(z_2,..,z_M,s)ds.$$

我们引入以下记号

$$I_p=\frac{1}{2\rho_1\pi i}\int_{\gamma(R,\theta)}\exp\left(s^{1/\rho_1}\right)\ s^{\frac{1-\beta}{\rho_1}}\frac{Q^p(z_2,..,z_M,s)}{z_1^p(Q(z_2,..,z_M,s)-z_1)}ds.$$

由于 $z_j<0$ 且 $\rho_j<\rho_1$ 对于 $j=2,\dots,M$，可知曲线 $s-\sum_{j=2}^{M}z_j s^{\frac{\rho_j}{\rho_1}}(s\in\gamma(R,\theta))$ 位于 $\gamma(R,\theta)$ 的右侧，也就是说，$\gamma(R,\theta)$ 沿正方向平移了 $-\sum_{j=2}^{M}z_j s^{\frac{\rho_j}{\rho_1}}$。这一观察立即意味着,

$$\min_{s\in\gamma(R,\theta)}\left|s-z_1-\sum_{j=2}^{M}z_j s^{\frac{\rho_j}{\rho_1}}\right|\geq\min_{s\in\gamma(R,\theta)}|s-z_1|\geq|z_1|\sin(\mu-\theta).$$

因此，我们得到以下估计

$$|I_p|\leq\frac{|z_1|^{-p-1}}{2\rho_1\pi\sin(\mu-\theta)}\int_{\gamma(R,\theta)}\left|\exp\left(s^{1/\rho_1}\right)\right|\left|s^{(1-\beta)/\rho_1}\right||Q^p(z_2,..,z_M,s)|\,ds.$$

沿 $\gamma(R,\ \theta)$ 的积分收敛，因为对于满足 $\arg(s) = \pm\theta$ 且 $|s| > R$ 的 s，有

$$\left|\exp\left(s^{1/\rho_1}\right)\right| = \exp\left(|s|^{1/\rho_1}\cos\left(\frac{\theta}{\rho_1}\right)\right),$$

满足 $\cos\left(\frac{\theta}{\rho_1}\right) < 0$。考虑由下式定义的 $\gamma(R,\theta)$ 的圆弧部分

$$\{s \in C : |s| = R,\ |\arg s| \le \theta\}.$$

在此集合上，我们有 $|s| = R$，因此函数 $e^{s^{1/\rho_1}}$、 $s^{(1-\beta)/\rho_1}$ 和$Q(z_2,..,z_M,s)$ 有界。因此，存在常数 $C_1 > 0$，使得

$$\left|e^{s^{1/\rho_1}} s^{\frac{1-\beta}{\rho_1}} Q^p(z_2,..,z_M,s)\right| \le C_1.$$

此外，我们有

$$|Q(z_2,..,z_M,s) - z_1| \ge |z_1|\sin(\mu-\theta).$$

因此，

$$\left|\frac{1}{2\rho_1\pi i}\int_{|s|=R,\ |\arg s|\le\theta} e^{s^{1/\rho_1}} s^{\frac{1-\beta}{\rho_1}} \frac{Q^p(z_2,..,z_M,s)}{z_1^p(Q(z_2,..,z_M,s)-z_1)}\,ds\right| \le \frac{C}{|z_1|^{p+1}},$$

其中 $C > 0$ 与 z_1 无关。

于是我们得到如下渐近行为，

$$E_{\rho',\beta}(z_1,\ldots,z_M) = -\frac{1}{z_1}\frac{1}{\Gamma(\beta-\rho_1)} - \frac{1}{z_1^2}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta-2\rho_1)} - \sum_{j=2}^{M}\frac{z_j}{\Gamma(\beta-\rho_1-\rho_j)}\right)$$

$$-\sum_{k=3}^{p}\frac{C_k(z_2,..,z_M,\rho_j,\beta)}{z_1^k} + O\left(|z_1|^{-p-1}\right).$$

证明至此完成。 □

4. Lower bound for an infinitesimal denominator

在反问题（1.1）–（1.4）的解中，分母包含以下项

$$b_{k,\rho_1}(t_0) = \int_0^{t_0} g(t_0-\xi)\,\xi^{\rho_1-1}E_{\rho',\rho_1}(-\lambda_k\xi^{\rho_1},*)\,d\xi.$$

本节中，我们将推导该项的一个下界。通过考虑函数 $g(t)$ 是保持符号不变还是改变符号，并结合上述多项式 Mittag–Leffler 函数的渐近行为，可以得到该估计。

将自然数集合 $\mathbb{N}$ 分成两组 $K_{0,\ \rho_1}$ 和 K_{ρ_1}: $\mathbb{N} = K_{\rho_1} \cup K_{0,\ \rho_1}$，其中，若数字 k 满足 $K_{0,\ \rho_1}$，且 $b_{k,\ \rho_1}(t_0) = 0$，而若 $b_{k,\ \rho_1}(t_0) \ne 0$，则将该数字归入 K_{ρ_1}。注意，对于某些 t_0，集合 $K_{0,\ \rho_1}$ 可能为空，此时 $K_{\rho_1} = \mathbb{N}$。例如，若 $g(t)$ 是保号的，则对所有 $K_{\rho_1} = \mathbb{N}$ t_0.

引理 4.1。 设 $\rho_j \in (0,\ 1)$ 对于 $j = 1,\ \ldots\ldots,\ M,\ \ g(t) \in C[0,T]$，且 $g(t) \neq 0$ 对于 $t \in [0,T]$ 成立（即 $g(t)$ 不变号）。那么，对于所有 k 和 t_0，以下估计成立：

$$\frac{\widetilde{C}_0}{\lambda_k} \leq |b_{k,\rho_1}(t_0)| \leq \frac{\widetilde{C}_1}{\lambda_k}, \tag{4.1}$$

~ ~其中常数为 C_0 和 $C_1 > 0$。

证明。 根据魏尔斯特拉斯定理，存在一个常数 $g_0 > 0$ 使得 $|g(t)| \geq g_0$。应用中值定理和引理2.3 可得

$$|b_{k,\rho_1}(t_0)| = \left| \int_0^{t_0} \xi^{\rho_1 - 1} E_{\rho',\rho_1}(-\lambda_k \xi^{\rho_1}, *)\, g(t_0 - \xi)\, d\xi \right|$$

$$= |g(\eta_k)|\, t_0^{\rho_1} E_{\rho',\rho_1+1}(-\lambda_k t_0^{\rho_1}, *), \quad \eta_k \in [0, t_0].$$

