湍流下光学斯格明子中拓扑与纹理的解耦 ce

D. G. Pires* 和 N. M. Litchinitser†

美国北卡罗来纳州达勒姆市杜克大学电气与计算机工程系，邮编 *27708*

**danilo.gomes.pires@duke.edu*

†*natalia.litchinitser@duke.edu*

摘要

拓扑结构常被视为获得抗无序光子态的一种途径，但在真实无序环境下，它能否保护局部解析的场结构，尚未得到证实。光学斯格明子是由全局斯格明子数 N_{sk}表征的矢量光场，可用于严格检验这一问题在湍流环境下的表现。尽管预期 N_{sk} 具有鲁棒性，但全局不变量守恒并不能保证底层偏振纹理得以保留。在此，我们重构了经过可控湍流信道传输的光学斯格明子的完整斯托克斯场，并结合实验、相位屏模拟和解析建模，分别追踪全局与局部观测量。我们证实，在一个宽广的无序区域内，N_{sk} 仍保持守恒，而精细的偏振结构却迅速退化。这种显著的解耦现象在高阶斯格明子中更加突出，揭示了拓扑不变量与纹理解析信息之间的鲁棒性层级，并界定了无序波动系统中拓扑保护的内在限度。

对光的相位、偏振以及时空结构进行调控，为利用其空间和时间自由度编码信息开辟了新途径 [1]。许多应用都要求光在会扭曲光学波前的环境中传播，因此人们开始寻找在扰动下仍能明确定义的度量 [2]。拓扑通过将光场视为从物理坐标到支持整数值不变量的内部状态空间的映射，提供了这类度量；这些不变量在光滑形变下保持稳定 [3]。即使传统几何度量失效，这些不变量仍可作为简洁的场结构标记而得以保留。然而，大气湍流会引入随机折射率涨落，造成闪烁、光束漂移和模式混合 [4–7], ，由此引出一个核心问题：经过随机传播后，哪些结构度量仍能以足够高的保真度恢复？

光学斯格明子为探讨这一问题提供了天然的研究对象，因为它们将拓扑编码在偏振纹理中，而非仅编码于标量相位。斯格明子最初作为拓扑稳定的场构型在高能物理中被提出，后来被认识为有序介质中普遍存在的类粒子织构 [8–15]。在光子学中，可通过正交偏振场的叠加、周期性矢量光束、时空耦合以及完全三维的矢量场来构造类似结构 [16–24]。这种多样性使其成为一种灵活的平台，可用于检验基于偏振的拓扑相较于标量结构化光束的鲁棒性 [25–27]。然而，许多应用不仅依赖守恒的全局不变量，也依赖实现该不变量的局部纹理 [18, 28, 29]。在此，我们通过

受控湍流信道、统计匹配的分步模拟以及解析标度模型，将这些贡献区分开来。我们表明，在广泛的无序区域内，全局斯格明子指数保持稳定，而纹理分辨指标则会退化。随着纹理阶数增加，这种差异愈发显著，导致系综平均保真度降低、方差增大。我们的解析模型同时刻画了低阶纹理的鲁棒性和高阶纹理的快速退化，从而确立了拓扑光内部的稳定性层级。

湍流导致的全局和局部光学指标失真

大气湍流源于不同温度和湿度的空气团混合，在光传播路径上产生随机的折射率涨落 [30, 31]。这些不均匀性会累积为随机的光程变化，引入相位延迟，并将其转化为振幅调制、光束扩展和光强闪烁。柯尔莫哥洛夫理论提供了一种常用的统计描述，将湍流建模为在外尺度和内尺度之间的惯性区间内局部均匀且各向同性的过程 [32]。湍流强度通常通过折射率结构常数 C_n^2 进行表征，从而能够定量估计相干性损失，并为随机相位屏模拟提供依据。在实验室中，通常使用由柯尔莫哥洛夫统计驱动的可编程波前调制器，或通过平移湍流板来模拟湍流 [33-36]。在此，我们使用热空气湍流室，在光传播路径上生成分布式且动态演化的折射率分布 [37]。加热器功率和流量决定湍流强度，该强度通过时间系综光束指标进行校准，以将实验设置映射到模拟中使用的柯尔莫哥洛夫参数化（有关湍流室的详细信息，请参见方法）。

这些对大气扰动的受控实现为研究光学斯格明子提供了直接途径。光学斯格明子是由光束横截面上局部偏振态的空间分布所定义的偏振纹理。一种便捷的描述方法是将每个横向点映射到庞加莱球上的单位斯托克斯矢量 $\boldsymbol{s}(x,y) = \boldsymbol{S}/S_0$，其中 $\boldsymbol{S} = (S_1, S_2, S_3)$ 和 S_0分别表示斯托克斯参数和总光强。在这种表示中，光场形成一个映射到闭合序参量空间的二维映射。相应的斯格明子数是一个全局不变量，用于量化该映射覆盖球面的程度，可写为 [16, 38]

$$N_{sk} = \frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma} \boldsymbol{s}\cdot\left(\partial_x \boldsymbol{s}\times\partial_y \boldsymbol{s}\right)dxdy, \tag{1}$$

其中被积函数为局域拓扑密度，σ 为积分区域。该表述反映了不变量的全局性质，表明斯格明子数在中等畸变下仍可保持稳定。然而，全局指标的保持本身并不能确保编码实际信息的精细偏振纹理的稳定性。光学斯格明子可通过叠加两个正交圆偏振的同向传播模式来实现，这两个模式分别由高斯模式和拉盖尔-高斯（LG）模式构成，即 $\mathbf{E}(r,\phi) = A_0\,\mathrm{LG}_0^0(r,\phi)\,\hat{\mathbf{e}}_R + A_m\,\mathrm{LG}_0^m(r,\phi)\,e^{i\delta}\,\hat{\mathbf{e}}_L$，其中$\hat{\mathbf{e}}_{R,L}$ 分别表示右旋（右旋圆偏振）和左旋

