arXiv:2603.01858v1 [math.PR] 2 Mar 2026

超均匀吉布斯扰动格点的存在性、性质与参数推断

BY JEAN-FRANÇOIS COEURJOLLY [1,a] AND CHRISTOPHER RENAUD CHAN[1,b]

[1]格勒诺布尔-阿尔卑斯大学、法国国家科学研究中心、*LJK*，*38000* 格勒诺布尔，法国，
[a]*jean-francois.coeurjolly@univ-grenoble-alpes.fr*；[b]*christopher.renaud-chan@univ-grenoble-alpes.fr*

本研究处于吉布斯模型与超均匀点过程的交叉领域。经典吉布斯模型无论定义在格点上还是连续空间中，都能灵活地描述相互作用粒子系统，但通常并非超均匀。相反，已知的超均匀模型（如 Ginibre 过程或扰动格）缺乏灵活性，通常无法施加硬核相互作用等具有物理意义的约束。我们提出一类新模型，称为吉布斯扰动格点模型，它在保留格结构的同时，允许通过定义在扰动粒子位置上的哈密顿量引入相互作用。我们证明了相关吉布斯测度的存在性，推导出DLR型平衡方程，并表明该类中的某些模型具有超均匀性。最后，我们提出基于Takacs-Fiksel型方法的统计推断方法，并证明其渐近性质。

1. 引言。

吉布斯模型。吉布斯过程是一类特殊的随机模型，旨在描述相互作用的几何对象（例如点）。这类过程通常定义在格点上（如 $S=\mathbb{Z}^d$），或连续空间中（如 $S=\mathbb{R}^d$）。一般性参考文献包括 [18, 19, 20, 31]。更具体地说，当 $S=\mathbb{Z}^d$ 时，称为吉布斯格点系统，记作 $\mathbf{X}=\{X_i, i\in\mathbb{Z}^d\}$。位置 i 是固定的，模型取值于$E^{\mathbb{Z}^d}$，其中 E 表示状态空间。模型由条件分布以及依赖于变量 X_i的哈密顿量刻画。著名的例子包括伊辛模型（其中 $E=\{-1,1\}$）、波茨模型（其中 $E=\{a_0,\ldots,a_{K-1}\}$且 $K\geq 2$，参见例如 [17]）以及贝萨格自回归型模型 [4]。当 $S=\mathbb{R}^d$ 时，称为吉布斯点过程，记作 $\mathbf{X}=\{x_1,\ldots,x_n,\ldots\}$，其中 $x_i\in\mathbb{R}^d$。对于标准吉布斯点过程，位置和点的数量都是随机的，模型同样可以通过相对于泊松测度的条件密度来描述，参见例如 [9]。点之间的相互作用由能量函数或哈密顿量编码。当该哈密顿量依赖于成对距离时，便得到两两相互作用点过程，包括经典的施特劳斯模型 [32] 和 Lennard-Jones模型（参见例如 [31]）。高阶相互作用模型的例子包括 Quer-mass 模型 [24],，其将面积相互作用模型和威多姆-罗林森模型作为特例涵盖在内；此外还有德劳内-沃罗诺伊相互作用模型 [13]。吉布斯格点系统和吉布斯点过程是两类本质上不同的模型，各自具有不同的特征、数学工具和理论结果。尤其是，无穷体积吉布斯点过程的存在性与相变分析，依赖于不同于格点情形所用的技术 [9, 10, 19]。

MSC2020 学科分类：主要分类 60G55；次要分类 62M30。关键词和短语：晶格系统；吉布斯过程；超均匀性；多布鲁申-兰福德-鲁埃尔方程；模拟；Takacs-Fiksel 方法。

超均匀性。超均匀性是概率论中一个相对较新的概念。它由 [36] 引入物理学文献，尤其见其相关研究（另可参见 [34, 35] 的综述）。该概念旨在描述由刚性粒子构成、具有特殊大尺度有序性的系统。粗略地说，如果方差$[N(B(0,r))]/|B(0,r)|$，则称一个点过程是超均匀的；也就是说，半径为r的欧几里得球内点数的归一化方差在 $r\to\infty$ 时趋于 0。该条件表明，计数变量的波动增长速度低于齐次泊松点过程的相应波动。关于超均匀点过程在概率和统计方面近期且全面的综述，请参见 [26] 。超均匀性与排斥性并无简单的对应关系。例如，已知 Matérn 硬核点过程并非超均匀（参见例如 [25]）。超均匀性实际上是一种全局且微妙的性质。

已知有几类点过程具有超均匀性，其中包括 Sine-β过程 [37], Ginibre 过程，它们是（连续）行列式点过程的典型例子（参见例如 [27]），以及高斯解析函数的零点集 [21]。另一类重要的模型是扰动格，其定义为 $\mathbf{\Gamma}=\{i+X_i, i\in\mathcal{L}\}$，其中 $\mathcal{L}$是格点，而 $(X_i)_i$ 是以 $\mathcal{L}$为指标的随机场。当随机变量 X_i（称为位移）是具有共同分布 $\mathbb{Q}$的独立同分布变量时， [12] 给出了关于 $\mathbb{Q}$ 和维数 d 的条件，以确保 $\mathbf{\Gamma}$具有超均匀性。尽管 Ginibre 模型和扰动格模型定义简单、易于理解，但它们也有重要的局限性。具体而言，无法对 $i\neq j$施加形如 $|i+X_i-j-X_j|\geq\delta>0$ 的硬核条件。然而，这种约束在物理学中具有重要意义 [5]。人们或许会猜想，可以通过对超均匀点过程进行依赖子抽样来解决这一问题；但这种做法会破坏超均匀性 [26]。

吉布斯扰动格点模型。此时，人们或许会想知道，连续吉布斯点过程作为能够生成排斥性点模式的自然且灵活的模型，是否可能具有超均匀性。事实上，答案是否定的，正如 [11] 最近所证明的那样。作者证明，在 $\mathbb{R}^d$ 上定义的大多数吉布斯点过程都不具有超均匀性，并且未能在这一类过程中找到任何超均匀的实例。本文介绍一类新模型，它们处于扰动格与连续吉布斯点过程的交汇处。在有限子格上， $\Delta\subset\mathcal{L}$, 为便于阐述，吉布斯扰动格点模型通过关于 $\mathbb{Q}^{\otimes\Delta}$ 的密度来定义。值得强调的是，我们的框架与吉布斯格系统和连续吉布斯点过程都存在根本差异。事实上，由此得到的点过程仍具有 $\mathbf{\Gamma}=\{i+X_i, i\in\mathcal{L}\}$ 的形式。每个格点都对应 $\mathbf{\Gamma}$ 中唯一的一个点，因此 $\mathbf{\Gamma}$ 也可以解释为一个格点随机场。然而，关键区别在于，哈密顿量并不依赖于随机场本身的取值，而是依赖于扰动点的位置，也就是 $\mathbf{\Gamma}$ 的元素。

贡献。 鉴于我们模型的特定结构，诸如无限体积吉布斯测度的存在性以及 Dobrushin-Lanford-Ruelle（DLR）方程的构建等重要理论问题， [9],无法直接借助经典吉布斯格点系统或连续吉布斯点过程的现有结果来处理（例如，参见 [19, 20, 31]）。本文将解决这些问题。我们给出了关于移动分布 $\mathbb{Q}$ 和粒子系统哈密顿量的充分条件，以确保有限体积和无限体积下平稳吉布斯扰动格点模型的存在。在 [12], 获得的一般性结果基础上，我们进一步证明，该类中的一些模型具有超均匀性。此外，我们还引入了一大类平衡方程（见第 3.4节），称为一阶、二阶和变分 DLR 方程，它们可视为相应的一阶、二阶和变分 Georgii-Nguyen-Zessin（GNZ）方程的类比 [2, 19, 29]。

有了这一大类全新的参数模型，我们接下来研究如何根据吉布斯扰动格点模型的一次实现来估计参数 $\theta \in \mathbb{R}^p$ $(p \geq 1)$。我们考虑两种观测设置，如图 1所示：观测到点对$(i, i + X_i)$，或仅观测到扰动后的位置$(i + X_i)$。由于模型定义中存在难以处理的归一化常数，最大似然估计并不实用，而基于似然的近似方法计算成本高昂；标准吉布斯格点系统和连续吉布斯点过程也存在同样的问题，参见例如 [18]。因此，我们提出基于伪似然[3, 4, 23] 和变分方法（例如，参见 [1, 2]）的替代推断方法。我们证明，这两种方法都可表述为 Takacs–Fiksel 方法的特例；该方法最初是通过 Georgii–Nguyen–Zessin（GNZ）方程为连续吉布斯点过程引入的 [6, 15, 16, 33]。在我们的框架中，Takacs–Fiksel 估计量通过最小化一个对比函数来定义，该函数基于 L^2 距离，比较在 $L \geq p$检验函数上计算的 DLR 方程经验版本。值得强调的是，伪似然和 Takacs–Fiksel 对比函数与吉布斯格点系统及连续吉布斯点过程中的对应函数有显著差异，因为它们需要采用非标准且精细的边界修正，涉及 i和 $i+x$，用于 $x \in \mathbb{R}^d$。我们采用递增域渐近框架，并特别利用关于 DLR 方程经验版本的新遍历性结果，证明所得的 θ Takacs–Fiksel 估计量是一致的。此外，我们还推导出其收敛速率。

概要。 本文其余部分安排如下。第2 节回顾吉布斯格点系统和吉布斯点过程，并介绍对移动分布所作的主要假设 $\mathbb{Q}$ 以及本文研究的粒子系统哈密顿量。第 3 节致力于定义吉布斯扰动格点模型、相关吉布斯测度的存在性及其主要性质，并推导 DLR 型方程。第 4 节讨论吉布斯扰动格点模型的参数统计推断。我们介绍若干推断方法，并在递增区域框架下建立渐近结果。第5节通过示例说明所提出的模型和统计方法。最后，主要结果的证明见附录A–F。

2. 背景与记号。

2.1. 格点、扰动格与点过程。 设 $\mathcal{L}$ 为一个满秩格点，即 $\mathbb{R}^d$的子群，由向量$(a_1, \ldots, a_d)$的整数系数组合生成，这些向量构成 $\mathbb{R}^d$的一组基。与格点 $\mathcal{L}$ 相关联的基本域为集合

$$\mathcal{D} := \left\{ \sum_{i=1}^{d} t_i a_i, (t_1, \ldots, t_d) \in [0,1)^d \right\}.$$

基本域是用于根据格点铺满 $\mathbb{R}^d$ 的多面体。我们用 $\delta := \min\{|i|, i \in \mathcal{L}\}$ 表示格点的尺度参数。基本示例为$\mathcal{L} = \mathbb{Z}^d$ 和 $\mathcal{D} = [0,1)^d$。在本文中，格点 $\mathcal{L}$ 被视为粒子的原点。我们将 $\mathbb{R}^d$ 视为标记空间，也称为自旋空间或状态空间，它描述单个粒子相对于其格点位置的位移。我们用 $\mathbb{Q}$ 表示 $\mathbb{R}^d$上的概率测度，它作为单个位移粒子的参考分布。对于每个 $i \in \mathcal{L}$，我们用 $x_i \in \mathbb{R}^d$ 表示位于格点 i的粒子的位移（或扰动）。格点系统构型空间记为 $\Omega := (\mathbb{R}^d)^{\mathcal{L}}$，并赋予乘积 σ-代数；一个构型记为 $\mathbf{x} := (x_i)_{i \in \mathcal{L}}$。对于任意子集$\Lambda \subset \mathcal{L}$，子格点上的构型记为 $\Omega_\Lambda := (\mathbb{R}^d)^\Lambda$，而构型 $\mathbf{x} \in \Omega$ 在 Ω_Λ 上的投影记为 $\mathbf{x}_\Lambda := (x_i)_{i \in \Lambda}$。格点上的随机场

$\mathcal{L}$，记为$\mathbf{X}$，因此是Ω上的随机变量。下文中，我们令 $U \sim \mathcal{U}_{\mathcal{D}}$ 为在 $\mathcal{D}$上均匀分布的随机变量。对于 $B \subseteq \mathbb{R}^d$，我们令 $\mathbb{1}_B \colon \mathbb{R}^d \to \{0,1\}$ 表示 B上的示性函数。最后，对于任意向量 $z \in \mathbb{R}^k$、 $k \geq 1$ 或任意有界集合 $B \subset \mathbb{R}^d$，记号 $|z|$ 和$|B| = \lambda^d(B)$ 分别表示 z 的欧氏范数，以及 B的体积（即 B的 d维勒贝格测度 λ^d）。

扰动格记作 $\mathbf{\Gamma}$，是一个从 $\Omega \times \mathbb{R}^d$到所有 $\mathbb{R}^d$ 的可数子集构成的集合的随机变量，使得 $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{X}\ U) := \{i + X_i + U, i \in \mathcal{L}\}$；其中我们要求，由扰动格产生的粒子彼此不可区分。此外，对于任意子集 $\Lambda \subset \mathcal{L}$，扰动子格 $\mathbf{\Gamma}_\Lambda$是随机变量 $\mathbf{\Gamma}_\Lambda(\mathbf{X}_\Lambda, U) := \{i + X_i + U, i \in \Lambda\}$。我们用 $\mathcal{L}_U := \{i + U, i \in \mathcal{L}\}$ 表示平移格。根据构造，该平移格在 $\mathbb{R}^d$ 上的任意平移下均保持不变。因此， U 使构造扰动格所依据的底层格成为平稳的。下文中，除非另有明确说明且不存在歧义，记号 $\mathbb{P}[\cdot]$、$\mathrm{Var}[\cdot]$、$\mathrm{Cov}[\cdot,\cdot]$分别表示概率、期望、方差和协方差，而不指明相应的概率测度。 $\mathbb{R}^d$ 中的点构型通常记作 $\boldsymbol{\gamma}$，它是 $\mathbb{R}^d$ 中的局部有限集；也就是说，对于 $\mathbb{R}^d$ 中任意有界博雷尔集 W，$\#\boldsymbol{\gamma} \cap W$ 均为有限值。点构型的集合记作 $\mathcal{C}$，有限点构型的集合记作 $\mathcal{C}_f$。我们在 $\mathcal{C}$ 上赋予由计数函数 N_W 生成的 σ-代数，其中 W 遍历 $\mathbb{R}^d$ 中的所有博雷尔集。下文中，对于任意 $W \subset \mathbb{R}^d$ 和 $\boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{C}$，我们用 $\boldsymbol{\gamma}_W$:$= \boldsymbol{\gamma} \cap W$表示将 $\boldsymbol{\gamma}$限制在 W 上所得的结果。点过程是定义在 $\mathcal{C}$ 上的随机变量。对于 $\boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{C}$ 和 $v \in \mathbb{R}^d$，我们用 $\boldsymbol{\gamma} + v$表示将 $\boldsymbol{\gamma}$ 的所有点平移 v所得的结果。若点过程 $\mathbf{\Gamma}$ 的分布平移不变，即对于任意 $v \in \mathbb{R}^d$， $\mathbf{\Gamma} + v$ 和 $\mathbf{\Gamma}$ 的分布相同，则称其为平稳点过程。

2.2. 系统的哈密顿量与移动分布。 吉布斯扰动格点模型主要取决于两个要素：哈密顿量 H，它衡量系统中粒子之间的相互作用；以及标记（或移动）分布 $\mathbb{Q}$。本节给出关于 H 和 $\mathbb{Q}$ 的定义、示例及主要假设。

哈密顿量或能量泛函。 我们考虑正则和巨正则吉布斯点过程框架中常见的相互作用模型。哈密顿量（也称为能量泛函）是一个可测函数， $H\colon\ \mathcal{C}_f \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$。设 $W \subset \mathbb{R}^d$ 为有界区域，构型 $\zeta \in \mathcal{C}$ 在 W 上的局部能量定义为

$$H_W(\boldsymbol{\gamma}) := \lim_{n\to\infty} \left(H(\boldsymbol{\gamma}_{[-n,n]^d}) - H(\boldsymbol{\gamma}_{[-n,n]^d \setminus W}) \right) \tag{2.1}$$

若该极限存在，其中我们采用约定 $\infty - \infty = 0$。另一个值得关注的量是点的局部能量，它衡量某一位置上的粒子对整个构型能量的贡献。设 $\zeta \in \mathcal{C}$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$，局部能量是一个从 $\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}$ 到 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 的可测函数，定义为

$$h(x, \boldsymbol{\gamma}) := \lim_{n\to\infty} \left(H(\{x\} \cup \boldsymbol{\gamma}_{[-n,n]^d}) - H(\boldsymbol{\gamma}_{[-n,n]^d}) \right). \tag{2.2}$$

我们对 H施加若干定义和限制。这些假设尤其是确保无穷体积下吉布斯扰动格点存在所必需的，参见定理1。

($\mathcal{H}1$) H是稳定的，即存在 $A \geq 0$，使得对所有 $\boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{C}_f$， $H(\boldsymbol{\gamma}) \geq -AN(\boldsymbol{\gamma})$。($\mathcal{H}2$) H是非退化的，即存在 $\varepsilon > 0$和 $B \geq 0$，使得对所有 $i \in \mathcal{L}$、 $|x_i| \leq \varepsilon$以及任意有限的 $\Lambda \subset \mathcal{L}$， $H(\{i + x_i\}_{i\in\Lambda}) \leq B|\Lambda|$。($\mathcal{H}3$) H是遗传的，即对于任意满足 $H(\boldsymbol{\gamma}) = \infty$ 的 $\boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{C}_f$，对任意 $x \in \mathbb{R}^d$， $H(\boldsymbol{\gamma} \cup \{x\}) = \infty$。($\mathcal{H}4$) H是平移不变的，即对所有 $v \in \mathbb{R}^d$和 $\boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{C}_f$， $H(\boldsymbol{\gamma}) = H(\boldsymbol{\gamma} + v)$。

($\mathcal{H}5.1$) H 的作用范围有限，即存在 $R>0$，使得对于任意有界的 $W\subset\mathbb{R}^d$，$H_W(\boldsymbol{\gamma})=H_W(\boldsymbol{\gamma}_{W\oplus B(0,R)})$，其中 $W\oplus B(\mathbf{0},R):=\{x+y,x\in W,y\in B(\mathbf{0},R)\}$。($\mathcal{H}5.2$) 存在 $\phi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 在无穷远处单调，且存在 $\epsilon>0$，使得

$$H(\boldsymbol{\gamma})=\sum_{\{x,y\}\subset\boldsymbol{\gamma}}\phi(|x-y|),\quad\text{and}\quad\int_{\mathbb{R}^+\setminus[0,\epsilon]}r^{d-1}\phi(r)\mathrm{d}r<\infty. \tag{2.3}$$

($\mathcal{H}5.3$) 局部能量函数 h 有一致上界。

下面通过介绍文献中使用的几个标准哈密顿量示例，来讨论这些假设 [24, 28, 31]。前三个是两两相互作用点过程，而最后一个作用于随机集的几何特征。所有这些示例都满足（至少）($\mathcal{H}1$)-($\mathcal{H}4$)（其中部分示例对参数空间有一定限制）。

1. 带有潜在硬核相互作用的*Strauss*相互作用。设 $A\in\mathbb{R}$ 和 $0\le r<R$。对于任意 $\boldsymbol{\gamma}\in\mathcal{C}_f$，哈密顿量定义为

$$H(\boldsymbol{\gamma})=\sum_{\{x,y\}\in\boldsymbol{\gamma}}A\mathbb{1}_{[r,R]}(|x-y|)+(\infty)\mathbb{1}_{[0,r]}(|x-y|) \tag{2.4}$$

该模型满足 ($\mathcal{H}5.1$)（因此也满足($\mathcal{H}5.2$)）。特别注意，($\mathcal{H}1$)在以下条件下成立：$r=0$ 且 $A\ge0$，或者当 $r>0$ 时；此外 ($\mathcal{H}2$) 在 $\varepsilon<\delta-2r$时成立。

2. *Lennard-Jones*相互作用。设 $A>0$、$B\in\mathbb{R}$、$R>0$ 和 $m>n>d$。对任意 $\boldsymbol{\gamma}\in\mathcal{C}_f$，哈密顿量由下式给出

$$H(\boldsymbol{\gamma})=\sum_{\{x,y\}\in\boldsymbol{\gamma}}A\left(\frac{R}{|x-y|}\right)^m-B\left(\frac{R}{|x-y|}\right)^n. \tag{2.5}$$

该无限程模型满足($\mathcal{H}5.2$)。此外，对 $\Lambda\subset\mathcal{L}$、$\varepsilon<\frac{\delta}{2}$ 和 $|x_i|\le\varepsilon$，由积分—级数比较可知存在 $c>0$ 使得

$$H(\{i+x_i\}_{i\in\Lambda})\le c|\Lambda|\int_{\delta-2\varepsilon}^{\infty}r^{d-1}\left|A\left(\frac{R}{r}\right)^m-B\left(\frac{R}{r}\right)^n\right|\mathrm{d}r, \tag{2.6}$$

因此该相互作用满足($\mathcal{H}2$)。

3. *Quermass*相互作用。设 $\theta_i\in\mathbb{R}$（对 $i\in[0,d]$ 和 $R>0$）。对任意 $\boldsymbol{\gamma}\in\mathcal{C}_f$，哈密顿量由下式给出

$$H(\boldsymbol{\gamma})=\sum_{i=0}^{d}\theta_iM_i^d(L_R(\gamma)) \tag{2.7}$$

其中 M_i^d是第 i个Minkowski泛函，特别地，M_d^d是勒贝格测度，M_{d-1}^d是曲面的 $d-1$-Hausdorff测度，M_0^d是Euler-Poincaré示性数，且 $L_R(\boldsymbol{\gamma})$ 是构型的晕集，即

$$L_R(\boldsymbol{\gamma})=\bigcup_{x\in\boldsymbol{\gamma}}B(x,R).$$

当 $\theta_i=0$对于 $i=0$、.....、$d-1$和 $\theta_d\in\mathbb{R}$ 时，Quermass相互作用对应于单组分Widom-Rowlinson模型，并满足 ($\mathcal{H}5.3$)。当 $d=2$ 时，Quermass相互作用验证了 ($\mathcal{H}1$)，正如 [24]中所证明的。更确切地说，他们证明存在 $c>0$，使得 $|M_0^2(L_R(\gamma))|\le cN(\gamma)$。然而，在更高维度（$d\ge3$）中，

