arXiv:2603.01838v1 [math.OC] 2 Mar 2026

利用渐近展开对具有奇异终端条件的倒向随机微分方程进行时间离散化。

Julia Ackermann[1], Thomas Kruse[2],Alexandre Popier[3]

[1] 伍珀塔尔大学数学与信息学系，德国；电子邮件：jackermann a○uni-wuppertal.de[2] 伍珀塔尔大学数学与信息学系，德国；电子邮件：tkruse a○uni-wuppertal.de[3] 勒芒大学曼恩数学实验室，法国；电子邮件：alexandre.popier a○univ-lemans.fr

2026年3月3日

摘要

我们研究一类具有奇异终端条件的倒向随机微分方程（BSDE），并构造一种数值格式来逼近其解。为此，我们将幂函数情形下已知的倒向随机微分方程解的渐近展开推广到更一般的生成元；这一幂函数情形源于最优清算问题。该展开有助于在接近终端时刻处获得倒向随机微分方程解的适当逼近。以此作为终端条件，我们分析后向隐式欧拉格式的误差，并详细说明误差对终端条件的依赖关系。

目录

1 引言 **2**

2 奇异倒向随机微分方程的隐式欧拉格式时间离散化 **7**
2.1 有界终端条件下方程 (1) 的隐式欧拉格式误差分析 8 2.2 奇异终端条件下方程 (1) 的隐式欧拉格式误差分析 12

3 在 T 附近对 Y 的展开 **13**
3.1 主要结果.13 3.2 定理2的证明.16 3.3 例子.23 3.3.1 幂函数情形.23 3.3.2 指数情形.24 3.4 将生成元与指数情形进行比较.24

4 结论与展望 **25**

A 某些技术结果的证明 **26**

1 引言

本文考虑如下形式的倒向随机微分方程（简称 BSDE）：

$$-dY_t = \left(\frac{1}{\eta_t} f(Y_t) + \lambda_t\right) dt - Z_t dW_t, \quad t \in [0, T), \tag{1}$$

满足奇异终端条件 $\xi = +\infty$ （几乎处处），其中 W 是滤过概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}_T, (\mathcal{F}_t)^{t\in[0,T]},$ $\mathbb{P})$ 上的 d 维布朗运动（该空间满足通常条件，且 $(\mathcal{F}_t)^{t\in[0,T]}$ 是由 W 生成的滤过）。

这类倒向随机微分方程在金融领域的最优清算问题中作为伴随方程出现（综述见 [11] ）。事实上，在论文 [2]，中，作者利用奇异反向随机微分方程的解这一概念，为随机控制问题提供了纯概率论的解，该问题旨在最小化

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\zeta_t |\dot{X}_t|^p + \lambda_t |X_t|^p\right) dt\right] \tag{2}$$

在满足 $X_0 = x \in \mathbb{R}$ 且$X_T = 0$ 几乎处处成立、并具有绝对连续路径的所有渐进可测过程 X: $\Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ 中进行选择。他们证明，价值函数由 $|x|^p Y_0$ 给出，其中 Y 是下列方程的解

$$-dY_t = -\frac{p-1}{\zeta_t^{q-1}} |Y_t|^{q-1} Y_t dt + \lambda_t dt - Z_t dW_t, \quad t \in [0, T). \tag{3}$$

这里， $q > 1$，而 p 是其赫尔德共轭。此外，随机控制问题的最优状态过程也取决于 Y，其形式为 $x\exp(-\int_0^t \zeta_u^{1-q} |Y_u|^{q-1} du)$（详情见 [2] ）。

在文献中，求解倒向随机微分方程 (1) 主要有两种不同的方法。

- [22, 2, 18] 中提出的截断过程：解是由一列具有有界系数的解递增收敛得到的。

- 如 [8, 9, 10] 中所述的渐近展开：解的展开式用一些已知系数以及一个具有奇异生成元、但终端条件为零的倒向随机微分方程的解来表示。

第一种方法更容易理解，而且与 [10] 相比， [18] 对数据（f、 η、 λ）的假设要宽松得多。此外，可以考虑任意终端条件 ξ ，而不局限于 $\xi = +\infty$。然而，逼近序列的收敛速率尚不明确，因此无法用于数值计算。第二种方法对参数和 $\xi = +\infty$ 的条件要求更强，但能更好地理解解在终止时刻 T 附近的行为。

还要指出，在马尔可夫情形下，倒向随机微分方程 (1) 与反应—扩散偏微分方程（简称 PDE）相关。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u + \frac{1}{\eta(t,x)} f(u) + \lambda(t,x) = 0, \tag{4}$$

其中 $\mathcal{L}$ 是相应的无穷小生成元（此处为二阶微分算子）（关于倒向随机微分方程与偏微分方程之间的联系，参见 [21, 第 5 章。4] 或第 [25, 5 章和第 8] 章）。这一关系用于 [8, 9], ，而终端条件为 $u(T,\cdot) = +\infty$的此类偏微分方程已得到广泛研究，条件是 $f(y) = -y|y|^{q-1}$ 满足 $q > 1$ （另请参见 [5, 20, 23]）。

因此，关于倒向随机微分方程 (1) 的理论已经相当成熟。但迄今尚无关于其解的数值计算的研究。对于实际应用（金融中的清算）而言，这一缺憾是一个主要障碍。在 [2, 第 5] 节中，给出了一些特殊例子，在这些例子中，可以计算出 (3) 的显式解 Y；然而，一般来说，无论倒向随机微分方程 (3) 还是倒向随机微分方程 (1)，都没有可用的显式表达式。据我们所知，尚无通过解析方法对上述偏微分方程 (4) 进行数值求解的研究。

本文的主要目标是给出一种数值格式，用于求解 (1) 型倒向随机微分方程。关于终端值可积时求解倒向随机微分方程的算法，已有大量文献，大致可分为以下几类:

- 向后欧拉格式（以及其他许多格式 [6, 19, 24]和 [25, 第 5]章）。该方法要求终端值 ξ 可积，因此当 $\xi = +\infty$时无法使用。
- 皮卡迭代（[14, 15]）。请注意，具有奇异终端条件的倒向随机微分方程的解并非通过不动点论证得到。如前所述，截断逼近基于单调收敛，且没有任何收敛速率。
- 基于分枝过程的向前格式（[12, 13]）。这类格式适用于幂型生成元，但要求倒向随机微分方程具有有界终端条件。

这些方法都无法直接用于我们的框架。我们分两步进行。

1. 我们在 T 的某个邻域上找到倒向随机微分方程解的良好近似，即找到 $\Delta > 0$、$\alpha > 0$ 以及一个显式的、适应的、有界随机过程 ξ，使得 $Y - \xi$ 的 L^∞-范数在 $[T-\Delta, T]$ 上由 $t \mapsto C(T-t)^\alpha$ 控制。见下文假设 2。

2. 我们可以从时刻 $T - \Delta$ 起、由位置 $\xi_{T-\Delta}$ 出发使用后向隐式欧拉格式。

第一步的关键思想是将 [8, 9, 10] 中提出的解的渐近展开推广到更一般的生成元 f；迄今为止，渐近展开仅对来自最优清算问题的幂函数情形是已知的。

接下来，我们推导出采用我们的逼近技术得到的 Y 的全局误差。向后欧拉格式的离散误差已得到广泛研究，研究范围甚至涵盖了比我们的问题更

一般的情形（例如，参见 [6, 7, 19]）。然而，在这些研究中，会出现许多常数，而这些常数实际上取决于终端条件，或通过其取值，或通过其正则性（例如，其 Lipschitz 常数）体现出来。当终端条件固定时，这种依赖关系并不重要，因为误差通常具有 Ch^β 的形式，其中 h 是离散步长，C 取决于所有参数。这种显式依赖关系隐藏在误差分析中，难以评估（例如，参见 [25, 定理 5.2.4 和 5.3.3]）。然而，在我们的情形中，当参数 Δ 变小时，终端条件的范数会增大。因此，必须始终在离散误差中出现的所有常数里追踪这种依赖关系。通过数值求解此类倒向随机微分方程，可以利用关系 $u(t,x) = Y^{t,\,x}_{\,t}$，计算相应的具有无穷终端条件的偏微分方程 (4) 的解。因此，这种方法也为求解此类偏微分方程提供了有效的算法框架。据我们所知，目前在偏微分方程理论框架内还不存在此类算法。

论文结构。 在回顾了关于具有奇异终端条件的倒向随机微分方程的现有结果后，论文第2节致力于分析隐式欧拉格式的误差。如前所述，为了准确追踪所有相关参数对结果的影响，我们给出了完整的分析（见定理1）。据我们所知，这是首次量化具有奇异终端条件的倒向随机微分方程的离散误差。随后在第3节中，我们建立了生成元 f 所需满足的充分条件，以确保数值实现所需的逼近有效（见定理2），从而推广了幂型非线性情形下的已有结果。技术性证明见附录（A节）。

记号。 注意，对于 $p \geq 1$

- $\mathbb{D}^p(0,T)$ 是所有适应的 càdlàg[1] 过程 X 构成的空间，使得

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^p\right] < +\infty.$$

- $\mathbb{H}^p(0,T)$ 是所有可预测过程 X 构成的子空间，使得

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |X_t|^2 dt\right)^{\frac{p}{2}}\right] < +\infty.$$

- $\mathbb{S}^p(0,T) = \mathbb{D}^p(0,T) \times \mathbb{H}^p(0,T)$ 和 $\mathbb{S}^\infty(0,T) = \bigcap_{p\geq 1} \mathbb{S}^p(0,T)$。

每当定义中出现记号 $T-$ 时，我们指的是所有过程构成的集合：将 $T-$ 替换为任意 $T-\varepsilon$、$\varepsilon > 0$ 后，这些过程的限制均满足相应性质。例如，$\mathbb{S}^p(0,T-) = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathbb{S}^p(0, T-\varepsilon)$。对于任意 $t \in [0,T]$，关于 $\mathcal{F}_t$ 的条件期望记为 $\mathbb{E}_t[\cdot]$。

[1] F表示右连续、左极限存在的法语首字母缩写 极限

设定与已知结果

在此处以及论文其余部分，我们保留 [10], 的条件，即固定 T，并且有:

假设 1

(A1) 存在三个常数 $0 < \eta_\star < \eta^\star$ 和 $\lambda^\star \geq 0$，使得几乎处处对任意 $t \in [0,T]$ 均有

$$\eta_\star \leq \eta_t \leq \eta^\star, \qquad 0 \leq \lambda_t \leq \lambda^\star.$$

(A2) 过程 η 是一个伊藤过程

$$d\eta_t = b_t^\eta \, dt + \sigma_t^\eta \, dW_t, \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

使得过程 b^η和 σ^η分别属于 $L^\infty(\Omega \times [0,T];\ \mathbb{R})$和 $L^\infty(\Omega \times [0,T];\ \mathbb{R}^{1\times d})$。

(A3) 函数 $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 连续且非递增，并且 $f(0) = 0$。此外，在 $[0,\infty)$上，f 是凹函数且属于 C^2类。

(A4) 函数 $G : (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$G(x) := \int_x^\infty \frac{1}{-f(y)} \, dy, \quad x \in (0,\infty), \tag{6}$$

在$(0,\infty)$上良定义，且取值于$(0,\infty)$。

此外，同样如 [10], 中，我们用

$$\phi\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$$

表示(**A4**)中函数 G 的反函数。注意，ϕ 求解常微分方程 $\phi' = f \circ \phi$，其初始条件为 $\lim_{x\to 0} \phi(x) = \infty$。

例1 从具有利普希茨系数 b 和σ 的随机微分方程的任一解 X 出发，使得 $|b(t,0)| + \|\sigma(t,0)\| \leq C$，对 $\eta = \varphi(X)$应用伊藤公式，其中 $\varphi(x) = \frac{\eta^\star - \eta_\star}{\pi}\arctan(x) + \frac{\eta^\star + \eta_\star}{2}$。则 η 满足所有所需条件(**A1**) 和(**A2**)。

由 [10, 命题 4], ，在前述假设 1下，倒向随机微分方程(1)有唯一的非负解$(Y,Z) \in \mathbb{S}^\infty(0,T-)$:

- 几乎处处，对任意 $0 \leq s \leq t < T$,

$$Y_s = Y_t + \int_s^t \left[\frac{1}{\eta_u} f(Y_u) + \lambda_u\right] du - \int_s^t Z_u dW_u.$$

- $Y_t \geq 0$对任意 $t \in [0,T)$，几乎处处。

- 几乎处处极限$\lim_{t\to T} Y_t = +\infty$。

备注 1（关于 (A1) 和 (A2) 的评述）在 *[18],* 中，仅假设 $1/\eta$ 属于$L^1(\Omega \times [0,T];\mathbb{R})$，且 $\eta^{p-1} \in L^{\ell}(\Omega \times [0,T];\mathbb{R})$，其中 $\ell > 1$为某个数，并且对所有 $y \geq 0$， $f(y) \leq -y|y|^{q-1}$ 成立，而 $q,p \in (1,\infty)$ 是赫尔德共轭指数。此外，对 λ 施加了较弱的可积性条件，并且在 *[18]*中可以放宽 λ 的非负性。因此，为了保证最小解的存在性，条件 **(A1)** 和 **(A2)** 可以放宽（参见*[18,*定理 *1]*）。

尽管如此，即使倒向随机微分方程 (1) 的终端条件有界，为了应用已知的数值格式，仍必须加强关于 η 和 λ 的*[18]* 条件；例如，参见*[19,* 条件（*HY0*）*],*，它实质上对应于 **(A1)**。

备注 2（关于（A3）和（A4）的说明）同样，即使没有关于 f 的正则性条件，也能得到存在性（参见 *[18,*定理 *1]*）。非递增条件也可以替换为更一般的单调性条件（参见 *[20]* 中的假设 *A1* 和备注 *1*）。正则性条件用于得到 Y的渐近展开，并保证解的唯一性。