圆偏振（左旋圆偏振），m 为方位绕数，且A_0, A_m, δ 分别控制相对归一化权重和相位（详见方法部分）。图1(a)展示了用于在湍流中产生并探测斯格明子纹理的实验装置示意图（详见方法）。测得的未受扰动与受扰动光学斯格明子示例分别示于图1(b)，对应奈尔（b1, b4）、布洛赫（b2, b5）和反斯格明子（b3, b6）织构。

除了全局指标外，斯格明子织构还可用局部指标来表征，这些指标用于量化横截面内偏振态的空间结构。将斯托克斯矢量表示为庞加莱球上的球坐标角 β, γ （完整推导见《补充材料》第 1 节），即 $\boldsymbol{s} = (\sin\ \beta \cos\ \gamma, \sin\ \beta \sin\gamma, cos\beta)$，可定义三个局部参数 [16, 38]。首先是极性 p，用于表征织构中心附近及边界 σ处面外取向的方向，通常定义为 $P_{sk} = [\cos\beta(r_\sigma) - \cos\ \beta(0)]/2$。第二个参数是涡度 $V_{sk} = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} \partial_\phi \gamma d\phi$，用于量化绕包围核心的闭合回路一周时方位角 γ 的整数绕转数。最后一个参数是螺旋度 H_{sk}，它表示 (s_1, s_2) 的面内旋转相对于径向方向的取向，定义为纹理角与几何方位角之间的偏移量 $H_{sk} = \gamma - V_{sk}\phi$。三者 (P_{sk}, V_{sk}, H_{sk}) 共同确定织构的局部结构，并区分不同类型的斯格明子。例如，$(P_{sk}, V_{sk}, H_{sk}) = (1,1,0)$ 和 $(1,1,\pi)$ 对应奈尔型斯格明子，$(1,1,\pm\pi/2)$ 对应布洛赫型斯格明子，而对于任意 H_{sk}，$(1,-1,H_{sk})$ 则定义了反斯格明子。

湍流通过随机折射率涨落作用于这些量，施加随空间变化的相位延迟和振幅调制，从而改变光束中正交偏振分量的相对相位和振幅。从物理角度看，湍流会逐点扰动 $\beta(x, y)$ 和 $\gamma(x, y)$，导致核心漂移、局部偏振旋转，以及梯度 $\partial_x \boldsymbol{s}$ 和 $\partial_y \boldsymbol{s}$ 的不规则变化。因此，当界定核心的区域发生位移或被强度涨落遮蔽时，极性便容易受到影响。涡度很容易被破坏，因为它依赖于 γ 的相干角向绕转，而湍流引入随空间变化的相对相位滑移，可能使其破碎。螺旋度通常是最敏感的参数，因为它取决于明确的面内取向，而这种取向会受到局部偏振畸变的强烈影响。另一方面，斯格明子数是对整个横截面上的拓扑密度进行积分，因此湍流虽可严重扭曲局部纹理，却仍可能不改变整体绕包数。只有畸变足够强时，才会使积分密度产生较大涨落，或导致映射发生有效边界泄漏。全球稳健性与局部退化之间的这种差异，促使我们重点考察湍流信道中的纹理层级稳定性。

湍流下斯格明子纹理的鲁棒性

湍流作用后，通过直接对观测平面中的 $\boldsymbol{S} = (S_1, S_2, S_3)$ 进行处理，提取局域纹理度量。极性 P_{sk} 根据斯托克斯参数的圆偏振分量确定，取纹理核心处和参考半径处 S_3 的平均值；参考半径用于采样图样的外围区域。实际处理中，我们在 $r = 0$处和边界 $r = r_\sigma$ 处计算 S_3，并根据这些值的相对方向 [16,38]确定极性。纹理边界半径 r_σ 根据未受扰动的斯格明子定义：选取圆偏振斯托克斯分量 S_3 在 $+1$ 与-1之间发生转变的径向位置，为所有湍流实现提供一致的参考边界。该定义在中等畸变下仍然有效，但当湍流使表观核心发生位移，或削弱 r_σ附近的对比度时，定义便会变得模糊。为解决这一问题，我们对多个实现取系综平均，并采用强度追踪算法，以加权强度质心为基准重新定位畸变后的场分布。对于所有通过实验和数值方法获得的纹理，每种湍流强度均进行了 100 次实现。对于每次实现，计算强度质心 (x_m, y_m)，具体方法是求取 $x_m = \iint xI(x,y)dxdy/I_0$ 和 $y_m = \iint yI(x,y)dxdy/I_0$，其中 $I(x,y)$ 为测得的强度，$I_0 = \iint I(x,y)dxdy$。

涡度 V_{sk} 由横向斯托克斯复场S_1 和 S_2的方位绕转得到，定义为 $S_\perp = S_1 + iS_2 = |S_\perp| \exp(i\psi)$，其中 $\psi = \arg(S_\perp)$为面内偏振角 [16, 38]。我们计算纹理中心周围 ψ 的整数环流，结果为$V_{sk} = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \partial_\phi \psi d\phi$。这一过程与通过光学相位 [39]的环流提取轨道角动量模式的拓扑荷非常相似。湍流会引入空间变化的相位扰动，使功率在相邻绕数之间重新分配，从而导致相邻模式之间发生串扰 [4, 5, 33, 36]。在本例中，ψ 的随机扰动会使横向偏振角的整数绕转发生有效混合，因此，即使整体纹理保持其总体拓扑不变，测得的涡度也会在不同实现之间波动。因此，这种类比是直接的：涡度退化代表了偏振纹理对应的轨道角动量模式串扰，其中角度 ψ 起到标量光学相位的作用。