应用定理 3.1中的渐近估计，可得

$$E_{\rho',\rho_1+1}(-\lambda_k t_0^{\rho_1}, *) = \frac{1}{\lambda_k t_0^{\rho_1}} + O\left(\frac{1}{(\lambda_k t_0^{\rho_1})^2}\right).$$

因此，对于充分大的 $k \geq k_0$，利用估计 $|g(t)| \geq g_0$，可得

$$|b_{k,\rho_1}(t_0)| = |g(\eta_k)| t_0^{\rho_1} \left(\frac{1}{\lambda_k t_0^{\rho_1}} + O\left(\frac{1}{(\lambda_k t_0^{\rho_1})^2} \right) \right) \geq \frac{C_0}{\lambda_k}.$$

还需考虑有限多个指标 $k < k_0$。由于函数 $g(t)$不变号，因此 $k \in K_{\rho_1}$。于是，对于所有 k，有 $b_{k,\ \rho_1}(t_0) \neq 0$。

对于有限集合 $\{k:\ k < k_0\}$，这些量

$$\lambda_k |b_{k,\rho_1}(t_0)|$$

构成一个有限的正数集合。因此，其最小值存在且严格为正：

$$\overline{C} = \min_{k<k_0} \lambda_k |b_{k,\rho_1}(t_0)| > 0.$$

因此，

$$|b_{k,\rho_1}(t_0)| \geq \frac{\overline{C}}{\lambda_k}, \qquad k < k_0.$$

~我们定义 $C_0 = \min\{C_0, \overline{C}\}$。于是

$$|b_{k,\rho_1}(t_0)| \geq \frac{\widetilde{C}_0}{\lambda_k} \quad \text{for all } k.$$

上界估计由引理 2.2给出：

$$|b_{k,\rho_1}(t_0)| \leq C\, |g(\eta_k)| \frac{t_0^{\rho}}{1 + \lambda_k t_0^{\rho}} \leq C \max_{0 \leq \eta_k \leq t_0} |g(\eta_k)| \frac{1}{\lambda_k} \leq \frac{\widetilde{C}_1}{\lambda_k}.$$

证明至此完成。 □

引理 4.2. 设 $\rho_j \in (0、1)$ 满足 $j = 1, \ldots, M$, $g(t) \in C^1[0,T]$，且 $g(0) \neq 0$(g(t)变号)。那么存在数 $r_0 > 0$ 和 k_0，使得对于所有 $t_0 \leq r_0$ 和$k \geq k_0$，以下估计成立：

$$\frac{\widetilde{C}_0}{\lambda_k} \leq |b_{k,\rho_1}(t_0)| \leq \frac{\widetilde{C}_1}{\lambda_k}, \tag{4.2}$$

~ ~其中常数 C_0 和 $C_1 > 0$ 依赖于 r_0 和 k_0。

证明。 设 $\rho_j \in (0,1)$。利用引理 2.3 我们进行分部积分，然后应用中值定理。于是我们有

$$\begin{aligned} b_{k,\rho_1}(t_0) &= \int_0^{t_0} g(t_0-\xi)\,\xi^{\rho_1-1} E_{\rho',\rho_1}(-\lambda_k \xi^{\rho_1}, *)\,d\xi \\ &= \int_0^{t_0} g(t_0-\xi)\,d\big[\xi^{\rho_1} E_{\rho',\rho_1+1}(-\lambda_k \xi^{\rho_1}, *)\big] \\ &= g(t_0-\xi)\,\xi^{\rho_1} E_{\rho',\rho_1+1}(-\lambda_k \xi^{\rho_1}, *)\Big|_0^{t_0} + \int_0^{t_0} g'(t_0-\xi)\,\xi^{\rho_1} E_{\rho',\rho_1+1}(-\lambda_k \xi^{\rho_1}, *)\,d\xi \\ &= g(0) t_0^{\rho_1} E_{\rho',\rho_1+1}(-\lambda_k t_0^{\rho_1}, *) + g'(\eta_k) \int_0^{t_0} \xi^{\rho_1} E_{\rho',\rho_1+1}(-\lambda_k \xi^{\rho_1}, *)\,d\xi, \quad \eta_k \in [0, t_0]. \end{aligned}$$

对于最后一个积分，利用引理2.3

$$\int_0^{t_0} \xi^{\rho_1} E_{\rho',\rho_1+1}(-\lambda_k \xi^{\rho_1}, *)\,d\xi = t_0^{\rho_1+1} E_{\rho',\rho_1+2}(-\lambda_k t_0^{\rho_1}, *).$$

应用定理 3.1，

$$E_{\rho',\rho_1+1}(-\lambda_k t_0^{\rho_1}, *) = \frac{1}{\lambda_k t_0^{\rho_1}} + O\left(\frac{1}{(\lambda_k t_0^{\rho_1})^2}\right),$$

$$E_{\rho',\rho_1+2}(-\lambda_k t_0^{\rho_1}, *) = \frac{1}{\lambda_k t_0^{\rho_1}} + O\left(\frac{1}{(\lambda_k t_0^{\rho_1})^2}\right),$$

我们得到

$$b_{k,\rho_1}(t_0) = \frac{g(0)}{\lambda_k} + \frac{g'(\eta_k) t_0}{\lambda_k} + O\left(\frac{1}{(\lambda_k t_0^{\rho_1})^2}\right).$$

若 $g(0) \neq 0$，当 t_0 充分小时且 k 充分大时，我们便得到所需的下界估计。这也意味着相应的上界。□

推论 4.3. 若引理 *4.2* 的条件成立，则对所有 $t_0 \leq r_0$ 和 $k \in K_{\rho_1}$，该估计均成立。(4.2)