在 *[18],* 中，假设存在某个常数 $q > 1$，使得对任意 $y \geq 0$，都有 $f(y) \leq -y|y|^{q-1}$。在这种情况下，满足**（A4）**。

在第 3 节的附加条件**（A5）**下， [10, 中的定理 10] 证明，Y 具有如下表示

$$Y_t = \phi\left(\mathbb{E}_t\left[\int_t^T \frac{1}{\eta_s}ds\right]\right) - \phi'\left(\mathbb{E}_t\left[\int_t^T \frac{1}{\eta_s}ds\right]\right)\widetilde{H}_t, \quad \forall t \in [0,T), \tag{7}$$

~其中， ϕ 是 G的反函数，而非负过程 H 是一个倒向随机微分方程的唯一解，其终端条件为 0，且具有奇异的[2] 生成元。该展开式 (7) 表明，~与 Y和 H之间存在一一对应关系。然而，这需要计算条件期望 $\mathbb{E}_t[\int_t^T \frac{1}{\eta_s}ds]$。此外， $\widetilde{H}$是通过单调性论证得到的，且没有给出任何收敛速率；由于其相关生成元具有奇异性，对 H 进行~模拟仍是一个未解决问题。因此，这一结果不能直接用于数值应用。

在特殊情形下，若 $f(y) = -y|y|^{q-1}$， $q > 1$，在 [10, 第 4 节中（更多细节另见 [4, 附录] ），证明了另一种展开式：令 p 为 q的赫尔德共轭，则对所有 $t \in [0,T)$，有

$$Y_t = \phi\left(\frac{T-t}{\eta_t}\right) - \phi'\left(\frac{T-t}{\eta_t}\right)H_t = \left(\frac{(p-1)\eta_t}{T-t}\right)^{p-1} + \left(\frac{(p-1)\eta_t}{T-t}\right)^{p} H_t. \tag{8}$$

缺点是， H 并非非负。但其优点是条件期望消失了，而且可以得到关于 $|H|$ 的如下形式的上界： $C(T-t)^2$ ，这表明

$$Y_t - \xi_t := Y_t - \left(\frac{(p-1)\eta_t}{T-t}\right)^{p-1} = O\big((T-t)^{2-p}\big). \tag{9}$$

[2]按照论文 [16] 中的定义。

因此，对于 $1 < p < 2$，也就是 $q > 2$，我们可以得到解的良好逼近 Y，且其在时间 T 附近。

在论文的其余部分，我们将展开式 (8) 推广到更一般的生成元，并说明如何将性质 (9) 用于数值计算。

2 使用隐式欧拉格式对奇异倒向随机微分方程进行时间离散化

我们引用以下结果（见 [10, 引理 3]）：对所有 $0 \le t < T$，几乎处处成立。

$$0 \le Y_t \le \Theta(T-t), \tag{10}$$

其中，Θ 在 $(0,\infty)$ 上满足常微分方程

$$\Theta' = \frac{f(\Theta)}{\eta^\star} + \lambda^\star \tag{11}$$

其初始条件为 $\lim_{x\to 0}\Theta(x) = \infty$。因此，对任意 $\Delta \in (0,T]$，过程 Y 在 $[0, T-\Delta]$ 上有界。

在本节中，我们假设：

假设 2（逼近 Y） 存在 $\tau \in [0,T)$ 以及一个显式的、适应的随机过程 $(\xi_t)_{t\in[\tau,T)}$，$C \in [1,\infty)$ 和 $\alpha \in (0, \infty)$，使得对于所有 $t \in [\tau, T)$，都有

$$\|Y_t - \xi_t\|_\infty \le C(T-t)^\alpha. \tag{12}$$

在该假设以及假设 1 下，我们利用（10）可推得

$$\forall \Delta \in (0, T-\tau]: \quad \|\xi_{T-\Delta}\|_\infty \le \Theta(\Delta) + C\Delta^\alpha. \tag{13}$$

备注 3 设假设 *1* 成立。在附加条件 **（A5）**（见第 *3.1* 节）下，由 *[10,* 引理 *17],*，对于所有 $\varepsilon > 0$，存在 $T_\varepsilon \in [0,T)$，使得对于所有$t \in [T_\varepsilon, T)$，有

$$\Theta(T-t) \le \phi\left(\frac{T-t}{(1+\varepsilon)\eta^\star}\right). \tag{14}$$

特别地，在（**A5**）和假设 *2* 下，对于每个 $\Delta \in (0,\ T - \max(\tau,\ T_\varepsilon)]$，都有

$$\|\xi_{T-\Delta}\|_\infty \le \Theta(\Delta) + C\Delta^\alpha \le \phi\left(\frac{\Delta}{(1+\varepsilon)\eta^\star}\right) + C\Delta^\alpha. \tag{15}$$

此外，注意到第 *3.1* 节中的(29) 表明应选择 $\xi_t = \phi((T-t)/\eta_t),\ \ t \in [0,T)$（另见定理*2* 下方的讨论）。在这种情况下，我们直接得到，对于所有 $\Delta \in (0,T]$,

$$\|\xi_{T-\Delta}\|_\infty \le \phi\left(\frac{\Delta}{\eta^\star}\right). \tag{16}$$

对于每个 $\Delta \in (0, T-\tau]$，设 (Y^{Δ}, Z^{Δ}) 为方程 (1) 在 $[0, T-\Delta]$ 上、终端条件为 $Y^{\Delta}_{T-\Delta} = \xi_{T-\Delta}$ 时的解。利用条件(**A1**) 和(**A3**)，根据单调倒向随机微分方程的经典先验结果（见 [21, 第 5.3 节1]）以及 (12)，可知存在$C_1 \in [1, \infty)$，使得对于所有 $\Delta \in (0, T-\tau]$ 且任意 $0 \le t \le T-\Delta$，均有

$$\mathbb{E}_t\Big[\sup_{r\in[t,T-\Delta]} |Y_r - Y^{\Delta}_r|^2 + \int_t^{T-\Delta} \|Z_r - Z^{\Delta}_r\|^2 dr\Big] \le C_1\, \mathbb{E}_t\big[|Y_{T-\Delta} - \xi_{T-\Delta}|^2\big] \le C_1 C \Delta^{2\alpha}. \tag{17}$$

现在，对每个 $0 < \Delta \le T-\tau$和 $h > 0$，设$(Y^{h,\Delta}, Z^{h,\Delta})$为$(Y^{\Delta}, Z^{\Delta})$的时间离散化（$h$ 为步长）。我们需要对误差 $Y^{\Delta} - Y^{h,\Delta}$进行估计。由于倒向随机微分方程(1)是单调的，并且若 f 至多以多项式速度增长，我们可以使用Lionnet等人 [19]的结果。遗憾的是，作者并未明确给出常数对参数的依赖关系。由于 Y在时刻 T处爆炸，当 Δ很小时， $\xi_{T-\Delta}$的值可能非常大。

2.1 有界终端条件下(1) 的隐式欧拉格式的误差分析

在本小节中，我们考虑倒向随机微分方程(1)，但其条件为有界且非负的 $\mathcal{F}_T$-可测随机条件 ξ。我们设 $a_t = 1/\eta_t$、 $t \in [0, T]$，并考虑该倒向随机微分方程

$$dY_t = -\left(a_t f(Y_t) + \lambda_t\right) dt + Z_t dW_t, \qquad t \in [0, T], \qquad Y_T = \xi. \tag{18}$$

我们首先给出解的分量 Y和 Z 的界，稍后将在命题 1 中使用。

引理1 假设条件(**A1**) 和 (**A3**) 成立。则$(Y, Z) \in \mathbb{S}^2(0, T)$ 存在唯一解，记为(18)。该解满足对所有 $t \in [0, T]$，几乎处处有

$$\begin{aligned} 0 \le Y_t &\le \|\xi\|_\infty + T\lambda^\star, \\ \mathbb{E}_t\Big[\int_t^T Z_s^2 ds\Big] &\le \|\xi\|_\infty^2 + 2(T-t)(\|\xi\|_\infty + T\lambda^\star)\lambda^\star. \end{aligned} \tag{19}$$

证明。 存在性和唯一性由 [21, 命题 5.24]得出。下界来自倒向随机微分方程的比较原理（见 [21, 命题 5.33]）。然后，对 (18) 关于 $\mathcal{F}_t$ 取条件期望，得到 Y的上界。

To 为建立 Z的界，我们应用伊藤公式，得到对所有 $t \in [0, T]$ 有 t

$$Y_t^2 + \int_t^T Z_s^2 ds = \xi^2 + 2\int_t^T Y_s(a_s f(Y_s) + \lambda_s) ds - 2\int_t^T Z_s Y_s dW_s.$$

$Z \in \mathbb{H}^2$(0, T)这一事实以及 Y有界，保证了对于所有$t \in [0, T]$， $\mathbb{E}_t[\int_t^T Z_s Y_s dW_s] = 0$成立。此外， f是非递增的，且 f(0) $= 0$，再加上 Y的上界，可推出对于所有 $t \in [0, T]$，

$$\mathbb{E}_t\Big[\int_t^T Z_s^2 ds\Big] \le \|\xi\|_\infty^2 + 2(T-t)(\|\xi\|_\infty + T\lambda^\star)\lambda^\star.$$

证明至此完成。 □

本小节的主要目的是对与 (18) 相关的隐式欧拉格式进行完整的误差分析。尽管文献中已有此类分析——且往往是在更一般的情形下进行的（例如参见 [6, 7, 19]）——我们仍在此给出详细论述，以使本文内容完整自洽。此外，为了后续应用，精确量化终端条件的范数对近似误差的影响至关重要。

为此，设 $\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_N = T\} \subset [0,T]$ 为宽度为$h = T/N$的等距网格。设 $(\overline{a}_i)_{i=0,\dots,N}$ 和 $(\overline{\lambda}_i)_{i=0,\dots,N}$ 为 $(\mathcal{F}_{t_i})_{i=0,\dots,N}$-适应过程。我们将 $(\overline{a}_i)_{i=0,\dots,N}$ 和 $(\overline{\lambda}_i)_{i=0,\dots,N}$ 视为 $(a_{t_i})_{i=0,\dots,N}$ 和 $(\lambda_{t_i})_{i=0,\dots,N}$ 的离散时间近似。因此，我们假设对所有 $i \in \{0,\dots,N\}$，均有 $0 \le \overline{a}_i \le 1/\eta_\star$ 和 $0 \le \overline{\lambda}_i \le \lambda^\star$。此外，设 $\overline{\xi}$ 为非负的、 $\mathcal{F}_T$-可测随机变量，且满足 $\overline{\xi} \le \|\xi\|_\infty$。

然后，我们考虑通过向后递推定义的 $(\mathcal{F}_{t_i})_{i=0,\dots,N}$-适应过程 $(\overline{Y}_i)_{i=0,\dots,N}$

$$\overline{Y}_i = \mathbb{E}_{t_i}[\overline{Y}_{i+1}] + h\overline{a}_i f(\overline{Y}_i) + h\overline{\lambda}_i, \qquad i = 0,\dots,N-1, \qquad \overline{Y}_N = \overline{\xi}. \tag{20}$$

注意，由于对所有 $a \ge 0$，函数 $F_a(y) = y - haf(y)$，$y \in [0,\infty)$ 严格递增（由 (A3) 可知），在 0 处等于 0，满足 $\lim_{y\to\infty} F_a(y) = \infty$，且 $\overline{a}_i$、$\overline{\xi}$ 和 $\overline{\lambda}_i$ 均为非负数，因此由归纳法可知，对于所有 $i = 0,\dots,N-1$，(20) 中存在唯一的非负解 $\overline{Y}_i$。

命题 1 假设条件 (A1) 和 (A3) 均成立，且令 $K = \|\xi\|_\infty + T\lambda^\star$。则对所有 $i \in \{0,\dots,N\}$，几乎处处有

$$\begin{aligned}|Y_{t_i} - \overline{Y}_i| \le \mathbb{E}_{t_i}\left[|\xi - \overline{\xi}| + |f(K)|\int_{t_i}^T |a_s - \overline{a}_s|ds + \int_{t_i}^T |\lambda_s - \overline{\lambda}_s|ds\right] \\ + \left[\frac{|f'(K)|T}{2\eta_\star}\left(\frac{1}{\eta_\star}|f(K)| + \lambda^\star\right) + \frac{\sup_{y\in[0,K]}|f''(y)|}{2\eta_\star}(\|\xi\|_\infty^2 + 2(T-t_i)K\lambda^\star)\right]h\end{aligned}$$

其中 $\overline{a}_s = \overline{a}_k$ 和 $\overline{\lambda}_s = \overline{\lambda}_k$ 在区间 $[t_k, t_{k+1})$ 上。

证明。我们将误差分解为单步误差和稳定性误差。为此，对于 $a \ge 0$，令 $F_a\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$，$F_a(y) = y - ahf(y)$。如上所述，$F_a$ 是一个双射。现在，对于每个 $i \in \{0,\dots,N-1\}$，令 $\overline{\Gamma}_i\colon L_+^\infty(\mathcal{F}_{t_{i+1}}) \to L_+^\infty(\mathcal{F}_{t_i})$，使得对所有非负、有界且关于 $\mathcal{F}_{t_{i+1}}$ 可测的随机变量 $\mathcal{Y}$，均有

$$\overline{\Gamma}_i(\mathcal{Y}) = F_{\overline{a}_i}^{-1}(\mathbb{E}_{t_i}[\mathcal{Y}] + h\overline{\lambda}_i).$$

注意

$$\overline{\Gamma}_i(\mathcal{Y}) = \mathbb{E}_{t_i}[\mathcal{Y}] + h(\overline{a}_i f(\overline{\Gamma}_i(\mathcal{Y})) + \overline{\lambda}_i).$$