通过比较匹配空间位置处受扰的面内角度 ψ 与相应的未受扰参考值 ψ_0，对螺旋度 H_{sk} 进行统计估计。我们定义角度差 $\Delta\psi = \mathrm{wrap}(\psi - \psi_0)$，其取值范围为 $(-\pi, \pi]$，并用冯·米塞斯概率密度 [40], 对其分布建模。该概率密度是正态分布的圆形对应形式，写作$f(\Delta\psi; \mu, \kappa) = (2\pi I_0(\kappa))^{-1} \exp[\kappa \cos(\Delta\psi - \mu)]$。其中，$\mu$ 为平均方向，$\kappa \geq 0$ 为集中参数，I_0 为零阶第一类修正贝塞尔函数。在此框架下，平均螺旋度对应于拟合得到的 μ（或等价地，对应于第一圆矩的辐角），而 κ 量化了受扰纹理围绕该平均值聚集的紧密程度。具体而言，若 $e^{i\Delta\psi} = Re^{i\mu}$，则 $R \in [0,1]$ 衡量圆相干性，并通过标准冯·米塞斯关系 κ $(\kappa)/I_0(\kappa)$ 映射为 κ。湍流会使$\Delta\psi$ 分布展宽，从而降低 R 并使 κ 减小，意味着清晰定义的

H_{sk} 即使在系综中仍能识别出非零平均值 μ （有关此统计模型的详情，请参阅《补充材料》第 3 节）。

图 2 汇总了在不同湍流强度下，数值计算和实验获得的一阶奈尔型（a、d）、布洛赫型（b、e）和反斯格明子（c、f）织构的斯格明子数 N_{sk}、极性 P_{sk}、涡度 V_{sk} 和螺旋度 H_{sk} 。斯格明子数 N_{sk} 根据公式（1）直接计算得出。随着湍流强度增加， N_{sk}保持稳定，而（P_{sk}、 V_{sk}、 H_{sk}）迅速退化，这表明偏振场仍保留其在庞加莱球上的全局缠绕，即使定义可辨识织构的空间组织逐渐遭到破坏。换言之，湍流会在正交偏振分量之间引入横向相对相位和振幅变化，从而扭曲斯托克斯矢量的梯度，并重新分布局部拓扑密度，但不一定改变其积分值。由此形成一种状态：全局不变量仍可测量，且接近其目标值，但用于织构编码、分类或追踪所需的局部结构却越来越不可靠。

更强湍流下极性的丧失具有直接的几何含义。核处与边缘处S_3 的符号 r_σ 不再为织构提供稳定的上下取向。实验上，当核位置变得不确定、强度涨落降低原点附近斯托克斯重构的保真度，或径向分布被重塑以致参考环不再对织构的同一部分进行采样时，就会出现这种情况。一旦极性变得含糊，织构便无法再被赋予明确的中心取向，从而削弱任何依赖于识别核态、或仅根据面外分量的指向来区分织构的解释。

涡度退化反映了横向斯托克斯场相位相干方位角进程的瓦解，该相位记为$\arg\ (S_1 + iS_2)$。随着湍流增强，围绕闭合回路提取的绕数变得随具体实现而异，因为相位扰动会诱发角向不连续，并产生或位移 $|S_\perp|$ 较小的点，从而实际上使环流发生碎裂。因此，图2(d–f)中所得直方图是轨道角动量通道中模式混合的偏振织构类比：预期绕数在统计上仍占优势，但随着随机介质增强，权重会转移到相邻整数。这种重新分配对任何以涡度作为信息载体的方案都具有实际影响，因为它会直接转化为符号错误，即便N_{sk} 仍表明非平凡拓扑得以存续。

此外，螺旋度还表现出另一种脆弱性，因为它依赖于相对于参考纹理定义明确的面内取向。在冯·米塞斯描述中，湍流越强，角度差分布越宽，集中参数越低，系综也越趋近于均匀角分布。在这种情况下，虽然仍可形式上定义平均螺旋度，但它已不再具有参考意义，因为概率密度并未集中在该平均值附近。这对应于稳定内部扭转的丧失

纹理的方向，因此奈尔型和布洛赫型排列之间的区别逐渐变得模糊，尽管整体映射仍近似将球面缠绕一次。

这些观察结果清楚地区分了拓扑鲁棒性与纹理保真度。N_{sk} 的韧性表明，即使极性、涡度和螺旋度不再是可靠的度量，湍流仍能保留全局不变量。因此，在更强的湍流条件下，场可能仍具有非平庸拓扑，但可用纹理信息有所减少，这表明仅凭拓扑不足以保证真实传播信道中编码和解释所需局部特征的稳定性。

高阶光学斯格明子的拓扑退化

迄今为止，对一阶纹理的测量表明，即使湍流显著扭曲空间偏振图样，全局拓扑指标仍可保持稳定，这支持将N_{sk} 用作受扰信道中的鲁棒度量。然而，这种韧性是否也适用于高阶光学斯格明子？为回答这一问题，我们研究了目标阶数逐渐升高的奈尔型纹理，使其通过相同的湍流信道，并在实验和模拟中获取 N_{sk} 。综合结果见图3。

对于最高达 $N_{sk} = 5$ 阶的情形，我们发现斯格明子数的稳健性并非普遍成立。相反，随着拓扑序的提高，其稳健性逐渐降低。低阶织构在湍流强度已足以破坏局域纹理度量时，仍能保持近乎恒定的 N_{sk} ；而高阶纹理的斯格明子数则会显著更快地失去明确性。这表现为分布变宽，且恢复目标斯格明子数的概率降低。这一现象与以下事实相符：高阶纹理的斯托克斯场具有更精细的空间变化，拓扑密度分布也更具结构性。因此，湍流更容易使密度在孔径内重新分布，并增强式 1 所定义积分中正贡献与负贡献之间的抵消。因此，对于适中的阶数，全局不变量仍具有参考价值；但随着纹理复杂度增加，它会越来越容易受到湍流影响。这限制了拓扑保护能够得到可靠利用的范围。此前已有研究报告了斯格明子数保真度随阶数升高而降低的类似现象；在较高背景噪声水平下，复杂度更高的织构呈现出更大的离散程度 [41]。

为量化纹理阶数增加时斯格明子数保真度的损失，我们通过对大量湍流实现求取系综平均 $\langle N_{sk} \rangle$ 和方差 $\mathrm{Var}(N_{sk})$，评估其退化程度。这些指标反映了测得的整数值围绕其目标值的波动，因此能够直接衡量可靠性，不受异常值的干扰。在所考察的各阶数中，$\langle N_{sk} \rangle$ 降低，而 $\mathrm{Var}(N_{sk})$ 相对于其初始未受扰动的斯格明子数 N_0 急剧增加。这种行为揭示了指数依赖关系，在中等湍流强度下便已十分明显，这与高阶纹理的斯格明子数分布变宽的观察结果一致。图4(a)和(b)展示了这一趋势