该哈密顿量的稳定性仍不明确；进一步讨论请参见 [24]。此外，在二维中，对于 $\Lambda \subset \mathcal{L}$，$\varepsilon > 0$ 以及 $|x_i| \le \varepsilon$ 我们有

$$H\left(\{i + x_i\}_{i\in\Lambda}\right) \le |\Lambda| \left(c + |M_1^2(B(0,R))| + |M_2^2(B(0,R))|\right) \tag{2.8}$$

因此，相互作用满足(H2)。

移动（或标记）分布。吉布斯扰动格点模型将在下一节中作精确描述，它也依赖于移动分布 $\mathbb{Q}$。同样，为了确保所得吉布斯扰动格点具有良好的概率性质，我们要求满足以下列表中的某些假设。

(Q0) $\mathbb{Q}(B(0,\ \varepsilon)) > 0$，其中实数 ε 由(H2)给出。**(Q1)**[m]。存在 $c > 0$，使得 $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{c|X|^m}) < \infty$，其中 $X \sim \mathbb{Q}$。**(Q2)** 集合 $\mathcal{Q} = \mathrm{supp}(\mathbb{Q})$ 有界。**(Q3)** $\mathbb{E}(|X|^d) < \infty$，对于 $X \sim \mathbb{Q}$。

显然，如果 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathcal{Q}$ 上具有连续密度，那么对于任意满足 $B(\mathbf{0},\varepsilon) \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$ 的 ε，$\mathbb{Q}(B(\mathbf{0},\varepsilon)) > 0$ 都成立。其次，(Q2) 蕴含 (Q1)[m]（对于任意 $m > 0$），而后者本身又蕴含 (Q3)。本文考虑了三个主要例子：(a) $\mathcal{Q}$ 上的均匀分布，满足 (Q2)；(b) 方差为 σ^2 的各向同性高斯分布，满足 (Q1)[m]（对于 $m = 1,\ 2$）；(c) 正正交象限上的指数分布，即密度为 $\lambda_1(x) = \exp(-q(x))$ 的分布，其中对于任意 $x \in \mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^d\colon\ x_i \ge 0, i = 1, \ldots, d\}$，有 $q(x) = \theta_1 \sum_i x_i + c(\theta_1)$。对于此模型，$p_1 = 1$, $\theta_1 \in \mathbb{R}^+$，且满足 (Q1)[1]。

3. 吉布斯扰动格点的存在性与性质。

3.1. 有限子格上的吉布斯测度。 在引入并定义吉布斯扰动格点之前，我们先定义有限子格上的吉布斯测度，其自旋空间为 $\mathbb{R}^d$，哈密顿量由格点索引，并由下式给出

$$\tilde{H}(\mathbf{x}_\Lambda) = H(\mathbf{\Gamma}_\Lambda(\mathbf{x}_\Lambda, 0)) \tag{3.1}$$

对任意有限的 $\Lambda \subset \mathcal{L}$ 以及任意$\mathbf{x}_\Lambda \in (\mathbb{R}^d)^\Lambda$。

定义 3.1. 对任意构型$\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^d)^{\mathcal{L}}$ 以及任意有限子集 $\Delta \subset \mathcal{L}$，我们将从 Δ 移开的$\mathbf{x}$ 的局部能量定义为

$$\tilde{H}_\Delta(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} \left(\tilde{H}(\mathbf{x}_{\Lambda_n}) - \tilde{H}(\mathbf{x}_{\Lambda_n\setminus\Delta})\right) \tag{3.2}$$

其中 $\Lambda_n = [-n, n]^d \cap \mathcal{L}$，并约定 $\infty - \infty = 0$。

˜值得指出的是，若 H 具有有限程 R，即满足(H5.1)，则 H 具有有限˜程当且仅当 $\mathcal{Q}$ 有界，即满足(Q2)。在此情形下，H 的有限程为˜$R = R + \operatorname{diam}\mathcal{Q}$，且对任意有限的 $\Delta \subset \mathcal{L}$，我们有

$$\tilde{H}_\Delta(\mathbf{x}) = \tilde{H}_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta\oplus B(0,\tilde{R})\cap\mathcal{L}}). \tag{3.3}$$

定义 3.2. 设 $\Lambda \subset \mathcal{L}$ 有限，子格点 Λ 上的吉布斯测度分布由下式给出

$$\mathbb{P}_\Lambda(\mathrm{d}\mathbf{x}_\Lambda) = \frac{1}{Z_\Lambda} \mathrm{e}^{-\tilde{H}(\mathbf{x}_\Lambda)} \mathbb{Q}^{\otimes\Lambda}(\mathrm{d}\mathbf{x}_\Lambda) \tag{3.4}$$

其中

$$Z_\Lambda = \int \mathrm{e}^{-\tilde{H}_\Delta(\mathbf{x}_\Delta)} \mathbb{Q}^{\otimes\Delta}(\mathrm{d}\mathbf{x}_\Delta)$$

是归一化常数，也称为配分函数。

在假设 ($\mathcal{H}1$)-($\mathcal{H}2$) 下，我们有 $(\log \mathbb{Q}(B(0,\varepsilon)) - B)|\Lambda| \leq \log Z_\Lambda| \leq A|\Lambda|)$，这保证了子格点上的吉布斯测度是良定义的。下一个结果指出，该测度还满足多布鲁申-兰福德-鲁埃尔（DLR）方程，即给定Δ之外的构型时，它给出了任意有限子集 $\Delta \subset \Lambda$ 上格点的条件分布。

P命题 3.3（DLR 方程）。设 $\Delta \subset \Lambda \subset \mathcal{L}$ 为有限集，则对 $\mathbb{P}_\Lambda$-几乎处处的 $\mathbf{x}^{\Lambda\setminus\Delta}$ ，

$$\mathbb{P}_\Lambda(\mathrm{d}\mathbf{x}'_\Delta|\mathbf{x}_{\Lambda\setminus\Delta}) = \frac{1}{Z_\Delta(\mathbf{x}_{\Lambda\setminus\Delta})} \mathrm{e}^{-\tilde{H}_\Delta(\mathbf{x}'_\Delta \cup \mathbf{x}_{\Lambda\setminus\Delta})} \mathbb{Q}^{\otimes\Delta}(\mathrm{d}\mathbf{x}'_\Delta) \tag{3.5}$$

其中 $Z_\Delta(\mathbf{x}^{\Lambda\setminus\Delta})$ 是由下式给出的归一化常数

$$Z_\Delta(\mathbf{x}_{\Lambda\setminus\Delta}) = \int \mathrm{e}^{-\tilde{H}_\Delta(\mathbf{x}'_\Delta \cup \mathbf{x}_{\Lambda\setminus\Delta})} \mathbb{Q}^{\otimes\Delta}(\mathrm{d}\mathbf{x}'_\Delta).$$

~ ~ ~证明。根据 H_Δ 的定义，对于任意 $\mathbf{x}_\Lambda$, $H_\Delta(\mathbf{x}_\Lambda) = H(\mathbf{x}_\Lambda) - H(\mathbf{x}^{\Lambda\setminus\Delta})$，因此

$$\mathbb{P}_\Lambda(\mathrm{d}\mathbf{x}_\Lambda) = \frac{1}{Z_\Lambda} \mathrm{e}^{-\tilde{H}_\Delta(\mathbf{x}_\Lambda) - \tilde{H}(\mathbf{x}_{\Lambda\setminus\Delta})} \mathbb{Q}^{\otimes\Delta}(\mathrm{d}\mathbf{x}_\Delta) \mathbb{Q}^{\otimes\Lambda\setminus\Delta}(\mathrm{d}\mathbf{x}_{\Lambda\setminus\Delta})$$

由此我们推得，条件概率 $\mathbb{P}_\Lambda(\mathbf{d}'_\Delta|\mathbf{x}^{\Lambda\setminus\Delta})$ 相对于 $\mathbb{Q}^{\otimes\Delta}$ 的密度为： $\mathbf{x}'_\Delta \to \mathrm{e}^{-H_\Delta(\mathbf{x}'_\Delta \cup \mathbf{x}^{\Lambda\setminus\Delta})}$ ，而 $Z_\Delta(\mathbf{x}^{\Lambda\setminus\Delta})$ 必然是归一化常数。

□

3.2. 无限吉布斯扰动格点。 上一节表明，有限子格上的吉布斯测度满足 DLR 方程。这些方程对于无限格点仍是关键要素。

定义 3.4. 在 $\mathcal{L}$ 上平移不变的、定义于$(\mathbb{R}^d)^{\mathcal{L}}$ 上的概率测度 $\mathbb{P}$，若对任意有限 $\Delta \subset \mathcal{L}$, 即对 $\mathbb{P}$-几乎处处的 $\mathbf{x}_{\Delta^c}$，满足 *DLR* 方程，则称其为哈密顿量 H 对应的吉布斯测度。

$$\mathbb{P}(\mathrm{d}\mathbf{x}'_\Delta|\mathbf{x}_{\Delta^c}) = \frac{1}{Z_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta^c})} \mathrm{e}^{-\tilde{H}_\Delta(\mathbf{x}'_\Delta \cup \mathbf{x}_{\Delta^c})} \mathbb{Q}^{\otimes\Delta}(\mathrm{d}\mathbf{x}'_\Delta) \tag{3.6}$$

其中

$$Z_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta^c}) = \int \mathrm{e}^{-\tilde{H}_\Delta(\mathbf{x}'_\Delta \cup \mathbf{x}_{\Delta^c})} \mathbb{Q}^{\otimes\Delta}(\mathrm{d}\mathbf{x}'_\Delta).$$

我们用 $\mathcal{G}_\mathcal{L}(H,\mathbb{Q})$ 表示所有吉布斯测度的集合。

值得指出的是，若 $\mathcal{G}_\mathcal{L}(H,\mathbb{Q})$ 非空，则格点上的任意吉布斯测度 $\mathbb{P}$ 按定义在 $\mathcal{L}$ 上平移不变。因此，若 $\mathbf{X} = \{X_i, i \in \Lambda\} \sim \mathbb{P}$，则 $(X_i)_{i\in\mathcal{L}}$ 同分布。

定义 3.5. 设 $\mathbb{P} \in \mathcal{G}_{\mathcal{L}}(H, \mathbb{Q})$，吉布斯扰动格点定义为 $\mathbf{\Gamma} := \mathbf{\Gamma}(\mathbf{X}\ U)$，其中 $\mathbf{X} \sim \mathbb{P}$，$U \sim \mathcal{U}_{\mathcal{D}}$且 $\mathbf{X}$ 独立于 U。我们用 $P_{\mathcal{L}}(H, \mathbb{Q})$ 表示平稳吉布斯扰动格的集合。

我们现在给出主要结果，并提供关于点过程哈密顿量H 和标记分布 $\mathbb{Q}$ 的假设，以确保DLR方程存在解。

定理*1.* 假设*(*$\mathcal{H}1$*)-(*$\mathcal{H}4$*)*。再假设*(*$\mathcal{H}5.1$*)-(*$\mathcal{Q}1$*)[l]*或*(*$\mathcal{H}5.2$*)-(*$\mathcal{Q}2$*)*之一成立，则 $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}(H, \mathbb{Q}) \neq \emptyset$, $P_{\mathcal{L}}(H, \mathbb{Q}) \neq \emptyset$，且任意吉布斯扰动格点 $\mathbf{\Gamma}$ 是 $\mathbb{R}^d$上的平稳点过程。此外，对任意 $u \in \mathbb{R}^d$，给定 $U = u$时 $\mathbf{\Gamma}$ 的分布（记为 $\mathbb{P}_u$）在 $\mathcal{L}$上的任意平移下保持不变。

定理1 的证明依赖于 [20]中发展的比熵技术，用以确立极限过程的存在性。我们对该方法的部分内容加以改造，以证明该极限满足DLR方程。细节见A–B。值得一提的是，由构造可知，集合 $P_{\mathcal{L}}(H, \mathbb{Q})$ 是一个Choquet单纯形，且任意吉布斯扰动格点都是极值遍历测度的凸组合。该性质源于$\mathcal{G}_{\mathcal{L}}(H, \mathbb{Q})$ 是Choquet单纯形这一事实；进一步细节见 [20] 的第14章。因此， $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{P}_u$可分解为遍历测度的混合。

3.3. 吉布斯扰动格点的超均匀性。 若点过程 $\mathbf{\Gamma}$ 满足当 $R \to \infty$时，

$$\frac{\mathrm{Var}[\#\mathbf{\Gamma} \cap B(0,R)]}{|B(0,R)|} \to 0 \tag{3.7}$$

其中， $B(z,\ r)$ 表示以 $z \in \mathbb{R}^d$ 为中心、半径为 $r > 0$的欧几里得球。文献 [12]研究了扰动格的超均匀性。尤其是，其中的定理1证明，只要 $\mathbb{E}(|X_0|^d) < \infty$，由扰动格得到的任意点过程都是超均匀的；这里 X_0 是格点上某个典型位置（例如由平稳性取0）的标记。值得强调的是，建立扰动格的超均匀性离不开全局平移 U。下一个结果将考察吉布斯扰动格点是否满足这一条件。

命题 *3.6*。我们有以下两个结论。*(i)* 假设 *(*$\mathcal{H}1$*)-(*$\mathcal{H}4$*)*。此外，假设 *(*$\mathcal{H}5.1$*)-(*$\mathcal{Q}1$*)[d]* 或 *(*$\mathcal{H}5.2$*)-(*$\mathcal{Q}2$*)*，则存在 $\mathbb{P} \in \mathcal{G}_{\mathcal{L}}(H, \mathbb{Q})$ 和 $\boldsymbol{X} \sim \mathbb{P}$，使得 $\mathbb{E}(|X_0|^d) < \infty$。这意味着，当 $d \leq 2$时，存在一个超均匀点过程 $\mathbf{\Gamma} \in P_{\mathcal{L}}(H, \mathbb{Q})$。*(ii)* 假设 *(*$\mathcal{H}1$*)-(*$\mathcal{H}4$*)* 和 *(*$\mathcal{H}5.3$*)-(*$\mathcal{Q}3$*)*，则对任意 $\mathbb{P} \in \mathcal{G}_{\mathcal{L}}(H, \mathbb{Q})$ 和 $\boldsymbol{X} \sim \mathbb{P}$，都有$\mathbb{E}(|X_0|^d) < \infty$。这意味着，当 $d \leq 2$时，任意 $\mathbf{\Gamma} \in P_{\mathcal{L}}(H, \mathbb{Q})$ 都是超均匀的。

命题证明的关键在于3.6中提出的C，其依据是变分原理，该原理要求特定熵有限；参见（A.3）。(i) 与 (ii) 的区别恰恰在于，并非每个吉布斯测度的特定熵都必然有限。

3.4. *DLR* 型方程。 吉布斯扰动格满足若干由 DLR 方程（3.6）导出的方程。这些方程不仅可以针对关于吉布斯测度的期望导出，也可以针对给定$U = u \in \mathcal{D}$的条件期望导出，在本文其余部分记为 $\mathbb{E}_u[\cdot]$。

我们首先给出单个格点 $i \in \mathcal{L}_U$ 处的 DLR 方程，方法是应用方程（3.6）并取 $\Delta = \{i\}$。设 $f\colon\ \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ 为有界可测函数。于是，我们有

$$\mathbb{E}_u[f(\mathbf{\Gamma})] = \mathbb{E}_u\left[\frac{1}{Z_i(\mathbf{\Gamma}_{i^c})}\int f(\mathbf{\Gamma}_{i^c} \cup \{i+x+U\})\mathrm{e}^{-h(i+x+U,\mathbf{\Gamma}_{i^c})}\mathbb{Q}(\mathrm{d}x)\right] \tag{3.8}$$

其中 $i \in \mathcal{L}_U = \{i+U, i \in \mathcal{L}\}$，$\mathcal{L}_U$ 为平移格，

$$\mathbf{\Gamma}_{i^c} = \{j + X_j, j \in \mathcal{L}_U, j \neq i\}. \tag{3.9}$$

下文假设 $\mathbb{Q}$ 关于勒贝格测度绝对连续，并将其密度记为 $\lambda_1(x) = \mathrm{e}^{-q(x)}$，其支撑集为 $\mathcal{Q}$。此外，对于任意 $i \in \mathcal{L}_U$、$x \in \mathcal{Q}$ 和 $\gamma \in \mathcal{C}$，我们将这两个可测函数记为 $\lambda_2(i+x,\gamma) = \mathrm{e}^{-h(i+x,\gamma)}$:

$$\lambda(i,x,\gamma) := \lambda_1(x)\lambda_2(i+x,\gamma) \quad \text{and} \quad \Lambda(i,x,\gamma) = \frac{\lambda(i,x,\gamma)}{Z_i(\gamma)} = \frac{\lambda(i,x,\gamma)}{\int_{\mathcal{Q}}\lambda(i,x,\gamma)\mathrm{d}x}. \tag{3.10}$$

这两个函数分别充当未归一化和归一化的帕潘盖洛条件强度。现在，我们可以陈述第 4 节中用于推导参数推断方法的主要方程。接下来的三个结果证明见 D。

命题 3.7. 假设定理 *1* 的条件成立，因此令 $\mathbf{\Gamma} \sim \mathbb{P} \in P_{\mathcal{L}}(H,\mathbb{Q}) \neq \emptyset$。对于 $u \in \mathcal{D}$，令 $f\colon \mathcal{L}_u \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ 为任意可测函数。*(i)* 假设

$$\mathbb{E}_u \sum_{i\in\mathcal{L}_U} |f(i,X_i,\mathbf{\Gamma}_{i^c})| < \infty \quad \textit{and} \quad \mathbb{E}_u \int_{\mathcal{Q}} |f(i,x,\mathbf{\Gamma}_{i^c})|\Lambda(i,x,\mathbf{\Gamma}_{i^c})\mathrm{d}x < \infty,$$

于是我们有

$$\mathbb{E}_u \sum_{i\in\mathcal{L}_U} f(i,X_i,\mathbf{\Gamma}_{i^c}) = \mathbb{E}_u \sum_{i\in\mathcal{L}_U}\int_{\mathcal{Q}} f(i,x,\mathbf{\Gamma}_{i^c})\Lambda(i,x,\mathbf{\Gamma}_{i^c})\mathrm{d}x. \tag{3.11}$$

(ii) 假设 f 满足 $f(i,x,\gamma) = f(0,x,\gamma - i)$，对于任意 $i \in \mathcal{L}_u$、$x \in \mathcal{Q}$、$\gamma \in \mathcal{C}$，且满足

$$\mathbb{E}_u \int_{\mathcal{Q}} |f(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c})|\Lambda(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c})\mathrm{d}x < \infty,$$

于是，对于任意有界区域 $W \subset \mathbb{R}^d$，我们有

$$\mathbb{E}_u \sum_{i\in\mathcal{L}_U\cap W} f(i,X_i,\mathbf{\Gamma}_{i^c}) = \mathbb{E}_u \sum_{i\in\mathcal{L}_U\cap W}\int_{\mathcal{Q}} f(i,x,\mathbf{\Gamma}_{i^c})\Lambda(i,x,\mathbf{\Gamma}_{i^c})\mathrm{d}x. \tag{3.12}$$

从两个格点上的 DLR 方程出发，我们可以得到类似的二阶 GNZ 型方程 [19, 20, 29]。

命题 3.8. 假设定理 *1* 的条件成立，因此令 $\mathbf{\Gamma} \sim \mathbb{P} \in P_{\mathcal{L}}(H,\mathbb{Q}) \neq \emptyset$。对于任意 $u \in \mathcal{D}$ 以及任意可测函数 $f\colon \mathcal{L}_u^2 \times (\mathbb{R}^d)^2 \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}$，满足

$$\mathbb{E}_u \sum_{\{i,j\}\in\mathcal{L}_U} \left|f(i,j,X_i,X_j,\mathbf{\Gamma}_{\{i,j\}^c})\right| < \infty$$

$$\mathbb{E}_u \int_{\mathcal{Q}}\int_{\mathcal{Q}} \left|f(i,j,x,y,\mathbf{\Gamma}_{\{i,j\}^c})\right| \Lambda(i,x,\mathbf{\Gamma}_{\{i,j\}^c})\Lambda(j,y,\mathbf{\Gamma}_{\{i,j\}^c} \cup \{i+x\})\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty.$$

Then, we have

$$\mathbb{E}_u \sum_{\{i,j\}\in\mathcal{L}_U} f(i,j,X_i,X_j,\mathbf{\Gamma}_{\{i,j\}^c}) =$$

$$\mathbb{E}_u \sum_{\{i,j\}\in\mathcal{L}_U} \iint_{\mathcal{Q}^2} f(i,j,x,y,\mathbf{\Gamma}_{\{i,j\}^c})\Lambda(i,x,\mathbf{\Gamma}_{\{i,j\}^c})\Lambda(j,y,\mathbf{\Gamma}_{\{i,j\}^c}\cup\{i+x\})\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

为补全这些 DLR 型方程，我们现在提出一个变分方程，其形式与 [2] 得到的方程类似。这需要补充一些定义和记号。设 $\check{f}\colon \mathbb{R}^d\times\mathcal{C}\to\mathbb{R}$ 是一个可测函数，且 $x\in\mathbb{R}^d$。若对每个 $\boldsymbol{\gamma}\in\mathcal{C}$，函数 $: x\mapsto\check{f}(x,\boldsymbol{\gamma})$ 在 x 处可微，则称 $\check{f}$ 在 x 处可微。此外，若 $\check{f}$ 对 λ^d-几乎处处的 $x\in\mathbb{R}^d$ 可微，则称 $\check{f}$ 为 λ^d-几乎处处可微。我们用 $\nabla\check{f}(x,\boldsymbol{\gamma})$ 表示相应的梯度。按照约定，若对 $y\in\mathcal{V}$，有 $f(y)=\infty$，其中 $\mathcal{V}$ 是 x 的一个开邻域，则 $\nabla\check{f}(x,\boldsymbol{\gamma})=0$。设 $\check{f},h\colon\mathbb{R}^d\times\mathcal{C}\to\mathbb{R}$ 是可测函数。若对每个 $\boldsymbol{\gamma}\in\mathcal{C}$，函数

$$x\mapsto\check{f}(x,\boldsymbol{\gamma})\mathrm{e}^{-h(x,\boldsymbol{\gamma})}$$