不难看出，该结论可由引理 4.1 得出。

推论 4.4. 若引理 *4.2* 的条件成立，且 t_0 充分小，则集合 $K_{0,\ \rho_1}$ 中的元素个数有限。

证明。 根据引理 4.2，当 $t_0 \leq r_0$ 充分小且 $k \geq k_0$ 充分大时，有

$$b_{k,\rho_1}(t_0) = \frac{g(0)}{\lambda_k} + \frac{g'(\eta_k) t_0}{\lambda_k} + O\left(\frac{1}{(\lambda_k t_0^{\rho_1})^2}\right) \neq 0,$$

因为 $g(0) \neq 0$。

因此，等式 $b_{k,\rho_1}(t_0) = 0$ 只能对有限多个指标 $k < k_0$ 成立。这意味着集合

$$K_{0,\rho_1} = \{k \in \mathbb{N} : b_{k,\rho_1}(t_0) = 0\},$$

仅包含有限个元素。 □

5. Existence

根据傅里叶方法，我们将函数 $u(x, t)$ 表示为形式级数：

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\, v_k(x), \tag{5.1}$$

其中函数 $T_k(t)$ 是柯西型问题的一个解

$$\sum_{j=1}^{M} q_j \partial_t^{\rho_j} T_k(t) + \lambda_k T_k(t) = f_k g(t), \tag{5.2}$$

$$T_k(0) = \varphi_k. \tag{5.3}$$

注意，问题（5.2）中的未知量也是系数 f_k。为了确定这些数，由（1.4）我们得到附加条件

$$T_k(t_0) = \Psi_k. \tag{5.4}$$

问题（5.2）–（5.3）的解具有如下形式： [11],

$$T_k(t) = \varphi_k \left[1 - \lambda_k t^{\rho_1} E_{\rho',\rho_1+1}\left(-\lambda_k t^{\rho_1}, *\right)\right] + f_k b_{k,\rho_1}(t). \tag{5.5}$$

于是我们得到方程

$$T_k(t_0) = \varphi_k \left[1 - \lambda_k {t_0}^{\rho_1} E_{\rho',\rho_1+1}\left(-\lambda_k {t_0}^{\rho_1}, *\right)\right] + f_k b_{k,\rho_1}(t_0) = \Psi_k.$$

因此，

$$f_k b_{k,\rho_1}(t_0) = \Psi_k - \varphi_k \left[1 - \lambda_k t_0^{\rho_1} E_{\rho',\rho_1+1}\left(-\lambda_k t_0^{\rho_1}, *\right)\right], \tag{5.6}$$

$$f_k = \frac{\Psi_k - \varphi_k \left[1 - \lambda_k t_0^{\rho_1} E_{\rho',\rho_1+1}\left(-\lambda_k t_0^{\rho_1}, *\right)\right]}{b_{k,\rho_1}(t_0)}. \tag{5.7}$$

由此，我们构造出了形式级数

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \left[1 - \lambda_k t^{\rho_1} E_{\rho',\rho_1+1}\left(-\lambda_k t^{\rho_1}, *\right)\right] v_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k b_{k,\rho_1}(t) v_k(x), \tag{5.8}$$

and

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi_k v_k(x)}{b_{k,\rho_1}(t_0)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k \left[1 - \lambda_k t_0^{\rho_1} E_{\rho',\rho_1+1}\left(-\lambda_k t_0^{\rho_1}, *\right)\right] v_k(x)}{b_{k,\rho_1}(t_0)}. \tag{5.9}$$

显然，函数（5.8）和（5.9）是形式解。剩下的只是证明傅里叶方法的合理性。

定理 5.1. 设 $\varphi \in D(\widehat{A}^{\tau+1})$ 和 $\Psi \in D(\widehat{A}^{\tau+1})$，其中 $\tau > \frac{N}{2m}$，且 $g(t) \in C[0,T]$，$g(t) \neq 0$。则反问题 *(1.1)–(1.4)* 存在一个经典解 $(u(x,t)\ f(x))$，可表示为级数 *(5.8)* 和 *(5.9)* 的形式。

证明. 设定理的假设成立。首先，证明函数 5.9 的级数绝对一致收敛。 f令

$$f_n^1(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Psi_k v_k(x)}{b_{k,\rho_1}(t_0)},$$

$$f_n^2(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k \left[1 - \lambda_k t_0^{\rho_1} E_{\rho',\rho_1+1}\left(-\lambda_k t_0^{\rho_1}, *\right)\right] v_k(x)}{b_{k,\rho_1}(t_0)}.$$

定理的条件蕴含级数的收敛性

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2(\tau+1)} |\Psi_k|^2 \le C_\Psi < \infty.$$

对于函数 Ψ ，某个 $\tau > \frac{N}{2m}$，以及级数的收敛性

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2(\tau+1)} |\varphi_k|^2 \le C_\varphi < \infty,$$

对于函数 φ。

于是，应用引理 2.1 及 $\alpha = 0$ 并利用恒等式 $A^{-\tau} v_k(x) = \lambda_k^{-\tau} v_k(x)$，我们得到

$$\|f_n^1(x)\|_{C(\Omega)} = \left\| \widehat{A}^{-\tau} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^{\tau} \Psi_k v_k(x)}{b_{k,\rho_1}(t_0)} \right\|_{C(\Omega)} \le C \left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^{\tau} \Psi_k v_k(x)}{b_{k,\rho_1}(t_0)} \right\|_{L^2(\Omega)}. \tag{5.10}$$

根据系统 $v_k(x)$ 的正交归一性，我们有

$$\|f_n^1(x)\|_{C(\Omega)}^2 \le C \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\lambda_k^{\tau} \Psi_k}{b_{k,\rho_1}(t_0)} \right|^2.$$

进一步，应用引理4.1 （下界），我们得到

$$\|f_n^1(x)\|_{C(\Omega)}^2 \le C \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2(\tau+1)} |\Psi_k|^2 \le C \cdot C_\Psi < \infty. \tag{5.11}$$