对于 $\sigma_R^2 = 0.25$，分别对应数值模拟和实验中的系综平均与方差 N_{sk}。

我们建立了一个模型，将有效累积畸变视为积分前对拓扑密度场的乘性调制，以解释这一标度关系。完整推导请参阅补充材料第4节。利用描述湍流诱导场涨落的 Rytov-Tatarski 描述[30, 31], ，所得估算预测斯格明子数的系综平均按 $\langle N_{sk} \rangle = N_0 \exp(\Lambda_{eff} N_0^2)$ 衰减，而其方差按 $\mathrm{Var}(N_{sk}) = N_0^2 \exp(\Gamma_{eff} N_0^2)$ 增长，其中 $\Lambda_{eff} < 0$ 和 $\Gamma_{eff} > 0$ 为有效湍流参数。如图4所示，这种指数依赖关系准确描述了数值测量和实验测量结果。它还明确表明，斯格明子数的抗扰韧性受到阶数依赖的限制，即使在低阶时其平均值仍接近目标值。由模拟（实验）得出的参数值分别为 $\Lambda_{eff}^{sim} = -0.008668$（$\Lambda_{eff}^{exp} = -0.008481$）和 $\Gamma_{eff}^{sim} = 0.15$（$\Gamma_{eff}^{exp} = 0.21$）。尽管这一理论模型旨在理解斯格明子数与大气湍流扰动之间的相关性，但还可以进一步改进，用于研究其他光学随机系统。除了与湍流中高阶 OAM 标量模式的行为明显相似之外[4, 5, 33, 36,42], ，在稀薄玻色-爱因斯坦凝聚体[43] 和向列液晶 [44]中也有类似的阶数依赖限制的报道。在当前语境下，这些先例进一步表明，增加拓扑阶数并不必然增强保护作用或使其保持不变。

方法

对流空气湍流室

实验中使用的湍流室可产生受控体积的湍流气流，其内部混合区为长方体，尺寸约为 $150 \times 150 \times 150\ \mathrm{mm}^3$ 。两台风扇将环境空气送入室内，第三台风扇则注入热气流；另设一台排气风扇，以维持稳定的贯流并促进持续混合。光束经由专用孔径射入和射出，在体积内折射率涨落不断变化时，会经历随时间变化的波前畸变。热空气源的温度最高可达 120℃，温度稳定性约为 ± 0.1℃。在这些运行条件下，横向流的特征时间带宽对应的 Greenwood 频率为 $f_G \approx 35$ Hz。湍流室两侧各设有 4 个直径约为 76.2 mm 的圆形光学端口，用于利用反射镜对结构光进行多次反射。

光学斯格明子纹理

光学斯格明子被制备为近轴矢量场，由两个空间模式相干叠加而成，分别由相互正交的圆偏振携带。圆基矢定义为

为$\hat{\mathbf{e}}_R = (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}})/\sqrt{2}$ 和$\hat{\mathbf{e}}_L = (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}})/\sqrt{2}$。斯格明子复包络写作[38,41]

$$\mathbf{E}(r,\phi) = E_R(r,\phi,z)\,\hat{\mathbf{e}}_R + E_L(r,\phi,z)\,\hat{\mathbf{e}}_L, \tag{2}$$

其中 $E_R = A_0\,\mathrm{LG}_0^0(r,\phi,z)$ 与 $E_L = A_m\,\mathrm{LG}_0^m(r,\phi,z)\ e^{i\delta}$。此处，$\mathrm{LG}_0^0$ 表示基模高斯模，LG_0^m 为方位指数为 m 且径向阶为零的 LG 模式，A_0 与 A_m设定相对归一化权重，δ 控制两个圆偏振分量之间的相对相位。按标准记法，$\mathrm{LG}_0^m(r,\phi,z) = U_m(r,z)\,e^{im\phi}$，其中 $U_m(r,z)$ 为由束腰和传播距离决定的空间包络，由 [45] 给出

$$U_m(r,z) = \sqrt{\frac{2}{\pi|m|!}}\frac{1}{w(z)}\left(\frac{\sqrt{2}r}{w(z)}\right)^{|m|} e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}} e^{-i\frac{kr^2}{2R(z)}} e^{i(|m|+1)\zeta(z)}, \tag{3}$$

其中光束尺寸 $w(z) = w_0\sqrt{1+(z/z_R)^2}$，波前曲率半径 $R(z) = z[1+(z_R/z)^2]$, 以及古伊相位项因子 $\zeta(z) = \mathrm{atan}(z/z_R)$。在前述所有表达式中，$z_R = kw_0^2/2$ 为瑞利长度，w_0 为最小束腰。

所得的空间变化叠加通过右旋圆偏振与左旋圆偏振分量之间的干涉，将方位相位因子 $e^{im\phi}$ 转换为偏振纹理。由$\mathbf{E}$可得斯托克斯参数$\boldsymbol{S} = (S_1, S_2, S_3)$为$S_0 = |E_R|^2 + |E_L|^2$、$S_1 = |E_x|^2 - |E_y|^2$、$S_2 = |E_a|^2 - |E_d|^2$和 $S_3 = |E_R|^2 - |E_L|^2$。此处，E_x、E_y、E_a、E_d 分别对应于矢量场的水平、垂直、反对角和对角分量。单位斯托克斯矢量$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{S}/S_0$ 给出映射$(x,y) \to \boldsymbol{s}(x,y)$，从而定义斯格明子织构。织构的阶数主要由整数$m$控制，而参数$A_m/A_0$和$\delta$ 的选取用于设定S_3 中转变的径向范围以及横向斯托克斯分量的面内取向，从而能够在输入平面上可重复地制备目标斯格明子类型。