是绝对连续的。因此，如果 $\check{f}$ 和 h 在 λ^d-几乎处处可微，且 $\check{f}$ 关于 h是正则化的，那么我们有

$$\nabla\left(\check{f}\mathrm{e}^{-h}\right)(x,\boldsymbol{\gamma}) = \left(\nabla\check{f}(x,\boldsymbol{\gamma}) - \check{f}(x,\boldsymbol{\gamma})\nabla h(x,\boldsymbol{\gamma})\right)\mathrm{e}^{-h(x,\boldsymbol{\gamma})}. \tag{3.13}$$

最后，对于 $u\in\mathcal{D}$，我们用 $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}(H,\mathbb{Q},\mathcal{L}_u)$ 表示这样的函数类：其中的函数在 λ^d-几乎处处可微、关于 $h+q$是正则化的，并且对于任意 $x\in\partial\mathcal{Q}$、$i\in\mathcal{L}_u$ 和 $\boldsymbol{\gamma}\in\mathcal{C}$，都有 $\check{f}(x+i,\boldsymbol{\gamma})=0$，且 $\check{f}$ 在无穷远处趋于零。

命题 3.9 *1* $\mathbf{\Gamma}\sim$ .. 假设定理的条件 $\mathbb{P}\in P_{\mathcal{L}}\ H\ \mathbb{Q}\neq\emptyset$ $u\in\mathcal{D}$ $f\in\mathcal{F}_{\mathcal{R}}\ H\ \mathbb{Q}\ \mathcal{L}_u$ 成立，因此令$(,)$。对于 和$\check{}(,,)$，使得

$$\mathbb{E}_u \sum_{i\in\mathcal{L}_U}\left\{|\nabla\check{f}(i+X_i,\mathbf{\Gamma})| + |\check{f}(i+X_i,\mathbf{\Gamma})|\,|\nabla h(i+X_i,\mathbf{\Gamma}_{i^c}) + \nabla q(X_i)|\right\} < \infty, \tag{3.14}$$

那么我们有变分方程

$$\mathbb{E}_u \sum_{i\in\mathcal{L}_U}\left\{\nabla\check{f}(i+X_i,\mathbf{\Gamma}) - \check{f}(i+X_i,\mathbf{\Gamma})\left(\nabla h(i+X_i,\mathbf{\Gamma}_{i^c}) + \nabla q(X_i)\right)\right\} = 0. \tag{3.15}$$

注 3.10. 值得一提的是，命题*3.9*，尤其是变分方程(3.15)，可以视为命题*3.7*的一个特例，只需取 $f(i,$ $\nabla f\ i+x\ \gamma\ -f\ i+x\ \gamma\ \nabla h\ i+x\ \gamma\ +\nabla q\ x_i$ $,)\check{}(,)\check{}(,(\ (,)\ ())$。

4. 吉布斯扰动格的参数推断。

4.1. 符号与参数模型。 本节中，我们假设假设($\mathcal{H}1$)-($\mathcal{H}4$) 以及 ($\mathcal{H}5.1$)-($\mathcal{Q}1$)[1] 均成立，因此根据定理 1，存在 $\mathbf{\Gamma}\sim\mathbb{P}\in P_{\mathcal{L}}(H,\mathbb{Q})$。假设有限程性质 ($\mathcal{H}5.1$) 会在许多方面简化统计方法及其渐近性质。我们将满足 ($\mathcal{H}5.2$) 的哈密顿量情形留待未来研究，例如 Lennard-Jones 势就是这种情况；该情形由 [7, 8] 针对连续吉布斯点过程进行研究。

我们回顾记号 $\mathbf{\Gamma}=\{i+X_i, i\in\mathcal{L}_U\}$，其中 X_i 是标记分布 $\mathbb{Q}$ 的实现，假设该分布具有密度 Q，且已知其支撑集 $\mathcal{Q}$ （可能为 $\mathbb{R}^d$）。最后，我们还提醒，记号 $\mathbf{\Gamma}_{i^c}$（由 (3.9) 给出）表示除来自 i 的点之外的扰动点集合。对于任意 $u\in\mathcal{D}$ 以及任意函数 $f\colon\mathcal{L}_u\times\mathcal{Q}\times\mathcal{C}\to\mathbb{R}$，我们考虑以下性质和定义：

(TI) 若对任意 $i \in \mathcal{L}_u$、$x \in \mathcal{Q}$ 以及 $\gamma \in \mathcal{C}$、f，f 满足 $i(x,\gamma) = f(0,x,\gamma - i)$，则称 f 平移不变。**(FR)** 若对任意 $i \in \mathcal{L}_u$、$x \in \mathcal{Q}$ 以及 $\gamma \in \mathcal{C}$、f，f 满足 $i(x,\gamma) = f(i, x, \gamma_{B(i+x,R)})$，则称 f 具有有限作用范围 $R > 0$。

˜特别地，局部能量函数 $h(i,x,\gamma) = h(i+x,\gamma)$ 以及 $\lambda_2(i+x,\gamma)$满足 (TI)-(FR)。

本节聚焦于参数化建模与估计：对任意 $u \in \mathcal{D}, i \in \mathcal{L}_u, x \in \mathcal{Q}, \gamma \in \mathcal{C}$，我们令 $\lambda(i,x,\gamma;\theta)$（相应地，$\Lambda(i,x,\gamma;\theta)$）表示 (3.10) 的参数化版本，其中$\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^p$ 对某个 $p \geq 1$。因此，我们考虑 q 以及局部能量函数 h 的参数化形式。为便于统计方法与渐近结果，通常聚焦于指数族模型 [23]。因此，一方面，我们假设 $-\log \lambda_1(x) = q(x)$ 具有形式 $\theta_1^\top S_1(x) + c(\theta_1)$，其中 $\theta_1 \in \mathbb{R}^{p_1}$ 对某个 $p_1 \geq 1$，且 $c(\theta_1)$ 为对数配分常数。以下是若干例子：

- $\mathcal{Q}$ 上的均匀分布（具有 $|\mathcal{Q}| < \infty$）。在这种情况下，无需估计参数，我们约定 $p_1 = 0$。
- $\mathcal{Q} = \mathbb{R}^d$上的中心高斯密度：$p_1 = 1, \theta_1 \in \mathbb{R}^+$ 和 $S_1(x) = \|x\|^2$ 和 $c(\theta_1) = -d/2\log(\pi\theta_1)$。
- $\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^d$ 上的指数分布：$x_i \geq 0, i = 1,\ldots,d\}$：$p_1 = 1, \theta_1 \in \mathbb{R}^+, S_1(x) = \sum_{i=1}^d x_i$ 和 $c(\theta_1) = d\log(\theta_1)$。

另一方面，我们假设局部能量函数 $h = -\log \lambda_2$可以写成$-\log \lambda_2(i+x,\gamma) = h(i+x,\gamma) = \theta_2^\top S_2(i+x,\gamma)$ 其中 $\theta_2 \in \mathbb{R}^{p_2}, p_2 \geq 1$。根据假设，$\lambda_2, h$ 和 S_2 满足(TI)-(FR)。

首先举一个例子：著名的 Strauss硬核模型，其中 $p_2 = 1$和

$$S_2(y,\gamma) = \sum_{y' \in \gamma} \left\{ \mathbb{1}_{[r,R]}(|y' - y|) + (\infty) \times \mathbb{1}_{[0,r)}(|y' - y|) \right\}$$

对于任意 $y \in \mathbb{R}^d$ 以及满足 $0 \leq r < R$ 的已知实参数 r, R。指数族模型还包括例如 Strauss硬核模型的分段版本、Geyer饱和模型和 Widom-Rowlinson面积交互 [14, 22, 28]。注意，所有这些模型的作用范围都是有限的。此外，它们也都满足某种局部稳定性，这意味着对于任意 $y \in \mathbb{R}^d$ 和 $\gamma \in \mathcal{C}$，$\mathrm{e}^{-h(y,\gamma)} \leq \kappa$，其中 $\kappa > 0$ 与 y, γ 无关。

综上，令 $\theta = (\theta_1^\top, \theta_2^\top)^\top \in \mathbb{R}^p$，对于任意 $x \in \mathcal{Q}$，$S(i,x,\gamma) := (S_1(x)^\top, S_2(i+x,\gamma)^\top)^\top$，且 $p = p_1 + p_2$。总而言之，我们考虑以下指数参数模型

$$\begin{aligned} -\log \lambda(i,x,\gamma;\theta) &= -\log \lambda_1(x;\theta) - \log \lambda_2(i+x,\gamma;\theta) = h(i+x,\gamma) + q(x) \\ &= \theta_1^\top S_1(x) + \theta_2^\top S_2(i+x,\gamma) \qquad = \theta^\top S(i,x,\gamma). \end{aligned} \tag{4.1}$$

最后，我们用 $\theta^\star$ 表示待估计的真实参数向量，即假设 $\mathbf{\Gamma} \sim \mathbb{P} = \mathbb{P}_{\theta^\star}$。

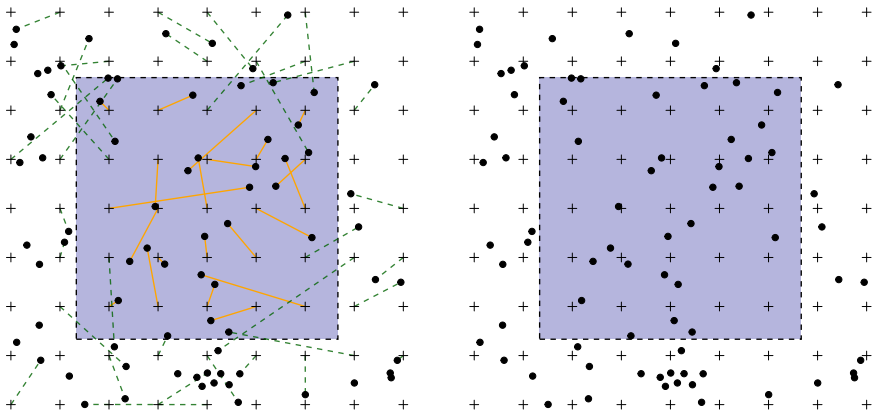
4.2. 统计背景与方法。 本文考虑两种不同的统计设置，如图 1所示。令 W_n 为 $\mathbb{R}^d$ 上的一个有界区域，作为观测域。

- **框架 1**。我们观测到平移格 $\mathcal{L}_U$ 以及所有落在 W_n 中的扰动点，也就是说，我们观测到一个..... 的实现

$$\mathcal{D}_{1,n} = \{(i, X_i), \text{ with } i \in \mathcal{L}_U \cap W_n \text{ and } i + X_i \in W_n\}. \tag{4.2}$$

• **框架 2**。我们观测到平移格 $\mathcal{L}_U$，且只观测到落在W_n 中的扰动点，也就是说，我们观测到一个.....的实现

$$\mathcal{D}_{2,n} = \{i + X_i \in W_n \text{ for } i \in \mathcal{L}_U\}. \tag{4.3}$$



(a) 框架 1　　(b) 框架 2

图 1：本文所考虑的两种统计框架示意图。在 (a)–(b) 中，内部的灰色矩形对应于 W_n，叉号表示点 $i \in \mathcal{L}_U$，圆点表示点 $i + x_i$，其中$i \in \mathcal{L}_U$。对于 (a) 框架 1，我们观测落在 W_n 中的叉号 (i) 和圆点 $(i + x_i)$。对于 (b) 框架 2，我们只观测落在 W_n 中的圆点。

本节其余部分将讨论如何基于对下列对象之一的单次观测来估计 $\theta^\star$，即 $(i,\ x_i)_i$ 或 $(i + x_i)_i$，并且观测是在有界区域 $W_n \subset \mathbb{R}^d$上进行的。区域 W_n 充当观测域，并随着 $\mathbb{R}^d$ 趋于无穷大而不断扩大。我们还令 $W_n \ominus r$ 为某个 $r \geq 0$区域 W_n，该区域由 r向内侵蚀得到。标准方法是使用似然法。然而，由于归一化常数未知且依赖于参数，众所周知，即使是在格点上估计无标记吉布斯模型，似然法的计算成本也已十分高昂 [18]。文献中针对格点上的吉布斯模型或连续情形提出了许多替代方法，尤其适用于框架 1 [18]。值得注意的是，与标准格点吉布斯模型不同，该模型具有连续标记分布，并且哈密顿量仅依赖于 $i + X_i$、$i \in \mathcal{L}_U$和 $X_i \in \mathcal{Q}$。最常用的替代方法是（对数）伪似然。为解决边缘效应问题，我们需要引入一个特定的边界校正因子 b_n，如下所述。我们考虑的经过边界校正的（对数）伪似然定义如下：

$$\mathrm{LPL}_n(\mathbf{\Gamma}; \theta) = \sum_{i \in \mathcal{L}_U} \log \Lambda_n(i, X_i, \mathbf{\Gamma}_{i^c}; \theta), \tag{4.4}$$

其中，对于任意 $i \in \mathcal{L}_U$，$x \in \mathcal{Q}$和 $\boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{C}$

$$\Lambda_n(i, x, \boldsymbol{\gamma}; \theta) = \frac{b_n(i, x) \mathrm{e}^{-\theta^\top S(i, x, \boldsymbol{\gamma})}}{\int_{\mathcal{Q}} b_n(i, y) \mathrm{e}^{-\theta^\top S(i, y, \boldsymbol{\gamma})} \mathrm{d}y} \tag{4.5}$$

其中术语 b_n 称为边界校正因子。出于技术原因（主要见定理 2（ii）的解释），我们将此边界校正因子定义为

$$b_n(i, x) = \mathbb{1}(i \in W_n \ominus (m_n + R), i + x \in W_n \ominus R) \tag{4.6}$$

其中 $(m_n)_n$ 是一个实数序列，稍后将在假设 ($\mathcal{M}1$) 中指定。其目标是趋于 ∞，使得 $|W_n \ominus (m_n + R)| \sim |W_n|$ 在 $n \to \infty$ 时成立。侵蚀域$W_n \ominus R$ 的作用也由此显现。根据有限程假设，对于任意满足 $i + z \in W_n \ominus R$（其中 $z = X_i$）的 $i \in \mathcal{L}_u$，$x \in \mathcal{Q}$, $\Lambda(i, z, \mathbf{\Gamma}_{i^c};\ \theta) = \Lambda(i, z, \mathbf{\Gamma}_{i^c} \cap W_n;\ \theta)$ 均可始终利用框架 1 中的数据进行计算。指数族模型中 $\mathrm{LPL}_n(\mathbf{\Gamma}; u, \theta)$ 关于 θ 的梯度，记为 $\mathrm{LPL}_n^{(1)}(\mathbf{\Gamma}; u, \theta)$，其表达式为

$$\mathrm{LPL}_n^{(1)}(\mathbf{\Gamma}; \theta) = \sum_{i \in \mathcal{L}_U} \Big\{ - b_n(i, X_i) S(i, X_i, \mathbf{\Gamma}_{i^c}) + \int_{\mathcal{Q}} b_n(i, x) S(i, x, \mathbf{\Gamma}_{i^c}) \Lambda_n(i, x, \mathbf{\Gamma}_{i^c}; \theta) \mathrm{d}x \Big\}. \tag{4.7}$$

此时值得指出的是，在适当的假设下（此处暂不详述），并在前一个方程中用 Λ_n 替换 Λ 后，可以应用命题 3.7，从而得出（4.7）在 $\theta = \theta^\star$ 时是中心化的。

现在我们来考虑框架 2 的情形。由于我们失去了 i与 $i + X_i$之间的联系，很容易看出，（4.7）中的某些元素无法计算：(a) 对于 $i + X_i \in \Gamma$，未观测到 $q(X_i)$，因此也未观测到 $S(i, X_i, \mathbf{\Gamma}_{i^c})$；(b) 对于任意 $x \in \mathcal{Q}$，$S(i, x, \mathbf{\Gamma}_{i^c})$ 也无法计算，因为未观测到 $\mathbf{\Gamma}_{i^c}$。在这种情形下，我们未能找到一个类似于（4.7）的通用估计方程来解决 (a)-(b) 中提到的问题。不过，在某些特例下，变分方程（3.15），$\check{}\,\check{}\,\check{}$ 使我们得以部分解决这一问题。令 $f = (f_1, \ldots, f_L)$ 为一组满足命题 3.9 假设的函数，其中 $L \geq p$ 为某个值；对于整个检验函数集合 f 以及指数族模型，考虑（3.15）的经验版本 $\check{}$，其形式为

$$\mathrm{VARE}_n(\check{f}; \theta) = \sum_{\substack{i \in \mathcal{L}_U \\ i + X_i \in W_n \ominus R}} \Big\{ \nabla \check{f}(i + X_i; \mathbf{\Gamma}_{i^c}) - \check{f}(i + X_i; \mathbf{\Gamma}_{i^c}) \Big(\nabla S_1(X_i)^\top \theta_1 + \nabla S_2(i, X_i, \mathbf{\Gamma}_{i^c})^\top \theta_2 \Big) \Big\}. \tag{4.8}$$

若考虑框架 2，式（3.15）的主要问题在于 ∇S_1，它无法观测。不过，我们可以举出两个特例，在这两种情形下，该项要么相互抵消，要么等于 1：

(i) 若分布 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathcal{Q}$上的均匀分布，则此时 $p_1 = \nabla S_1 = 0$，我们建议取 $L = p$，并考虑 $\check{}\, f(i + x, \gamma) = \nabla S_2(i + x, \gamma) \psi(i + x, \gamma)$，其中$\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$。(ii) 密度 $\lambda_1(x) = \mathrm{e}^{-q(x)}$ 对应于第2.2节中所述的正正交象限上的指数分布。对于这一特定分布，$\nabla S_1 = 1$，我们建议取 $L = p$，并考虑 $\check{}\, f(i + x, \gamma) = (1 + \nabla S_2(i + x, \gamma)) \psi(i + x, \gamma)$，其中 $\psi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$。

变分方程还有一个优点：对于指数模型，它关于 θ 是线性的，因此可以得到一个显式且简单的估计量。注意，在两种情况 (i)-(ii) 下，总能找到一个光滑函数 ψ，使得给定 $U = u$，$\check{}\, f \in \mathcal{F}_{\mathcal{R}}(H, \mathbb{Q}, \mathcal{L}_u)$。因此，可以应用命题 3.9，这也意味着给定 $U = u$ (3.15) 是一个无偏估计方程，即 $\mathbb{E}_u[\mathrm{VARE}_n(\check{}\, f; \theta)] = 0$，当 $\theta = \theta^\star$ 时。

从实践角度来看，由（4.7）和（4.8）概括的方法似乎有所不同，因为前者（分别为后者）更适用于框架 1（分别为框架 2），且对边缘效应的处理方式也不同。然而，从理论角度来看，根据注 3.10，由这些方程得到的估计值均源自同一个 DLR 型方程（3.6）。因此，为了从理论角度涵盖这两种方法，

我们提出考虑 Takacs-Fiksel [6, 15, 33] 方法论，其中（4.7）和（4.8）是其特例。

令 $L \geq p$，对于任意 $u \in \mathcal{D}$，令 $\mathbf{f}\colon \mathcal{L}_u \times \mathcal{Q} \times \mathcal{C} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^L$。然后，我们构造最小二乘准则，称为 Takacs-Fiksel 准则

$$\mathrm{TF}_n(\mathbf{f}, \boldsymbol{\Gamma}; \theta) = \sum_{l=1}^{L} \mathrm{DLR}_n(f_l, \boldsymbol{\Gamma}; \theta)^2 \quad \text{with} \tag{4.9}$$

$$\mathrm{DLR}_n(f_l, \boldsymbol{\Gamma}; \theta) = \sum_{i \in \mathcal{L}_U} \Big\{ b_n(i, X_i) f_l(i, X_i, \boldsymbol{\Gamma}_{i^c}; \theta) - \int_{\mathcal{Q}} b_n(i, x) f_l(i, x, \boldsymbol{\Gamma}_{i^c}; \theta) \Lambda_n(i, x, \boldsymbol{\Gamma}_{i^c}; \theta) \mathrm{d}x \Big\} \tag{4.10}$$

^^ Takacs-Fiksel估计量定义为 $\theta = \mathrm{argmin}_\theta \mathrm{TF}_n(\mathrm{f}\ \boldsymbol{\Gamma};\ \theta)$。同样，当 $f(i, x, \gamma;\ \theta) = S(i, x, \gamma)$ 时，θ对应于伪似然估计量 (4.4)；而对于上文所述的两个特例 (i)-(ii)，当 (, ,) ˇ(,) ˇ(,)((,) ( ) 且 ˇ(,) ((, ,)) (,) 时，它对应于变分估计量 (

4 8 $f\ i\ x\ \gamma\ = \nabla f\ i+.$)（其中 z 是一个 d $x\ \gamma\ - f\ i+x\ \gamma\ \ \nabla h\ i+x\ \gamma\ + \nabla q\ x_i \qquad f\ i+x\ \gamma\ = \ z+\nabla S_2\ i\ x\ \gamma\ \ \psi\ i+x\ \gamma$ 维的 0-1 向量）。以下我们默认，在后一种情况下，ψ 的选取满足：给定 $U = u$，$f \in \mathcal{F}_{\mathcal{R}}(H, \mathbb{Q}, \mathcal{L}_u)$。

对于关于 θ，$\ell(\theta)$的任意函数或随机函数，我们分别用 $\ell^{(1)}(\theta)$ 和 $\ell^{(2)}(\theta)$ 表示其梯度和海森矩阵。最小化（4.9）等价于求其梯度的零点

$$\mathrm{TF}_n^{(1)}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\Gamma}; \theta) = 2 \sum_{l=1}^{p} \mathrm{DLR}_n^{(1)}(f_l, \boldsymbol{\Gamma}; \theta) \times \mathrm{DLR}_n(f_l, \boldsymbol{\Gamma}; \theta)$$