对函数 $f_n^2(x)$ 采用与上述相同的论证，可得不等式

$$\|f_n^2(x)\|_{C(\Omega)} = \left\| \widehat{A}^{-\tau} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^{\tau} \varphi_k \left[1 - \lambda_k t_0^{\rho_1} E_{\rho',\rho_1+1}\left(-\lambda_k t_0^{\rho_1}, *\right)\right] v_k(x)}{b_{k,\rho_1}(t_0)} \right\|_{C(\Omega)}$$

$$\le C \left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^{\tau} \varphi_k \left[1 - \lambda_k t_0^{\rho_1} E_{\rho',\rho_1+1}\left(-\lambda_k t_0^{\rho_1}, *\right)\right] v_k(x)}{b_{k,\rho_1}(t_0)} \right\|_{L^2(\Omega)}. \tag{5.12}$$

由于系统 $v_k(x)$ 是正交归一的，因此可得

$$\|f_n^2(x)\|_{C(\Omega)}^2 \le C \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\lambda_k^{\tau} \varphi_k \left[1 - \lambda_k t_0^{\rho_1} E_{\rho',\rho_1+1}\left(-\lambda_k t_0^{\rho_1}, *\right)\right]}{b_{k,\rho_1}(t_0)} \right|^2.$$

根据引理2.2，2.4 和4.1 （下界），我们得到

$$\|f_n^2(x)\|_{C(\Omega)}^2 \leq C\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{2(\tau+1)}|\varphi_k|^2 \leq C\cdot C_\varphi < \infty. \tag{5.13}$$

估计（5.11）和（5.13）表明，定义函数 f（x）的级数（5.9）一致收敛。另一方面，（5.10）和（5.12）中的和在对其各项作任意排列后仍然收敛，因为这些项相互正交。这表明级数（5.9）绝对收敛。

利用系数 f_k 的定义，我们研究以下三个和：

$$u_n^1(x,t) = \sum_{k=1}^{n}\varphi_k\left[1-\lambda_k t^{\rho_1}E_{\rho',\rho_1+1}\left(-\lambda_k t^{\rho_1},*\right)\right]v_k(x), \tag{5.14}$$

$$u_n^2(x,t) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\Psi_k b_{k,\rho_1}(t)v_k(x)}{b_{k,\rho_1}(t_0)}, \tag{5.15}$$

$$u_n^3(x,t) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k\left[1-\lambda_k t^{\rho_1}E_{\rho',\rho_1+1}\left(-\lambda_k t^{\rho_1},*\right)\right]b_{k,\rho_1}(t)v_k(x)}{b_{k,\rho_1}(t_0)}. \tag{5.16}$$

设 $|\alpha|\leq m$。我们需要证明，在区域 $\Omega\times(0,\ T]$ 中，对和逐项应用算子 D^α 和 $\partial_t^{\rho_j}$ 后，这些和中的每一个都一致且绝对收敛。

根据引理 2.1，有如下估计

$$\|D^\alpha u_n^1\|_{C(\Omega)} = \left\|D^\alpha\widehat{A}^{-\tau-1}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{\tau+1}\varphi_k\left[1-\lambda_k t^{\rho_1}E_{\rho',\rho_1+1}\left(-\lambda_k t^{\rho_1},*\right)\right]v_k(x)\right\|_{C(\Omega)}$$

$$\leq C\left\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{\tau+1}\varphi_k\left[1-\lambda_k t^{\rho_1}E_{\rho',\rho_1+1}\left(-\lambda_k t^{\rho_1},*\right)\right]v_k(x)\right\|_{L^2(\Omega)}. \tag{5.17}$$

利用系统 $v_k(x)$ 的正交归一性，我们得到

$$\|D^\alpha u_n^1\|_{C(\Omega)}^2 \leq C\sum_{k=1}^{n}\left|\lambda_k^{\tau+1}\varphi_k\left[1-\lambda_k t^{\rho_1}E_{\rho',\rho_1+1}\left(-\lambda_k t^{\rho_1},*\right)\right]\right|^2.$$

应用引理2.2，可得

$$\|D^\alpha u_n^1\|_{C(\Omega)}^2 \leq C\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{2(\tau+1)}|\varphi_k|^2 \leq C\cdot C_\varphi < \infty.$$

类似地，对于 $u_n^2(x,t)$，有

$$\|D^\alpha u_n^2\|_{C(\Omega)} = \left\|D^\alpha\widehat{A}^{-\tau-1}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{\tau+1}\frac{\Psi_k b_{k,\rho_1}(t)v_k(x)}{b_{k,\rho_1}(t_0)}\right\|_{C(\Omega)}$$

$$\leq C\left\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{\tau+1}\frac{\Psi_k b_{k,\rho_1}(t)v_k(x)}{b_{k,\rho_1}(t_0)}\right\|_{L^2(\Omega)}. \tag{5.18}$$

由系统 $v_k(x)$ 的正交归一性可得

$$\|D^{\alpha}u_n^2\|_{C(\Omega)}^2 \le C\sum_{k=1}^{n}\left|\lambda_k^{\tau+1}\frac{\Psi_k b_{k,\rho_1}(t)}{b_{k,\rho_1}(t_0)}\right|^2.$$

令 $g\in C[0,T]$ 并定义 $\|g\|=\max\limits_{0\le t\le T}|g(t)|$. 那么,

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^t (t-\xi)^{\rho_1-1}E_{\rho',\rho_1}(-\lambda_k(t-\xi)^{\rho_1})\,g(\xi)\,d\xi\right|\\ &\le\int_0^t\left|(t-\xi)^{\rho_1-1}E_{\rho',\rho_1}(-\lambda_k(t-\xi)^{\rho_1},*)\right|\,|g(\xi)|\,d\xi\\ &\le\|g\|\int_0^t\left|(t-\xi)^{\rho_1-1}E_{\rho',\rho_1}(-\lambda_k(t-\xi)^{\rho_1},*)\right|\,d\xi.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^t (t-\xi)^{\rho_1-1}E_{\rho',\rho_1}(-\lambda_k(t-\xi)^{\rho_1},*)\,g(\xi)\,d\xi\right|^2\\ &\le\|g\|^2\left(\int_0^t\left|(t-\xi)^{\rho_1-1}E_{\rho',\rho_1}(-\lambda_k(t-\xi)^{\rho_1},*)\right|\,d\xi\right)^2.\end{aligned}$$

利用引理2.2，2.3和4.1（下界），我们得到

$$\|D^{\alpha}u_n^2\|_{C(\Omega)}^2\le C||g||^2\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{2(\tau+1)}|\Psi_k|^2\le C\cdot||g||^2\cdot C_{\Psi}<\infty.$$