此外，对于每个 $i \in \{0,\dots,N-1\}$，令 $\Gamma_{t,i}\colon L_+^\infty(\mathcal{F}_{t_{i+1}}) \to L_+^\infty(\mathcal{F}_t)$ 表示 $[t_i, t_{i+1}]$ 上 BSDE (18) 的解算子，也就是说，对于所有非负、有界且 $\mathcal{F}_{t_{i+1}}$-可测的随机变量 $\mathcal{Y}$，有

$$\Gamma_{t,i}(\mathcal{Y}) = \mathbb{E}_t\left[\mathcal{Y} + \int_t^{t_{i+1}} (a_s f(\Gamma_{s,i}(\mathcal{Y})) + \lambda_s)ds\right], \qquad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

$\Gamma_{t,i}$ 的适定性由引理1得出。因此，对于所有 $i \in \{0, \dots, N-1\}$，有

$$|Y_{t_i} - \overline{Y}_i| = |\Gamma_{t_i,i}(Y_{t_{i+1}}) - \overline{\Gamma}_i(\overline{Y}_{i+1})| \le |\Gamma_{t_i,i}(Y_{t_{i+1}}) - \overline{\Gamma}_i(Y_{t_{i+1}})| + |\overline{\Gamma}_i(Y_{t_{i+1}}) - \overline{\Gamma}_i(\overline{Y}_{i+1})|. \quad (21)$$

第一项是局部误差，第二项是稳定性误差。

我们先考虑稳定性误差。注意，$F_a'(y) = 1 - ahf'(y) \ge 1$。这意味着 $\frac{d}{dy}F_a^{-1}(y) \le 1$。由此可知，$F_a^{-1}$的 Lipschitz 常数小于或等于 1，因此对所有 $i \in \{0, \dots, N-1\}$，我们有

$$|\overline{\Gamma}_i(Y_{t_{i+1}}) - \overline{\Gamma}_i(\overline{Y}_{i+1})| \le |\mathbb{E}_{t_i}[Y_{t_{i+1}} - \overline{Y}_{i+1}]|. \quad (22)$$

现在我们考虑单步误差。注意，对所有 $i \in \{0, \dots, N-1\}$，我们有

$$\begin{aligned}
\Gamma_{t_i,i}(Y_{t_{i+1}}) - \overline{\Gamma}_i(Y_{t_{i+1}}) &= \mathbb{E}_{t_i}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} a_s f(Y_s) ds - h\overline{a}_i f(\overline{\Gamma}_i(Y_{t_{i+1}}))\right] \\
&\quad + \mathbb{E}_{t_i}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \lambda_s ds\right] - h\overline{\lambda}_i \\
&= \mathbb{E}_{t_i}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} (a_s f(Y_s) - \overline{a}_i f(Y_{t_i})) ds\right] \\
&\quad + h\overline{a}_i \left(f(Y_{t_i}) - f(\overline{\Gamma}_i(Y_{t_{i+1}}))\right) + \mathbb{E}_{t_i}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} (\lambda_s - \overline{\lambda}_i) ds\right].
\end{aligned}$$

这意味着对所有 $i \in \{0, \dots, N-1\}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\left(\Gamma_{t_i,i}(Y_{t_{i+1}}) - \overline{\Gamma}_i(Y_{t_{i+1}})\right)^2 + h^2\overline{a}_i^2 \left(f(\Gamma_{t_i,i}(Y_{t_{i+1}})) - f(\overline{\Gamma}_i(Y_{t_{i+1}}))\right)^2 \\
&= \left(\mathbb{E}_{t_i}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} (a_s f(Y_s) - \overline{a}_i f(Y_{t_i})) ds\right] + \mathbb{E}_{t_i}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} (\lambda_s - \overline{\lambda}_i) ds\right]\right)^2 \\
&\quad + 2h\overline{a}_i (f(\Gamma_{t_i,i}(Y_{t_{i+1}})) - f(\overline{\Gamma}_i(Y_{t_{i+1}}))) \left(\Gamma_{t_i,i}(Y_{t_{i+1}}) - \overline{\Gamma}_i(Y_{t_{i+1}})\right).
\end{aligned} \quad (23)$$

对于每个 $i \in \{0, \dots, N-1\}$，令

$$R_i = \left|\mathbb{E}_{t_i}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} (a_s f(Y_s) - \overline{a}_i f(Y_{t_i})) ds\right] + \mathbb{E}_{t_i}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} (\lambda_s - \overline{\lambda}_i) ds\right]\right|.$$

于是，由于 $y \mapsto f(y)$ 是非递增的（条件 **(A3)**），结合 **(23)**，可得对所有 $i \in \{0, \dots, N-1\}$，

$$\left|\Gamma_{t_i,i}(Y_{t_{i+1}}) - \overline{\Gamma}_i(Y_{t_{i+1}})\right| \le R_i.$$

结合式（22）和式（21）可知，对每个 $i \in \{0, \dots, N-1\}$，有

$$|Y_{t_i} - \overline{Y}_i| \le \mathbb{E}_{t_i}|Y_{t_{i+1}} - \overline{Y}_{i+1}| + R_i$$

因此，通过归纳法

$$|Y_{t_i} - \overline{Y}_i| \le \mathbb{E}_{t_i}|\xi - \overline{\xi}| + \sum_{k=i}^{N-1} \mathbb{E}_{t_i}[R_k]. \quad (24)$$

注意，对所有 $i \in \{0, \dots, N-1\}$，均有

$$\begin{aligned} R_i &\le \left| \mathbb{E}_{t_i} \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} (a_s f(Y_s) - \overline{a}_i f(Y_{t_i})) ds \right] \right| + \left| \mathbb{E}_{t_i} \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} (\lambda_s - \overline{\lambda}_i) ds \right] \right| \\ &\le \left| \mathbb{E}_{t_i} \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} (a_s - \overline{a}_i) f(Y_s) ds \right] \right| + \left| \mathbb{E}_{t_i} \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{a}_i (f(Y_s) - f(Y_{t_i})) ds \right] \right| \\ &\quad + \left| \mathbb{E}_{t_i} \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} (\lambda_s - \overline{\lambda}_i) ds \right] \right|. \end{aligned} \tag{25}$$

回顾 $K = \|\xi\|_\infty + T\lambda^\star$。由引理1可知，对所有 $t \in [0,T]$ 几乎必然成立$Y_t \le K$，这一事实连同 f 的单调性蕴含 $|f(Y_t)| \le -f(K)$。因此，对所有 $i \in \{0, \dots, N-1\}$，我们有

$$\left| \mathbb{E}_{t_i} \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} (a_s - \overline{a}_i) f(Y_s) ds \right] \right| \le -f(K) \mathbb{E}_{t_i} \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} |a_s - \overline{a}_i| ds \right]. \tag{26}$$

此外，注意到由伊藤公式，连同引理1中的有界性结果（这些结果保证随机积分的期望为零），对所有 $i \in \{0, \dots, N-1\}$，我们有

$$\begin{aligned} &\left| \mathbb{E}_{t_i} \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{a}_i (f(Y_s) - f(Y_{t_i})) ds \right] \right| \\ &= \overline{a}_i \left| \mathbb{E}_{t_i} \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{s} \Big(- f'(Y_r)(a_r f(Y_r) + \lambda_r) + \frac{1}{2} f''(Y_r) Z_r^2 \Big) dr\, ds \right] \right|. \end{aligned}$$

这连同由引理1可知对所有 $t \in [0,T]$ 几乎必然成立 $Y_t \le K$这一事实、假设**(A1)**、假设**(A3)** 以及富比尼定理，对所有 $i \in \{0, \dots, N-1\}$蕴含

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}_{t_i} \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{a}_i (f(Y_s) - f(Y_{t_i})) ds \right] \right| &\le \frac{1}{2\eta_\star} |f'(K)| \left(\frac{1}{\eta_\star} |f(K)| + \lambda^\star \right) h^2 \\ &\quad + \frac{\sup_{y \in [0,K]} |f''(y)|}{2\eta_\star} \mathbb{E}_{t_i} \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} (t_{i+1} - r) Z_r^2 dr \right] \\ &\le \frac{1}{2\eta_\star} |f'(K)| \left(\frac{1}{\eta_\star} |f(K)| + \lambda^\star \right) h^2 \\ &\quad + \frac{\sup_{y \in [0,K]} |f''(y)|}{2\eta_\star} \mathbb{E}_{t_i} \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_r^2 dr \right] h. \end{aligned}$$

将此结果与 (24)、(25) 和 (26) 结合，可得对所有 $i \in \{0, \dots, N-1\}$，

$$\begin{aligned} |Y_{t_i} - \overline{Y}_i| &\le \mathbb{E}_{t_i} \left[|\xi - \overline{\xi}| + |f(K)| \int_{t_i}^{T} |a_s - \overline{a}_s| ds + \int_{t_i}^{T} |\lambda_s - \overline{\lambda}_s| ds \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\eta_\star} |f'(K)| \left(\frac{1}{\eta_\star} |f(K)| + \lambda^\star \right) Th + \frac{\sup_{y \in [0,K]} |f''(y)|}{2\eta_\star} \mathbb{E}_{t_i} \left[\int_{t_i}^{T} Z_r^2 dr \right] h. \end{aligned}$$

再次应用引理1，可得对所有 $i \in \{0,\dots,N-1\}$，

$$
\begin{aligned}
|Y_{t_i} - \overline{Y}_i| \le \mathbb{E}_{t_i}\left[|\xi - \overline{\xi}| + |f(K)|\int_{t_i}^{T}|a_s - \overline{a}_s|ds + \int_{t_i}^{T}|\lambda_s - \overline{\lambda}_s|ds\right] \\
+ \frac{1}{2\eta_\star}|f'(K)|\left(\frac{1}{\eta_\star}|f(K)| + \lambda^\star\right)Th \\
+ \frac{\sup_{y\in[0,K]}|f''(y)|}{2\eta_\star}\left[\|\xi\|_\infty^2 + 2(T-t_i)K\lambda^\star\right]h.
\end{aligned}
$$

证明至此完成。 □

2.2 奇异终端条件下方程 (1) 的隐式欧拉格式的误差分析

在本小节中，我们回到具有奇异终端条件 $\xi = \infty$ 的倒向随机微分方程 (1)。我们假设假设 2 成立。因此，我们可以将第 2.1 节的结果应用于从 $\xi_{T-\Delta}$ 开始、在每个时间区间 $[0, T-\Delta]$（其中 $\Delta \in (0, T-\tau]$）上的 Y^Δ 时间离散化。下文沿用第 2.1 节中的设定和记号，但时间范围 T 现在由 $T-\Delta$ 给定。特别地，$\overline{\xi}$ 是 $\mathcal{F}_{T-\Delta}$-可测的。

推论 1 假设条件 **(A1)** 和 **(A3)** 成立。设 $\Delta \in (0, T-\tau]$，且设 $K = \|\xi_{T-\Delta}\|_\infty + T\lambda^\star$。则对所有 $i \in \{0,\dots,N\}$，几乎必然有

$$
\begin{aligned}
&|Y_{t_i}^\Delta - \overline{Y}_i| \\
&\le \mathbb{E}_{t_i}\left[|\xi_{T-\Delta} - \overline{\xi}| + |f(K)|\int_{t_i}^{T}|a_s - \overline{a}_s|ds + \int_{t_i}^{T}|\lambda_s - \overline{\lambda}_s|ds\right] \\
&\quad + \left[\frac{|f'(K)|T}{2\eta_\star}\left(\frac{1}{\eta_\star}|f(K)| + \lambda^\star\right) + \frac{\sup_{y\in[0,K]}|f''(y)|}{2\eta_\star}(\|\xi_{T-\Delta}\|_\infty^2 + 2(T-\Delta-t_i)K\lambda^\star)\right]h.
\end{aligned}
$$

证明。 这是命题 1 的直接推论。 □

由推论 1 和 (17)，我们可以得到 Y 的误差估计：对于所有 $i \in \{0,\dots,N\}$，几乎必然有

$$
\begin{aligned}
|Y_{t_i} - \overline{Y}_i| \le C_1 C\Delta^\alpha + \mathbb{E}_{t_i}\left[|\xi_{T-\Delta} - \overline{\xi}| + |f(K)|\int_{t_i}^{T}|a_s - \overline{a}_s|ds + \int_{t_i}^{T}|\lambda_s - \overline{\lambda}_s|ds\right] \\
+ \left[\frac{|f'(K)|T}{2\eta_\star}\left(\frac{1}{\eta_\star}|f(K)| + \lambda^\star\right) + \frac{\sup_{y\in[0,K]}|f''(y)|}{2\eta_\star}(K^2 + (T\lambda^\star)^2)\right]h.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

由 (13) 可知，K 的值被 $\Theta(\Delta) + C\Delta^\alpha + T\lambda^\star$ 所界定（在更强的条件下，也可以通过 (15) 或 (16) 得到其他估计）。

现在假设

假设 3 存在两个常数 $C_2 > 0$ 和 $\beta > 0$ 以及一个函数 $\Phi\colon (0,T] \to [0,\infty)$，使得对任意 $h > 0$ 和 $0 < \Delta \le T - \tau$ 以及所有 $0 \le i \le N$，几乎必然有。

$$
\mathbb{E}_{t_i}\left[\int_{t_i}^{T}|a_s - \overline{a}_s|ds + \int_{t_i}^{T}|\lambda_s - \overline{\lambda}_s|ds\right] \le C_2 h^\beta \tag{28}
$$

and

$$\mathbb{E}_{t_i}\big[|\xi_{T-\Delta} - \overline{\xi}|\big] \leq C_2\Phi(\Delta)h^{\beta}.$$