4.3. 渐近结果。本节研究使（4.9）最小化的 Takacs-Fiksel估计量的性质。令($\mathcal{M}1$)-($\mathcal{M}5$) 表示关于模型和检验函数的假设 f_j:

($\mathcal{M}1$) 我们假设扰动吉布斯格点模型满足($\mathcal{H}1$)-($\mathcal{H}4$),($\mathcal{H}5.1$)-($\mathcal{Q}1$)[1], 由（4.1）参数化，其中 $\theta \in \Theta$ 是 $\mathbb{R}^p$ 的一个有界开凸集，其内部包含待估计的真实参数向量 $\theta^\star$；模型在递增立方体序列$(W_n)_n$ 上观测，且当 $n \to \infty$ 时，体积为 $|W_n| \to \infty$。我们假设（4.6）中定义的实数序列(m_n) 满足：对于满足 $\sum_{n \geq 1} |W_n|^{-\beta} < \infty$ 的 $\beta > 1/2$，有 $m_n = \beta \log |W_n|$。

($\mathcal{M}2$) 设 $L \geq p$。对于任意 $l = 1, \ldots, L$, $u \in \mathcal{D}$, $i \in \mathcal{L}_u$, $x \in \mathbb{R}^d$和 $\boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{C}$，函数$f_l(i, x, \boldsymbol{\gamma};\ \cdot)$ 和 $\Lambda(i, x, \boldsymbol{\gamma};\ \cdot)$ 在 Θ 上二阶连续可微。对于 $k = 0$，1、2，我们假设每个分量 $f(k)\,\iota(i, x, \boldsymbol{\gamma};\ \theta)$ 都可分解为 $\phi_1(x;\ \theta)\phi_2(i + x, \boldsymbol{\gamma};\ \theta)$，其中$\phi_1, \phi_2$因 $f_l^{(k)}$ 的不同分量而异，且 ϕ_2 满足 (TI)-(FR)。

($\mathcal{M}3$) 对任意 j、$k = 1$、……、p、$l = 1$、……、L 与 $\theta \in \Theta$，(A)[f] 对 $f = f_l$、$(f_l^{(1)})_j$ 以及 $(f(2)\,\iota)_{jk}$ 成立，并且 (B)[f] 对 $f = f_l$、$(f_l^{(1)})_j \Lambda$、$f_l \Lambda_j^{(1)}/\Lambda$×、$(f(2)\,\iota)_{jk}$、$(f(1)\,\iota)_j (f_l^{(1)})_k$、$(f(1)\,\iota)_j (\Lambda^{(1)})_j/\Lambda$ 以及 $f_l (\Lambda^{(2)})_{jk}/\Lambda$ 成立。假设 (A)[f]-(B)[f] 对应于：(A)[f] 对任意 $u \in \mathbb{R}^d$ 与 $\theta \in \Theta$

$$\sup_{x \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}_u \left(|f(0, x, \boldsymbol{\Gamma}_{0^c}; \theta)| \lambda_2(0, x, \boldsymbol{\Gamma}_{0^c}; \theta) \right) < \infty.$$

(B)[f] 对任意 $u \in \mathbb{R}^d$ 与 $\theta \in \Theta$

$$\sup_{x\in\mathcal{Q}} \mathbb{E}_u \left(|f(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta)| \frac{\Lambda(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta)}{\lambda_1(x;\theta^\star)} \right) < \infty$$

$$\sup_{n\geq 1} \sup_{x,y\in\mathcal{Q}} \mathbb{E}_u \left(|f(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta)| \frac{\Lambda_n(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta)\Lambda(0,y,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta)}{\lambda_1(x;\theta^\star)\lambda_1(y;\theta^\star)} \right) < \infty.$$

（$\mathcal{M}4$）我们假设，对于任意 $u \in \mathcal{D}$，由（$\mathcal{E}_u$ F.5）定义的量是有限的。（）（$\mathcal{I}$（$\theta^\star$））>0 其中 $\mathcal{I}$（$\theta^\star$）$=\sum_{l=1}^{L} \mathcal{I}_l$（$\theta^\star$）$\mathcal{I}_l$（$\theta^\star$）$^\top$ 其中

$$\mathcal{I}_l(\theta^\star) = \mathbb{E}_u \left[\int_{\mathcal{Q}} f_l(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta^\star) \Lambda^{(1)}(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta^\star)\, \mathrm{d}x \right] \tag{4.11}$$

并且，其中 $\lambda_{\min}$（M）对于对称平方矩阵 M，表示 M的最小特征值。

假设（$\mathcal{M}1$）尤其保证了至少存在一个扰动格的平稳吉布斯测度（由定理1可知）。关于 W_n 的假设，例如对于简单的立方体序列 $W_n = [-n^{1/d}/2, n^{1/d}/2]^d$，若其体积为 $|W_n| = n$ 且 $\beta > 1$，便可满足。也可以考虑立方体以外的区域。最后，特别是通过查看定理 2 的证明可以看出，序列 m_n 实际上与分布 $\mathbb{Q}$的尾部有关。更准确地说，它对应于当 $X \sim \mathbb{Q}$时 $-\log \mathbb{P}(|X| > m_n)$ 的一个上界。注意，若 $\mathbb{Q}$ 是紧支撑的，且满足 $\mathbb{P}(|X| \geq K) = 0$，则在该方法中可以用 K替换 m_n。假设（$\mathcal{M}2$）要求检验函数 f_j 具有特定形式并满足正则性条件。对于指数模型，导出（4.4）和（4.8）的检验函数满足这一假设。假设（$\mathcal{M}3$）主要用于定理 2 中证明 DLR 型方程的经验版本的遍历性结果。假设（$\mathcal{M}4$）用于$\widetilde{\text{控制}}$ $\mathrm{DLR}_n(f_l;\theta^\star)$ 的条件方差。最后，假设（$\mathcal{M}5$）对应于一个可辨识性条件。

我们首先给出 DLR 型方程的一个遍历定理。在此之前，对于 A_n 一个随机变量、a_n 一个正实数序列以及 $u \in \mathcal{D}$，若满足以下性质，我们记作 $A_n = O_{\mathbb{P}_u}(a_n)$：对于任意 $\varepsilon = \varepsilon(u)$，都存在某个有限的 $M = M(u) > 0$，使得当 n 足够大时

$$\mathrm{P}\left(|A_n| \geq M a_n \mid U = u\right) \leq \varepsilon. \tag{4.12}$$

值得一提的是，若 $\mathbb{E}_u|A_n|^p < \infty$ 对某个 $p > 0$成立，由条件马尔可夫不等式可得 $A_n = O_{\mathbb{P}_u}((\mathbb{E}_u|A_n|^p)^{1/p})$。

定理 2. 假设 *($\mathcal{M}1$)*，并设 f 为一个满足*($\mathcal{M}2$)* 和 *($\mathcal{M}3$)*的函数。我们定义随机变量

$$A_{W_n}(f,\mathbf{\Gamma};\theta) = \sum_{i\in\mathcal{L}_U} b_n(i,X_i) f(i,X_i,\mathbf{\Gamma}_{i^c};\theta)$$

$$B_{W_n}(f,\mathbf{\Gamma};\theta) = \sum_{i\in\mathcal{L}_U} \int_{\mathcal{Q}} b_n(i,x) f(i,x,\mathbf{\Gamma}_{i^c};\theta) \Lambda_n(i,x,\mathbf{\Gamma}_{i^c};\theta) \mathrm{d}x$$

$$\widetilde{B}_{W_n}(f,\mathbf{\Gamma};\theta) = \sum_{i\in\mathcal{L}_U} \int_{\mathcal{Q}} b_n(i,x) f(i,x,\mathbf{\Gamma}_{i^c};\theta) \Lambda(i,x,\mathbf{\Gamma}_{i^c};\theta) \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{DLR}_n(f,\mathbf{\Gamma};\theta) = A_{W_n}(f,\mathbf{\Gamma};\theta) - B_{W_n}(f,\mathbf{\Gamma};\theta)$$

$$\widetilde{\mathrm{DLR}}_n(f,\mathbf{\Gamma};\theta) = A_{W_n}(f,\mathbf{\Gamma};\theta) - \widetilde{B}_{W_n}(f,\mathbf{\Gamma};\theta).$$

于是，当 $n \to \infty$ 时，给定 $U = u$，我们有以下两个结论。
(i)

(4.13)
$$|W_n|^{-1} A_{W_n}(f, \mathbf{\Gamma}; \theta) \xrightarrow{a.s.} \mathbb{E}_u \int_{\mathcal{Q}} f(0, x, \mathbf{\Gamma}_{0^c}; \theta) \Lambda(0, x, \mathbf{\Gamma}_{0^c}; \theta^\star) \mathrm{d}x$$

(4.14)
$$|W_n|^{-1} B_{W_n}(f, \mathbf{\Gamma}; \theta) \xrightarrow{a.s.} \mathbb{E}_u \int_{\mathcal{Q}} f(0, x, \mathbf{\Gamma}_{0^c}; \theta) \Lambda(0, x, \mathbf{\Gamma}_{0^c}; \theta) \mathrm{d}x$$

(4.15)
$$|W_n|^{-1} \mathrm{DLR}_n(f, \mathbf{\Gamma}; \theta) \xrightarrow{a.s.} \mathbb{E}_u \int_{\mathcal{Q}} f(0, x, \mathbf{\Gamma}_{0^c}; \theta) \left\{ \Lambda(0, x, \mathbf{\Gamma}_{0^c}; \theta^\star) - \Lambda(0, x, \mathbf{\Gamma}_{0^c}; \theta) \right\} \mathrm{d}x$$

(4.16)
$$|W_n|^{-1} \left(\mathrm{DLR}_n(f, \mathbf{\Gamma}; \theta) - \widetilde{\mathrm{DLR}}_n(f, \mathbf{\Gamma}; \theta) \right) \xrightarrow{a.s.} 0.$$

(ii)

(4.17)
$$\mathrm{DLR}_n(f, \mathbf{\Gamma}; \theta) - \widetilde{\mathrm{DLR}}_n(f, \mathbf{\Gamma}; \theta) = O_{\mathbb{P}_u}\left(|W_n|^{1-\beta} \right)$$

其中 β 定义于 $(\mathcal{M}1)$ 。

该结果的证明推迟至 E。下一个结果证明了 Takacs-Fiksel估计量的相合性。

定理*3.* 在假设 *(*$\mathcal{M}1$*)-(*$\mathcal{M}5$*)* 下，我们得到如下两个结论，分别由 $n \to \infty$. $\widetilde{}$ $\widetilde{}$ 得出。*(i)* 令 $v_n = \sup_l \mathit{Var}_u[\mathit{DLR}_n(f_l, \mathbf{\Gamma};\ \theta^\star)]$, ，其中 $\mathit{Var}_u[\mathit{DLR}_n(f_l, \mathbf{\Gamma};\ \theta^\star)]$ 表示给定 $U = u$ 时 $\mathit{DLR}_n(f_l, \mathbf{\Gamma}; \theta^\star)$ 的条件方差。那么， $v_n = O(|W_n|)$。

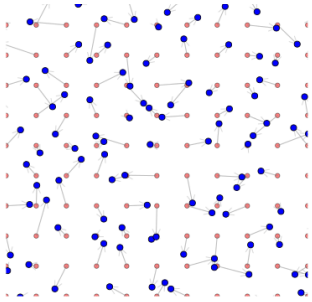
ˆ*(ii)* 局部极大值点序列 θ 满足

$$\hat{\theta} - \theta^\star = O_{\mathbb{P}_u}\left(v_n^{1/2} |W_n|^{-1} \right) = O_{\mathbb{P}_u}\left(|W_n|^{-1/2} \right).$$

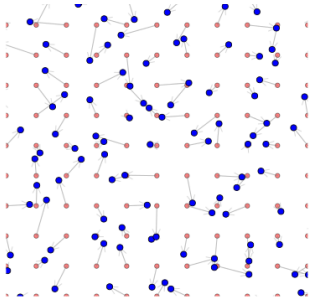
下面讨论 (ii) 中得到的收敛速率。正如引言中所述，标准连续吉布斯点过程不是超均匀的；关于这类点过程的 Takacs-Fiksel估计量的结果，见 [6], ，表明其收敛速率为 $|W_n|^{-1/2}$。作为比较，我们得到一个具有相似速率的收敛速率上界。不过，我们还表明，如果证明 $v_n = o(|W_n|)$，则可以降低该速率。如果 $\mathbf{\Gamma}$ 是超均匀的，那么可以推出（若 $|W_n|$ 是递增球，则可立即得到）$\mathrm{Var}[N(W_n)] = o(|W_n|)$。然而， $N(W_n)$ 只是一个具有 $f = 1$ 的特定 DLR 检验函数的左侧。如何针对某个检验函数（例如 f_l）推导相应条件，使得 $\mathbf{\Gamma}$ 的超均匀性能够推出 $\widetilde{}$，即 $\mathrm{Var}_u[\mathrm{DLR}_n(f_l, \mathbf{\Gamma}; \theta^\star)] = o(|W_n|)$，这是一个尚未解决且可能相当复杂的问题。这个从统计角度看极为重要的问题留待未来研究。

5. 模拟与数值研究。 本节给出模拟结果，并评估基于Takacs-Fiksel 方法的估计量的性能。模拟点模式使用带有高斯移动提议和Strauss相互作用的Metropolis-Hastings算法生成。点模式在 $[-30, 30]^2$ 上生成，然后

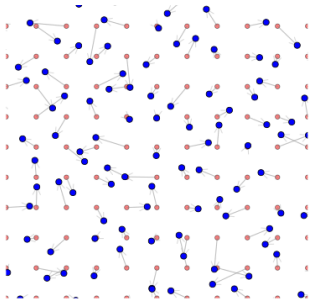
裁剪至观测域 $[-\ell,\ell]^2$（对于 $\ell = 8{,}12{,}16$）。重复点模式由同一随机种子生成，对应于不同的参数组 $\theta_1 := \frac{1}{\sigma^2}$，其中 σ 为高斯移动的标准差， θ_2 为Strauss相互作用的强度， R 为Strauss相互作用的作用范围。



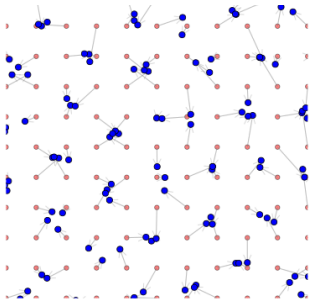
(a) $\theta_1 = 4$, $\theta_2 =$ –对数 0.9, $R = 0.5$



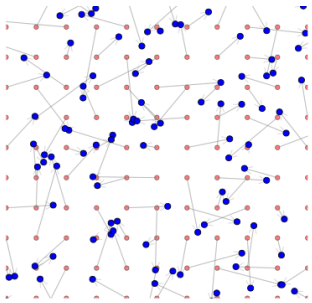
(b) $\theta_1 = 4$, $\theta_2 =$ –log 0.9, $R = 1.5$



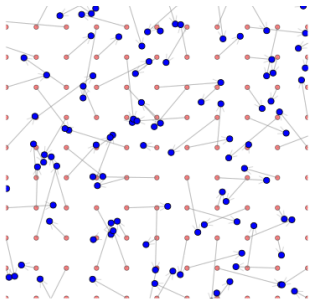
(c) $\theta_1 = 4$, $\theta_2 =$ –log 0.1, $R = 0.5$



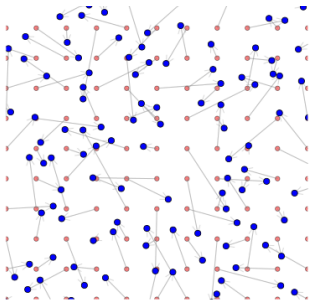
(d) $\theta_1 = 4$, $\theta_2 =$ –log 0.1, $R = 1.5$



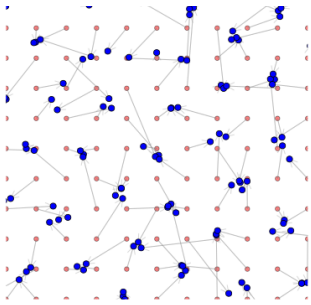
(e) $\theta_1 = 1$, $\theta_2 =$ –log 0.9, $R = 0.5$



(f) $\theta_1 = 1$, $\theta_2 =$ –log 0.9, $R = 1.5$



(g) $\theta_1 = 1$, $\theta_2 =$ –log 0.1, $R = 0.5$



(h) $\theta_1 = 1$, $\theta_2 =$ –log 0。1, $R = 1.5$

图2：具有Strauss相互作用和高斯移动的模拟吉布斯扰动格点 es.

在这些模拟中，我们观察到一个有趣的现象，即 θ_2 和R 对聚类行为的影响。对于具有Strauss相互作用的正则连续吉布斯点过程， θ_2的值越大，相互作用的排斥性越强；同样，R 越大，点过程的排斥性越强。对于固定的 θ_1，我们观察到，当θ_2 较小时（即弱相互作用）， R 的影响可以忽略不计，所得点模式几乎无法区分。在这一情形下，构型呈现出由大片空白区域分隔的点簇，类似于泊松点过程。相反，当 θ_2 较大时（即强相互作用），行为会随 R的取值而显著变化。对于 $R = 0.5$，构型表现出排斥行为：各点间距更为均匀，仅有少数点对彼此靠近。相反，对于 $R = 1.5$，则出现明显的聚类现象，由三到四个相互作用点组成的群组出现得更为频繁。有趣的是，这些簇本身似乎呈规则间隔，仿佛彼此排斥。根据命题3.6，至少存在一个具有Strauss相互作用和高斯移动的吉布斯扰动格点是超均匀点过程。图2表明，只需调节模型参数，便可得到具有不同聚类行为的超均匀过程。

$(\theta_1,\ \theta_2)$	$W_n =: [-\ell,\ell]^2$								
	$\ell = 8$			$\ell = 12$			$\ell = 16$		
	mean	sd	RMSE	均值 标		RMSE	均值 标		RMSE
$R = 0.5$									
$\theta_1 = 4$	3.88	0.19	0.23	4.01	0.16	0.16	4.10	0.18	0.21
$\theta_2 \approx 0.11$	0.11	0.19	0.19	0.03	0.09	0.12	0.12	0.11	0.11
$\theta_1 = 1$	1.10	0.07	0.12	0.99	0.07	0.07	1.00	0.05	0.05
$\theta_2 \approx 0.11$	0.15	0.09	0.10	0.07	0.11	0.12	0.11	0.06	0.06
$\theta_1 = 4$	4.19	0.41	0.45	4.04	0.20	0.20	4.05	0.19	0.19
$\theta_2 \approx 0.69$	0.84	0.28	0.32	0.69	0.17	0.17	0.71	0.08	0.08
$\theta_1 = 1$	1.01	0.08	0.08	0.98	0.04	0.05	1.02	0.03	0.04
$\theta_2 \approx 0.69$	0.71	0.16	0.16	0.65	0.17	0.17	0.68	0.15	0.15
$\theta_1 = 4$	3.98	0.37	0.37	3.93	0.15	0.17	4.01	0.15	0.15
$\theta_2 \approx 2.3$	2.16	0.30	0.33	2.33	0.20	0.21	2.50	0.25	0.32
$\theta_1 = 1$	0.99	0.07	0.07	1.01	0.05	0.05	0.98	0.03	0.04
$\theta_2 \approx 2.3$	2.30	0.52	0.52	2.26	0.23	0.23	2.24	0.18	0.19
$R = 1.5$									
$\theta_1 = 4$	4.03	0.50	0.50	4.16	0.30	0.34	4.06	0.27	0.27
$\theta_2 \approx 0.11$	0.11	0.06	0.07	0.11	0.07	0.07	0.13	0.05	0.06
$\theta_1 = 1$	1.06	0.10	0.12	1.05	0.07	0.09	0.99	0.03	0.03
$\theta_2 \approx 0.11$	0.11	0.09	0.09	0.10	0.06	0.06	0.11	0.04	0.04
$\theta_1 = 4$	4.16	0.27	0.31	4.07	0.31	0.32	4.00	0.18	0.18
$\theta_2 \approx 0.69$	0.77	0.09	0.11	0.76	0.05	0.08	0.69	0.05	0.05
$\theta_1 = 1$	1.09	0.09	0.12	1.01	0.05	0.05	0.99	0.06	0.06
$\theta_2 \approx 0.69$	0.65	0.10	0.11	0.70	0.07	0.08	0.74	0.03	0.06
$\theta_1 = 4$	92.97	49.08	101.61	6.27	0.47	2.32	5.33	0.61	1.46
$\theta_2 \approx 2.3$	101.57	55.77	113.86	3.21	0.46	1.01	3.43	0.37	1.19
$\theta_1 = 1$	1.21	0.12	0.24	1.02	0.07	0.07	1.10	0.02	0.10
$\theta_2 \approx 2.3$	2.60	0.36	0.46	2.38	0.22	0.24	2.43	0.14	0.19

表1 基于 *200* 次吉布斯扰动格点模拟的估计值的均值、标准差和均方根误差（*RMSE*）。该模拟采用 *Strauss* 相互作用和高斯移动，并在 $[-\ell,\ell]^2$ 上针对 $\ell = 8,12,16$ 进行观测。

对于每组参数构型，模拟生成200个点模式，并使用带边界修正的 Takacs–Fiksel 程序对每次实现的参数进行估计

第4节中所述。由于边缘校正效应，当 $W_n = [-\ell, \ell]^2$ 且 $\ell = 8$，12、16 时，估计量平均分别使用100、256和576个点。如表1所示，Takacs-Fiksel估计量表现极佳。 θ_1 和 θ_2 的估计值均表现出非常小的偏差，且随着 ℓ 增加，标准差不断减小。因此，均方根误差也随 ℓ 减小，即使在最小的观测域 $[-8, 8]^2$下仍保持较低水平。一个值得注意的例外是参数 $\theta_1 = 4$、 $\theta_2 = -\log 0.1 \approx 2.3$和 $R = 1.5$，它们对应于前文所述的聚集状态，其中移动受到更严格的约束。在这种状态下，估计量表现较差：扩大观测窗口能够改善性能，但仍无法达到其他参数状态下的估计精度。该系统具有很强的刚性，粒子之间存在强烈的排斥力，同时粒子受到格点的强烈吸引。这些相互对抗的力之间的竞争可能解释了估计程序为何失效。还需要在更大的观测窗口上进行进一步测试，但由于生成点模式和执行优化的成本较高，这些测试在计算上代价昂贵。对于较弱的相互作用（即 $\theta_2 = -\log 0.9 \approx 0.11$），无论 θ_1 和 R如何，估计程序都始终可靠。在大多数参数状态下，均方根误差以与 $|W_n|^{-1/2}$一致的速率衰减。