对于 $u_n^3(x,\ t)$，有如下估计:

$$\begin{aligned}\|D^{\alpha}u_n^3\|_{C(\Omega)}&=\left\|D^{\alpha}\widehat{A}^{-\tau-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k^{\tau+1}\varphi_k\left[1-\lambda_k t^{\rho_1}E_{\rho',\rho_1+1}\left(-\lambda_k t^{\rho_1},*\right)\right]b_{k,\rho_1}(t)v_k(x)}{b_{k,\rho_1}(t_0)}\right\|_{C(\Omega)}\\ &\le C\left\|\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k^{\tau+1}\varphi_k\left[1-\lambda_k t^{\rho_1}E_{\rho',\rho_1+1}\left(-\lambda_k t^{\rho_1},*\right)\right]b_{k,\rho_1}(t)v_k(x)}{b_{k,\rho_1}(t_0)}\right\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}\tag{5.19}$$

根据系统 $v_k(x)$ 的正交归一性，我们得到

$$\|D^{\alpha}u_n^3\|_{C(\Omega)}^2\le C\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\lambda_k^{\tau+1}\varphi_k\left[1-\lambda_k t^{\rho_1}E_{\rho',\rho_1+1}\left(-\lambda_k t^{\rho_1},*\right)\right]b_{k,\rho_1}(t)}{b_{k,\rho_1}(t_0)}\right|^2.$$

应用引理 2.2、2.3、2.4和 4.1(下界)，并结合假设 $g(t)\in C[0,T]$，得到

$$\|D^{\alpha}u_n^3\|_{C(\Omega)}^2\le C||g||^2\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{2(\tau+1)}|\varphi_k|^2\le C\cdot||g||^2\cdot C_{\varphi}<\infty.$$

这表明，在闭柱体 Ω $D^{\alpha},\ |\alpha|\le m$（0, ×）中应用空间导数 $T]$, 后，级数（5.14）–（5.16）一致收敛。另一方面，级数（5.17）–（5.19）在其项的任意排列下均收敛，因为这些项相互正交。因此，求导后的级数（5.14）–（5.16）绝对收敛。

现在，只需验证逐项将算子 $\partial_t^{\rho_j}$ 作用于定义解 u的级数（5.8）x,t（{v?}

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{M} q_j \partial_t^{\rho_j} T_k(t) v_k(x) = -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k T_k(t) v_k(x) + g(t) \sum_{k=1}^{n} f_k v_k(x) =$$

$$= -A(x,D)\, \widehat{A}^{-\tau-1} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{\tau+1} T_k(t) v_k(x) + g(t) \widehat{A}^{-\tau} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{\tau} f_k v_k(x).$$

右侧级数的绝对收敛性和一致收敛性已在上文证明。

函数(5.8)和(5.9)满足反问题的所有条件(1.1)–(1.4)，这是显而易见的。□

定理 5.2。令 $\varphi \in D(\widehat{A}^{\tau+1})$ 和 $\Psi \in D(\widehat{A}^{\tau+1})$，其中 $\tau > \frac{N}{2m}$，且 $g(t) \in C^1[0,T]$，$g(0) \neq 0$。

1）若集合 K_{0,ρ_1} 为空，即 $b_{k,\rho_1}(t_0) \neq 0$，对于所有 k，则反问题 (1.1)–(1.4)存在解：

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi_k v_k(x)}{b_{k,\rho_1}(t_0)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k \left[1 - \lambda_k t_0^{\rho_1} E_{\rho',\rho_1+1}\left(-\lambda_k t_0^{\rho_1}, *\right)\right] v_k(x)}{b_{k,\rho_1}(t_0)},$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \left[1 - \lambda_k t^{\rho_1} E_{\rho',\rho_1+1}\left(-\lambda_k t^{\rho_1}, *\right)\right] v_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k b_{k,\rho_1}(t) v_k(x).$$

2）若集合 K_{0,ρ_1} 非空，则反问题存在解的充要条件是满足以下条件

$$\Psi_k = \varphi_k \left[1 - \lambda_k t_0^{\rho_1} E_{\rho',\rho_1+1}\left(-\lambda_k t_0^{\rho_1}, *\right)\right], \quad k \in K_{0,\rho_1}. \tag{5.20}$$

得到满足。在这种情况下，问题的解 (1.1)–(1.4) 可以写成如下形式：

$$f(x) = \sum_{k \in K_{\rho_1}} \frac{\Psi_k - \varphi_k \left[1 - \lambda_k t_0^{\rho_1} E_{\rho',\rho_1+1}\left(-\lambda_k t_0^{\rho_1}, *\right)\right]}{b_{k,\rho_1}(t_0)} v_k(x) + \sum_{k \in K_{0,\rho_1}} f_k v_k(x),$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k \left[1 - \lambda_k t^{\rho_1} E_{\rho',\rho_1+1}(-\lambda_k t^{\rho_1}, *)\right] + f_k b_{k,\rho_1}(t)\right) v_k(x),$$

其中 f_k、$k \in K_{0,\rho_1}$ 为任意实数。

证明。该定理第一部分的证明与定理 5.1 的证明完全类似。关于该定理第二部分的证明，我们指出如下：

若 $k \in K_{\rho_1}$，则 (5.5) 与 (5.7) 直接由 (5.6) 得出。

另一方面，若 $k \in K_{0,\ \rho_1}$，即 $b_{k,\ \rho_1}(t_0) = 0$，则方程 (5.6) 对 f_k 有解，当且仅当条件 (5.20) 得到满足。在这种情况下，f_k 的相应值可以任意选取。

此外，正如推论（4.3）和（4.4）中所指出的，集合$K_{0,\ \rho_1}$只含有限个元素。□

注 5.3。 要满足条件（5.20），只需满足以下正交条件：

$$\varphi_k = (\varphi, v_k) = 0, \qquad \Psi_k = (\Psi, v_k) = 0, \qquad k \in K_{0,\rho_1}.$$