若 $(1/\eta, \lambda)$ 是一个系数为 Lipschitz连续系数的随机微分方程的解，则众所周知，欧拉格式可给出这样的逼近 (28)，其中 $\beta = 1/2$ （见 [17]）。常数 C_2取决于系数 η和 λ的界。对于差值 $\xi_{T-\Delta} - \overline{\xi}$，我们需要考虑 $\xi_{T-\Delta}$的范数，而它取决于 Δ；这就是估计中出现 $\Phi(\Delta)$ 的原因。

因此，我们现在可以得出关于 Y近似误差的主要结果：

定理1 假设假设*1*、*2*和*3*成立。则存在一个常数 $C_3 > 0$以及两个函数 Ψ_1 和 Ψ_2，它们仅取决于 f、 η、 λ，使得对于任意 $h > 0$ 和$0 < \Delta \leq T - \tau$，以及所有 $i \in \{0, \dots, N\}$，几乎必然有：

$$|Y_{t_i} - \overline{Y}_i| \leq C_3\big[\Delta^{\alpha} + h^{\beta} + \Psi_1(\Delta)h^{\beta} + \Psi_2(\Delta)h\big].$$

证明。 我们使用先前的结果（27），其中 $K = \Theta$ （Δ） $+ C\Delta^{\alpha} + T\lambda^{\star}$，以及

$$\Psi_1(\Delta) = |f(K)| + \Phi(\Delta),$$
$$\Psi_2(\Delta) = \frac{|f'(K)|T}{2\eta_{\star}}\left(\frac{1}{\eta_{\star}}|f(K)| + \lambda^{\star}\right) + \frac{\sup_{y\in[0,K]}|f''(y)|}{2\eta_{\star}}(K^2 + (T\lambda^{\star})^2).$$

这就证明了该结论。 □

显然，当 Δ趋于零时， Ψ_1 和 Ψ_2 趋于无穷大。因此，需要在 Δ和 h之间寻求平衡。

3 Y 在 T附近的展开

我们仍假设条件(**A1**) 至(**A4**) 成立。我们的目标是找出关于 f 的充分假设，使得（12）成立。

3.1 主要结果

回顾一下， G是 $1/f$的原函数，且为正；我们将 ϕ: $(0,\infty) \to (0,\infty)$视为 G的反函数。另请注意， ϕ 满足常微分方程 $\phi' = f \circ \phi$，且$\lim_{x\to 0}\phi(x) = \infty$；由附录中的引理10可知，$\phi'$ 为负， ϕ'' 为正。本节旨在证明几乎必然地，

$$Y_t = \phi\left(\frac{T-t}{\eta_t}\right) - \phi'\left(\frac{T-t}{\eta_t}\right)H_t, \quad \forall t \in [0,T), \tag{29}$$

其中， H 是一个倒向随机微分方程的解，通过不动点论证得到，并在时刻 T具有适当的行为。

暂时假设关系式 (29) 成立。那么根据伊藤公式，我们可以推出，在 $[0,T)$ 上，过程 H 的动态为

$$\begin{aligned} dH_t &= \frac{1}{\eta_t \phi'(A_t)} \left[f(\phi(A_t) - \phi'(A_t)H_t) - f(\phi(A_t)) + f'(\phi(A_t))\phi'(A_t)H_t \right] dt \\ &\quad + \left[\frac{1}{\phi'(A_t)} \lambda_t + A_t \left(-\frac{b_t^\eta}{\eta_t} + \left(\frac{\sigma_t^\eta}{\eta_t} \right)^2 \left(1 - \frac{\kappa_t^1}{2} \right) \right) \right] dt - \mu_t H_t dt - \kappa_t^1 \frac{\sigma_t^\eta}{\eta_t} Z_t^H dt + Z_t^H dW_t \\ &=: -F^H(t, H_t, Z_t^H) dt + Z_t^H dW_t, \end{aligned} \tag{30}$$

其中，对于所有 $x \in (0,\infty)$，$t \in [0,T)$ 和 $i \in \{0,1,2\}$，我们有

$$A_t = \frac{T-t}{\eta_t}, \quad \kappa^i(x) = -\frac{\phi^{(i+1)}(x)}{\phi^{(i)}(x)} x$$

and

$$\kappa_t^i = \kappa^i(A_t) = -\frac{\phi^{(i+1)}(A_t)}{\phi^{(i)}(A_t)} A_t, \quad \mu_t = \kappa_t^1 \frac{b_t^\eta}{\eta_t} + \kappa_t^1 \left(\frac{\kappa_t^2}{2} - 1 \right) \left(\frac{\sigma_t^\eta}{\eta_t} \right)^2. \tag{31}$$

函数 $x \mapsto \kappa^i(x)$ 之间满足以下关系，我们将在附录中证明：

引理 2 假设条件（**A1**）至（**A4**）均成立。那么

$$\forall x > 0: \quad 0 \le \kappa^0(x) \le \kappa^1(x) \le \kappa^2(x). \tag{32}$$

我们进一步假设：

（**A5**）存在 $\epsilon > 0$，使得函数 $(0, \infty) \ni x \mapsto \kappa^2(x)$ 在区间 $(0, \epsilon)$ 上有界。

我们断言：

引理 3 假设条件（**A1**）至（**A5**）均成立。则由（31）定义的过程 κ^0、κ^1、κ^2 和 μ 在 $[0,T) \times \Omega$ 上有界。

证明见附录。分别用 $\kappa^\star$ 和 $\mu^\star$ 表示 κ^1 和 $|\mu|$ 的上界。于是过程

$$\zeta_t = \exp\left(\int_0^t \mu_s ds \right), \quad t \in [0,T],$$

在 $[0,T] \times \Omega$ 上有界，其上界为 $\zeta^\star = \exp(T\mu^\star)$，下界为 $\exp(-T\mu^\star) = \zeta_\star > 0$。本部分接下来的推导中，以下量至关重要：

$$K = \zeta^\star \eta_\star \left[\lambda^\star + \frac{1}{2} \left\| \frac{b^\eta}{\eta} \right\|_\infty + \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa^\star}{2} + 1 \right) \left\| \frac{\sigma^\eta}{\eta} \right\|_\infty^2 \right]. \tag{33}$$

对于 $x \ge 0$，我们定义这些量

$$\varpi(x) = \int_0^x \frac{1}{-\phi'(z)} dz, \quad \vartheta(x) = \max\left(\varpi(x), x^2 \right). \tag{34}$$

函数 ϑ 给出了当 t 趋于 T时 $t \mapsto H_t$ 趋于零的收敛速率。注意，由于 ϕ' 是负的递增函数（参见引理10），对所有 $x > 0$ 都有$0 \leq \varpi(x) \leq \frac{x}{-\phi'}(x)$. 因此，对所有 $x > 0$ 我们有

$$0 \leq \vartheta(x) \leq x \max\left(\frac{1}{-\phi'(x)}, x\right). \tag{35}$$

由于 $\phi' = f \circ \phi$ with $\lim_{x\to 0} \phi(x) = +\infty$，我们有 $\lim_{x\to 0} \vartheta(x) = 0.$。关于 ϑ 的一些性质将在第3.4节中讨论。在给出最后一个条件之前，我们先介绍以下技术性结果，其证明见附录。

引理 4 假设条件 （**A3**） 至 （**A5**） 均成立。设 $\eta^\sharp \geq 1$ *and* $\varsigma > 0$。那么存在 $\widetilde{\epsilon} > 0$，使得

$$\forall x \in (0, \widetilde{\epsilon}): \quad \phi(x) + \varsigma\phi'(x)\vartheta(\eta^\sharp x) > 0.$$

注意，在引理 4 的设定下，$\phi(x) - \varsigma\phi'(x)\vartheta(\eta^\sharp x) > 0$，因为 $-\phi'$ 非负。现在我们来陈述最后一个假设。

（**A6**） 对于某个 $\varsigma > 2K/\zeta_\star$，满足 $\eta^\sharp = \eta^\star/\eta_\star$，存在 $\widehat{\epsilon} > 0$，使得非负函数

$$x \mapsto \left|f'\big(\phi(x) \pm \varsigma\phi'(x)\vartheta(\eta^\sharp x)\big) - f'(\phi(x))\right|$$

在 $(0, \widehat{\epsilon})$ 上有界，且其上界为某个非递增函数 Ψ，使得 Ψ 在 $(0, \widehat{\epsilon})$ 上可积，并且 $\vartheta(\eta^\sharp \cdot)\Psi$ 在 $(0, \widehat{\epsilon})$ 上有界。

我们强调，在我们的设定下，利用前面的引理 4，该条件中 f' 内的各项均为正，因此当 $\widehat{\epsilon} \leq \widetilde{\epsilon}$ 时一切均有定义，其中 $\widetilde{\epsilon}$ 由引理 4 给出。因此，在本节余下部分，我们略去记号上的区别，将$\epsilon > 0$ 定义为系数 ϵ （见（**A5**））与系数 $\widehat{\epsilon}$（见（**A6**））中的较小者。于是，（**A5**） 和（**A6**） 的性质在这个较小区间（$0, \epsilon$）上成立。

注*4*（关于条件（*A5*）和（*A6*））注意，条件（*A5*）和（*A6*）仅取决于 f 和 f' 在 ∞ 邻域内的行为。为说明条件（*A5*）这一点，我们回顾 *[10,* 引理 *11* 和 *12]* 中的一些结果。首先，$\infty\kappa^1$ 的有界性等价于存在两个常数 $\delta > 0$ 和 $R > 0$，使得 $G(R) = \epsilon$，从而 $x \mapsto \left(\int_x^{\infty} -f(y)^{dy}\right)$ 在 $[R, +\infty$ 上是凸的。其次， κ^2 的附加有界性等价于：$(-f) \circ \psi^\delta$ 在 $[R, +\infty$ 上也是递增且凹的，其中 ψ^δ 是递增且凹的函数 $\psi^\delta: (0, \infty) \to (0, \infty)$， $x \mapsto \phi(x^{-1/\delta})$。类似地，我们可以考察 $y \mapsto |f'[y \pm \varsigma f(y)\vartheta(\eta^\sharp G(y))] - f'(y)|$，其被 $\Psi \circ G$ 在某个区间$[R, +\infty)$ 上有界且可积，从而看出条件（*A6*）仅取决于 f' 在 ∞ 邻域内的行为。

在下面的引理中，我们给出满足（**A6**）的一个充分条件，证明见附录。

引理5 假设条件（**A3**）至（**A5**）均成立，且存在 $\widetilde{\epsilon}>0$使得 $\vartheta(x)=x^2$ 对所有 $x\in[0,\widetilde{\epsilon})$ 均成立。此外，假设存在 $R>0$ 和$\varsigma>\frac{2K}{\zeta_*}(\eta^\sharp)^2$，使得函数 $y\mapsto f_{(2)}[y\pm\varsigma f($ $y\ \ G\ y\ \ ^2])(())_{()}()$在$(R,+\infty)$上有界。~~则（**A6**）成立，其中~~ Ψ 为常值函数。
$f\ ^2\ \ y$

定义

$$\theta(x)=\vartheta\left(\frac{x}{\eta_\star}\right),\quad x\geq 0,$$

并对任意 $\delta\in(0,T]$ 考虑空间

$$\mathcal{H}^{\delta,\theta}:=\left\{H\in L^\infty(\Omega;C([T-\delta,T];\mathbb{R})),\ H\text{ adapted}:\|H\|_{\mathcal{H}^{\delta,\theta}}<+\infty\right\}\tag{36}$$

赋予加权范数

$$\|H\|_{\mathcal{H}^{\delta,\theta}}=\left\|\sup_{t\in[T-\delta,T)}\frac{|H_t|}{\theta(T-t)}\right\|_\infty.\tag{37}$$

我们的主要结果如下。

定理2 假设条件 （**A1**）至 （**A6**）均成立。则存在 $\delta>0$，使得终端条件为 0 的倒向随机微分方程 （30）在 $[0,T]$ 上有唯一解 （H， Z^H），其中 $H\in\mathcal{H}^{\delta,\ \theta}\cap L^\infty$（$[0,T]\times\Omega$），且 $\int_0^{\cdot}Z^H dW$ 是 *BMO*鞅。此外，关系式 （29）成立。

由此结果可推得存在 $\delta>0$，使得对所有 $t\in[T-\delta,T)$ 均有

$$Y_t=\phi(A_t)-\phi'(A_t)H_t=\xi_t-\phi'(A_t)H_t,$$

其中 $\xi_t:=\phi(A_t)$，$t\in[T-\delta,T)$。因此，只要我们能控制项 $\phi'(A_t)H_t$，$t\in[T-\delta,T)$，条件（12）就成立。根据引理 11 和公式（38），存在一个常数 $k>0$，使得对所有 $t\in(T-\min(\delta,\eta_\star\epsilon)\ T)$，都有

$$|-\phi'(A_t)H_t|\leq-\phi'\left(\frac{T-t}{\eta^\star}\right)\vartheta\left(\frac{T-t}{\eta_\star}\right)\|H\|_{\mathcal{H}^{\delta,\theta}}\leq-(\eta^\sharp)^k\phi'\left(\frac{T-t}{\eta_\star}\right)\vartheta\left(\frac{T-t}{\eta_\star}\right)\|H\|_{\mathcal{H}^{\delta,\theta}}.\tag{38}$$

当 $\vartheta=\varpi$ （收敛更快）时，我们有如下形式的上界： $O(T-t)$。然而，当 $\vartheta(x)=x^2$ （收敛较慢）时，必须针对具体情况证明该量趋于零；第3.3节通过一些例子对此进行了讨论。

3.2 定理2的证明

该证明分为几个步骤。

步骤 1. 这里我们注意到，通过一个变换，可以从倒向随机微分方程 (30) 的漂移项中去除 Z^H 。由于 μ 和 ζ 是有界过程，我们可以定义一个与 $\mathbb{P}$ 等价的新概率测度 $\mathbb{Q}$，使得