附录A：定理1证明的辅助结果

在本节中，我们证明定理1的证明所需的辅助结果，即在假设($\mathcal{H}1$)-($\mathcal{H}4$) 与($\mathcal{H}5.1$)-($\mathcal{Q}1$)[1]或($\mathcal{H}5.2$)-($\mathcal{Q}2$)下， $P_{\mathcal{L}}(H, \mathbb{Q}) \neq \emptyset$。设$\Lambda_n = \mathcal{L} \cap [-n, n]^d$，我们将经验场 $\mathbb{P}_n$ 定义为概率测度

$$\overline{\mathbb{P}}_n := \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{i \in \Lambda_n} \widehat{\mathbb{P}}_n(\cdot - i)$$

其中 $\mathbb{P}_n = \bigotimes_{k \in \mathcal{L}} \mathbb{P}_{\Lambda_n + 2kn/|k|^\circ}$ 经验场在 $\mathcal{L}$中平移不变。我们的目标是证明经验场在局部拓扑下具有一个聚点。局部拓扑定义为最粗的拓扑，使得对任意柱事件（亦称局部事件） A，评价映射 $P \mapsto P(A)$ 连续。主要的紧性工具是比熵。设 P为Ω上的一个平移不变概率测度，

$$I_s(P) = \lim_{\Lambda \to \mathcal{L}} \frac{1}{|\Lambda|} I(P_{|\Lambda} | \mathbb{Q}^{\otimes \Lambda}) \tag{A.1}$$

其中 $I(\cdot|\cdot)$ 表示 Kullback-Leibler散度，并且由于次可加性论证，该极限存在。下述命题给出了特定熵的性质，以及证明晶格系统的概率测度具有紧性的论证。

命题 A.1（ [20]中的定理 15.12 和命题 15.14）。
对于 Ω 上在 $\mathcal{L}$ 的任意平移下不变的任意概率测度 $P\,\Omega$，我们将 P 的特定熵定义为：

$$I_s(P) = \sup_{\Lambda \subset \mathcal{L}, |\Lambda| < \infty} \frac{1}{|\Lambda|} I(P_{|\Lambda} | Q^{\otimes \Lambda}). \tag{A.2}$$

因此，特定熵与有限子格序列 $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 无关。此外，特定熵 I_s 是仿射的，其等值集 $\{I_s(\cdot) \leq C\}$ 在局部拓扑下是紧致且序列紧致的。

现在我们证明经验场的特定熵是有界的，以便给出格点上吉布斯测度的一个候选。

命题 A.2. 经验场 $\left(\mathbb{P}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 在局部拓扑中有一个聚点，我们将其记为 $\mathbb{P}_\infty$。

证明。由于特定熵是仿射的，我们有

$$I_s(\overline{\mathbb{P}}_n)=\frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{i\in\Lambda_n} I_s(\widehat{\mathbb{P}}_n(\cdot-i)).$$

此外，由于特定熵不依赖于子格序列，因此对于 $i\in\Lambda_n$，我们选择序列 $\left(\Lambda_{(2k-1)n}+i\right)_{k\geq 1}$，于是

$$\begin{aligned} I_s(\widehat{\mathbb{P}}_n(\cdot-i)) &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{(2k-1)^d|\Lambda_n|} I(\widehat{\mathbb{P}}_{n|\Lambda_{(2k-1)n}}|\mathbb{Q}^{\otimes\Lambda_{(2k-1)n}}) \\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{(2k-1)^d|\Lambda_n|}(2k-1)^d I(\mathbb{P}_n|\mathbb{Q}^{\otimes\Lambda_n}) \\ &= \frac{1}{|\Lambda_n|} I(\mathbb{P}_n|\mathbb{Q}^{\otimes\Lambda_n}). \end{aligned}$$

综合以上结果，我们得到

$$I_s(\overline{\mathbb{P}}_n)=\frac{1}{|\Lambda_n|} I(\mathbb{P}_n|\mathbb{Q}^{\otimes\Lambda_n}).$$

最后，根据 ($\mathcal{H}1$) 和 ($\mathcal{H}2$)，对于 $\mathbf{X}\sim\mathbb{P}_n$，我们有

$$\begin{aligned} I(\mathbb{P}_n|\mathbb{Q}^{\otimes\Lambda_n}) &= -\log Z_{\Lambda_n} - \mathbb{E}(\tilde{H}(\mathbf{X})) \\ &\leq (A+B-\log\mathbb{Q}(B(0,\varepsilon)))|\Lambda_n|. \end{aligned}$$

因此，对于所有 $n\in\mathbb{N}$

$$I_s(\overline{\mathbb{P}}_n)\leq A+B-\log\mathbb{Q}(B(0,\varepsilon)), \tag{A.3}$$

因此，根据命题 A.1，$(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有一个聚点。 □

函数 f 是局部的，如果存在有限的 $\Delta\subset\mathcal{L}$，使得对任意$\mathbf{x}\in\mathcal{Q}^{\mathcal{L}}$，$f(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}_\Delta)$。此外，$f$ 是驯服的，如果对 $\tilde{\mathbf{X}}_\Delta\sim\mathbb{Q}^{\otimes\Delta}$有 $\mathbb{E}(e^{f(\mathbf{X}_\Delta)})<\infty$。

引理 A.3. 设 f 是有限 $\Delta\subset\mathcal{L}$ 上的局部驯服函数，则对Ω上的任意平稳概率测度 P，以及$\mathbf{X}\sim P$与 $\tilde{\mathbf{X}}_\Delta\sim\mathbb{Q}^{\otimes\Delta}$，我们有

$$\mathbb{E}[f(\mathbf{X})]\leq I_s(P)|\Delta|+\log\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{f(\tilde{\mathbf{X}}_\Delta)}\right].$$

证明。由詹森不等式，我们有

$$\mathbb{E}_P[f(\mathbf{X})]=\mathbb{E}[f(\mathbf{X}_\Delta)]\leq I(P_{|\Delta}|\mathbb{Q}^{\otimes\Delta})+\log\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{f(\tilde{\mathbf{X}}_\Delta)}\right]. \tag{A.4}$$

另一方面，我们知道

$$I_s(P)=\sup_{\Lambda\subset\mathcal{L},|\Lambda|<\infty}\frac{1}{|\Lambda|} I(P_{|\Lambda}|\mathbb{Q}^{\otimes\Lambda}).$$

因此，我们有

$$I(P_{|\Delta}|\mathbb{Q}^{\otimes\Delta})\leq I_s(P)|\Delta|. \tag{A.5}$$

结合（A.4）和（A.5，即可得到所需的不等式。 □

附录 B：定理1

证明。我们将证明分为两部分。前两项证明测度 $\mathbb{P}_\infty$ 在两组不同的假设下满足 DLR 方程。

↪第A 部分 $\mathbb{P}_\infty$ 在假设 DLR 方程 $(\mathcal{H}1)$-$(\mathcal{H}4)$ 和$(\mathcal{H}5.1)$-$(\mathcal{Q}1)$[1]。设 f 是一个有界局部函数，$\Delta \subset \mathcal{L}$ 有限且 $\epsilon > 0$。我们将证明分为 7 个步骤。

步骤 *1*。 由于 f 是一个局部有界函数，且在局部拓扑下收敛，因此对于足够大的 n

$$\left| \int f \mathrm{d}\mathbb{P}_\infty - \int f \mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n \right| \leq \epsilon \|f\|_\infty . \tag{B.1}$$

Step 2. 我们定义 $B_k = [-k,k]^d \oplus \Delta$、 $\Delta_k = \Lambda_k \cap \mathcal{L}$，并考虑以下事件 s

$$\begin{aligned} I_{\Delta,l} &:= \{\exists i \in \Delta, i + x_i \in B_l^c\}, \\ T_{\Delta,k,l,R} &= \{\exists j \in \Delta_k^c, j + x_j \in B_{l+R}\}, \\ E_{k,l,R,\Delta} &= I_{\Delta,l} \cup T_{\Delta,k,l,R}. \end{aligned}$$

我们有

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \int f \mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n - \int f \mathbb{1}_{E^c_{k,l,R,\Delta}} \mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n \right| \leq \|f\|_\infty \epsilon. \tag{B.2}$$

利用如下事实：对于任意 $n \geq 1$，在 $\mathbb{P}_n$ 下$(X_i)_{i\in\mathcal{L}}$ 同分布，以及马尔可夫不等式

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{P}}_n(E_{k,l,R,\Delta}) &\leq \sum_{i\in\Delta} \overline{\mathbb{P}}_n(i + X_i \in B_l^c) + \sum_{j\in\Delta_k} \overline{\mathbb{P}}_n(j + X_j \in B_{l+R}) \\ &\leq |\Delta| \overline{\mathbb{P}}_n(|X_0| \geq l) + |\Lambda_{l+R}| \overline{\mathbb{P}}_n(|X_0| \geq k - l - R) \\ &\leq \left(\frac{|\Delta|}{l} + \frac{|B_{l+R}|}{k-l-R} \right) \mathbb{E}(|X_0|). \end{aligned}$$

此外，利用引理 A.3 和假设 $(\mathcal{Q}1)$[1] 以及 (A.3），存在 $c > 0$ 使得对于任意 $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}[c|X_0|] \leq I_s(\overline{\mathbb{P}}_n) + \log \mathbb{E}[\mathrm{e}^{c|\tilde{X}|}] < \infty$$

˜对于 $X \sim \mathbb{Q}$。因此，存在 $C > 0$ 使得

$$\overline{\mathbb{P}}_n(E_{k,l,R,\Delta}) \leq C \left(\frac{|\Delta|}{l} + \frac{|B_{l+R}|}{k-l-R} \right). \tag{B.3}$$

因此，对于 k 和 l 足够大时，我们得到 (B.2)。

步骤 *3.* 当 n 足够大时，我们有：

$$\left| \int f \mathbb{1}_{E^c_{k,l,R,\Delta}} \mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n - \int \tilde{f}_{\Delta,l} \mathbb{1}_{T^c_{k,l,R,\Delta}} \mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n \right| \leq 2\epsilon \|f\|_\infty , \tag{B.4}$$

其中

$$\tilde{f}_{\Delta,l}(\mathbf{x}_{\Delta^c}) = \frac{1}{Z_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta^c})} \int f(\mathbf{x}'_\Delta \cup \mathbf{x}_{\Delta^c}) \mathbb{1}_{I^c_{l,\Delta}}(\mathbf{x}'_\Delta) \mathrm{e}^{-\tilde{H}_\Delta(\mathbf{x}'_\Delta \cup \mathbf{x}_{\Delta^c})} \mathbb{Q}^{\otimes\Delta}.$$

我们取 n 足够大，使得 $\Delta \subset \Lambda_n$，并定义 $\Lambda_n^* := \{i \in \Lambda_n, \Delta - i \subset \Lambda_n\}$。根据定义，我们有

$$\int f \mathbb{1}_{E^c_{k,l,R,\Delta}} \mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n = \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{i \in \Lambda_n} \int f \mathbb{1}_{E^c_{k,l,R,\Delta}}(\cdot + i) \mathrm{d}\widehat{\mathbb{P}}_n,$$

因此我们有

$$\left| \int f \mathbb{1}_{E^c_{k,l,R,\Delta}} \mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n - \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{i \in \Lambda_n^*} \int f \mathbb{1}_{E^c_{k,l,R,\Delta}}(\cdot + i) \mathrm{d}\widehat{\mathbb{P}}_n \right| \leq \frac{|\Lambda_n \setminus \Lambda_n^*|}{|\Lambda_n|} \|f\|_\infty .$$

我们考虑

$$\tilde{f}_{\Delta, E^c}(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta^c})} \int f \mathbb{1}_{E^c_{k,l,R,\Delta}}(\mathbf{x}_{\Delta^c} \cup \mathbf{x}'_\Delta) \mathrm{e}^{-H_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta^c} \cup \mathbf{x}'_\Delta)} \mathbb{Q}^{\otimes \Delta}$$

对于 $i \in \Lambda_n^*$，我们有

$$\int \tilde{f}_{\Delta, E^c}(\cdot + i) \mathrm{d}\widehat{\mathbb{P}}_n = \iint f \mathbb{1}_{E^c_{k,l,R,\Delta-i}}\left(\mathbf{x}_{(\Delta-i)^c} \cup \mathbf{x}'_{\Delta-i}\right) \frac{\mathrm{e}^{-\tilde{H}_{\Delta-i}\left(\mathbf{x}_{(\Delta-i)^c} \cup \mathbf{x}'_{\Delta-i}\right)}}{Z_{\Delta-i}\left(\mathbf{x}_{(\Delta-i)^c}\right)} \mathbb{Q}^{\otimes(\Delta-i)} \mathrm{d}\widehat{\mathbb{P}}_n.$$

由于 $\Delta - i \subset \Lambda_n$ 且 $\mathbb{P}_n$ 对 $\Delta + i$ 满足 DLR 方程，我们有

$$\int \tilde{f}_{\Delta, E^c}(\cdot + i) \mathrm{d}\widehat{\mathbb{P}}_n = \int f \mathbb{1}_{E^c_{k,l,R,\Delta}}(\cdot + i) \mathrm{d}\widehat{\mathbb{P}}_n$$

类似地，我们有

$$\left| \int \tilde{f}_{\Delta, E^c} \mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n - \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{i \in \Lambda_n^*} \int \tilde{f}_{\Delta, E^c}(\cdot + i) \mathrm{d}\widehat{\mathbb{P}}_n \right| \leq \frac{|\Lambda_n \setminus \Lambda_n^*|}{|\Lambda_n|} \|f\|_\infty .$$

最后，我们有 $\mathbb{1}_{E^c_{k,l,R,\Delta}} = \mathbb{1}_{I^c_{l,\Delta}} \mathbb{1}_{T^c_{k,l,R,\Delta}}$ 并且由于 $T^c_{k,l,R,\Delta}$ 是一个仅依赖于 Δ 之外构型的事件，我们有

$$\tilde{f}_{\Delta, E^c} = \tilde{f}_{\Delta, l} \mathbb{1}_{T^c_{k,l,R,\Delta}}.$$

因此，结合以上所有结果，我们得到（B.4），当 n 足够大时。

步骤 *4*。在这一步中，我们考虑如下

$$\widehat{f}_{\Delta, l}(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z_{\Delta, l}(\mathbf{x}_{\Delta^c})} \int f(\mathbf{x}'_\Delta \cup \mathbf{x}_{\Delta^c}) \mathbb{1}_{I^c_{l,\Delta}}(\mathbf{x}'_\Delta) \mathrm{e}^{-\tilde{H}_\Delta(\mathbf{x}'_\Delta \cup \mathbf{x}_{\Delta^c})} \mathbb{Q}^{\otimes \Delta}$$

其中

$$Z_{\Delta, l}(\mathbf{x}_{\Delta^c}) = \int \mathbb{1}_{I^c_{l,\Delta}}(\mathbf{x}'_\Delta) \mathrm{e}^{-\tilde{H}_\Delta(\mathbf{x}'_\Delta \cup \mathbf{x}_{\Delta^c})} \mathbb{Q}^{\otimes \Delta}.$$

当 k、l 和 n 足够大时，我们有：

$$\text{(B.5)} \quad \left| \int \tilde{f}_{\Delta, l}(\mathbf{x}_{\Delta^c}) \mathbb{1}_{T^c_{k,l,R,\Delta}}(\mathbf{x}_{\Delta^c_k}) \mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n - \int \widehat{f}_{\Delta, l}(\mathbf{x}_{\Delta^c}) \mathbb{1}_{T^c_{k,l,R,\Delta}}(\mathbf{x}_{\Delta^c_k}) \mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n \right| \leq 3\epsilon \|f\|_\infty .$$

由于归一化常数之差为

$$Z_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta^c}) - Z_{\Delta, l}(\mathbf{x}_{\Delta^c}) = \int \mathbb{1}_{I_{l,\Delta}}(\mathbf{x}'_\Delta) \mathrm{e}^{-\tilde{H}_\Delta(\mathbf{x}'_\Delta \cup \mathbf{x}_{\Delta^c})} \mathbb{Q}^{\otimes \Delta},$$

我们得到以下上界

$$\left|\int \tilde{f}_{\Delta,l}\mathbb{1}_{T^c_{k,l,R,\Delta}}\mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n-\int \widehat{f}_{\Delta,l}\mathbb{1}_{T^c_{k,l,R,\Delta}}\mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n\right|\le\|f\|_\infty\times \int\frac{1}{Z_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta^c})}\int\mathbb{1}_{I_{l,\Delta}}(\mathbf{x}'_\Delta)\mathrm{e}^{-\tilde{H}_\Delta(\mathbf{x}'_\Delta\cup\mathbf{x}_{\Delta^c})}\mathbb{Q}^{\otimes\Delta}\mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n$$

此外，对于 n 足够大时，我们可以对B.4应用 $f\equiv1$，并得到

$$\int\frac{1}{Z_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta^c})}\int\mathbb{1}_{I_{l,\Delta}}(\mathbf{x}'_\Delta)\mathrm{e}^{-\tilde{H}_\Delta(\mathbf{x}'_\Delta\cup\mathbf{x}_{\Delta^c})}\mathbb{Q}^{\otimes\Delta}\mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n\le2\epsilon+\overline{\mathbb{P}}_n(E_{k,l,R,\Delta}),$$

根据（B.3），我们知道，对于 k，l 足够大时，有:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\overline{\mathbb{P}}_n(E_{k,l,R,\Delta})\le\epsilon,$$

因此，我们有（B.5）。

步骤*5*。当 k、l 和 n 足够大时，我们有

$$\text{(B.6)}\quad\left|\int\widehat{f}_{\Delta,l}(\mathbf{x}_{\Delta^c})\mathbb{1}_{T^c_{k,l,R,\Delta}}(\mathbf{x}_{\Delta^c_k})\mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n-\int\widehat{f}_{\Delta,l}(\mathbf{x}_{\Delta^c})\mathbb{1}_{T^c_{k,l,R,\Delta}}(\mathbf{x}_{\Delta^c_k})\mathrm{d}\mathbb{P}_\infty\right|\le3\epsilon\|f\|_\infty.$$

我们可以指出，在事件 $T^c_{k,l,R,\Delta}$ 中，$\widehat{f}_{\Delta,l}$ 仅取决于$\Delta_k\setminus\Delta$ 中的构型，因为源自 Δ^c_k 的点距离过远，无法与来自Δ的点相互作用。因此，我们有

$$\begin{aligned}&\left|\int\widehat{f}_{\Delta,l}\mathbb{1}_{T^c_{k,l,R,\Delta}}\mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n-\int\widehat{f}_{\Delta,l}\mathbb{1}_{T^c_{k,l,R,\Delta}}\mathrm{d}P_\infty\right|\\&\quad\le\left|\int\widehat{f}_{\Delta,l}\mathbb{1}_{T^c_{k,l,R,\Delta}}(\mathbf{x}_{\Delta_k\setminus\Delta})\mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n-\int\widehat{f}_{\Delta,l}(\mathbf{x}_{\Delta_k\setminus\Delta})\mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n\right|\\&\qquad+\left|\int\widehat{f}_{\Delta,l}(\mathbf{x}_{\Delta_k\setminus\Delta})\mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n-\int\widehat{f}_{\Delta,l}(\mathbf{x}_{\Delta_k\setminus\Delta})\mathrm{d}\mathbb{P}_\infty\right|\\&\qquad+\left|\int\widehat{f}_{\Delta,l}(\mathbf{x}_{\Delta_k\setminus\Delta})\mathrm{d}\mathbb{P}_\infty-\int\widehat{f}_{\Delta,l}\mathbb{1}_{T^c_{k,l,R,\Delta}}\mathrm{d}\mathbb{P}_\infty\right|\\&\quad\le\|f\|_\infty\left(\overline{\mathbb{P}}_n(T_{k,l,R,\Delta})+\mathbb{P}_\infty(T_{k,l,R,\Delta})\right)\\&\qquad+\left|\int\widehat{f}_{\Delta,l}(\mathbf{x}_{\Delta_k\setminus\Delta})\mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n-\int\widehat{f}_{\Delta,l}(\mathbf{x}_{\Delta_k\setminus\Delta})\mathrm{d}\mathbb{P}_\infty\right|.\end{aligned}$$

使用与步骤 2 中相似的论证，可得存在一个常数 $C>0$，使得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\overline{\mathbb{P}}_n(T_{k,l,R,\Delta})\le\frac{C|B_{l+R}|}{k-l-R}.$$

因此，当 k 足够大时，我们有

$$\overline{\mathbb{P}}_n(T_{k,l,R,\Delta})+\mathbb{P}_\infty(T_{k,l,R,\Delta})\le2\epsilon.$$

一旦固定了 k，根据局部拓扑中的收敛性，当 n 足够大时，我们有

$$\left|\int\widehat{f}_{\Delta,l}(\mathbf{x}_{\Delta_k\setminus\Delta})\mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n-\int\widehat{f}_{\Delta,l}(\mathbf{x}_{\Delta_k\setminus\Delta})\mathrm{d}\mathbb{P}_\infty\right|\le\epsilon\|f\|_\infty.$$

步骤 *6.* 当 l 足够大时，我们有

$$\left|\int \widehat{f}_{\Delta,l}\mathbb{1}_{T^c_{k,l,R,\Delta}}\mathrm{d}\mathbb{P}_\infty - \int \tilde{f}_{\Delta,l}\mathrm{d}\mathbb{P}_\infty\right| \leq 2\epsilon\left\|f\right\|_\infty. \tag{B.7}$$