6. Uniqueness

定理 6.1. 设函数 $\varphi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 在闭区域Ω中连续，且 K_{0,ρ_1} 为空。则问题 (1.1)–(1.4) 至多存在一个经典解 $(u(x,t)\ f(x))$。

证明。 假设在定理的条件下，存在两组解 $(u_1(x,t)\ f_1(x))$ 和 $(u_2(x,t)\ f_2(x))$。我们证明

$$u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t) \equiv 0, \qquad f(x) = f_1(x) - f_2(x) \equiv 0.$$

由于所考虑的问题是线性的，因此数对 $(u(x,t)\ f(x))$ 满足以下问题：

$$\sum_{j=1}^{M} q_j \partial_t^{\rho_j} u(x,t) + A(x,D)u(x,t) = f(x)g(t), \quad x \in \Omega,\ 0 < t \le T, \tag{6.1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{6.2}$$

$$B_j u(x,t) = \sum_{|\alpha| \le m_j} b_{\alpha,j}(x) D^{\alpha} u(x,t) = 0, \tag{6.3}$$

$$0 \le m_j \le m-1, \quad j = 1, \dots, l, \quad x \in \partial\Omega,\ 0 < t \le T,$$

$$u(x,t_0) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{6.4}$$

设 $v_k(x)$ 是谱问题 (2.1)–(2.2) 对应于特征值 λ_k 的任意特征函数。考虑函数

$$w_k(t) = \int_{\Omega} u(x,t) v_k(x)\, dx. \tag{6.5}$$

由 (6.1)，我们得到

$$\sum_{j=1}^{M} q_j \partial_t^{\rho_j} w_k(t) = \sum_{j=1}^{M} q_j \int_{\Omega} \partial_t^{\rho_j} u(x,t) v_k(x)\, dx$$

$$= -\int_{\Omega} A(x,D)u(x,t)v_k(x)\, dx + g(t)\int_{\Omega} f(x)v_k(x)\, dx.$$

根据特征函数的定义，我们可知

$$\sum_{j=1}^{M} q_j \partial_t^{\rho_j} w_k(t) = -\int_{\Omega} u(x,t)A(x,D)v_k(x)\, dx + f_k g(t) = -\lambda_k w_k(t) + f_k g(t).$$

因此， $w_k(t)$ 满足柯西型问题

$$\sum_{j=1}^{M} q_j \partial_t^{\rho_j} w_k(t) + \lambda_k w_k(t) = f_k g(t), \qquad w_k(0) = 0,$$

$$w_k(t_0) = 0. \tag{6.6}$$

根据（5.5），该问题的解具有如下形式

$$w_k(t) = f_k b_{k,\rho_1}(t).$$

利用附加条件（6.6），我们得到

$$w_k(t_0) = f_k b_{k,\rho_1}(t_0) = 0. \tag{6.7}$$

由于$K_{0,\ \rho_1}$ 为空，我们有

$$b_{k,\rho_1}(t_0) \neq 0 \quad \text{for all } k.$$

因此，对所有 k，$f_k = 0$。于是，对所有 k，w_k（t）$\equiv 0$。根据特征函数系 v_k的完备性，可得

$$f(x) \equiv 0, \qquad u(x,t) \equiv 0.$$

Th这证明了反问题（1.1）–（1.4）解的唯一性 . □

注 6.2。如果 $K_{0,\ \rho_1}$ 非空，则解不唯一。事实上，如果 $b_{k,\ \rho_1}$（t_0）$= 0$对某个 k成立，则关系式（6.7）对任意取值的 f_k都成立。因此，反问题有无穷多个解。

7. Special case of the operator $A(x,\ D)$

论文 [27] 研究 $L^2(\Omega)$ 中椭圆算子$\widehat{}$的一般自伴扩张，这些算子最初定义在 $C_0^\infty(\Omega)$ 上。本文所用的自伴算子 A 属于这一类。特别地，由 [27] 可知，索博列夫空间$\backsim L_2^{\tau m}(\Omega)$ 中在 Ω 内具有紧支撑的函数包含在 A^τ的定义域中。

作为定理5.1 和定理5.2 的一个应用，我们考虑环面 $\mathbb{T}^N$，$\mathbb{T}^N = (-\pi,\ \pi]^N$上的反问题。设

$$A(D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha,$$

为一个具有常系数的齐次椭圆、对称正算子。我们研究多项时间分数阶反问题

$$\sum_{j=1}^{M} q_j \partial_t^{\rho_j} u(x,t) + A(D)u(x,t) = f(x)g(t), \quad (x,t) \in \mathbb{T}^N \times (0,T], \tag{7.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{T}^N, \tag{7.2}$$

$$u(x,t_0) = \Psi(x), \quad x \in \mathbb{T}^N. \tag{7.3}$$

假定所涉及的所有函数关于每个空间变量均为 2π周期的。$A(D)$在 $L^2(\mathbb{T}^N)$中的闭包 $\widehat{A}$ 是自伴的，并具有标准正交特征函数

$$(2\pi)^{-N/2} e^{in\cdot x}, \quad n \in \mathbb{Z}^N,$$

其特征值为 $A(n)$。根据谱定理，对于 $\tau \geq 0$,

$$\widehat{A}^\tau h(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} A^\tau(n)\, h_n e^{in\cdot x},$$

其区域为

$$D(\widehat{A}^{\tau})=\left\{h\in L^{2}(\mathbb{T}^{N}):\sum_{n\in\mathbb{Z}^{N}}A^{2\tau}(n)\left|h_{n}\right|^{2}<\infty\right\}. \tag{7.4}$$

为了用 Sobolev 空间来定义这个区域，回顾一下，函数 $h\in L^{2}(\mathbb{T}^{N})$ 属于 Sobolev 空间 $L_{2}^{a}(\mathbb{T}^{N})$ [28], 当实数 $a>0$满足以下条件时，当且仅当

$$\|h\|_{L_{2}^{a}(\mathbb{T}^{N})}^{2}=\sum_{n\in\mathbb{Z}^{N}}(1+|n|^{2})^{a}|h_{n}|^{2}<\infty, \tag{7.5}$$