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_T}=\exp\left(\int_0^T\kappa_t^1\sigma_t^\eta/\eta_t dW_t-\frac{1}{2}\int_0^T\left(\kappa_t^1\sigma_t^\eta/\eta_t\right)^2dt\right).$$

首先，假设 (H, Z^H) 是按本定理意义下倒向随机微分方程 (30) 的一个解。那么 $\widehat{H} = \zeta H$ 和 $\widehat{Z} = \zeta Z^H$ 满足倒向随机微分方程

$$d\widehat{H}_t = \mu_t \zeta_t H_t dt - \zeta_t F^H(t, (\zeta_t)^{-1}\widehat{H}_t, (\zeta_t)^{-1}\widehat{Z}_t)dt + \widehat{Z}_t dW_t = -\widehat{F}(t, \widehat{H}_t)dt + \widehat{Z}_t d\widehat{W}_t \quad (39)$$

连同 $H_T = 0$，其中

$$\begin{aligned}\widehat{F}(t,h) = \frac{-\zeta_t}{\eta_t \phi'(A_t)}\left[f\left(\phi(A_t) - \phi'(A_t)\frac{h}{\zeta_t}\right) - f(\phi(A_t)) + f'(\phi(A_t))\phi'(A_t)\frac{h}{\zeta_t}\right] \\ - \frac{\zeta_t \lambda_t}{\phi'(A_t)} + A_t \zeta_t \left[\frac{b_t^\eta}{\eta_t} + \left(\frac{\kappa_t^1}{2} - 1\right)\left(\frac{\sigma_t^\eta}{\eta_t}\right)^2\right]\end{aligned}$$

and

$$\widehat{W}_t = W_t - \int_0^t \kappa_s^1 \frac{\sigma_s^\eta}{\eta_s} ds.$$

注意，由吉尔萨诺夫定理， W是一个 $\mathbb{Q}$-布朗运动。此外，注意 $\mathbb{Q}$-几乎必然地对所有 $t \in [T-\delta, T]$ 成立$|\widehat{H}_t| \leq \zeta^* \|H\|_{\mathcal{H}^{\delta,\,\theta}} \theta\,(T-t)$，且 $\int_0^\cdot \widehat{Z} d\widehat{W}$是一个BMO鞅。

反之，若$(\widehat{H}, \widehat{Z})$是在本定理的意义下是倒向随机微分方程（39）的一个解，则对所有 $t \in [0,T]$ 令 $H_t = (\zeta_t)^{-1}\widehat{H}_t$ 以及 $Z_t^H = (\zeta_t)^{-1}\widehat{Z}_t$，便得到倒向随机微分方程（30）的一个具有所需性质且具有相同 $\delta > 0$ 的解。

因此，为避免额外记号，我们现在考虑[3] 在本证明的步骤2至步骤6中的倒向随机微分方程

$$dH_t = -F(t, H_t)dt + Z_t dW_t \quad (40)$$

其中

$$\begin{aligned}F(t,h) = \frac{-\zeta_t}{\eta_t \phi'(A_t)}\left[f\left(\phi(A_t) - \phi'(A_t)\frac{h}{\zeta_t}\right) - f(\phi(A_t)) + f'(\phi(A_t))\phi'(A_t)\frac{h}{\zeta_t}\right] \\ - \frac{\zeta_t \lambda_t}{\phi'(A_t)} + A_t \zeta_t \left[\frac{b_t^\eta}{\eta_t} + \left(\frac{\kappa_t^1}{2} - 1\right)\left(\frac{\sigma_t^\eta}{\eta_t}\right)^2\right]. \quad (41)\end{aligned}$$

步骤2。 在这一步中，我们得到一个关于

$$\Gamma_t^0 := \mathbb{E}_t\left[\int_t^T F(s,0)ds\right], \quad t \in [0,T].$$

对于所有的 $t \in [0,T]$，我们有

$$\begin{aligned}|\Gamma_t^0| \leq \mathbb{E}_t\left[\int_t^T |F(s,0)|\,ds\right] \leq \lambda^\star \zeta^\star \mathbb{E}_t\left[\int_t^T \frac{1}{-\phi'(A_s)}ds\right] \\ + \zeta^\star\left[\left\|\frac{b^\eta}{\eta}\right\|_\infty + \left\|\frac{\kappa^1}{2} - 1\right\|_\infty \left\|\frac{\sigma^\eta}{\eta}\right\|_\infty^2\right]\mathbb{E}_t\left[\int_t^T A_s ds\right].\end{aligned}$$

注意，由于 ϕ'为负且递增（参见引理10），对所有 $t \in [0,T]$ 我们有

$$0 \leq \mathbb{E}_t\left[\int_t^T \frac{1}{-\phi'(A_s)}ds\right] \leq \int_t^T \frac{1}{-\phi'((T-s)/\eta_\star)}ds \leq \eta_\star \varpi\left(\frac{T-t}{\eta_\star}\right).$$

[3]为方便起见，我们稍微滥用一下记号。

此外，对所有 $t \in [0,T]$ 我们得到

$$0 \le \mathbb{E}_t\left[\int_t^T A_s ds\right] \le \int_t^T \frac{(T-s)}{\eta_\star} ds = \frac{(T-t)^2}{2\eta_\star} = \frac{\eta_\star}{2}\left(\frac{T-t}{\eta_\star}\right)^2.$$

因此，对所有 $t \in [0,T]$ 成立

$$|\Gamma_t^0| \le \zeta^\star \eta_\star \lambda^\star \varpi \left(\frac{T-t}{\eta_\star}\right) + \frac{\zeta^\star \eta_\star}{2}\left[\left\|\frac{b^\eta}{\eta}\right\|_\infty + \left\|\frac{\kappa^1}{2}-1\right\|_\infty \left\|\frac{\sigma^\eta}{\eta}\right\|_\infty^2\right]\left(\frac{T-t}{\eta_\star}\right)^2.$$

由（33）给出的 K 的定义来自该不等式，并且对所有 $t \in [0,T]$我们得到

$$|\Gamma_t^0| \le K\vartheta\left(\frac{T-t}{\eta_\star}\right). \tag{42}$$

步骤 3. 接下来，我们引入接近时刻 T的倒向随机微分方程（40）的解算子。我们断言：

引理 6 假设条件（**A1**） 至（**A6**） 成立。设 $\delta \in$ （0， $\eta_\star\epsilon$） ，并设 H为一个过程，使得几乎必然地对所有 $t \in [T-\delta, T]$ 成立 $|H_t| \le 2K\vartheta$（（$T-t$）$/\eta_\star$）。则（F（t， H_t）$-F$（t， 0））$_{t\in[T-\delta,T)} \in L^\infty$（$[T-\delta,T)$ $\times\Omega$； $\mathbb{R}$）。

引理的证明。 回顾生成元 F 由（41）给出。对所有$t \in [0,T)$ ， 我们有

$$\begin{aligned}
F(t,H_t) - F(t,0) &= \frac{-\zeta_t}{\eta_t \phi'(A_t)}\left[f\left(\phi(A_t) - \phi'(A_t)\frac{H_t}{\zeta_t}\right) - f(\phi(A_t)) + f'(\phi(A_t))\phi'(A_t)\frac{H_t}{\zeta_t}\right] \\
&= \frac{\zeta_t}{\eta_t}\frac{f(\phi(A_t) - \phi'(A_t)(\zeta_t)^{-1}H_t)}{-f(\phi(A_t))} + \frac{\zeta_t}{\eta_t} - \frac{1}{\eta_t}\frac{\phi^{(2)}(A_t)}{\phi'(A_t)}H_t \\
&= \frac{\zeta_t}{\eta_t}\frac{f(\phi(A_t) - \phi'(A_t)(\zeta_t)^{-1}H_t)}{-f(\phi(A_t))} + \frac{\zeta_t}{\eta_t} + \kappa_t^1\frac{H_t}{T-t}.
\end{aligned}$$

根据关于 ϑ 的估计 (35)，我们知道 $t \mapsto \vartheta((T-t)/\eta_\star)/(T-t)$ 在 $[T-\delta,T)$ 上有界。因此， $\dfrac{H}{T-\cdot}$ 在 $[T-\delta,T)$ $\times\Omega$ 上有界。

现在提醒一下， $-f$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调不减，并且在 $[0,\infty)$ 上非负（条件 (**A3**)）。由于对于所有 $t \in [T-\delta,T]$， $-\phi' \ge 0$ 且 $|H_t| \le 2K\vartheta((T-t)/\eta_\star) \le 2K\vartheta(\eta^\sharp A_t)$，因此对于所有 $t \in [T-\delta,T)$，我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{-f(\phi(A_t) + 2K(\zeta_t)^{-1}\phi'(A_t)\vartheta(\eta^\sharp A_t))}{-f(\phi(A_t))} &\le \frac{-f(\phi(A_t) - \phi'(A_t)(\zeta_t)^{-1}H_t)}{-f(\phi(A_t))} \\
&\le \frac{-f(\phi(A_t) - 2K(\zeta_t)^{-1}\phi'(A_t)\vartheta(\eta^\sharp A_t))}{-f(\phi(A_t))}.
\end{aligned}$$

由于对所有 $t \in [0,T]$， $0 \le 2K(\zeta_t)^{-1} \le 2K(\zeta_\star)^{-1} \le \varsigma$，且根据 $\delta < \eta_\star\epsilon$，对所有 $t \in [T-\delta,T)$，我们有$0 < A_t < \epsilon$，因此结论可由（**A6**） 以及附录中的引理 11 得出。□

由前述引理可对所有 $\delta \in (0, \eta_\star \epsilon)$ 定义如下：

$$\Gamma(H) = \left(\mathbb{E}_t \left[\int_t^T F(s, H_s)\, ds \right] = \mathbb{E}_t \left[\int_t^T F(s, H_s) - F(s, 0)\, ds \right] + \Gamma_t^0 \right)_{t \in [T-\delta, T]}$$

算子 $\Gamma : \overline{B}_{\mathcal{H}^{\delta,\ \theta}}(2K) \to L^\infty(\Omega;\ C([T-\delta, T];\ \mathbb{R}))$。

步骤 4. 在下面的技术引理中，我们建立生成元的某种局部利普希茨性质。

引理 7 假设条件 **（A1）** 至 **（A6）** 均成立。令 $\delta \in (0,\ \eta_\star \epsilon)$。那么我们有，对于任意 H 和 H 属于 $\overline{B}_{\mathcal{H}^{\delta,\ \theta}}(2K)$，

$$|F(t, H_t) - F(t, \widehat{H}_t)| \leq \frac{1}{\eta_t} \Psi(A_t) |H_t - \widehat{H}_t| \qquad \forall t \in [T-\delta, T)\ ,\ a.s.$$

引理的证明。 首先注意，对于所有 $t \in [T-\delta, T)$ 以及满足 $|h| \leq 2K\vartheta((T-t)/\eta_\star)$ 的 $h \in \mathbb{R}$，我们有 $\phi(A_t) - \phi'(A_t)(\zeta_t)^{-1} h > 0$ （参见引理 4）。由 (41) 可知，对于所有 $t \in [T-\delta, T)$ 以及 $|h| \leq 2K\vartheta((T-t)/\eta_\star)$，

$$\frac{\partial F}{\partial h}(t, h) = \frac{1}{\eta_t} \left[f'(\phi(A_t) - \phi'(A_t)(\zeta_t)^{-1} h) - f'(\phi(A_t)) \right].$$

由于 f 是凹的，f' 是非递增的。因此，对于所有 $t \in [T-\delta, T)$ 和 $|h| \leq 2K\vartheta((T-t)/\eta_\star)$，我们得到

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial F}{\partial h}(t, h) \right| &\leq \frac{1}{\eta_t} \max \Big\{ \Big[f'(\phi(A_t)) - f'(\phi(A_t) - 2K\phi'(A_t)(\zeta_t)^{-1} \vartheta(\eta^\sharp A_t)) \Big], \\
&\qquad \Big[f'(\phi(A_t) + 2K\phi'(A_t)(\zeta_t)^{-1} \vartheta(\eta^\sharp A_t)) - f'(\phi(A_t)) \Big] \Big\} \\
&\leq \frac{1}{\eta_t} \max \Big\{ \Big[f'(\phi(A_t)) - f'(\phi(A_t) - \varsigma\phi'(A_t) \vartheta(\eta^\sharp A_t)) \Big], \\
&\qquad \Big[f'(\phi(A_t) + \varsigma\phi'(A_t) \vartheta(\eta^\sharp A_t)) - f'(\phi(A_t)) \Big] \Big\}
\end{aligned}$$

由于 $\delta < \eta_\star \epsilon$，我们得到对于所有 $t \in [T-\delta, T)$，$0 < A_t < \epsilon$，因此假设 **（A6）** 保证对于所有 $|h| \leq 2K\theta(T-t)$ 和 $t \in [T-\delta, T)$，

$$\left| \frac{\partial F}{\partial h}(t, h) \right| \leq \frac{1}{\eta_t} \Psi(A_t).$$

根据中值定理，结论随即得证。 □

步骤 5. 现在，我们可以通过证明步骤 3 中引入的算子 Γ 是一个压缩映射，来确立在时间区间 $[T-\delta, T]$ 上存在唯一解 (H, Z^H)，其中某个 $\delta < \eta_\star \epsilon$ 满足条件。对于任意 $\delta \in (0,\ \eta_\star \epsilon)$ 和 $H, H \in \overline{B}_{\mathcal{H}^{\delta,\ \theta}}(2K)$，步骤 4 对所有 $t \in [T-\delta, T]$ 得出

that

$$
\begin{aligned}
|\Gamma(H)_t - \Gamma(\widehat{H})_t| &\le \mathbb{E}_t\bigg[\int_t^T |F(s,H_s) - F(s,\widehat{H}_s)|\,ds\bigg] \\
&\le \frac{1}{\eta_\star}\|H-\widehat{H}\|_{\mathcal{H}^{\delta,\theta}}\,\mathbb{E}_t\bigg[\int_t^T \Psi(A_s)\vartheta\Big(\frac{T-s}{\eta_\star}\Big)ds\bigg] \\
&\le \frac{1}{\eta_\star}\|H-\widehat{H}\|_{\mathcal{H}^{\delta,\theta}}\,\vartheta\Big(\frac{T-t}{\eta_\star}\Big)\mathbb{E}_t\bigg[\int_t^T \Psi\Big(\frac{T-s}{\eta^\star}\Big)ds\bigg] \\
&\le \eta^\sharp\|H-\widehat{H}\|_{\mathcal{H}^{\delta,\theta}}\,\vartheta\Big(\frac{T-t}{\eta_\star}\Big)\int_0^{\frac{T-t}{\eta^\star}}\Psi(u)du,
\end{aligned}
$$