大气相位屏

通过对二维随机相位掩模进行采样，对大气湍流进行数值建模，其二阶统计特性遵循柯尔莫哥洛夫标度 [30-32, 42, 46]。我们将相位结构函数定义为 $\Psi(\boldsymbol{r}) = \langle|\Phi(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) - \Phi(\boldsymbol{r}')|^2\rangle$，其中 $\langle\cdot\rangle$ 表示随机相位屏 Φ 的系综平均，并通过平稳随机过程的标准傅里叶关系，将其与空间频率功率谱 $\Theta(\boldsymbol{\kappa})$ 联系起来。对于柯尔莫哥洛夫湍流，谱由维纳谱 Θ 计算为 [37, 42, 46]

$$\Psi(\boldsymbol{r}) = 2\int \Theta(\boldsymbol{\kappa})[1-\cos(2\pi\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{r})]d^2\boldsymbol{\kappa} = 6.88\left(\frac{|\boldsymbol{r}|}{r_0}\right)^{5/3}, \tag{4}$$

其中 $\Theta(\boldsymbol{\kappa}) = 0.023 r_0^{-5/3}|\boldsymbol{\kappa}|^{-11/3}$，$r_0$ 是设定湍流强度的 Fried 参数。或者，Θ 表示随机功率谱 $P(\boldsymbol{\kappa}) = \int \Theta(\boldsymbol{\kappa})\exp[-i2\pi\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{r}]d^2\boldsymbol{r}$的协方差函数。相位屏通过在一个

$N \times N$ 网格上采用谱采样过程生成，该网格覆盖的孔径尺寸为 D。在离散频率格点上生成复高斯随机数组 $M(\boldsymbol{\kappa})$（均值为零，方差为单位值），并按目标频谱进行整形，如下所示：$P(\boldsymbol{\kappa}) = \sqrt{\Theta(\boldsymbol{\kappa})}\, M(\boldsymbol{\kappa})$ [46, 47]。相应的相位实现通过逆傅里叶变换并取其实部获得：$\Phi(x, y) = \mathrm{R}\{\mathrm{F}^{-1}[P(\boldsymbol{\kappa})]\}$。由于网格上可分辨的最小频率为 $1/D$，这种直接采样会低估与 $\kappa^{-11/3}$ 依赖关系相关的大尺度贡献。因此，我们通过在低于 $1/D$ 的频率处计算频谱，并添加带有独立随机系数的相应长周期傅里叶项，为相位屏补充低频分量。这一修正恢复了相位图中缓慢变化的成分，并使仿真网格所支持的整个空间尺度范围内的结果更符合柯尔莫哥洛夫统计。

实验装置

为了在实验中量化湍流如何影响斯格明子的全局与局部光学指标，一台调谐至 $\lambda = 532$ nm 的连续波激光器照射全息调制部分中的空间光调制器（Hamamatsu LCOS-SLM X15213-01），将入射光束调制为一对分别携带 LG 模式和高斯模式分布的光学模式。此处，采用近似反正弦函数技术生成全息图，以实现振幅与相位控制 [48]。在其中一条光路中插入半波片（HWP）后，所生成的模式以正交线偏振进行空间叠加，并用光阑（I）滤波，从而在一条光路中获得单一 LG 模式、在另一条光路中获得单一高斯模式，随后被引导进入湍流室传播。在湍流室入口处，四分之一波片（QWP）将正交线偏振态转换为相应的圆偏振态，即右旋圆偏振和左旋圆偏振。传播之后，分束器（BS）将光束分成两条路径，并在其中一条光路中插入 QWP。使用偏振分辨相机（Allied Vision Mako G-508B POL）以单次曝光获取完整的斯托克斯测量；其中带有 QWP 的光路用于采集右旋圆偏振/左旋圆偏振态，另一条光路则直接测量全部四个线偏振分量，即水平、垂直、对角偏振态和反对角偏振态，并在数据分析中以强度质心为参考进行数值叠加，如正文所述。当使用时变介质时，这种采集方法对于斯托克斯参数的单次测量尤为高效 [49]。为了模拟湍流中的长传播距离，菲涅耳标度数 $F = w_0^2/\lambda L$ 确保实验布置与 $w_0 = 6$ mm 光束尺寸（$1/e^2$）在 $L = 270$ m 湍流通道上的演化相兼容 [37, 42, 49]。其中，w_0 为束腰半径，λ为光的波长，L 为通道长度。在实验室坐标系中，通过使用反射镜使光束在湍流室内不同内部位置多次反射，实现了$L_{lab} = 1.5$ m 的距离。

数值模拟

在数值上，我们通过分步传播复现实验：光束依次通过多个统计上相互独立、取样自柯尔莫哥洛夫谱的相位屏，各相位屏之间由自由

空间传播段隔开。在这里，$w_0 = 6\,\text{mm}$光束在$L = 270\,\text{m}$信道中传播。相位屏的数量N_{sc}经过选择，使得每一步对应较弱的相互作用，而累积畸变与目标湍流强度相匹配，遵循$N_{sc} = (10\sigma_R^2)^{-6/11}$ [50]。Rytov方差定义为$\sigma_R^2 = 1.23 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6}$，其中$k = 2\pi/\lambda$为波数，而$C_n^2$和$L$此前已有定义。为使实验室设置与仿真参数相匹配，我们通过监测高斯光束的强度涨落并根据不同温度区间下的光束漂移估算C_n^2的取值，对实验舱进行校准。更多详情请见补充材料第2节，其中给出了校准曲线以及根据实验估算C_n^2所用的计算方法。随后，使用与实验测量相同的偏振重建和拓扑分析流程处理仿真场。