按照步骤 4 中的类似计算，我们证明

$$\left|\int \widehat{f}_{\Delta,l}\mathbb{1}_{T^c_{k,l,R,\Delta}}\mathrm{d}\mathbb{P}_\infty - \int \tilde{f}_{\Delta,l}\mathbb{1}_{T^c_{k,l,R,\Delta}}\mathrm{d}\mathbb{P}_\infty\right| \leq \left\|f\right\|_\infty \int\int \frac{\mathrm{e}^{-\tilde{H}_\Delta(\mathbf{x}'_\Delta\cup\mathbf{x}_{\Delta^c})}}{Z_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta^c})}\mathbb{1}_{I_{l,\Delta}}\mathbb{Q}^{\otimes\Delta}\mathrm{d}\mathbb{P}_\infty.$$

由控制收敛定理，当 l 足够大时，我们有

$$\int\int \frac{\mathrm{e}^{-\tilde{H}_\Delta(\mathbf{x}'_\Delta\cup\mathbf{x}_{\Delta^c})}}{Z_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta^c})}\mathbb{1}_{I_{l,\Delta}}\mathbb{Q}^{\otimes\Delta}\mathrm{d}\mathbb{P}_\infty \leq \epsilon.$$

此外，当 k 足够大时，我们有

$$\left|\int \tilde{f}_{\Delta,l}\mathbb{1}_{T^c_{k,l,R,\Delta}}\mathrm{d}\mathbb{P}_\infty - \int \tilde{f}_{\Delta,l}\mathrm{d}\mathbb{P}_\infty\right| \leq \left\|f\right\|_\infty \mathbb{P}_\infty(T_{k,l,R,\Delta}) \leq \epsilon\left\|f\right\|_\infty,$$

这就完成了证明（B.7）。

步骤 *7.* 最后，由控制收敛定理，当 l 足够大时，我们有

$$\left|\int \tilde{f}_{\Delta,l}\mathrm{d}\mathbb{P}_\infty - \int \tilde{f}_\Delta\mathrm{d}\mathbb{P}_\infty\right| \leq \epsilon\left\|f\right\|_\infty. \tag{B.8}$$

其中

$$\tilde{f}_\Delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta^c})}\int f(\mathbf{x}'_\Delta\cup\mathbf{x}_{\Delta^c})\mathrm{e}^{-\tilde{H}_\Delta(\mathbf{x}'_\Delta\cup\mathbf{x}_{\Delta^c})}\mathbb{Q}^{\otimes\Delta}.$$

结论。结合（B.1）-（B.8），我们得到

$$\left|\int f\mathrm{d}\mathbb{P}_\infty - \int \tilde{f}_\Delta\mathrm{d}\mathbb{P}_\infty\right| \leq 13\epsilon\left\|f\right\|_\infty.$$

由于该不等式对所有 $\epsilon>0$ 都成立，因此 P_∞ 满足针对有界局部函数的 DLR 方程。随后，通过单调类论证，可以将这些 DLR 方程推广到有界可测函数，从而完成第一部分。

↪第B 部分。$\mathbb{P}_\infty$ 在假设 DLR 方程成立的条件 （$\mathcal{H}1$）-（$\mathcal{H}4$）和（$\mathcal{H}5.2$）-（$\mathcal{Q}2$）。我们沿用第一部分中的相同记号和 7 个步骤，只详细说明不同之处。

步骤 *2.bis*。 当 n 足够大时，我们有

$$\left|\int f\mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n - \int \tilde{f}_\Delta\mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n\right| \leq 2\epsilon\left\|f\right\|_\infty. \tag{B.9}$$

此步骤沿用步骤 2 中的相同论证，只需将 $f\mathbb{1}_{E^c_{k,\ l,\ R,\ \Delta}}$ 替换为 f。步骤 *3.bis*。 当 $k>0$ 足够大时，我们有

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\int \tilde{f}_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta^c})\mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n - \int \tilde{f}_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta_k\setminus\Delta})\mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n\right| \leq 3\epsilon\left\|f\right\|_\infty. \tag{B.10}$$

根据定义，差等于

$$\int \tilde{f}_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta^c}) - \tilde{f}_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta_k\setminus\Delta})\mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n = \int\int f(\mathbf{x})\frac{\mathrm{e}^{-\tilde{H}_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta_k\setminus\Delta}\cup\mathbf{x}'_\Delta)}}{Z_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta_k\setminus\Delta})}\times$$
$$\left(\frac{\mathrm{e}^{-\sum_{i\in\Delta}\sum_{j\in\Delta^c_k}\phi(|i+x'_i-j-x_j|)}Z_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta_k\setminus\Delta}) - Z_\Delta(\mathbf{x}^c_\Delta)}{Z_\Delta(\mathbf{x}^c_\Delta)}\right)\mathrm{d}\mathbb{Q}^{\otimes\Delta}\mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n.$$

由于 $\mathcal{Q}$ 有界于 (Q2) 且根据 ϕ 在无穷远处的单调性，我们有，对于 k 足够大的，任意 x_i', $x_j \in \mathcal{Q}$

$$\sum_{i\in\Delta}\sum_{j\in\Delta_k^c}\left|\phi(|i+x_i'-j-x_j|)\right| \le \sum_{i\in\Delta}\sum_{j\in\Delta_k^c}\left|\phi(|i-j|-D)\right|,$$

其中 D =直径($\mathcal{Q}$)。根据假设 ($\mathcal{H}$5.2)，我们知道 ϕ 是可求和的，因此对于任意 $\eta>0$，都存在 k 足够大的值，使得

$$\sum_{i\in\Delta}\sum_{j\in\Delta_k^c}\left|\phi(|i+x_i'-j-x_j|)\right| \le \eta.$$

因此，当 k 足够大时，我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\int \tilde{f}_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta^c})\mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n - \tilde{f}_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta_k\setminus\Delta})\mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n\right| \\
&\le \|f\|_\infty \int\int \frac{\mathrm{e}^{-\tilde{H}_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta_k\setminus\Delta}\cup\mathbf{x}'_\Delta)}}{Z_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta_k\setminus\Delta})}\times \\
&\qquad\left(\left|\frac{(\mathrm{e}^\eta-1)Z_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta_k\setminus\Delta})}{Z_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta^c})}\right| + \left|\frac{Z_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta_k\setminus\Delta})-Z_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta^c})}{Z_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta^c})}\right|\right)\mathrm{d}\mathbb{Q}^{\otimes\Delta}\mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n \\
&\le \|f\|_\infty \int\left(\left|\frac{(\mathrm{e}^\eta-1)Z_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta_k\setminus\Delta})}{Z_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta^c})}\right| + \left|\frac{Z_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta_k\setminus\Delta})-Z_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta^c})}{Z_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta^c})}\right|\right)\mathrm{d}\mathbb{Q}^{\otimes\Delta}\mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n.
\end{aligned}$$

此外，当 k 足够大时，我们有，

$$\begin{aligned}
Z_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta_k\setminus\Delta}) &= \int \mathrm{e}^{-\tilde{H}_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta^c}\cup\mathbf{x}'_\Delta)+\sum_{i\in\Delta}\sum_{j\in\Delta_k^c}\phi(|i+x_i'-j-x_j|)}\mathrm{d}\mathbb{Q}^{\otimes\Delta} \\
&\le \mathrm{e}^\eta Z_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta^c}),
\end{aligned}$$

因此

$$\left|\int \tilde{f}_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta^c})\mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n - \tilde{f}_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta_k\setminus\Delta})\mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n\right| \le \|f\|_\infty(\mathrm{e}^\eta-1)(1+\mathrm{e}^\eta).$$

因此，选择 $\eta>0$ 足够小且 k 足够大，我们便得到 (B.10)。

步骤 ***4.bis.*** 对于任意固定的 k，根据局部拓扑中的收敛性，当 n 足够大时，我们有

$$\left|\int \tilde{f}_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta_k\setminus\Delta})\mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_n - \int \tilde{f}_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta_k\setminus\Delta})\mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_\infty\right| \le \epsilon\|f\|_\infty. \tag{B.11}$$

步骤*5.bis.* 沿用步骤 3.bis 中的相同论证，当 k 足够大时，我们有

$$\left|\int \tilde{f}_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta^c})\mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_\infty - \int \tilde{f}_\Delta(\mathbf{x}_{\Delta_k\setminus\Delta})\mathrm{d}\overline{\mathbb{P}}_\infty\right| \le 3\epsilon\|f\|_\infty. \tag{B.12}$$

结论。 结合 (B.1)、(B.9)、(B.10)、(B.11) 和 (B.12)，我们有

$$\left|\int f\mathrm{d}\mathbb{P}_\infty - \int \tilde{f}_\Delta\mathrm{d}\mathbb{P}_\infty\right| \le 10\epsilon\|f\|_\infty$$

并且我们以与第一部分相同的方式得出结论。

↪ C 部分。 $\mathbf{\Gamma}$ 与 $\mathbf{\Gamma}\,|\,U=u$的平稳性。A-B 部分证明了 $\mathcal{G}_\mathcal{L}(H,\mathbb{Q})\neq\emptyset$，因此我们有$P_\mathcal{L}(H,\mathbb{Q})\neq\emptyset$。剩下只需证明吉布斯扰动格点 $\mathbf{\Gamma}$ 是一个平稳点过程。我们从第一个观察开始，根据定义

对 $\mathbb{P}\in\mathcal{G}_{\mathcal{L}}(H,\mathbb{Q})$ 以及$\mathbf{X}\sim\mathbb{P}$，$\mathbf{X}$ 的分布是平移不变的，因此对所有$i\in\mathcal{L}$、 $X_i\overset{d}{=}X_0$。我们考虑 $W\subset\mathbb{R}^d$ 有界，由于$(X_i)_{i\in\mathcal{L}}$ 是同分布的，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\#(\mathbf{\Gamma}\cap W)]&=\sum_{i\in\mathcal{L}}\mathrm{P}(i+X_i+U\in W)\\&\le\sum_{i\in\mathcal{L}}\mathrm{P}(X_i\in(W\oplus\mathcal{D})-i)\\&\le\sum_{i\in\mathcal{L}}\mathrm{P}(X_0\in(W\oplus\mathcal{D})-i)\\&\le|W\oplus\mathcal{D}|.\end{aligned}$$

由于 $\mathbb{E}(\#\mathbf{\Gamma}\cap W)$ 有限，因此几乎必然有 $\#\mathbf{\Gamma}\cap W$ 有限，故 $\mathbf{\Gamma}$ 几乎必然局部有限。现在考虑 $t\in\mathbb{R}^d$，则存在唯一的 $k\in\mathcal{L}$ 和 $V\in\mathcal{D}$，使得$t+U=k+V$，并且我们知道 $V\sim\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$。因此，对于 $\mathcal{C}$ 上的任意有界可测函数f，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[f(\mathbf{\Gamma}+t)\right]&=\mathbb{E}\left[f(\mathbf{\Gamma}(\mathbf{X},t+U))\right]\\&=\mathbb{E}\left[f(\mathbf{\Gamma}(\mathbf{X},k+V))\right]\\&=\mathbb{E}\left[f(\mathbf{\Gamma}(\mathbf{X},V))\right]=\mathbb{E}\left[f(\mathbf{\Gamma})\right].\end{aligned}$$

因此，对于任意 $t\in\mathbb{R}^d$，我们有 $\mathbf{\Gamma}=\mathbf{\Gamma}+t$。由于 $\mathbf{\Gamma}$ 几乎必然局部有限，且其分布在 $\mathbb{R}^d$ 的平移下不变，因此 $\mathbf{\Gamma}$ 是平稳点过程。最后，对于任意 $u\in\mathcal{D}$和 $k\in\mathcal{L}$，我们还有

$$\mathbb{E}_u\left[f(\mathbf{\Gamma}+k)\right]=\mathbb{E}_u\left[f(\mathbf{\Gamma}(\mathbf{X},k+u))\right]=\mathbb{E}_u\left[f(\mathbf{\Gamma}(\mathbf{X},u))\right]=\mathbb{E}_u\left[f(\mathbf{\Gamma})\right].$$

因此，对于任意 $u\in\mathcal{D}$， $\mathbf{\Gamma}\mid U=u$ 的分布在 $\mathcal{L}$ 的任意元素所产生的平移下不变。□

APPENDIX C: PROOF OF PROPOSITION 3.6

证明。 (i) 令 $\mathbb{P}\in\mathcal{L}(H,\mathbb{Q})$。根据引理 A.3，我们有

$$\mathbb{E}[|X_0|^d]\le c\left(I_s(\mathbb{P})+\log\mathbb{E}[\mathrm{e}^{c|X|^d}]\right)\tag{C.1}$$

对于 $X\sim\mathbb{Q}$。目前尚不清楚对于任意 $\mathbb{P}\in P\mathcal{L}(H,\mathbb{Q})$， $I_s(\mathbb{P})<\infty$。不过，由（A.3）可知，至少存在一个具有有限特定熵的测度 $\mathbb{P}_\infty$。因此， $\mathbf{\Gamma}\sim\mathbb{P}_\infty$ 是超均匀的。

(ii) 根据 DLR 方程，对于任意 $\mathbb{P}\in P\mathcal{L}(H,\mathbb{Q})$，我们有

$$\mathbb{E}[|X_0|^d]=\mathbb{E}\left[\int|x|^d\frac{\mathrm{e}^{-h(x+U,\mathbf{\Gamma}_{0^c})}}{Z_0(\mathbf{\Gamma}_{0^c})}\mathbb{Q}(\mathrm{d}x)\right]$$

其中 $\mathbf{\Gamma}_{0^c}=\{i+X_i+U,i\in\mathcal{L}\setminus\{0\}\}$。在假设($\mathcal{H}$5.3)下，存在 $M\ge0$使得 $|h|\le M$，因此我们有

$$\mathbb{E}[|X_0|^d]\le\mathrm{e}^{2M}\mathbb{E}[|X|^d]<\infty$$

对于 $X\sim\mathbb{Q}$。□

附录 D：DLR 型方程相关结果的证明

本附录重点证明命题3.7-3.9。

D.1. 命题3.7的证明。

证明。命题 3.7(i) 直接将（3.8）对所有格点求和即可得到。陈述 (ii) 则由 $\mathbf{\Gamma} \mid U = u$ 的平稳性以及 f的平移不变性推出。 □

D.2. 命题3.8的证明。

证明。该结果是将命题3.7 应用两次而得到的。 □

D.3. 命题3.9的证明。

证明。设 $u \in \mathcal{D}$ 与 $i \in \mathcal{L}_u$。由（3.8）可得

$$\mathbb{E}_u\left[\nabla \check{f}(i+X_i, \mathbf{\Gamma}_{i^c})\right] = \mathbb{E}_u\left[\frac{1}{Z_i(\mathbf{\Gamma}_{i^c})}\int_{\mathcal{Q}} \nabla \check{f}(i+x, \mathbf{\Gamma}_{i^c})\Lambda(i,x,\mathbf{\Gamma}_{i^c})\mathrm{d}x\right].$$

对右侧项进行分部积分后，我们得到

$$\mathbb{E}_u\left[\nabla \check{f}(i+X_i, \mathbf{\Gamma}_{i^c})\right] = \mathbb{E}_u\left[\frac{1}{Z_i(\mathbf{\Gamma}_{i^c})}\oint_{\partial\mathcal{Q}} \check{f}(i+x, \mathbf{\Gamma}_{i^c})\mathrm{e}^{-h(i+x,\mathbf{\Gamma}_{i^c})-q(x)}\mathrm{d}x\right]$$

$$+\mathbb{E}_u\left[\frac{1}{Z_i(\mathbf{\Gamma}_{i^c})}\int_{\mathcal{Q}} \check{f}(i+x, \mathbf{\Gamma}_{i^c})(\nabla h(i+x, \mathbf{\Gamma}_{i^c}) + \nabla q(x))\mathrm{e}^{-h(i+x,\mathbf{\Gamma}_{i^c})-q(x)}\mathrm{d}x\right].$$

由于 $\check{f}$属于 $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}(H, \mathbb{Q}, \mathcal{L}_u)$，前一个方程的第一项等于 0。然后，对第二项应用 DLR 方程，我们得到

$$\mathbb{E}_u\left[\nabla \check{f}(i+X_i, \mathbf{\Gamma}_{i^c})\right] = \mathbb{E}_u\left[\check{f}(i+X_i, \mathbf{\Gamma}_{i^c})(\nabla h(i+X_i, \mathbf{\Gamma}_{i^c}) + \nabla q(X_i))\right]$$

对 $\mathcal{L}_u$ 的所有格点求和，并应用富比尼定理（由（3.14）保证其适用），即可证明该结果。 □

附录 E：定理 2 的证明

该结果的证明主要基于 [29], 得到的以下遍历定理。为确保内容自洽，我们在此重述该定理。

定理 4（遍历定理 [29]）。设 $\mathcal{L}$ 为一个满秩格点， $\mathbb{P}$ 为 $\mathcal{C}$上的一个遍历测度。设 F_W为一族以有界集合 $W \in \mathbb{R}^d$为索引的可测函数，它们是可加的，即 $F_{W\cup W'} = F_W + F_{W'} - F_{W\cap W'}$；在 $\mathcal{L}$上平移不变，即 $F_W(\boldsymbol{\gamma}) = F_{W+i}(\boldsymbol{\gamma}+i)$ 对任意 $i \in \mathcal{L}$成立；且可积，即 $\mathbb{E}[|F_{[0,1]^d}|] < \infty$。那么，对于 $\mathbb{P}$-几乎处处的 $\boldsymbol{\gamma}$，有

$$\lim_{n\to\infty} |W_n|^{-1} F_{W_n}(\boldsymbol{\gamma}) = \mathbb{E}[|F_{[0,1]^d}] \tag{E.1}$$

*whe*关于 W_n，这是一个由 $\mathbb{R}^d$ 的正则有界区域组成的序列，满足当 $n \to \infty$时， $W_n \to \mathbb{R}^d$.

证明。 (i) 设 $u \in \mathcal{D}$。由于平稳测度可分解为遍历测度的混合（参见 [30], ），且根据定理 1，只需在假设定理 2 的

即 $\mathbb{P}_u$ 是遍历的。我们引入以下随机变量。

$$A_{1,W_n} = \sum_{i\in\mathcal{L}_U} \mathbb{1}(i+X_i \in W_n \ominus R) f(i, X_i, \mathbf{\Gamma}_{i^c}; \theta)$$

$$A_{2,W_n} = \sum_{i\in\mathcal{L}_U} \mathbb{1}(i+X_i \in W_n \ominus R, X_i \in \underline{M}_n, i \in (W_n \ominus (m_n+R))^c) f(i, X_i, \mathbf{\Gamma}_{i^c}; \theta)$$

$$A_{3,W_n} = \sum_{i\in\mathcal{L}_U} \mathbb{1}(i+X_i \in W_n \ominus R, X_i \in \overline{M}_n, i \in (W_n \ominus (m_n+R))^c) f(i, X_i, \mathbf{\Gamma}_{i^c}; \theta)$$

and

$$\widetilde{B}_{1,W_n} = \sum_{i\in\mathcal{L}_U} \int_{\mathcal{Q}} \mathbb{1}(i \in W_n \ominus (m_n+R) f(i, x, \mathbf{\Gamma}_{i^c}; \theta) \Lambda(i, x, \mathbf{\Gamma}_{i^c}; \theta) \mathrm{d}x$$

$$\widetilde{B}_{2,W_n} = \sum_{i\in\mathcal{L}_U} \int_{\mathcal{Q}} \mathbb{1}(i \in W_n \ominus (m_n+R), x \in \underline{M_n}, i+x \in (W_n \ominus R)^c) \times f(i, x, \mathbf{\Gamma}_{i^c}; \theta) \Lambda(i, x, \mathbf{\Gamma}_{i^c}; \theta) \mathrm{d}x$$

$$\widetilde{B}_{3,W_n} = \sum_{i\in\mathcal{L}_U} \int_{\mathcal{Q}} \mathbb{1}(i \in W_n \ominus (m_n+R), x \in \overline{M_n}, i+x \in (W_n \ominus R)^c) \times f(i, x, \mathbf{\Gamma}_{i^c}; \theta) \Lambda(i, x, \mathbf{\Gamma}_{i^c}; \theta) \mathrm{d}x$$

其中，对于序列 $(m_n)_n$ 定义于 (*M*1)，令 $M_n = \{x \in \overline{\mathcal{Q}} : \ |x| \geq m_n\}$ 且 $M_n = \mathcal{Q} \setminus M_{n^\circ}$ 稍微简化一下记号，可以发现

$$\begin{aligned}
A_{W_n} &:= A_{W_n}(f, \mathbf{\Gamma}; \theta) = A_{1,W_n} - A_{2,W_n} - A_{3,W_n} \\
\widetilde{B}_{W_n} &:= \widetilde{B}_{W_n}(f, \mathbf{\Gamma}; \theta) = \widetilde{B}_{1,W_n} - \widetilde{B}_{2,W_n} - \widetilde{B}_{3,W_n} \\
\mathrm{DLR}_n &:= \mathrm{DLR}_n(f, \mathbf{\Gamma}; \theta) = A_{W_n} - B_{W_n} \\
\widetilde{\mathrm{DLR}}_n &:= \widetilde{\mathrm{DLR}}_n(f, \mathbf{\Gamma}; \theta) = A_{W_n} - \widetilde{B}_{W_n} \\
\mathrm{DLR}_n - \widetilde{\mathrm{DLR}}_n &= B_{W_n} - \widetilde{B}_{W_n}.
\end{aligned}$$

我们指出以下事实：对于任意 $i \in \mathcal{L}_U$ 和 $x \in \mathcal{Q}$,

(E.2) $$\mathbb{1}(i+X_i \in W_n \ominus R, X_i \in \underline{M}_n, i \in (W_n \ominus (m_n+R))^c) = 0$$

(E.3) $$\mathbb{1}(i \in W_n \ominus (m_n+R), x \in \underline{M_n}, i+x \in (W_n \ominus R)^c) = 0$$