其中， h_{n} 是 h 关于 $L^{2}(\mathbb{T}^{N})$中的正交归一特征函数 $(2\pi)^{-N/2}e^{in\cdot x}$ 的傅里叶系数。容易验证，存在常数 c_{1}和 c_{2} ，使得以下估计成立

$$c_{1}\left(1+|n|^{2}\right)^{\tau m}\leq 1+A^{2\tau}(n)\leq c_{2}\left(1+|n|^{2}\right)^{\tau m}.$$

因此，通过比较表达式（7.4）和（7.5），我们得出

$$D(\widehat{A}^{\tau})=L_{2}^{\tau m}(\mathbb{T}^{N}).$$

定理7.1。设 φ， $\Psi\in L_{2}^{\tau+m}(\mathbb{T}^{N})$ 其中 $\tau>\frac{N}{2}$且 $g\in C[0,T]$， $g(t)\neq 0$。那么，反问题 $(u(x,\ t)\ f(x))$ 存在一个经典解，可表示为以下形式(7.1)–(7.3)，

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^{N}}\frac{\left(\Psi_{n}-\varphi_{n}\left[1-A(n)t_{0}^{\rho_{1}}E_{\rho',\rho_{1}+1}\left(-A(n)t_{0}^{\rho_{1}},*\right)\right]\right)e^{inx}}{b_{n,\rho_{1}}(t_{0})},$$

$$u(x,t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^{N}}\varphi_{n}\left[1-A(n)t^{\rho_{1}}E_{\rho',\rho_{1}+1}\left(-A(n)t^{\rho_{1}},*\right)\right]e^{inx}+\sum_{n\in\mathbb{Z}^{N}}f_{n}b_{n,\rho_{1}}(t)e^{inx}.$$

定理7.2. 设 φ， $\Psi\in L_{2}^{\tau+m}$ $(\mathbb{T}^{N})$ 其中 $\tau>\frac{N}{2}$且 $g\in C^{1}[0,T]$， $g(0)\neq 0$，*1*）若集合 $K_{0,\ \rho_{1}}$ 为空，即 $b_{n,\ \rho_{1}}\neq 0$，对所有 n 则反问题存在唯一解 （7.1）–（7.3）：

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^{N}}\frac{\left(\Psi_{n}-\varphi_{n}\left[1-A(n)t_{0}^{\rho_{1}}E_{\rho',\rho_{1}+1}\left(-A(n)t_{0}^{\rho_{1}},*\right)\right]\right)e^{inx}}{b_{n,\rho_{1}}(t_{0})},$$

$$u(x,t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^{N}}\varphi_{n}\left[1-A(n)t^{\rho_{1}}E_{\rho',\rho_{1}+1}\left(-A(n)t^{\rho_{1}},*\right)\right]e^{inx}+\sum_{n\in\mathbb{Z}^{N}}f_{n}b_{n,\rho_{1}}(t)e^{inx}.$$

2）若集合 $K_{0,\ \rho_{1}}$ 非空，则反问题解的存在性的充要条件是下列条件

$$\Psi_{n}=\varphi_{n}\left[1-A(n)t_{0}^{\rho_{1}}E_{\rho',\rho_{1}+1}\left(-A(n)t_{0}^{\rho_{1}},*\right)\right],\qquad n\in K_{0,\rho_{1}},$$

成立。此时，问题 （7.1）–（7.3） 的解存在但不唯一：

$$f(x)=\sum_{n\in K_{\rho_{1}}}\frac{\left(\Psi_{n}-\varphi_{n}\left[1-A(n)t_{0}^{\rho_{1}}E_{\rho',\rho_{1}+1}\left(-A(n)t_{0}^{\rho_{1}},*\right)\right]\right)e^{inx}}{b_{n,\rho_{1}}(t_{0})}+\sum_{n\in K_{0,\rho_{1}}}f_{n}e^{inx},$$

$$u(x,t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^{N}}\left(\varphi_{n}\left[1-A(n)t^{\rho_{1}}E_{\rho',\rho_{1}+1}\left(-A(n)t^{\rho_{1}},*\right)\right]+f_{n}b_{n,\rho_{1}}(t)\right)e^{inx},$$

其中 f_{n},$n\in K_{0,\ \rho_{1}}$ 为任意常数。

定理的证明 7.1 和 7.2 与定理的证明完全类似 5.1和 5.2。然而，需要强调的是，在引理 2.1中，算子 A 是正的，而问题（7.1）中考虑的算子是非负的。因此，在定理7.1 和 7.2的证明中，我们使用算子$A+I$，其中 I 是 $L_2(\Omega)$ 中的恒等算子。

8. Conclusion

本文研究了一个多项含 Caputo 导数的时间分数阶扩散方程的反源问题。假设源项具有可分离形式 $f(x)g(t)$，并根据施加于某个内部时刻的附加超定条件，求得未知的空间分量。

方程的椭圆部分由一个阶数为 $m \geq 2$ 的一般自伴正算子 $A(x,\ D)$ 描述。利用与该算子相关的谱分解，将反问题化为一系列多项分数阶常微分方程。其解可用多项式 Mittag–Leffler 函数表示。

对相应的多项式 Mittag–Leffler 函数进行了详细的渐近分析，建立了尖锐的渐近估计，并据此推导出重构公式中谱分母的一致下界。这些估计对于保证非退化情形下反问题的适定性至关重要。

在给定数据满足适当光滑性假设的条件下，本文得到了保证经典解存在的充分条件，并严格证明了相应傅里叶级数的一致收敛性和绝对收敛性。此外，证明了当谱分母的零点集合为空时解具有唯一性。在退化情形下，推导出了必要且充分的相容条件，并完整刻画了非唯一性的结构。

进一步地，本文将抽象结果具体应用于环面上的常系数齐次椭圆算子，并明确指出算子分数幂的定义域与 Sobolev 空间相一致。该例展示了所提出谱方法的适用性及其清晰的结构。

所得结果为多项时间分数阶反源问题提供了全面的分析框架，并将现有适定性理论拓展至一大类椭圆算子。

Acknowledgements

本研究未获得外部资助。

References

[1] Machado, J.A.T., Kiryakova, V.: 《分数阶微积分的近期发展史：数据与统计》。载于：Kochubei, A., Luchko, Yu.（编），《分数阶微积分及其应用手册：基础理论》，第1卷，第1–21页[2] Mainardi, F.: 分数阶黏弹性。载于：Kochubei, A., Luchko, Yu.（编），《分数阶微积分及其应用手册：物理学中的应用》，A辑，第4卷，第153-181页