数据可用性。 合理请求时，可向通讯作者获取支持本研究结论的数据。

代码可用性。 合理请求时，可向通讯作者获取用于生成图表的代码。

致谢。 本研究得到美国陆军研究办公室（W911NF2310057）的支持。感谢 H. Barati Sedeh 和 J. Tan 进行富有成效的讨论。

作者贡献。 N.L. 和 D.G.P. 构思了本研究，进行了理论与数值分析，并解读了结果。D.G.P. 设计并开展了实验。所有作者均参与了结果讨论和论文撰写。

竞争性利益。 作者声明不存在竞争性利益。

参考文献

1. He, C., Y. Shen, 和 *A. Forbes*，《迈向更高维结构光》。*Light: Science & Applications*，*2022*年。*11(1)*：第*205*页。*2. Cox, M.A.*等，《湍流中的结构光》。*IEEE* 量子电子学精选主题期刊，*2020*年。*27(2)*：第*1-21*页。*3. Soskin, M.*等，《奇异光学与拓扑光子学》。*2017*年，*IOP*出版社。第*010401*页。*4. Li, S.*等，《轨道角动量通信中的大气湍流补偿：进展与展望》。《*Optics Communications*》，*2018*年。*408*：第*68-81*页。*5. Malik, M.*等，《大气湍流对利用轨道角动量进行编码的光通信的影响》。《*Optics Express*》，*2012*年。*20(12)*：第*13195-13200*页。*6. Rodenburg, B.*等，《大气湍流对携带轨道角动量的光态的影响》。《*Optics Letters*》，*2012*年。*37(17)*：第*3735-3737*页。*7. Tyler, G.A.* 和 *R.W. Boyd*，《大气湍流对携带轨道角动量的量子光态传播的影响》。《*Optics Letters*》，*2009*年。*34(2)*：第*142-144*页。

8. Perring, J. 和 T. Skyrme, 《一个模型统一场方程》。《核物理》，1962年。31：第550-555页。9. Skyrme, T., 《强相互作用的非线性理论》。《伦敦皇家学会会刊：A辑，数学与物理科学》，1958年。247(1249)：第260-278页。10. Skyrme, T., 《K介子与π介子的统一模型》。《伦敦皇家学会会刊：A辑，数学与物理科学》，1959年。252(1269)：第236-245页。11. Skyrme, T., 《量子化介子场的粒子态》。《伦敦皇家学会会刊：A辑，数学与物理科学》，1961年。262(1309)：第237-245页。12. Skyrme, T.H.R., 《非线性场论》。《伦敦皇家学会会刊：A辑，数学与物理科学》，1961年。260(1300)：第127-138页。13. Skyrme, T.H.R., 《介子与重子的统一场论》。《核物理》，1962年。31：第556-569页。14. Han, J.H.等, 《二维手性磁体中的斯格明子晶格》。《物理评论B辑：凝聚态与材料物理》，2010年。82(9)：第094429页。15. Muhlbauer, S.等, 《手性磁体中的斯格明子晶格》。《科学》，2009年。323(5916)：第915-919页。16. Shen, Y.等, 《光学斯格明子及其他光的拓扑准粒子》。《自然·光子学》，2024年。18(1)：第15-25页。17. Teng, H.等, 《光学时空斯格明子的构造》。Light: Science & Applications，2025年。14(1)：第324页。18. Tsesses, S.等, 《倏逝电磁场中的光学斯格明子晶格》。《科学》，2018年。361(6406)：第993-996页。19. Wang, B.等, 《操控粒子的拓扑水波结构》。《自然》，2025年。638(8050)：第394-400页。20. Yang, A.等, 《光学斯格明子：从基础原理到应用》。《光学杂志》，2025年。27(4)：第043002页。21. Pires, D.G.等, 《时空中的光偏振态结构化》。《纳米光子学》，2025年。14(24)：第4377-4385页。22. Putley, H.J.等, 《在倏逝光场的拓扑准晶体中混合斯格明子与半斯格明子》。《光学》，2025年。12(5)：第614-619页。23. Du, L.等, 《具有轨道角动量的受限电磁场中光子斯格明子的深亚波长特征》。《自然·物理》，2019年。15(7)：第650-654页。24. Smirnova, D.A., F. Nori 和 K.Y. Bliokh, 《水波涡旋与斯格明子》。《物理评论快报》，2024年。132(5)：第054003页。25. Wang, A.A.等, 《复杂介质中的光学斯格明子拓扑保护》。Light: Science & Applications，2024年。13(1)：第314页。26. Zhang, Z.等, 《光学斯格明子的拓扑保护度及其电控》。《光子学研究》，2025年。13(9)：第B1-B11页。27. Guo, Z.等, 《大气湍流中经典与量子光学斯格明子的拓扑鲁棒性》。《自然-通讯》，2026年。28. Kumar, V. 和 N.K. Viswanathan, 《矢量涡旋光束场中的拓扑结构》。《美国光学学会杂志B辑》，2014年。31(6)：第A40-A45页。29. D’Errico, A.等, 《均匀偏振光扰动下矢量涡旋光束的拓扑特征》。《科学报告》，2017年。7(1)：第40195页。