这里我们用到了 Ψ 是非递减的这一假设。我们可以选择 $\delta \in (0, \eta_\star\epsilon)$（并在证明余下部分中固定该值），使得对任意 $t \in [T-\delta, T]$，都有

$$
\eta^\sharp \int_0^{\frac{T-t}{\eta^\star}} \Psi(u)du \le \frac{1}{2}.
$$

因此， Γ 是 $\overline{B}_{\mathcal{H}^{\delta,\theta}}(2K)$ 上的 $1/2$-压缩映射。此外，对于任意 $H \in \overline{B}_{\mathcal{H}^{\delta,\theta}}(2K)$，由 (42) 可知，对所有 $t \in [T-\delta, T]$，有

$$
\begin{aligned}
|\Gamma(H)_t| &\le |\Gamma(H)_t - \Gamma_t^0| + |\Gamma_t^0| \\
&\le \frac{1}{2}2K\vartheta\Big(\frac{T-t}{\eta_\star}\Big) + K\vartheta\Big(\frac{T-t}{\eta_\star}\Big) = 2K\vartheta\Big(\frac{T-t}{\eta_\star}\Big).
\end{aligned}
$$

我们已证明， Γ 将 $\overline{B}_{\mathcal{H}^{\delta,\theta}}(2K)$ 映射到自身，且是一个压缩映射。利用映射 Γ 的性质，我们推得存在唯一过程 $H \in \mathcal{H}^{\delta,\theta}$，使得几乎必然地，对任意$t \in [T-\delta, T]$，都有

$$
H_t = \mathbb{E}_t\bigg[\int_t^T F(s,H_s)\,ds\bigg].
$$

根据鞅表示定理，我们得到 Z 的存在性，使得 (H, Z) 是 (40) 的解。由于 $H \in \mathcal{H}^{\delta,\theta}$，由引理 6 可推得鞅 $\int_{T-\delta}^{\cdot} Z dW$ 是一个 BMO鞅（见 [3]）。

步骤 6. 现在 $H_{T-\delta}$ 是一个有界随机变量。若考虑从时刻 $T-\delta$ 开始、终端条件为 $H_{T-\delta}$ 的倒向随机微分方程 (40)，则可应用 [21, 命题 5.24]，得到定义在 $[0, T-\delta]$ 上的唯一解 (H, Z)，且 H 有界。 H 的有界性蕴含了 BMO性质。

步骤 7。 在最后这一步中，我们希望证明关系式 (29) 成立。记 (H, Z^H) 为上文构造的倒向随机微分方程 (30) 的解，并注意到，根据步骤 1 和步骤 5，对于所有 $t \in [T-\delta, T]$，都有

$$
|H_t| \le \frac{2K}{\zeta_\star}\vartheta\Big(\frac{T-t}{\eta_\star}\Big).
$$

我们在 $[0,T)$上定义过程 Y为

$$
\widehat{Y}_t = \phi\left(\frac{T-t}{\eta_t}\right) - \phi'\left(\frac{T-t}{\eta_t}\right)H_t, \quad \forall t \in [0,T).
$$

$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$由构造可知，存在一个过程 Z，使得(Y,Z)在 $[0,T)$上满足$\widehat{\quad}$倒向随机微分方程(1)的动态。然而，由于 H可能为负，尚不清楚 Y在时刻 T 是否存在极限，因此我们不能使用比较原理（如 [10, 命题 20]中那样）来得到$\widehat{\quad}$ $Y = Y$。

$\widehat{\quad}$我们首先证明，在时刻 T， Y 的几乎必然极限为 ∞。对于所有 $t \in [T-\delta, T)$，我们有

$$-\frac{\phi'\left(\frac{T-t}{\eta_t}\right)}{\phi\left(\frac{T-t}{\eta_t}\right)}|H_t| \leq \frac{2K}{\zeta_\star}\frac{-\phi'\left(\frac{T-t}{\eta_t}\right)}{\phi\left(\frac{T-t}{\eta_t}\right)}\vartheta\left(\frac{T-t}{\eta_\star}\right) \leq \frac{2K}{\zeta_\star}\frac{-\phi'\left(\frac{T-t}{\eta^\star}\right)}{\phi\left(\frac{T-t}{\eta_\star}\right)}\vartheta\left(\frac{T-t}{\eta_\star}\right).$$

根据 [10, 引理 11 和公式（38）], ，我们知道存在 $C > 0$ 和 $\delta' \in (0, \delta)$（取决于条件（**A5**）），使得对于所有 $t \in [T-\delta', T)$，都有

$$-\phi'\left(\frac{T-t}{\eta^\star}\right) \leq -(\eta^\sharp)^C\phi'\left(\frac{T-t}{\eta_\star}\right).$$

令 Υ 为函数 $\frac{-\phi'}{\phi}\vartheta$。则对于所有 $t \in [T-\delta', T)$，我们有

$$-\frac{\phi'\left(\frac{T-t}{\eta_t}\right)}{\phi\left(\frac{T-t}{\eta_t}\right)}|H_t| \leq \frac{2K}{\zeta_\star}(\eta^\sharp)^C\Upsilon\left(\frac{T-t}{\eta_\star}\right).$$

若 $x \geq 0$ 满足 $\vartheta(x) = \varpi(x)$，则运用 $0 \leq \varpi(x) \leq \underline{\quad\frac{x}{-\phi'}\quad}(x)$，从而得到 $\Upsilon(x) \leq \underline{\quad\frac{x}{\phi}\quad}(x)$。对于另一种情况（即 $\vartheta(x) = x^2$），注意到 （**A5**） 和引理 2 可推出存在某个 $c > 0$，使得对于所有 $x \in (0, \epsilon)$，都有 $\Upsilon(x) \leq cx$。在这两种情况下，当 x趋于零时， $\Upsilon(x)$ 都趋于零。因此

$$\lim_{t\to+\infty} \widehat{Y}_t = +\infty.$$

接着，按照证明 Y 的最小性时的论证（见 [18, 命题 4]），可得 $\curlywedge Y \leq Y$：我们使用 $(Y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 与 Y 之间的比较原理，其中 $(Y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Y 的逼近序列 $\widehat{\quad}$。

为了得到关系式 (29)，我们需要证明反向不等式。我们引入一个过程 $\mathcal{H}$，使得

$$Y_t = \phi\left(\frac{T-t}{\eta_t}\right) - \phi'\left(\frac{T-t}{\eta_t}\right)\mathcal{H}_t, \quad \forall t \in [0,T). \tag{43}$$

$\widehat{\quad}$注意到，由于 $Y \leq Y$，对于所有 $t \in [0,T)$，都有 $\mathcal{H}_t \leq H_t$。为了推导出 $\mathcal{H}$ 的下界，利用 [10, 引理 6] 可知，对于所有 $t \in [0,T)$，都有

$$Y_t \geq \phi\left(\mathbb{E}_t\left[\int_t^T \frac{1}{\eta_s}ds\right]\right).$$

此外，对所有 $t \in [0,T)$，均有

$$\mathbb{E}_t\left[\int_t^T \frac{1}{\eta_s}ds\right] = \frac{T-t}{\eta_t} - \int_t^T (T-u)\mathbb{E}_t[\varrho_u]du,$$

with

$$\varrho_u := \frac{1}{\eta_u}\left(\frac{b_u^\eta}{\eta_u} - \left(\frac{\sigma_u^\eta}{\eta_u}\right)^2\right) \geq -\frac{1}{\eta_\star}\left\|\frac{b_u^\eta}{\eta_u} - \left(\frac{\sigma_u^\eta}{\eta_u}\right)^2\right\|_\infty \geq -\frac{2K}{(\eta_\star)^2}.$$

因此，对所有 $t \in [0,T)$，均有

$$\begin{aligned} Y_t &\geq \phi\left(\frac{T-t}{\eta_t} - \int_t^T (T-u)\mathbb{E}_t[\varrho_u]du\right) \geq \phi\left(\frac{T-t}{\eta_t} + \frac{K}{(\eta_\star)^2}(T-t)^2\right) \\ &= \phi\left(\frac{T-t}{\eta_t}\right) + \frac{K}{(\eta_\star)^2}(T-t)^2\int_0^1 \phi'\left(\frac{T-t}{\eta_t} + a\frac{K}{(\eta_\star)^2}(T-t)^2\right)da \\ &\geq \phi\left(\frac{T-t}{\eta_t}\right) + \frac{K}{(\eta_\star)^2}(T-t)^2\phi'\left(\frac{T-t}{\eta_t}\right). \end{aligned}$$

因此，对于所有 $t \in [0,T)$，都有

$$\mathcal{H}_t \geq -\frac{K}{(\eta_\star)^2}(T-t)^2.$$

特别地，对于所有 $t \in [0,T)$，$\mathcal{H}_t$ 的负部小于或等于

$$\frac{K}{(\eta_\star)^2}(T-t)^2 \leq K\vartheta\left(\frac{T-t}{\eta_\star}\right) \leq \frac{2K}{\zeta_\star}\vartheta\left(\frac{T-t}{\eta_\star}\right).$$

此外，我们可以将此与 $\mathcal{H} \leq H$ 结合，从而得到几乎处处 $\lim_{t\to T}\mathcal{H}_t = 0$。另外，注意到由（43）我们现在可以推导出存在一个过程 $\mathcal{Z}$，使得（$\mathcal{H}$，$\mathcal{Z}$）是带终端条件 0 的倒向随机微分方程（30）的一组解。利用（30），对于任意 $t \in [0,T]$，我们有

$$\begin{aligned} d(H_t - \mathcal{H}_t) &= \frac{1}{\eta_t\phi'(A_t)}\left[f(\phi(A_t) - \phi'(A_t)H_t) - f(\phi(A_t) - \phi'(A_t)\mathcal{H}_t)\right]dt \\ &\quad + \frac{f'(\phi(A_t))}{\eta_t}(H_t - \mathcal{H}_t)dt - \mu_t(H_t - \mathcal{H}_t)dt + (Z_t^H - \mathcal{Z}_t)\left(dW_t - \kappa_t^1\frac{\sigma_t^\eta}{\eta_t}dt\right) \\ &= \frac{1}{\eta_t\phi'(A_t)}\Big[f(\phi(A_t) - \phi'(A_t)H_t) - f(\phi(A_t) - \phi'(A_t)\mathcal{H}_t) \\ &\qquad\qquad + f'(\phi(A_t) - \phi'(A_t)\mathcal{H}_t)\phi'(A_t)(H_t - \mathcal{H}_t)\Big]dt \\ &\quad + \frac{f'(\phi(A_t)) - f'(\phi(A_t) - \phi'(A_t)\mathcal{H}_t)}{\eta_t}(H_t - \mathcal{H}_t)dt \\ &\quad - \mu_t(H_t - \mathcal{H}_t)dt + (Z_t^H - \mathcal{Z}_t)\left(dW_t - \kappa_t^1\frac{\sigma_t^\eta}{\eta_t}dt\right) \\ &\leq \frac{f'(\phi(A_t)) - f'(\phi(A_t) - \phi'(A_t)\mathcal{H}_t)}{\eta_t}(H_t - \mathcal{H}_t)dt \\ &\quad - \mu_t(H_t - \mathcal{H}_t)dt + (Z_t^H - \mathcal{Z}_t)\left(dW_t - \kappa_t^1\frac{\sigma_t^\eta}{\eta_t}dt\right), \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式源于函数 f 的凹性。根据我们对 $\mathcal{H}$ 的估计以及假设 **（A6）**，可得（与引理 6 和引理 7 的证明类似），对所有 $t \in [T-\delta, T)$，

$$\left|\frac{f'(\phi(A_t)) - f'(\phi(A_t) - \phi'(A_t)\mathcal{H}_t)}{\eta_t}\right| \leq \frac{1}{\eta_\star}\Psi(A_t) \leq \frac{1}{\eta_\star}\Psi\left(\frac{T-t}{\eta^\star}\right). \tag{44}$$

此外，进一步利用 H 有界这一点，我们看到，对于所有 $t \in [0, T-\delta]$，式（44）左端的 $\widetilde{}$ 有界。因此可得，存在一个在 $[0,\infty)$ 上可积的函数 Ψ，使得对所有 $t \in [0,T]$，都有

$$d(H_t - \mathcal{H}_t) \leq \left[\frac{1}{\eta_\star}\widetilde{\Psi}\left(\frac{T-t}{\eta^\star}\right) - \mu_t\right](H_t - \mathcal{H}_t)dt + (Z_t^H - \mathcal{Z}_t)\left(dW_t - \kappa_t^1 \frac{\sigma_t^\eta}{\eta_t}dt\right).$$

$\widehat{}$利用线性倒向随机微分方程的显式公式，我们推得 $H \leq \mathcal{H}$。因此， $Y \leq Y$，所需结果得证。作为附带结果，我们还得到（H， Z^H）是倒向随机微分方程（30）的唯一解。定理2的证明至此完成。