[3] Podlubny, I.：《分数阶微分方程》。Academic Press，圣迭戈（1999）[4] Baleanu, D., Magin, R.L., Bhalekar, S., Daftardar-Gejji, V.：具有时滞的分数阶非线性布洛赫方程中的混沌。Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.**25**(1), 41–49 (2015). https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2015.01.004[5]Jiang, X., Qi, H.：采用修正 Riemann–Liouville 分数阶导数的生物热传递热波模型。J. Phys. A: Math. Theor. **45**(48), article ID 485101 (2012). https://doi.org/10.1088/1751-8113/45/48/485101[6] Uchaikin, V.V.：《物理学家和工程师用分数阶导数：应用》，第2卷。施普林格，柏林/海德堡（2013）[7] Kanth, A.R., Garg, N.：一类多项时间分数阶扩散方程的隐式数值格式。Eur. Phys. J. Plus **134**(6), article ID 312 (2019). https://doi.org/10.1140/epjp/i2019-12696-8[8] Ahmad, I., Ahmad, H., Thounthong, P., Chu, Y.M., Cesarano, C.：采用局部无网格方法求解数学生物学和物理学中出现的多项时间分数阶偏微分方程模型。《Symmetry》**12**(7), article ID 1195 (2020). https://doi.org/10.3390/sym12071195[9]Schumer, R., Benson, D.A., Meerschaert, M.M., Baeumer, B.：分形移动/非移动溶质运移。Water Resour. Res. **39**(10), article ID 1296 (2003). https://doi.org/10.1029/2003WR002141 [10] Jin, B., Lazarov, R., Liu, Y., Zhou, Z.：求解多项时间分数阶扩散方程的伽辽金有限元法。J. Comput. Phys. **281**, 825–843 (2015). https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.10.051 [11] Yushan, L., Yuxuan, Y., Nanbo, Ch.：多项时空分数阶扩散方程中时变源项的识别。《Mathematics》**13**(13), article ID 2123 (2025). https://doi.org/10.3390/math13132123[12] Shams, U.A., Sirajul, H., Ihteram, A., Saud, F.A.：多项时间分数阶微分方程的伽辽金逼近。Ain Shams Eng. J.**15**(7), article ID 102806 (2024). https://doi.org/10.1016/j.asej.2024.102806[13] Liu, Y.：多项时间分数阶扩散方程的强最大值原理及其在反源问题中的应用。Comput. Math. Appl. **73**, 96–108 (2017). https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.10.021[14] Fan, W., Liu, F., Jiang, X., Turner, I.：多项时间分数阶偏微分方程反问题的一些新型数值方法。J. Comput. Appl. Math. **336**, 114–126 (2018). https://doi.org/10.1016/j.cam.2017.12.034[15] Derbissaly, B., Sadybekov, M.：具有非局部边界条件的多项时间分数阶扩散方程反源问题。AIMS Math.**9**(4), 9969–9988 (2024). https://doi.org/10.3934/math.2024488[16]Li, Y.S., Sun, L.L., Zhang, Z.Q., Wei, T.：多项时间分数阶扩散方程中时变源项的识别。Numer. Algorithms**82**, 1279–1301 (2019). https://doi.org/10.1007/s11075-019-00654-5[17] Malik, S.A., Ilyas, A., Samreen, A.：多项时空分数阶扩散方程中源项和扩散浓度的同时确定。Math. Model. Anal.**26**, 411–431 (2021). https://doi.org/10.3846/mma.2021.11911 [18]Sun, L.L., Yan, X.B.：分布阶时间分数阶扩散方程的反源问题。Adv. Math. Phys. **2020**, article ID 1825235 (2020). https://doi.org/10.1155/2020/1825235[19]Agmon, S.：一般椭圆边值问题的特征函数与特征值。Commun. Pure Appl. Math. **15**(2), 119–143 (1962). https://doi.org/10.1002/cpa.3160150203[20] Krasnosel'skii, M.A., Zabreiko, P.P., Pustyl'nik, E.I., Sobolevskii, P.E.：《可积函数空间中的积分算子》。Noordhoff，莱顿（1976）[21] Luchko, Y., Gorenflo, R.：一种求解含 Caputo 导数的分数阶微分方程的运算方法。Acta Math. Vietnam. **24**, 207–233 (1999)

[22] Li, Z., Liu, Y., Yamamoto, M.：具有正常数系数的多项时间分数阶扩散方程的初边值问题。Appl. Math. Comput.**257**, 381–397（2015）。
https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.11.073[23] Sun, L.L., Chang, M.L.：多项时间分数阶扩散方程的Galerkin谱方法及其在反源问题中的应用。Networks Heterog. Media**18(1)**, 212–243（2023）。https://doi.org/10.3934/nhm.2023008[24]Kiryakova, V.：多重（多指标）Mittag-莱夫勒函数及其与广义分数阶微积分的关系。J. Comput. Appl. Math. **118**, 241–259（2000）。https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00292-2[25] Lavault, C.：二元Mittag-莱夫勒型函数的积分表示与渐近行为。Adv. Oper. Theory **3**(2), 40–48（2018）[26]Frederick, M., Karel, V.B.：分数阶单相滞后热方程弱解的存在性与唯一性。Fract. Calc. Appl. Anal.**26**, 1663–1690（2023）。
https://doi.org/10.1007/s13540-023-00177-w[27] Alimov, Sh.A.：椭圆算子的分数阶幂与可微函数类的同构。Differ. Uravn. **8**(9), 1609–1626（1972）[28] Alimov, Sh.A., Ashurov, R.R., Pulatov, A.K.：多重级数与傅里叶积分。Itogi Nauki Tekhn., Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr. **42**, 7–104（1989）

Ravshan Ashurov: V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences, University street 9, Tashkent–100174, Uzbekistan电子邮箱地址: ashurovr@gmail.com

Damir Shamuratov: V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences, University street 9, Tashkent–100174, Uzbekistan电子邮箱地址: damirshamuratov5@gmail.com