30. Andrews, L.C. 和 *R.L. Phillips*，《随机介质中的激光束传播》。《随机介质中的激光束传播：第二版》，*2005*年。*31. Tatarski, V.I.*、*R.A. Silverman* 和 *N. Chako*，《湍流介质中的波传播》。*1961*年，美国物理联合会。*32. Lane, R.*、*A. Glindemann* 和 *J. Dainty*，《柯尔莫哥洛夫相位屏的模拟》。《随机介质中的波》，*1992*年，*2(3)*：第*209*页。*33. Ren, Y.X.* 等，《自适应光学补偿通过模拟大气湍流传播的多路轨道角动量光束》。*Optics Letters*，*2014*年，*39(10)*：第*2845–2848*页。*34. Anzuola, E.* 和 *A. Belmonte*，《使用二元微镜阵列生成大气波前》。《应用光学》，*2016*年，*55(11)*：第*3039–3044*页。*35. Cox, M.A.* 等，《使用数字微镜器件的高速、波长不变单像素波前传感器》。*IEEE Access*，*2019*年，*7*：第*85860–85866*页。*36. Ren, Y.X.* 等，《大气湍流对采用轨道角动量复用的自由空间光链路性能的影响》。*Optics Letters*，*2013*年，*38(20)*：第*4062–4065*页。*37. Pires, D.* 等，《大气湍流中光学纽结的稳定性》。《自然-通讯》，*2025*年，*16(1)*：第*3001*页。*38. Shen, Y.*、*E.C. Martínez* 和 *C. Rosales-Guzmán*，《具有可调拓扑织构的光学斯格明子生成》。*ACS Photonics*，*2022*年，*9(1)*：第*296–303*页。*39. Berry, M.*，《从螺旋整数相位阶跃和分数相位阶跃演化而来的光学涡旋》。《光学杂志*A*：纯粹与应用光学》，*2004*年，*6(2)*：第*259–268*页。*40. Mardia, K.V.* 和 *P.E. Jupp*，《方向统计学》。*2009*年：*John Wiley & Sons*。*41. McWilliam, A.* 等，《表征光学斯格明子和多斯格明子的拓扑方法》。《激光与光子学评论》，*2023*年，*17(9)*：第*2300155*页。*42. Peters, C.*、*V. Cocotos* 和 *A. Forbes*，《大气湍流中的结构光——数字实现指南：教程》。《光学与光子学进展》，*2025*年，*17(1)*：第*113–184*页。*43. Shin, Y.-i.* 等，《玻色-爱因斯坦凝聚体中双量子化涡旋的动力学不稳定性》。《物理评论快报》，*2004*年，*93(16)*：第*160406*页。*44. Susser, A.L.* 等，《向列缺陷从逸出态到分解态的转变及其逆过程》。《软物质》，*2020*年，*16(20)*：第*4814–4822*页。*45. Allen, L.* 等，《光的轨道角动量与拉盖尔–高斯激光模式的变换》。《物理评论*A*》，*1992*年，*45(11)*：第*8185*页。*46. Burger, L.*、*I.A. Litvin* 和 *A. Forbes*，《使用纯相位空间光调制器模拟大气湍流》。《南非科学杂志》，*2008*年，*104(3)*：第*129–134*页。*47. Fried, D.L.*，《在随机非均匀介质中通过超长和超短曝光获得的光学分辨率》。《美国光学学会志》，*1966*年，*56(10)*：第*1372–1379*页。*48. Bolduc, E.* 等，《使用单个纯相位全息图同时进行强度和相位加密的精确解》。*Optics Letters*，*2013*年，*38(18)*：第*3546–3549*页。*49. Peters, C.* 等，《矢量光在真实世界自由空间链路中的不变性与畸变》。《应用物理快报》，*2023*年，*123(2)*。*50. Xiao, X.* 和 *D. Voelz*，《通过湍流传播的部分相干光束的轴上概率密度函数和衰落行为》。《应用光学》，*2009*年，*48(2)*：第*167–175*页。

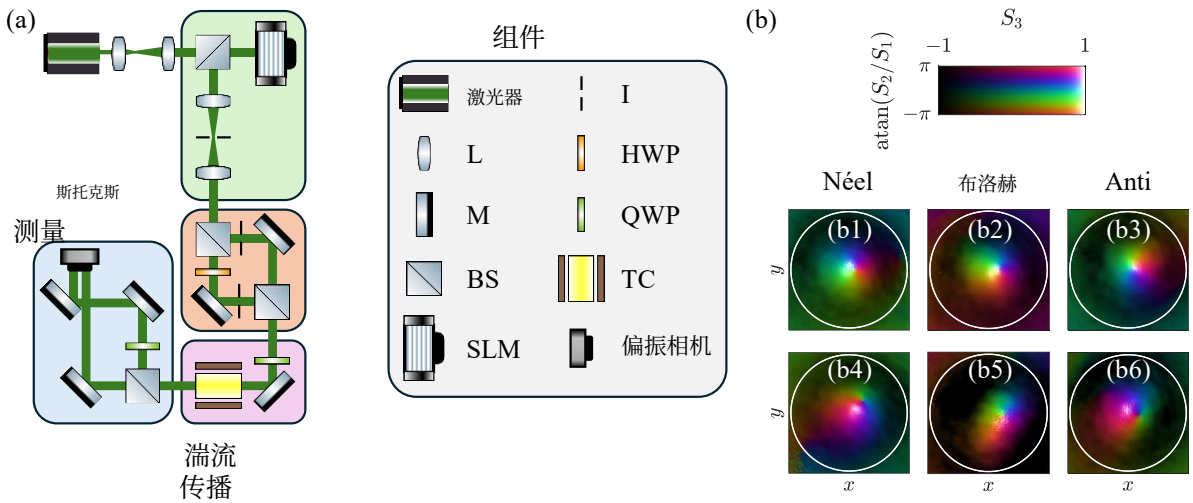


图 1. 实验装置。a 实验中使用全息调制部分中的纯相位空间光调制器生成 LG 模式和高斯模式，在光束叠加部分将它们重叠，随后在湍流传播部分将其传送至湍流室。斯托克斯测量部分使用偏振敏感相机，实现偏振信息的单次采集。图中标注对应：L，透镜；M，反射镜；BS，分束器；SLM，空间光调制器；I，光阑；HWP，半波片；QWP，四分之一波片；TC，湍流室；Pol Cam，偏振敏感相机。**b** 测得的奈尔（b1、b4）、布洛赫（b2、b5）和反斯格明子（b3、b6）织构示例，其中第一行为无扰动时的分布，第二行分别对应 $\sigma_R^2 = 0.25$（$T = 70℃$）时的情况。配色表示完整的单位斯托克斯矢量 $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$，白色圆圈表示积分区域 σ。