3.3 例子

下面给出两个满足假设 **（A3）**至**（A6）**的例子：

（i）幂函数情形： f（y）$= -y|y|^{q-1}$，其中 $q > 1$。
（ii）指数情形： f（y）$= -$（exp（ay）-1），其中 $a > 0$。

3.3.1 幂函数情形

此情形在清算问题中起着关键作用。该函数满足**（A3）**。此外，令 p 为 q 的赫尔德共轭，我们可以显式计算所有所需量：

$$\begin{aligned}
&f'(y) = -q|y|^{q-1}, \quad f^{(2)}(y) = -q(q-1)|y|^{q-2}\mathrm{sgn}(y),\\
&G(x) = (p-1)x^{1-q}, \quad \phi(x) = [(q-1)x]^{1-p}, \quad \phi'(x) = -[(q-1)x]^{-p},\\
&\kappa^0(x) = \frac{-\phi'(x)x}{\phi(x)} = p-1, \quad \kappa^1(x) = p, \quad \kappa^2(x) = p+1.
\end{aligned}$$

因此，**（A4）**和**（A5）**成立。此外，当 x 接近0时，我们有

$$\varpi(x) = \frac{(q-1)^p}{p+1}x^{p+1}, \quad \vartheta(x) = x^2.$$

注意，对于任意 $\varsigma > 0$，都存在 $R > 0$，使得函数在（$R, +\infty$）上有界

$$y \mapsto \frac{f^{(2)}[y \pm \varsigma f(y)(G(y))^2]}{f^{(2)}(y)} = \left(1 \mp \varsigma(p-1)^2 y^{-q}\right)^{q-2}$$

因此，由引理5可知，**（A6）**成立，其中 Ψ 是一个常值函数。展开式（29）变为

$$Y_t = \left((p-1)\frac{\eta_t}{T-t}\right)^{p-1} + (p-1)^p \frac{\eta_t^p}{(T-t)^p}H_t, \quad \forall t \in [0,T),$$

其中 $H_t = O$（（$T-t$）^{2}）。我们推得，对于 $p < 2$，即 $q > 2$，

$$Y_t = (p-1)^{p-1}\frac{\eta_t^{p-1}}{(T-t)^{p-1}} + O((T-t)^{2-p})$$

且条件（12）在 $\alpha = 2-p > 0$ 下成立。然而，对于 $q \leq 2$，我们无法控制 $(T-t)^{-p}H_t$：

$$\lim_{t\to T} -\phi'(T-t)(T-t)^2 \neq 0.$$

3.3.2 指数情形

此处 $f(y) = -(\exp(ay) - 1)$，其中某个 $a > 0$。于是，**(A3)** 和 **(A4)** 成立，其中

$$G(y) = -\frac{1}{a}\log(1 - \exp(-ay)), \quad \phi(x) = -\frac{1}{a}\log\left(1 - e^{-ax}\right), \quad \phi'(x) = -\frac{e^{-ax}}{1 - e^{-ax}}.$$

已在 [10, 第 3.1] 节证明，当 x趋于 0 时，$\kappa^1(x)$（分别为 $\kappa^2(x)$）等价于 1（分别为 2）。因此，**（A5）** 也成立。注意，

$$\kappa^0(x) = -\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}x = -a\frac{xe^{-ax}}{1 - e^{-ax}}\left(\log(1 - e^{-ax})\right)^{-1} \underset{x\to 0}{\sim} -\left(\log(1 - e^{-ax})\right)^{-1}.$$

此外，对所有 $x \geq 0$，我们有

$$\varpi(x) = \frac{1}{a}(e^{ax} - 1 - ax).$$

在零的某个邻域内，ϖ 等价于 $x \mapsto (a/2)x^2$。换句话说，$-\phi'(x)x^2 \sim 2x/a$。某种意义上，指数情形是一种临界情形，其中 $\varpi(x)$ 与 x^2 等价。收敛速率 $\vartheta(x)$ 与幂函数情形中的 x^2 相同。

这里 $f(y) = -(\exp(ay) - 1)$，$\vartheta(x) = x^2$，且 $f^{(2)}(y) = -a^2\exp(ay)$。因此，对所有 $\varsigma > 0$ 和 $y > 0$，我们有

$$\frac{f^{(2)}[y \pm \varsigma f(y)(G(y))^2]}{f^{(2)}(y)} = \exp\left(\pm a\varsigma f(y)(G(y))^2\right),$$

and

$$-f(y)(G(y))^2 = \frac{1}{a^2}(\exp(ay) - 1)(\log(1 - \exp(-ay)))^2 \underset{y\to\infty}{\sim} \frac{1}{a^2}(e^{ay} - 1)e^{-2ay}$$

有界 （另见引理 8）。因此，利用引理5，我们得出**（A6）** 成立 .

由于 ϑ在 0 附近等价于 ϖ，由（38）可推得条件（12）在 $\alpha = 1$ 下成立。

3.4 将生成元与指数情形进行比较

我们在上文已经提到，指数情形是一种临界情形。事实上，若我们能够将 f 与某个指数函数进行“比较”，便可推断 $\vartheta(x) = \varpi(x)$ 或 $\vartheta(x) = x^2$。

引理 *8* 假设满足条件（*A3*），对所有 $x > 0$，$f(x) < 0$，且存在 $R > 0$ 和 $\beta > 0$，使得 $y \mapsto f(y)\exp(-\beta y)$ 在 $(R, +\infty)$ 上非递增。则（*A4*）成立，并且 $x \mapsto -\phi'(x)x$ 在 $(0, G(R))$ 上有界于 $1/\beta$。特别地，存在 $C > 0$，使得对所有 $x \in (0, G(R))$，$0 \leq \phi(x) \leq C - \frac{1}{\beta}\log(x)$。

证明。对任意 $R < y \leq w$，有 $f(y)e^{-\beta y} \geq f(w)e^{-\beta w}$，从而

$$\frac{f(y)}{f(w)} \leq e^{-\beta w + \beta y}.$$

首先我们得到，对任意 $x > 0$， $[x, +\infty) \ni w \mapsto -1/f(w)$ 可积，即 **(A4)**成立。然后在积分中利用上述关系可得，对所有$y > R$有 $-f(y)G(y) \leq \frac{1}{\beta}$。由于 G 非递增，其反函数为 ϕ，且对所有 $x > 0$ 有 $-\phi'(x)x = -f(\phi(x))x$，作变量替换 $y = \phi(x)$ 可得 $x \mapsto -\phi'(x)x$ 在 $(0, G(R))$ 上以 $1/\beta$ 为界。此外，对 $-\phi'(x) \leq \frac{1}{x}\frac{1}{\beta}$ 两边关于 x 积分，即得 ϕ的界。□

由此引理可推出

$$\frac{x^2}{2} = \int_0^x z dz \leq \frac{1}{\beta}\varpi(x)$$

当 $x > 0$ 足够小时。因此，由（38）可知，当 t 接近 T 时，在这种情况下我们有

$$Y_t = \phi\left(\frac{T-t}{\eta_t}\right) + O(T-t).$$

我们知道，有一些例子（幂函数情形或指数情形）中，当 $x \mapsto x^2$ 接近 0 时， ϖ 受其支配。在这些情形下，当 t 接近 T 时，（38）中的估计为 $O(\phi'(T-t)(T-t)^2)$ 阶。作为引理 8 的类似结果，我们有：

引理 *9* 假设条件（*A3*）和（*A4*）成立，且存在 $R > 0$ 和 $\beta > 0$，使得 $y \mapsto f(y)\exp(-\beta y)$ 在 $(R, +\infty)$ 上单调不减。那么， $x \mapsto -\phi'(x)x$ 在 $(0, G(R))$ 上有正下界，且对所有 $x \in (0, G(R))$，都有 $\varpi(x) \leq (\beta/2)x^2$。

证明。 这一结论可通过与引理 8 的证明类似的论证得到证明。 □

4 结论与展望

本文基于假设 2，提出了一套完整的算法，用于计算终端条件为 $+\infty$ 、生成元属于一大类函数 f 的倒向随机微分方程的解。为验证假设 2，我们证明了解 Y 在终端时刻 T 附近的渐近展开式 (29)。

因此，当 $p < 2$ 时，我们能够得到相关清算问题的价值函数及其最优控制，以最小化 (2)。值得注意的是，这涵盖了 [1], 的情形；在该情形中，作者分析了花旗集团美国股票交易部门的大型数据集，并表明 $p = 1.6$ 是该参数的良好估计。

当 $p \geq 2$ 时，还需要进一步展开。下面简要说明如何进行。回顾一下，在幂函数情形下，式 (29) 中有

$$Y_t = \left(\frac{\eta_t}{(q-1)(T-t)}\right)^{p-1} + \left(\frac{1}{(q-1)(T-t)}\right)^{p} \widehat{H}_t, \quad \forall t \in [0, T),$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$与 $H = \eta^p H$。 H 的动力学由 H 的 BSDE (30) 和 η 的假设 **(A2)** 推出。采用与 [10, 第 4 节类似的论证，1], 我们可以证明

$$Y_t = (p-1)^{p-1}\frac{\eta_t^{p-1}}{(T-t)^{p-1}} + \frac{(p-1)^p}{(T-t)^p}\mathbb{E}_t\left[\int_t^T (T-s)\eta_s^{p-1}\left(\frac{b_s^\eta}{\eta_s} + \left(\frac{p}{2}-1\right)\left(\frac{\sigma_s^\eta}{\eta_s}\right)^2\right)ds\right]$$
$$+ (T-t)^{-p}\mathbb{E}_t\left[\int_t^T (T-s)^p \lambda_s ds\right] + O((T-t)^{3-p}).$$

由于对所有 $t \in [0,T)$，我们都有

$$(T-t)^{-p}\mathbb{E}_t\left[\int_t^T (T-s)^p|\lambda_s|ds\right] \leq \frac{\lambda^\star}{p+1}(T-t),$$

我们推得，对于 $2 \leq p < 3$ 以及任意 $t \in [0,T)$，有

$$Y_t = \xi_t + O((T-t)^{3-p})$$

with

$$\xi_t = (p-1)^{p-1}\frac{\eta_t^{p-1}}{(T-t)^{p-1}} + \frac{(p-1)^p}{(T-t)^p}\mathbb{E}_t\left[\int_t^T (T-s)\eta_s^{p-1}\left(\frac{b_s^\eta}{\eta_s} + \left(\frac{p}{2}-1\right)\left(\frac{\sigma_s^\eta}{\eta_s}\right)^2\right)ds\right]. \quad (45)$$

因此，假设 2 在 $\alpha = 3-p > 0$ 下成立。然而，对于数值格式，必须精确计算式 (45) 中的条件期望，因为当 $2 < p < 3$ （即 $3/2 < q < 2$）时，这第二项的阶为 $(T-t)^{2-p}$，并且随着 t 趋于 T 而发散（对于$q = p = 2$，若 b^η 和 σ^η满足连续性条件，则当 t趋于 T时，该项有一个有限的等价量）。

当 $p \geq 3$时，我们可以迭代这一过程。但这需要将越来越多的条件期望组合起来，从而给数值计算带来新的问题。这些问题留待后续研究。

A 某些技术结果的证明

这里证明一些技术结果。

我们首先证明 ϕ 的一阶导数为负，而 ϕ 的二阶导数为正。

引理10 假设满足条件$(\mathbf{A3})$ 和$(\mathbf{A4})$ 。则对所有$x > 0$，都有 $\phi'(x) < 0$，且 $\phi''(x) > 0$。

证明。 注意到 $\phi' = f \circ \phi$ 和$(\mathbf{A3})$ 保证对所有 $x > 0$，都有 $\phi'(x) \geq 0$。假设存在 $x_0 > 0$ 使得 $\phi'(x_0) = 0$。这意味着对于 $y_0 = \phi(x_0) > 0$，有 $f(y_0) = 0$，因此由$(\mathbf{A3})$可得，对所有 $x \in [0, y_0]$，都有 $f(x) = 0$。但这与$(\mathbf{A4})$矛盾，因此对所有 $x > 0$，都有$\phi'(x) < 0$。

注意，对所有 $x > 0$，都有 $\phi''(x) = f'(\phi(x))\phi'(x)$。由于 f在 $[0, +\infty)$上是凹函数，且 f是非递增的，因此对所有 $y \geq 0$，有 $f'(y) \leq f'(0) \leq 0$。若存在 $y_0 > 0$使得 $f'(y_0) = 0$，则函数 f 在 $[0, y_0]$上恒等于零，这再次与$(\mathbf{A4})$矛盾。这证明了对所有 $x > 0$，都有 $f'(\phi(x)) < 0$，并完成证明。 □

我们在下面引理 2 和引理 3 的证明中使用前面的结果。**引理 2 的证明**。 注意，对于所有 $x > 0$ 和 $i \in \{0, 1, 2\}$，都有

$$\kappa^i(x) = -\frac{\phi^{(i+1)}(x)}{\phi^{(i)}(x)}x$$

并回忆 $\phi' = f \circ \phi$。由引理10可立即得到，对于所有 $x > 0$，都有 $0 \le \kappa^0(x)$。接下来，注意对于所有 $x > 0$，都有

$$\kappa^1(x) - \kappa^0(x) = \frac{x\phi(x)}{-\phi'(x)} \left(\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} \right)'.$$

若 ϕ'/ϕ 递增，则该量非负；这等价于 $(0,\infty) \ni y \mapsto f(y)/y$ 非递增（变量替换 $y = \phi(x)$）。由于 f 在 $[0,\infty)$ 上是凹函数，对于任意 $v > 0$ 和 $y > 0$，有

$$\frac{f(v) - f(y)}{v - y} \le \frac{f(v) - f(0)}{v - 0} = \frac{f(v)}{v}.$$

令 v 趋于 y，我们推得对所有 $y > 0$，均有 $yf'(y) \le f(y)$，也就是说，$(0,\infty) \ni y \mapsto f(y)/y$ 是非递增的。同样，对所有 $x > 0$，我们考虑差值

$$\kappa^2(x) - \kappa^1(x) = -\frac{\phi^{(3)}(x)}{\phi^{(2)}(x)} x + \frac{\phi^{(2)}(x)}{\phi'(x)} x = x \frac{\phi^{(3)}(x)\phi'(x) - \left(\phi^{(2)}(x)\right)^2}{-\phi'(x)\phi^{(2)}(x)},$$