(E.4) $$\mathbb{1}(i \in W_n \ominus (m_n+R), x \in \overline{M_n}, i+x \in (W_n \ominus R)^c) \leq \mathbb{1}(i \in W_n)$$

并且当 $n \to \infty$时

(E.5) $$|W_n| \sim |W_n \ominus R| \sim |W_n \ominus (m_n+R)| \text{ and } |W_n \oplus m_n \setminus W_n| \sim 2dm_n|W_n|^{1-1/d}.$$

~特别地，我们可以发现 $A_{2,\ W_n} = B_{2,\ W_n} = 0$。

定理 2(i) 的证明归结为证明：当 $n \to \infty$ 且给定 $U = u$ 时，几乎必然有 $|W_n|^{-1} A_{1,\ W_n}$ 和 $|W_n|^{-1} \widetilde{B}_{1,\ W_n}$ 分别趋于 (4.13)-(4.14)，并且当 $C_{W_n} = A_{3,\ W_n}$，$\widetilde{B}_{3,\ W_n}$ 和 $B_{W_n} - \widetilde{B}_{W_n}$ 时，$|W_n|^{-1} C_{W_n} \to 0$。

证明 $|W_n|^{-1}A_{1,\ W_n}$ 和 $|W_n|^{-1}\widetilde{B}_{1,\ W_n}$ 分别趋于 (4.13)-(4.14)。我们首先关注项 $A_{1,\ W_n}$。令 $\mathbf{\Gamma}$ 为由 $\mathbf{\Gamma}=\{(i+X_i,\ X_i)\ i\in\mathcal{L}_U\}$ 定义的标记点过程。根据对 $\mathbf{\Gamma}$ 和 f 的假设，可以将 $A_{1,\ W_n}$ 重写为

$$A_{1,W_n}=\sum_{z=(y,x)\in\tilde{\mathbf{\Gamma}}\cap((W_n\ominus R))\times\mathcal{Q})} f_1(x)f_2(y,\tilde{\mathbf{\Gamma}}\setminus z)=\sum_{z\in\tilde{\mathbf{\Gamma}}\cap(W_n\ominus R)\times\mathcal{Q})}\tilde{f}(z,\tilde{\mathbf{\Gamma}})$$

~其中我们注意到 f 关于 z的第一坐标是平移不变的。根据 A_1 假设，此外它是可加的，并且满足 $\mathbb{E}_u[|A_{1,[0,1]^d}|]<\infty$。现在我们可以应用定理4，从而得到 $\mathbb{P}_u$-几乎处处成立，当 $n\to\infty$，$|W_n|^{-1}A_{1,\ W_n}\to\mathbb{E}_u[A_{1,[0,1]^d}]$。最后，利用命题3.7（ii），注意到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_u[A_{1,[0,1]^d}]&=\sum_{i\in\mathcal{L}_u}\int_{\mathcal{Q}}\mathbb{1}_{[0,1]^d}(i+x)\mathbb{E}_u\left[f(i,x,\mathbf{\Gamma}_{i^c};\theta)\Lambda(i,x,\mathbf{\Gamma}_{i^c};\theta^\star)\right]\mathrm{d}x\\&=\sum_{i\in\mathcal{L}_u}\int_{\mathcal{Q}}\mathbb{1}_{[0,1]^d}(i+x)\mathbb{E}_u\left[f(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta)\Lambda(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta^\star)\right]\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathcal{Q}}\mathbb{E}_u\left[f(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta)\Lambda(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta^\star)\right]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

~ ~对于该项，$B_{1,\ W_n}$ 定理2 的假设允许我们将定理4 应用于$B_{1,\ W_n}$。因此，当 $n\to\infty$ 且 $\mathbb{P}_u$-几乎处处成立时。

$$|W_n|^{-1}\widetilde{B}_{1,W_n}\longrightarrow\mathbb{E}_u\left[\int_{\mathcal{Q}}f(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta)\Lambda(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta)\mathrm{d}x\right].$$

证明$|W_n|^{-1}A_{3,\ W_n}\overset{a.s.}{\to}0$。利用 $\mathbf{\Gamma}\,|\,U=u$的平稳性，（A）[f] 和（E.4），存在 $c>0$ 使得

$$\begin{aligned}|W_n|^{-1}\mathbb{E}_u|A_{3,W_n}|&\le c|W_n|^{-1}\#(\mathcal{L}_u\cap W_n)\int_{\overline{M}_n}\lambda_1(x;\theta^\star)\mathrm{d}x\\&\le c\,\mathbb{P}(X\ge m_n).\end{aligned}$$

对于 $X\sim\mathbb{Q}$，利用 ($\mathcal{M}1$) 和马尔可夫不等式，显然有 $\mathbb{P}(X\ge m_n)=O(e^{-m_n})=O(|W_n|^{-\beta})$。最后，结合马尔可夫不等式、($\mathcal{M}1$) 和博雷尔-坎泰利引理，即可完成这一步。

证明 $|W_n|^{-1}\widetilde{B}_{3,\ W_n}\overset{a.s.}{\to}0$。该结果的证明与前一个结果类似，不过现在我们将 (B)[f]、($\mathcal{M}1$) 以及 (E.3)-(E.5)结合起来。

证明 $|W_n|^{-1}(B_{W_n}-\widetilde{B}_{W_n})\overset{a.s.}{\to}0$。我们首先注意到

$$|B_{W_n}-\widetilde{B}_{W_n}|\le\int_{\mathcal{Q}}\int_{\mathcal{Q}}Z_n(i,x,y,\mathbf{\Gamma}_{i^c};\theta)(1-b_n(i,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{E.6}$$

with

$$Z_n(i,x,y,\mathbf{\Gamma}_{i^c};\theta)=b_n(i,x)|f(i,x,\mathbf{\Gamma}_{i^c};\theta)|\Lambda(i,x,\mathbf{\Gamma}_{i^c};\theta)\Lambda_n(i,y,\mathbf{\Gamma}_{i^c};\theta)$$

现在，我们将 (E.6) 的右端分解为 $\Delta_{M_n}+\Delta_{\underline{M}_n}$，其中 —

$$\begin{aligned}\Delta_{\underline{M}_n}=\int_{\mathcal{Q}}\int_{\mathcal{Q}}&Z_n(i,x,y,\mathbf{\Gamma}_{i^c};\theta)\times\\&\mathbb{1}(i\in W_n\ominus(m_n+R),y\in\underline{M_n},i+y\in(W_n\ominus R)^c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

$$\Delta_{\overline{M}_n} = \int_{\mathcal{Q}}\int_{\mathcal{Q}} Z_n(i,x,y,\mathbf{\Gamma}_{i^c};\theta)\times$$
$$\mathbb{1}(i \in W_n \ominus (m_n + R), y \in \overline{M_n}, i+y \in (W_n \ominus R)^c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

利用 (E.3)， $\Delta_{\underline{M}_n} = 0$。我们留给读者验证，利用 (B)[$f$] 并采用与前面相同的论证，可得

$$|W_n|^{-1}\mathbb{E}_u|\Delta_{\overline{M}_n}| = O(|W_n|^{-\beta})$$

由此可知，对 $|W_n|^{-1}\Delta_{M_n}$ 应用马尔可夫不等式和博雷尔-坎泰利引理即可推出该结果。

(ii) 最后，为证明 (4.17)，我们注意到，前面的推导还证明了

$$\Delta_{\underline{M}_n} = O_{\mathbb{P}_u}(\mathbb{E}_u|\Delta_{\overline{M}_n}|) = O_{\mathbb{P}_u}(|W_n|^{1-\beta}).$$

因此，$B_{W_n} - \widetilde{B}_{W_n} = O_{\mathbb{P}_u}(|W_n|^{1-\beta})$ 由此得到该结果。 □

APPENDIX F: PROOF OF THEOREM 3

F.1. 辅助结果。

引理 F.1. 假设*(M1)-(M3)*。对于 $\ell = 0,\ 1,\ 2, l = 1,\ \ldots\ldots,\ L$ 和 $\theta \in \Theta$，当 $n \to \infty$ 时，我们有 $\mathbb{P}_u$- 几乎处处成立

$$|W_n|^{-1}\mathrm{DLR}_n^{(\ell)}(f_l,\mathbf{\Gamma};\theta) \xrightarrow{a.s.} \mathcal{D}^{(\ell)}(f_l;\theta) \tag{F.1}$$

其中

$$\mathcal{D}^{(0)}(f_l;\theta) = \mathcal{D}(f_l;\theta) = \mathbb{E}_u\left[\int_{\mathcal{Q}} f_l(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta)\left(\Lambda(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta^\star) - \Lambda(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta)\right)\mathrm{d}x\right]$$

$$\mathcal{D}^{(1)}(f_l;\theta) = \mathbb{E}_u\left[\int_{\mathcal{Q}} f_l^{(1)}(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta)\left(\Lambda(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta^\star) - \Lambda(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta)\right)\mathrm{d}x\right]$$
$$- \mathbb{E}_u\left[\int_{\mathcal{Q}} f_l(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta)\Lambda^{(1)}(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta)\mathrm{d}x\right]$$

$$\mathcal{D}^{(2)}(f_l;\theta) = \mathbb{E}_u\left[\int_{\mathcal{Q}} f_l^{(2)}(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta)\left(\Lambda(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta^\star) - \Lambda(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta)\right)\mathrm{d}x\right]$$
$$- \mathbb{E}_u\left[\int_{\mathcal{Q}} f_l^{(1)}(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta)\Lambda^{(1)}(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta)^\top\mathrm{d}x\right]$$
$$- \mathbb{E}_u\left[\int_{\mathcal{Q}} \Lambda^{(1)}(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta)f_l^{(1)}(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta)^\top\mathrm{d}x\right]$$
$$- \mathbb{E}_u\left[\int_{\mathcal{Q}} f_l(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta)\Lambda^{(2)}(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c};\theta)^\top\mathrm{d}x\right].$$

特别地，我们有 $\mathcal{D}(f_l;\ \theta^\star) = 0$ 以及 $\mathcal{D}^{(1)}(f_l;\ \theta^\star) = -\mathcal{I}(f_l;\ \theta^\star)$，其中 $\mathcal{I}(f_l;\ \theta^\star)$ 由 (4.11)给出。

证明。该结果的证明是定理 2 在假设 (*M*1)-(*M*3). 的直接应用。

□

F.2. 定理3的证明。

证明。 (i) 根据命题 3.7，我们有：

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_u\left[\widetilde{\mathrm{DLR}}_n(f_l,\mathbf{\Gamma};\theta^\star)\right] &= \mathbb{E}_u\left[\widetilde{\mathrm{DLR}}_n(f_l;\theta^\star)^2\right]\\ &= \mathbb{E}\Big[\Big\{\sum_{i\in\mathcal{L}_U} b_n(i,X_i)f_l(i,X_i,\mathbf{\Gamma}_{i^c})\\ &\qquad -\int b_n(i,x)f_l(i,x,\mathbf{\Gamma}_{i^c})\Lambda(i,x,\mathbf{\Gamma}_{i^c})\mathrm{d}x\Big\}^2\Big]\end{aligned}$$

为简化记号，记 $f_l(i,x,\boldsymbol{\gamma}) = f_l(i,x,\boldsymbol{\gamma};\,\theta^\star)$、$\Lambda(i,x,\boldsymbol{\gamma}) = \Lambda(i,x,\boldsymbol{\gamma};\,\theta^\star)$ 以及 $\int = \int_{\mathcal{Q}^\circ}$ 利用命题 3.7 和 3.8，我们将条件方差分解为

$$\mathrm{Var}_u\left[\widetilde{\mathrm{DLR}}_n(f_l,\mathbf{\Gamma};\theta^\star)\right] = T_1 + T_2$$

其中

$$\begin{aligned}T_1 = \mathbb{E}_u\Big[&\sum_{i\in\mathcal{L}_U}\int b_n(i,x)f_l(i,x,\mathbf{\Gamma}_{i^c})^2\Lambda(i,x,\mathbf{\Gamma}_{i^c})\mathrm{d}x\\ &-\Big\{\int b_n(i,x)f_l(i,x,\mathbf{\Gamma}_{i^c})\Lambda(i,x,\mathbf{\Gamma}_{i^c})\mathrm{d}x\Big\}^2\Big]\end{aligned}$$

$$T_2 = \mathbb{E}_u\left[\sum_{i,j\in\mathcal{L}_U}^{\neq}\iint b_n(i,x)b_n(j,y)f_l(i,x,\mathbf{\Gamma}_{i^c})f_l(j,y,\mathbf{\Gamma}_{j^c})\Lambda(i,x,\mathbf{\Gamma}_{i^c})\Lambda(j,y,\mathbf{\Gamma}_{j^c})\Delta\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

and

$$\Delta = \Delta(i,x,j,y,\Gamma_{i^c},\Gamma_{j^c},\Gamma_{(ij)^c}) = \frac{\Lambda(i,x,\mathbf{\Gamma}_{(ij)^c})\Lambda(j,y,\mathbf{\Gamma}_{(ij)^c}\cup\{i+x\})}{\Lambda(i,x,\mathbf{\Gamma}_{i^c})\Lambda(j,y,\mathbf{\Gamma}_{j^c})} - 1.$$

关于项 T_1，利用 $\mathbf{\Gamma}\,|\,U=u$ 的平稳性、富比尼定理以及假设 ($\mathcal{M}3$)，我们得到如下简单的上界

$$T_1 \le \int \#(\mathcal{L}_u\cap(W_n\ominus(m_n+R)))\,\mathbb{E}_u\left[|f_l(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c})|\Lambda(0,x,\mathbf{\Gamma}_{0^c})\right]\mathrm{d}x = O(|W_n|). \tag{F.2}$$

考虑项 T_2。令 $a,b\in\mathbb{R}^d$ 和 $\boldsymbol{\gamma}\in\mathcal{C}$。根据 λ_2 的定义，我们有

$$\lambda_2(a\cup b,\boldsymbol{\gamma}) = \lambda_2(a,\boldsymbol{\gamma})\lambda_2(b,\boldsymbol{\gamma}\cup a) = \lambda_2(b,\boldsymbol{\gamma})\lambda_2(a,\boldsymbol{\gamma}\cup b)$$

可改写为

$$\frac{\lambda_2(a,\boldsymbol{\gamma})}{\lambda_2(a,\boldsymbol{\gamma}\cup b)} = \frac{\lambda_2(b,\boldsymbol{\gamma})}{\lambda_2(b,\boldsymbol{\gamma}\cup a)}. \tag{F.3}$$

利用这一点，我们将 $\Delta+1$ 改写为

$$\begin{aligned}\Delta+1 = A(i,x,X_i,j,y,X_j,\mathbf{\Gamma}_{i^c},\mathbf{\Gamma}_{j^c},\mathbf{\Gamma}_{(ij)^c})\times\\ \frac{\int\int\lambda(i,\tilde{x},\mathbf{\Gamma}_{i^c})\lambda(j,\tilde{y},\mathbf{\Gamma}_{j^c})\mathrm{d}\tilde{x}\mathrm{d}\tilde{y}}{\int\int\lambda(i,\tilde{x},\mathbf{\Gamma}_{i^c})\lambda(j,\tilde{y},\mathbf{\Gamma}_{j^c})A(i,\tilde{x},X_i,j,\tilde{y},X_j,\mathbf{\Gamma}_{i^c},\mathbf{\Gamma}_{j^c},\mathbf{\Gamma}_{(ij)^c})\mathrm{d}\tilde{x}\mathrm{d}\tilde{y}}\end{aligned}$$

其中，对于任意 $i,j\in\mathcal{L}_U, x,x',y,y'\in\mathcal{Q}$，根据 Λ 的定义，我们有

$$A(i,x,X_i,j,y,X_j,\mathbf{\Gamma}_{i^c},\mathbf{\Gamma}_{j^c},\mathbf{\Gamma}_{(ij)^c}) = \frac{\lambda_2(i+x,\mathbf{\Gamma}_{(ij)^c})}{\lambda_2(i+x,\mathbf{\Gamma}_{i^c})}\frac{\lambda_2(j+y,\mathbf{\Gamma}_{(ij)^c}\cup\{i+x\})}{\lambda_2(j+y,\mathbf{\Gamma}_{j^c})}$$

利用（F.3），该项可改写为

$$
\begin{aligned}
A(i,x,X_i,j,y,X_j,\mathbf{\Gamma}_{i^c},\mathbf{\Gamma}_{j^c},\mathbf{\Gamma}_{(ij)^c}) = &\frac{\lambda_2(j+X_j,\mathbf{\Gamma}_{(ij)^c}}{\lambda_2(j+X_j,\mathbf{\Gamma}_{(ij)^c})\cup\{i+x\})} \\
&\times \frac{\lambda_2(i+X_i,\mathbf{\Gamma}_{(ij)^c}\cup\{i+x\})}{\lambda_2(i+X_i,\mathbf{\Gamma}_{(ij)^c}\cup\{i+x\}\cup\{j+y\})} \\
&\times \frac{\lambda_2(j+y,\mathbf{\Gamma}_{j^c}\cup\{i+x\})}{\lambda_2(j+y,\mathbf{\Gamma}_{j^c})}.
\end{aligned} \tag{F.4}
$$

因此，我们将项 T_2 视为关于 i、X_i、j、X_j 和 $\mathbf{\Gamma}$ 的一般泛函，从而可以再次应用命题 3.8 。由此得到

$$
\begin{aligned}
T_2 = \mathbb{E}_u \sum_{i,j\in\mathcal{L}_U}^{\neq} \int\int\int\int & b_n(i,x)b_n(j,y)F_l(i,x,x',j,y,y',\mathbf{\Gamma}_{i^c},\mathbf{\Gamma}_{j^c},\mathbf{\Gamma}_{(ij)^c})\times \\
& \Delta(i,x,x',j,y,y',\mathbf{\Gamma}_{i^c},\mathbf{\Gamma}_{j^c},\mathbf{\Gamma}_{(ij)^c})\lambda_1(x)\lambda_1(x')\lambda_1(y)\lambda_1(y')\mathrm{d}x\mathrm{d}x'\mathrm{d}y\mathrm{d}y'
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
F_l(i,x,x',j,y,y',\mathbf{\Gamma}_{i^c},\mathbf{\Gamma}_{j^c},\mathbf{\Gamma}_{(ij)^c}) = & f_l(i,x,\mathbf{\Gamma}_{i^c})\lambda_2(i+x,\mathbf{\Gamma}_{i^c}) \\
& \times f_l(j,y,\mathbf{\Gamma}_{j^c})\lambda_2(j+y,\mathbf{\Gamma}_{j^c}) \\
& \times \lambda_2(i+x',\mathbf{\Gamma}_{(ij)^c})\lambda_2(j+y',\mathbf{\Gamma}_{(ij)^c}\cup\{i+x'\}).
\end{aligned}
$$

与项 T_1 类似，我们利用富比尼定理和平稳性 $\Gamma \mid U=u$ 推导得出

$$
\begin{aligned}
T_2 = & \#(\mathcal{L}_u\cap(W_n\ominus(m_n+R)))\times \\
& \mathbb{E}_u \sum_{j\in\mathcal{L}_U\setminus\{0\}} \int\int\int\int \mathbb{1}(x\in W_n\ominus R)b_n(j,y)F_l(0,x,x',j,y,y',\mathbf{\Gamma}_{0^c},\mathbf{\Gamma}_{j^c},\mathbf{\Gamma}_{(0j)^c})\times \\
& \Delta(0,x,x',j,y,y',\mathbf{\Gamma}_{0^c},\mathbf{\Gamma}_{j^c},\mathbf{\Gamma}_{(0j)^c})\lambda_1(x)\lambda_1(x')\lambda_1(y)\lambda_1(y')\mathrm{d}x\mathrm{d}x'\mathrm{d}y\mathrm{d}y' \\
= & \#(\mathcal{L}_u\cap W_n\ominus(m_n+R))\times(T_1'+T_2')
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
T_1' = & \mathbb{E}_u \sum_{j\in\mathcal{L}_U} \int\int\int\int \mathbb{1}(x\in W_n\ominus R)b_n(j,y) \\
& F_l(0,x,x',y,y',\mathbf{\Gamma}_{0^c},\mathbf{\Gamma}_{j^c},\mathbf{\Gamma}_{(0j)^c})\times R_1(0,x,x',j,y,y',\mathbf{\Gamma}_{0^c},\mathbf{\Gamma}_{j^c},\mathbf{\Gamma}_{(0j)^c})\times \\
& \left\{A(0,x,x',j,y,y',\mathbf{\Gamma}_{0^c},\mathbf{\Gamma}_{j^c},\mathbf{\Gamma}_{(0j)^c})-1\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}x'\mathrm{d}y\mathrm{d}y' \\
T_2' = & \mathbb{E}_u \sum_{j\in\mathcal{L}_U} \int\int\int\int\int\int \mathbb{1}(x\in W_n\ominus R)b_n(j,y) \\
& F_l(0,x,x',y,y',\mathbf{\Gamma}_{0^c},\mathbf{\Gamma}_{j^c},\mathbf{\Gamma}_{(0j)^c})\times R_2(0,\tilde{x},x',j,\tilde{y},y',\mathbf{\Gamma}_{0^c},\mathbf{\Gamma}_{j^c},\mathbf{\Gamma}_{(0j)^c})\times \\
& \left\{A(0,\tilde{x},x',j,\tilde{y},y',\mathbf{\Gamma}_{0^c},\mathbf{\Gamma}_{j^c},\mathbf{\Gamma}_{(0j)^c})-1\right\}\lambda_1(\tilde{x})\lambda_1(\tilde{y})\mathrm{d}x\mathrm{d}x'\mathrm{d}\tilde{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}y'\mathrm{d}\tilde{y}
\end{aligned}
$$