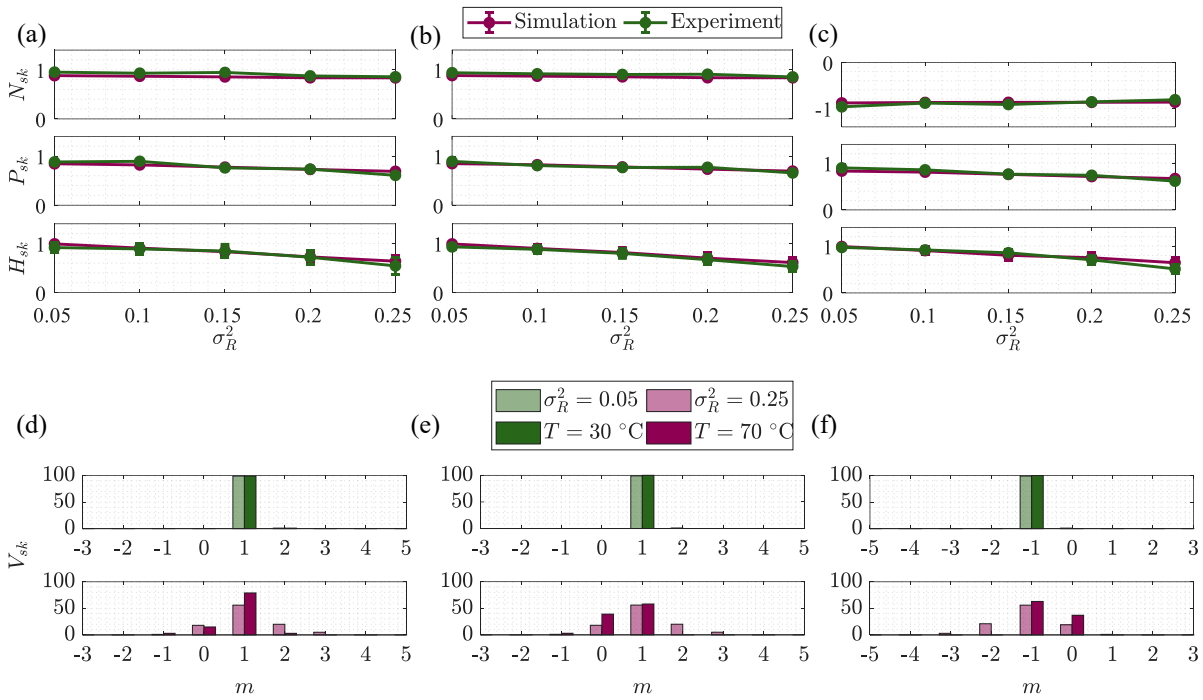


图 2. 全局和局部参数对湍流的鲁棒性。a-c 从模拟（粉色）和实验（绿色）中提取的斯格明子数 N_{sk}、极性P_{sk}和螺旋度 H_{sk} 值，涵盖不同湍流强度水平，以 Rytov方差 σ_R^2表示。从左至右，各面板分别对应奈尔、布洛赫和反斯格明子。误差棒表示 100 次实现的标准误。**d-f**湍流水平为 $\sigma_R^2 = 0.05$ ($T = 30$℃) 和 $\sigma_R^2 = 0.25$ ($T = 70$℃) 时得到的涡度 V_{sk} 直方图分布，分别以绿色和粉色表示。浅色表示模拟结果，深色表示实验结果。从左至右，各面板分别对应奈尔、布洛赫和反斯格明子。在所有直方图中，参数 m 表示统计实现中测得的绕数。

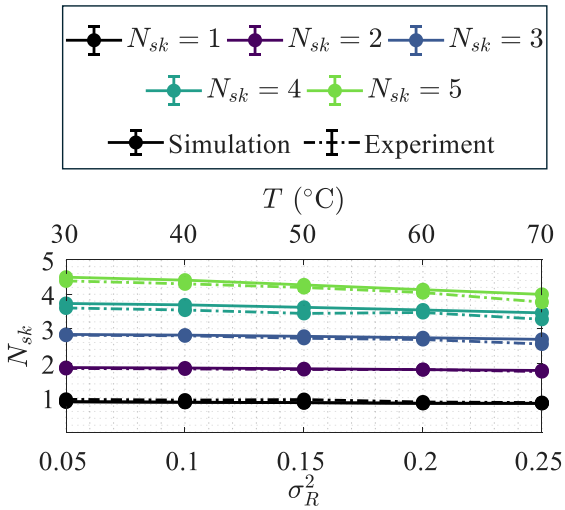


图3. 高阶拓扑的稳定性。 对于拓扑阶数各异、斯格明子数从 $N_{sk} = 1, \ldots, 5$ 不等的尼尔型斯格明子，基于模拟（实线）和实验（虚线）推断的斯格明子数 N_{sk} 。Rytov方差坐标轴 σ_R^2 对应模拟结果的湍流强度参数，而温度坐标轴 T 对应实验。每个数据点的误差棒表示基于100次实现计算的标准误。

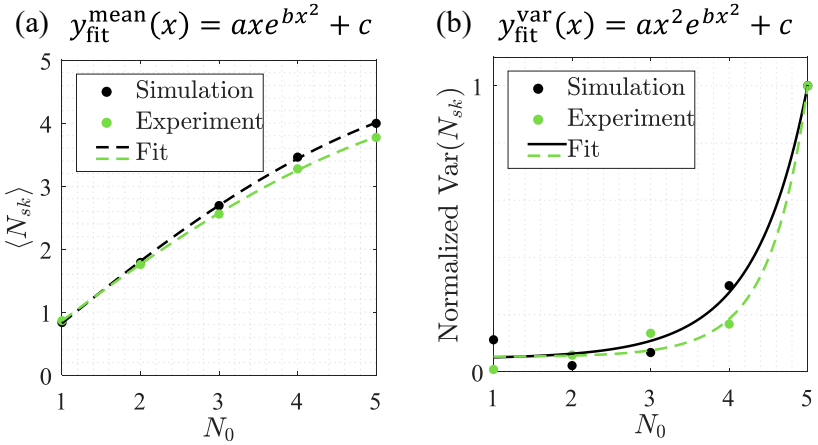


图4. 高阶斯格明子数预测的不确定性。 图3中湍流等级为 $\sigma_R^2 = 0.25$ ($T = 70$℃) 时，对于 $N_0 = 1, \ldots, 5$，模拟（黑点）和实验（绿点）中系综化的斯格明子数值的 (a) 系综平均和 (b) 归一化方差。模拟（黑色实线）和实验（绿色虚线）结果的拟合曲线分别采用函数 (a) $y(x) = axe^{bx^2} + c$ 和 (b) $y(x) = ax^2e^{bx^2} + c$，显示了所测得斯格明子数的方差对初始拓扑阶数呈指数响应。在面板 (b) 中，模拟和实验结果分别归一化为各自的最大 Var(N_{sk}) 值。