其中，由引理10可知 $-\phi'(x)\phi^{(2)}(x) > 0$。此外注意到

$$\phi^{(3)}(x) = (f'' \circ \phi)(x)(\phi'(x))^2 + ((f' \circ \phi)(x))^2 \phi'(x)$$

and

$$\begin{aligned} \phi^{(3)}(x)\phi'(x) &= (f'' \circ \phi)(x)(\phi'(x))^3 + ((f' \circ \phi)(x))^2 (\phi'(x))^2 \\ &\ge ((f' \circ \phi)(x))^2 (\phi'(x))^2 = \left(\phi^{(2)}(x)\right)^2, \end{aligned}$$

因为 $f'' \le 0$，这是由于 f 在 $[0,\infty)$ 上是凹函数。因此我们证明了（32）。 □

引理 3 的证明。由引理 2 可知，若过程 κ^2 在 $[0,T) \times \Omega$ 上有界，则 κ^1 和 κ^0 也有界；结合 **（A1）**和 **（A2）**，μ也有界。假设 **（A5）**与 **（A1）**共同推出过程 κ^2 在 $[T - \eta_\star \frac{\epsilon}{2}, T) \times \Omega$ 上有界。在 $[0, T - \eta_\star \frac{\epsilon}{2}] \times \Omega$ 上，过程 A 有下界 $\frac{\eta_\star}{\eta^\star} \frac{\varepsilon}{2}$，上界为 $\frac{T}{\eta_\star}$。由于 f 在 $[0,\infty)$ 上属于 C^2 类，因此 ϕ 属于 C^3 类。因此，$\phi^{(3)}$ 在 $[\frac{\eta_\star}{\eta^\star} \frac{\varepsilon}{2}, \frac{T}{\eta_\star}]$ 上有界。此外，$\phi^{(2)}$ 的连续性和引理10保证 $\phi^{(2)}$ 在 $[\frac{\eta_\star}{\eta^\star} \frac{\varepsilon}{2}, \frac{T}{\eta_\star}]$ 上有界，且其下界严格大于零。由此可得，过程 κ^2 在 $[0, T - \eta_\star \frac{\epsilon}{2}] \times \Omega$ 上也有界。□

接下来我们证明引理 4。

引理 4 的证明。由 [10, 引理 11 和公式（38）], 可知，存在一个常数 $k > 0$（注意，k 是 $x \mapsto \kappa_1(x)$ 的界，并且取决于 **（A5）**），使得对所有 $x \in (0, (\eta^\sharp)^{-1}\epsilon)$ 均有

$$1 \le \frac{-\phi'(x)}{-\phi'(\eta^\sharp x)} \le (\eta^\sharp)^k.$$

由（35）可知，由于 $-\phi'$ 非负且非递增，因此对所有 $x \in (0, (\eta^\sharp)^{-1}\epsilon)$，我们有

$$0 \le -\phi'(x)\vartheta(\eta^\sharp x) \le \eta^\sharp x \max\left(\frac{-\phi'(x)}{-\phi'(\eta^\sharp x)}, -\eta^\sharp x \phi'(x) \right) \le \eta^\sharp x \max\left((\eta^\sharp)^k, \eta^\sharp \kappa^0(x)\phi(x) \right).$$

由 （**A5**）和引理 2，我们还知道 $x \mapsto \kappa^0(x)$ 在 $(0, \epsilon)$ 上有界。因此存在 $\epsilon' > 0$，使得对所有 $x \in (0, \epsilon')$，我们有

$$0 \leq \varsigma(\eta^\sharp)^2 x \kappa^0(x) \leq \frac{1}{2}.$$

注意，对所有 $x > 0$，$\phi(x) + \varsigma\phi'(x)\vartheta(\eta^\sharp x) = \phi(x) - \varsigma(-\phi'(x))\vartheta(\eta^\sharp x)$。因此，由于当 x 趋于零时，ϕ 趋于 ∞，我们便得到所需结果。□

现在我们来证明引理5。

引理5的证明。当 $x > 0$ 接近 0 时，我们有

$$\begin{aligned}
&f'(\phi(x)) - f'(\phi(x) \pm \varsigma\phi'(x)\vartheta(x)) \\
&= \mp\varsigma\phi'(x)\vartheta(x) \int_0^1 f^{(2)}(\phi(x) \pm \alpha\varsigma\phi'(x)\vartheta(x))d\alpha \\
&= \mp\varsigma\phi'(x) f^{(2)}(\phi(x))\vartheta(x) \int_0^1 \frac{f^{(2)}(\phi(x) \pm \alpha\varsigma\phi'(x)\vartheta(x))}{f^{(2)}(\phi(x))} d\alpha \\
&= \mp\varsigma \left(\kappa^2(x)\kappa^1(x) - (\kappa^1(x))^2\right) \int_0^1 \frac{f^{(2)}(\phi(x) \pm \alpha\varsigma\phi'(x)x^2)}{f^{(2)}(\phi(x))} d\alpha.
\end{aligned}$$

由于 $x \mapsto \kappa^1(x)$ 和 $x \mapsto \kappa^2(x)$ 是 $(0, \epsilon)$ 上的有界函数（由 （**A5**） 和引理 2 可知），通过变量替换 $y = \phi(x)$，可得所需结果。□

最后来看下一个结果。

引理 11 假设条件（**A1**） 至（**A6**） 均成立。那么

$$x \mapsto \frac{f(\phi(x) \pm \varsigma\phi'(x)\vartheta(\eta^\sharp x))}{f(\phi(x))}$$

在$(0, \epsilon)$上有界。

P证明。对于任意 $x > 0$，由于 f 在 $(0, \infty)$ 上非递增且为负，因此有

$$\frac{f(\phi(x) - \varsigma\phi'(x)\vartheta(\eta^\sharp x))}{f(\phi(x))} \geq 1.$$

此外，对于所有 $x \in (0, \epsilon)$，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{f(\phi(x) - \varsigma\phi'(x)\vartheta(\eta^\sharp x))}{f(\phi(x))} - 1 &= -\frac{\varsigma\phi'(x)\vartheta(\eta^\sharp x)}{f(\phi(x))} \int_0^1 f'(\phi(x) - a\varsigma\phi'(x)\vartheta(\eta^\sharp x))da \\
&= -\varsigma\vartheta(\eta^\sharp x) \int_0^1 f'(\phi(x) - a\varsigma\phi'(x)\vartheta(\eta^\sharp x))da \\
&= -\varsigma\vartheta(\eta^\sharp x) \int_0^1 \left[f'(\phi(x) - a\varsigma\phi'(x)\vartheta(\eta^\sharp x)) - f'(\phi(x))\right] da - \varsigma f'(\phi(x))\vartheta(\eta^\sharp x) \\
&= -\varsigma\vartheta(\eta^\sharp x) \int_0^1 \left[f'(\phi(x) - a\varsigma\phi'(x)\vartheta(\eta^\sharp x)) - f'(\phi(x))\right] da + \varsigma\kappa^1(x)\frac{\vartheta(\eta^\sharp x)}{x} \\
&\leq \varsigma\vartheta(\eta^\sharp x)\Psi(x) + \varsigma\kappa^1(x)\frac{\vartheta(\eta^\sharp x)}{x}.
\end{aligned}$$

类似地，对于所有 $x \in (0, \epsilon)$，有

$$
\begin{aligned}
0 \geq \frac{f(\phi(x) + \varsigma\phi'(x)\vartheta(\eta^\sharp x))}{f(\phi(x))} - 1 &= \frac{\varsigma\phi'(x)\vartheta(\eta^\sharp x)}{f(\phi(x))} \int_0^1 f'(\phi(x) + a\varsigma\phi'(x)\vartheta(\eta^\sharp x))da \\
&= \varsigma\vartheta(\eta^\sharp x) \int_0^1 \left[f'(\phi(x) + a\varsigma\phi'(x)\vartheta(\eta^\sharp x)) - f'(\phi(x)) \right] da - \varsigma\kappa^1(x)\frac{\vartheta(\eta^\sharp x)}{x} \\
&\geq -\varsigma\kappa^1(x)\frac{\vartheta(\eta^\sharp x)}{x}.
\end{aligned}
$$

函数 $x \mapsto \kappa^1(x)$ 由于条件（**A5**）（参见 (32)）而在 $(0, \epsilon)$ 上有界，且 $x \mapsto \vartheta(\eta^\sharp x)\, x$ 在 $(0, \epsilon)$ 上也有界。该引理的结论现由假设（**A6**）直接得出。□

致谢 所有作者感谢德国学术交流中心（DAAD，德国学术交流中心）在资助计划“法德项目相关人员交流计划”框架内提供的资助——项目编号 57702378，以及法国高等教育署 PHC（于贝尔·居里安项目）Procope 编号 50835ZC 的资助。Julia Ackermann 与 Thomas Kruse 感谢德国研究联合会（DFG，德国研究联合会）的资助——项目编号 531152215——CRC 1701。

参考文献

[1] R. Almgren、C. Thum、E. Hauptmann 和 H. Li。股票市场冲击的直接估计。2005年。[2] S. Ankirchner、M. Jeanblanc 和 T. Kruse。带奇异终端条件的倒向随机微分方程与带约束控制问题。*SIAM J. Control Optim.*，52(2):893–913，2014年。[3] D. Becherer。用于效用优化和无差异对冲的带跳跃倒向随机微分方程有界解。应用概率年刊，16(4):2027–2054，2006年。[4] D. Cacitti-Holland、L. Denis 和 A. Popier。最优清算的Malliavin导数与敏感性。预印本，hal-05072816 或 arXiv:2505.14287，2025年5月。[5] E. B. Dynkin 和 S. E. Kuznetsov。非线性微分方程解在边界上的迹。*Trans. Amer. Math. Soc.*，350(11):4499–4519，1998年。[6] E. Gobet、J.-P. Lemor 和 X. Warin。求解倒向随机微分方程的基于回归的蒙特卡罗方法。应用概率年刊，15(3):2172–2202，2005年。[7] E. Gobet、J.-P. Lemor 和 X. Warin。求解广义倒向随机微分方程的经验回归方法的收敛速率。《伯努利》，12(5):889–916，2006年。[8] P. Graewe、U. Horst 和 J. Qiu。非马尔可夫清算问题与具有奇异终端条件的倒向随机偏微分方程。*SIAM J. Control Optim.*，53(2):690–711，2015年。

[9] P. Graewe、U. Horst 和 E. Séré。价格敏感型市场冲击下投资组合清算问题的光滑解。随机过程及其应用，128(3):979–1006，2018年。[10] P. Graewe 和 A. Popier。求解带奇异终端条件的倒向随机微分方程的渐近方法。随机过程及其应用，133:247–277，2021年。[11] O. Guéant。市场流动性的金融数学。Chapman & Hall/CRC金融数学丛书。CRC出版社，佛罗里达州博卡拉顿，2016年。从最优执行到做市。[12] P. Henry-Labordère、N. Oudjane、X. Tan、N. Touzi 和 X. Warin。半线性偏微分方程的分枝扩散表示与蒙特卡罗近似。亨利·庞加莱概率与统计研究所年刊，55(1):184–210，2019年。[13] P. Henry-Labordère、X. Tan 和 N. Touzi。基于分枝过程的一类倒向随机微分方程数值算法。随机过程及其应用，124(2):1112–1140，2014年。[14] M. Hutzenthaler、A. Jentzen、T. Kruse 和 T. A. Nguyen。克服倒向随机微分方程数值近似中的维数灾难。数值数学杂志，31(1):1–28，2023年。[15] M. Hutzenthaler、T. Kruse 和 T. A. Nguyen。倒向随机微分方程皮卡迭代的收敛速度。概率、不确定性与定量风险，7(2):133–150，2022年。[16] M. Jeanblanc 和 A. Réveillac。关于具有奇异驱动项系数的倒向随机微分方程的注记。载于套利、信用与信息风险，第5卷北京大学数学系列，第207–224页。世界科学出版社，新泽西州哈肯萨克，2014年。[17] P. E. Kloeden 和 E. Platen。随机微分方程的数值解，第23卷数学应用（纽约）。施普林格出版社，柏林，1992年。[18] T. Kruse 和 A. Popier。带奇异终端条件的倒向随机微分方程的最小超解及其在最优头寸目标设定中的应用。随机过程及其应用，126(9):2554–2592，2016年。[19] A. Lionnet、G. dos Reis 和 L. Szpruch。具有多项式增长驱动项的前向倒向随机微分方程及反应扩散偏微分方程的时间离散化。应用概率年刊，25(5):2563–2625，2015年。[20] M. Marcus 和 L. Véron。某些非线性抛物型方程正解的初始迹。偏微分方程通讯，24(7-8):1445–1499，1999年。[21] E. Pardoux 和 A. Rascanu。随机微分方程、倒向随机微分方程、偏微分方程，第69卷随机建模与应用概率。施普林格出版社，2014年。[22] A. Popier。具有奇异终端条件的倒向随机微分方程。随机过程及其应用，116(12):2014–2056，2006年。

[23] A. Popier. 带奇异终端条件的积分-偏微分方程。非线性分析，155:72–96，2017。
[24] J. Zhang. 倒向随机微分方程的数值格式。应用概率年刊，14(1):459–488，2004。
[25] J. Zhang. 倒向随机微分方程，概率论与随机建模丛书第86卷。施普林格，纽约，2017。从线性理论到完全非线性理论。