其中

$$
R_1 = \frac{\int\int\lambda(0,\tilde{x},\mathbf{\Gamma}_{0^c})\lambda(j,\tilde{y},\mathbf{\Gamma}_{j^c})\mathrm{d}\tilde{x}\mathrm{d}\tilde{y}}{\int\int\lambda(0,\tilde{x},\mathbf{\Gamma}_{0^c})\lambda(j,\tilde{y},\mathbf{\Gamma}_{j^c})A(0,\tilde{x},x',j,\tilde{y},y',\mathbf{\Gamma}_{0^c},\mathbf{\Gamma}_{j^c},\mathbf{\Gamma}_{(0j)^c})\mathrm{d}\tilde{x}\mathrm{d}\tilde{y}}
$$

and

$$R_2=\frac{\lambda_2(\tilde{x},\mathbf{\Gamma}_{0^c})\lambda_2(j+\tilde{y},\mathbf{\Gamma}_{j^c})}{\int\int\lambda(0,\tilde{x},\mathbf{\Gamma}_{0^c})\lambda(j,\tilde{y},\mathbf{\Gamma}_{j^c})A(0,\tilde{x},x',j,\tilde{y},y',\mathbf{\Gamma}_{0^c},\mathbf{\Gamma}_{j^c},\mathbf{\Gamma}_{(0j)^c})\mathrm{d}\tilde{x}\mathrm{d}\tilde{y}}.$$

现在我们终于可以利用有限程性质（$\mathcal{H}$5.1）了。事实上，对于任意$x,x',y,y'\in\mathcal{Q}$，以及任意 $j\in\mathcal{L}_U$，我们可以观察到 $A(0,x,x',j,y,y',\mathbf{\Gamma}_{0^c},\mathbf{\Gamma}_{j^c},\mathbf{\Gamma}_{(0j)^c})=1$，如果 $j\notin\mathcal{B}_R(x,x',y,y')$ 定义为

$$\mathcal{B}_R(x,x',y,y')=B(x-y',R)\cup B(x'-y,R)\cup B(x-y,R).$$

现在，令 $\mathcal{E}_u$ 由下式给出

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_u=\sup_{l=1,\ldots,L}\sup_{x,x',\tilde{x},y,y',\tilde{y}\in\mathcal{Q}}\sup_{j\in\mathcal{L}_u}\mathbb{E}_u\Big[\big|F_l(0,x,x',y,y',\mathbf{\Gamma}_{0^c},\mathbf{\Gamma}_{j^c},\mathbf{\Gamma}_{(0j)^c})\big|\Big\{\\ R_1(0,x,x',j,y,y',\mathbf{\Gamma}_{0^c},\mathbf{\Gamma}_{j^c},\mathbf{\Gamma}_{(0j)^c})\big|A(0,x,x',j,y,y',\mathbf{\Gamma}_{0^c},\mathbf{\Gamma}_{j^c},\mathbf{\Gamma}_{(0j)^c})-1\big|+\\ R_2(0,\tilde{x},x',j,\tilde{y},y',\mathbf{\Gamma}_{0^c},\mathbf{\Gamma}_{j^c},\mathbf{\Gamma}_{(0j)^c})\times\big|A(0,\tilde{x},x',j,\tilde{y},y',\mathbf{\Gamma}_{0^c},\mathbf{\Gamma}_{j^c},\mathbf{\Gamma}_{(0j)^c})-1\big|\Big\}\Big].\end{aligned}\tag{F.5}$$

现在，一方面我们有

$$\begin{aligned}T_1'&\le\mathcal{E}_u\int\int\int\int\sum_{j\in\mathcal{B}_R(x,x',y,y')}\lambda_1(x)\lambda_1(x')\lambda_1(y)\lambda_1(y')\mathrm{d}x\mathrm{d}x'\mathrm{d}y\mathrm{d}y'\\&\le3\mathcal{E}_u\int\int\Big\{\#(\mathcal{L}_u\cap B(x-y,R))\Big\}\lambda_1(x)\lambda_1(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\le3\mathcal{E}_u\left\{\sup_{x,y\in\mathcal{Q}}\#(\mathcal{L}_u\cap B(x-y,R))\right\}\int\int\lambda_1(x)\lambda_1(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=O(1).\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}T_2'\le\mathcal{E}_u\int\int\int\int\int\int\\\sum_{j\in\mathcal{B}_R(\tilde{x},x',\tilde{y},y')\cap(W_n\ominus(m_n+R))_{-y}}\lambda_1(x)\lambda_1(x')\lambda_1(\tilde{x})\lambda_1(y)\lambda_1(y')\lambda_1(\tilde{y})\mathrm{d}x\mathrm{d}x'\mathrm{d}\tilde{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}y'\mathrm{d}\tilde{y}\\\le3\mathcal{E}_u\left\{\sup_{x,y\in\mathcal{Q}}\#(\mathcal{L}_u\cap B(x-y,R))\right\}\int\int\lambda_1(x)\lambda_1(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=O(1)\end{aligned}$$

由此，回想（F.2），我们推得 $T_1+T_2=\#(\mathcal{L}_u\cap W_n\ominus(m_n+R))\times(O(1)+T_1'+T_2')=O(|W_n|)$，最终得到所需结果。

（ii）现在我们关注 $\hat{}\theta$ 的相合性。令 $k\in\mathbb{R}^p$，令 $u_n=cv_n^{1/2}|W_n|^{-1}$，对于某个 $c>0$，我们可以观察到，当 $n\to\infty$ 时 $u_n\to0$。再令 $\Delta_n(k)=\mathrm{TF}_n(\mathbf{f},\mathbf{\Gamma};\theta^\star)-\mathrm{TF}_n(\mathbf{f},\mathbf{\Gamma};\theta^\star+\hat{}u_nk)$。由于 $\theta=\mathrm{argmax}_\theta(-\mathrm{TF}_n(\mathbf{f},\mathbf{\Gamma};\theta))$，若对任意 $\varepsilon>0$，存在$K=K(U)$ 使得……，则结论得证

$$\mathrm{P}\left(\sup_{|k|=K}\Delta_n(k)>0\,|\,U=u\right)\le\varepsilon.$$

下面简化并引入一些记号。

$$e_n(\theta)=\mathrm{TF}_n^{(1)}(\mathbf{f},\boldsymbol{\gamma};\theta)=2\sum_{l=1}^{L}\mathrm{DLR}_n^{(1)}(f_l,\mathbf{\Gamma},\theta)\mathrm{DLR}_n(f_l,\mathbf{\Gamma},\theta)$$

$$\check{e}_n(\theta) = 2\sum_{l=1}^{L} \mathrm{DLR}_n^{(1)}(f_l, \mathbf{\Gamma}, \theta)\widetilde{\mathrm{DLR}}_n(f_l, \mathbf{\Gamma}, \theta)$$

$$\widetilde{e}_n(\theta) = 2|W_n|\sum_{l=1}^{L} \mathcal{I}_l(\theta^\star)\widetilde{\mathrm{DLR}}_n(f_l, \mathbf{\Gamma}, \theta)$$

在假设 ($\mathcal{M}2$)下，存在 $t \in (0,1)$，利用泰勒展开，我们可以将 $\Delta_n(k)$分解为

$$\begin{aligned}\Delta_n(k) =& -u_n k^\top \mathrm{TF}_n^{(1)}(\mathbf{f}, \mathbf{\Gamma}, \theta^\star + t u_n k)\\ =& -u_n k^\top e_n(\theta^\star + t u_n k)\\ =& T_1 + T_2 + T_3 + T_4\end{aligned}$$

其中，使用简记 $\theta_n^\star = \theta^\star + t u_n k$,

$$\begin{aligned}T_1 &= u_n k^\top \left(\check{e}_n(\theta_n^\star) - e_n(\theta_n^\star)\right)\\ T_2 &= u_n k^\top \left(\check{e}_n(\theta^\star) - \check{e}_n(\theta_n^\star)\right)\\ T_3 &= u_n k^\top \left(\widetilde{e}_n(\theta^\star) - \check{e}_n(\theta^\star)\right)\\ T_4 &= -u_n k^\top \widetilde{e}_n(\theta^\star)\end{aligned}$$

现在我们分别处理这四项。下文中，我们滥用记号，以 $o_{a.s.}$ 表示相对于 $\mathbb{P}_u$ 的几乎必然行为。

项 T_1。我们有

$$\check{e}_n(\theta_n^\star) - e_n(\theta_n^\star) = 2\sum_{l} \mathrm{DLR}_n^{(1)}(f_l, \mathbf{\Gamma}; \theta_n^\star)\left(\widetilde{\mathrm{DLR}}_n(f_l, \mathbf{\Gamma}; \theta_n^\star) - \mathrm{DLR}_n(f_l, \mathbf{\Gamma}; \theta_n^\star)\right)$$

令 $\theta \in \Theta$。另一方面，我们可以应用引理 F.1 并得到

$$\mathrm{DLR}_n^{(1)}(f_l, \mathbf{\Gamma}; \theta) = O_{a.s.}(|W_n|).$$

我们还可以在假设 ($\mathcal{M}1$)-($\mathcal{M}3$) 下应用定理 2(ii) 于 $f = f_l$，从而推出

$$\widetilde{\mathrm{DLR}}_n(f_l, \mathbf{\Gamma}; \theta_n^\star) - \mathrm{DLR}_n(f_l, \mathbf{\Gamma}; \theta_n^\star) = O_{\mathbb{P}_u}(|W_n|^{1-\beta}).$$

因此，对于任意 $\varepsilon > 0$，当 $n \to \infty$ 时，我们有

$$|W_n|^{-2+\beta-\varepsilon}\left(\check{e}_n(\theta_n^\star) - e_n(\theta_n^\star)\right) \xrightarrow{\mathbb{P}_u} 0$$

由此，我们根据连续映射定理可得

$$\begin{aligned}u_n\left(\check{e}_n(\theta_n^\star) - e_n(\theta_n^\star)\right) &= O_{\mathbb{P}_u}(u_n|W_n|^{2-\beta+\varepsilon})\\ &= O_{\mathbb{P}_u}\left(v_n\frac{|W_n|^{1-\beta+\varepsilon}}{\sqrt{v_n}}\right)\\ &= o_{\mathbb{P}_u}(v_n)\end{aligned}$$

对于某个较小的 $\varepsilon > 0$，且只要 $\beta > 1/2$。因此，$T_1 \le |k|T_1'$，其中 $T_1' = o_{\mathbb{P}_u}(v_n)$。

项 T_2。 在假设 ($\mathcal{M}2$)下，存在 $s\in(0,1)$ 使得

$$T_2=-tu_n^2\,k^\top\check{e}_n^{(1)}(\check{\theta}_n^\star)k$$

˘其中 $\theta_n^\star=\theta^\star+stku_n\to\theta^\star$ 当 $n\to\infty$ 时，且对于任意 $\theta\in\Theta$

$$\check{e}_n^{(1)}(\theta)=2\sum_{l=1}^{L}\Big\{\mathrm{DLR}_n^{(2)}(f_l,\mathbf{\Gamma};\theta)\widetilde{\mathrm{DLR}}_n(f_l,\mathbf{\Gamma};\theta)+\mathrm{DLR}_n^{(1)}(f_l,\mathbf{\Gamma};\theta)\widetilde{\mathrm{DLR}}_n^{(1)}(f_l,\mathbf{\Gamma};\theta)^\top\Big\}.$$

引理 F.1 和定理 2 表明，对于任意 $\theta\in\Theta$， $\mathbb{P}_u$几乎必然地，当 $n\to\infty$

$$|W_n|^{-2}\check{e}_n^{(1)}(\theta)\xrightarrow{a.s.}2\sum_{l=1}^{L}\Big\{\mathcal{D}^{(2)}(f_l;\theta)\mathcal{D}(f_l;\theta)+\mathcal{D}^{(1)}(f_l;\theta)\mathcal{D}^{(1)}(f_l;\theta)^\top\Big\}.$$

根据连续映射定理，我们推得，当 $n\to\infty$ 时， $\mathbb{P}_u$ 几乎必然成立

$$\begin{aligned}|W_n|^{-2}\check{e}_n^{(1)}(\check{\theta}_n^\star)&\xrightarrow{a.s.}2\sum_{l=1}^{L}\Big\{\mathcal{D}^{(2)}(f_l;\theta^\star)\mathcal{D}(f_l;\theta^\star)+\mathcal{D}^{(1)}(f_l;\theta^\star)\mathcal{D}^{(1)}(f_l;\theta^\star)^\top\Big\}\\&=:2\sum_{l=1}^{L}\mathcal{I}_l(\theta^\star)\mathcal{I}_l(\theta^\star)^\top=2\mathcal{I}(\theta^\star).\end{aligned}$$

最后，我们得到

$$\begin{aligned}T_2&=-tu_n^2|W_n|^2|k|^2\frac{k^\top(2\mathcal{I}(\theta^\star))k}{|k|^2}+\\&\qquad tu_n^2|W_n|^2k^\top\Big\{2\mathcal{I}(\theta^\star)-|W_n|^{-2}\check{e}_n^{(1)}(\check{\theta}_n^\star)\Big\}k\\&\le-\kappa|k|^2u_n^2|W_n|^2+|k|T_2'\end{aligned}$$

其中 $\kappa=2t\lambda_{\min}(\mathcal{I}(\theta^\star))>0$ 且

$$\begin{aligned}T_2'&=\sup_{k,\|k\|=K}|k|u_n^2|W_n|^2\Big|2\mathcal{I}(\theta^\star)-|W_n|^{-2}\check{e}_n^{(1)}(\check{\theta}_n^\star)\Big|\\&=o_{a.s.}(u_n^2|W_n|^2)=o_{a.s.}(v_n).\end{aligned}$$

定理 T_3。 我们可以观察到

$$\tilde{e}_n(\theta^\star)-\check{e}_n(\theta^\star)=2|W_n|\sum_{l=1}^{L}\Big\{|W_n|^{-1}\mathrm{DLR}_n^{(1)}(f_l,\mathbf{\Gamma};\theta^\star)-\mathcal{I}_l(\theta^\star)\Big\}\widetilde{\mathrm{DLR}}_n(f_l,\mathbf{\Gamma};\theta^\star).$$

在假设 ($\mathcal{M}1$)、($\mathcal{M}2$) 和($\mathcal{M}3$)下，可以应用引理F.1 和定理 3(i) 得出

$$|W_n|^{-1}\mathrm{DLR}_n^{(1)}(f_l,\mathbf{\Gamma};\theta^\star)-\mathcal{I}_l(\theta^\star)=o_{a.s.}(1)\quad\text{and}\quad\widetilde{\mathrm{DLR}}_n(f_l,\mathbf{\Gamma},\theta^\star)=O_{\mathbb{P}_u}(v_n^{1/2}).$$

由于 $u_n|W_n|=O(v_n^{1/2})$，我们推得 $T_3\le|k|T_3'$，其中 $T_3'=o_{\mathbb{P}_u}(v_n)$。

项 T_4。 根据定义和命题 3.7，随机变量 $\widetilde{e}_n(\theta^\star)$ 是中心化的。因此，我们特别地由定理 3(i) 和条件马尔可夫不等式得到，$\widetilde{e}_n(\theta^\star)=O_{\mathbb{P}_u}(\sqrt{\mathrm{Var}_u[\widetilde{e}_n(\theta^\star)]})=O_{\mathbb{P}_u}(v_n^{1/2})$

结论。我们有

$$\Delta_n(k) \le u_n|W_n|\,|k||\tilde{e}_n(\theta^\star)| - \kappa|k|^2u_n^2|W_n|^2 + |k|T$$

其中 $T = T_1' + T_2' + T_3'$。设 $u \in \mathcal{D}$，则有

$$\mathrm{P}\Big(\sup_{|k|=K}\Delta_n(k) > 0 \mid U = u\Big) \le \mathrm{P}\Big(|\tilde{e}_n(\theta^\star)| + u_n^{-1}|W_n|^{-1}T \ge u_n|W_n|\kappa K \mid U = u\Big).$$

现在，序列 u_n 的选取导致 $u_n|W_n| = cv_n^{1/2}$以及

$$|\tilde{e}_n(\theta^\star)| + u_n^{-1}|W_n|^{-1}T = O_{\mathbb{P}_u}(v_n^{1/2}) + v_n^{-1/2}o_{\mathbb{P}_u}(v_n) = O_{\mathbb{P}_u}(v_n^{1/2})$$

由此我们推出该结果。 □

致谢。 C. Renaud Chan 与 J.-F. Coeurjolly 的研究得到 Persyval-lab（ANR-11-61 LABX-0025-01）的支持。作者感谢 David Dereudre 富有洞见的讨论，并感谢 Rémy Drouilhet 在模拟算法实现方面提供的帮助。

参考文献

[1] ALMEIDA, M. P. 和 GIDAS, B. (1993)。一种利用完整或不完整数据估计马尔可夫随机场（MRF）参数的变分方法。《应用概率年刊》103–136。[2] BADDELEY, A. 和 DEREUDRE, D. (2013)。吉布斯点过程模型参数的变分估计量。《伯努利》19 905–930。[3] BADDELEY, A. 和 TURNER, R. (2000)。空间点模式的实用最大伪似然：（附讨论）。《澳大利亚与新西兰统计学杂志》42 283–322。[4] BESAG, J. (1974)。空间相互作用与晶格系统的统计分析。《皇家统计学会杂志：B辑（方法论）》36 192–225。[5] BUISINE, R., VANBESIEN, O., DEREUDRE, D., BURGNIES, L. 和 LHEURETTE, É. (2025)。超均匀和泊松点过程分布超表面在红外波长下的吸收特性。《应用物理学杂志》138。[6] COEURJOLLY, J.-F., DEREUDRE, D., DROUILHET, R. 和 LAVANCIER, F. (2012)。平稳标记吉布斯点过程的 Takacs–Fiksel 方法。《斯堪的纳维亚统计学杂志》39 416–443。[7] COEURJOLLY, J.-F. 和 DROUILHET, R. (2010)。包括 Lennard-Jones 模型在内的平稳吉布斯点过程最大伪似然估计量的渐近性质。《电子统计学杂志》4 677–706。[8] COEURJOLLY, J.-F. 和 LAVANCIER, F. (2017)。具有无限程相互作用的成对吉布斯点过程的参数估计。《伯努利》23 1299–1334。[9] DEREUDRE, D. (2019)。吉布斯点过程理论导论。载于《随机几何：现代研究前沿》181–229。施普林格。[10] DEREUDRE, D., DROUILHET, R. 和 GEORGII, H.-O. (2012)。具有依赖几何的相互作用的吉布斯型点过程的存在性。《概率论及相关领域》153 643–670。[11] DEREUDRE, D. 和 FLIMMEL, D. (2024)。具有短程相互作用的吉布斯点过程的非超均匀性。《应用概率学杂志》61 1380–1406。[12] DEREUDRE, D., FLIMMEL, D., HUESMANN, M. 和 LEBLÉ, T. (2024)。扰动格的（非）超均匀性。arXiv:2405.19881。[13] DEREUDRE, D. 和 LAVANCIER, F. (2011)。具有几何硬核相互作用的吉布斯德劳内–沃罗诺伊镶嵌的实用模拟与估计。《计算统计学与数据分析》55 498–519。[14] DEREUDRE, D., LAVANCIER, F. 和 HELISOVÁ, K. S. (2014)。当生核数量未知时，生核-粒子Quermass相互作用模型强度参数的估计。《斯堪的纳维亚统计学杂志》41 809–829。[15] FIKSEL, T. (1984)。标记和非标记吉布斯点过程的参数化成对势估计。《电子信息处理与控制论》20 270–278。[16] FIKSEL, T. (1988)。吉布斯点过程相互作用势的估计。《统计学》19 77–86。[17] FRIEDLI, S. 和 VELENIK, Y. (2017)。晶格系统的统计力学：具体的数学导论。剑桥大学出版社。

[18] GAETAN, C. 和 GUYON, X. (2010)。空间统计与建模，第90卷。施普林格。[19] GEORGII, H.-O. (1979)。正则吉布斯测度，数学讲义第760卷。施普林格，柏林、海德堡、纽约。[20] GEORGII, H.-O. (2011)。吉布斯测度与相变。德格鲁伊特，柏林、纽约。[21] HOUGH, J. B., KRISHNAPUR, M., PERES, Y. 等 (2009)。高斯解析函数的零点与行列式点过程，第51卷。美国数学会。[22] ILLIAN, J., PENTTINEN, A., STOYAN, H. 和 STOYAN, D. (2008)。空间点模式的统计分析与建模。约翰·威立父子公司。[23] JENSEN, J. L. 和 MØLLER, J. (1991)。空间点过程指数族模型的伪似然。《应用概率年刊》1 445–461。[24] KENDALL, W. S., VAN LIESHOUT, M. N. M. 和 BADDELEY, A. J. (1999)。Quermass相互作用过程：稳定性条件。《应用概率进展》31 315–342。[25] KIDERLEN, M. 和 HÖRIG, M. (2013)。具有任意紧粒子的I型和II型Matérn硬核模型。CSGB研究报告第05号，随机几何与高级生物成像中心，奥胡斯大学。[26] LACHIÈZE-REY, R. (2025)。超均匀随机测度、输运与刚性。arXiv:2510.18392。[27] LAVANCIER, F., MØLLER, J. 和 RUBAK, E. (2015)。行列式点过程模型与统计推断。皇家统计学会杂志B辑：统计方法学77 853–877。[28] MØLLER, J. 和 WAAGEPETERSEN, R. P. (2003)。空间点过程的统计推断与模拟。CRC出版社。[29] NGUYEN, X. X. 和 ZESSIN, H. (1977)。吉布斯过程的积分刻画与微分刻画。《应用概率进展》9 446–447。[30] PRESTON, C. (1976)。随机场，第534卷。施普林格。[31] RUELLE, D. (1970)。经典统计力学中的超稳定相互作用。《数学物理通讯》18 127–159。[32] STRAUSS, D. J. (1975)。一种聚类模型。生物计量学62 467–475。[33] TAKACS, R. (1986)。吉布斯型点过程成对势的估计量。统计学：理论与应用统计学杂志17 429–433。[34] TORQUATO, S. (2016)。超均匀性及其推广。物理评论E 94 022122。[35] TORQUATO, S. (2018)。物质的超均匀态。物理学报告745 1–95。[36] TORQUATO, S. 和 STILLINGER, F. H. (2003)。局部密度涨落、超均匀性与有序度量。物理评论E 68 041113。[37] VALKÓ, B. 和 VIRÁG, B. (2009)。随机矩阵的连续极限与布朗旋转木马。《数学发明》177 463–508。