arXiv:2603.01859v1 [cond-mat.str-el] 2 Mar 2026

编码在少数本征态中的局域运动积分

J. Pawłowski, [1] P. Łydżba, [1] 和 M. Mierzejewski[1]弗罗茨瓦夫科技大学技术基础问题学院理论物理研究所，*50-370* 波兰弗罗茨瓦夫

量子系统的许多性质仅凭其哈密顿量的一个本征态即可获得。例如，单个本征态可用于判断系统是可积还是混沌；若系统处于混沌状态，还可据此确定其热性质。我们聚焦于 XXZ 模型，表明可积性核心所在的局域运动积分也能通过少量本征态进行估算。此外，随着系统尺寸增大，所需的本征态数量会减少，因此在热力学极限下，只需使用全部本征态中一个趋于零的比例，便可获得运动积分。有趣的是，这一性质并不适用于仅由希尔伯特空间碎裂产生的运动积分；在折叠 XXZ 模型中，必须使用大多数本征态。这是目前已知的可积性与希尔伯特空间碎裂之间少数几个根本差异之一。

I. 引言

过去二十年来，人们投入了大量精力来理解封闭量子系统的非平衡动力学 [1–4]。特别是，局域可观测量在长时间后的期望值是否以及为何与标准吉布斯系综的预言相符。这种行为被称为热化，而表现出这种行为的系统通常被称为遍历的。

这些研究表明，在热力学极限下仅从一个本征态，或在有限系统中从少量本征态，就可以提取大量信息 [5]。例如，它可以用来识别遍历行为。单个本征态的二分纠缠熵量化了子系统之间的关联，在遍历系统中具有普适性。具体而言，其领头项与希尔伯特空间中随机态的相应项相符 [6] ，并在热力学极限下达到最大 [7–11]。唯一的限制是该本征态不能过于靠近谱的边缘 [12]。因此，它已被用于遍历性破缺相变的研究，以确定相变点 [13–17]。

此外，目前人们通过本征态热化假说（ETH）来理解热化。该假说指出，单个本征态本质上具有热性质 [18–20]。这意味着，单一本征态中局域可观测量的期望值与标准吉布斯系综的预测相符。因此，单一本征态不仅足以识别遍历性，也编码了遍历系统的平衡性质。

热化最受关注的例外是可积模型。在这里，我们聚焦于一个典型例子：XXZ 自旋链 [21–23]。可积模型具有大量局域运动积分（LIOM），它们是与哈密顿量对易的局域算符，因此其期望值在时间演化过程中守恒。可积模型不满足本征态热化假说（ETH），因此其本征态并非热态 [24–27]。然而，在这项工作中，我们证明，少数本征态就足以确定局域积分运动量，并且原则上可以构造广义吉布斯系综 [28–34]。重要的是，这一本征态数量不会随系统尺寸增加，这意味着它仅占希尔伯特空间维数中趋于零的比例。由此得出一个令人惊讶的结论：即使在可积模型中，少数本征态也能准确描述定态。识别局域积分运动量也为构建流体力学或广义流体力学提供了出发点 [35–46]。

最后，我们检验这一观察是否适用于呈现希尔伯特空间碎裂的系统 [47–54]。在这种遍历性破缺现象中，哈密顿量在适当的局域基下可分解为指数多个互不连通的块。每个块仅包含全部本征态中指数级小的一部分。人们也认为，这种现象有别于可积性。尽管已知某些碎片化系统支持局域积分运动量 [55]，但它们是否都支持仍不清楚。此外，一项开创性研究将希尔伯特空间碎裂与另一类守恒算符联系起来；这些算符并非严格局域，但在希尔伯特空间的典型态中表现得如同局域算符 [56, 57]。尽管如此，目前报道的可积性与希尔伯特空间碎裂之间的差异并不多。

因此，我们聚焦于折叠 XXZ 模型，它可以由无限各向异性极限下的 XXZ 模型得到 [58–60]。我们证明，除了源自 Bethe 拟设可积性的局域积分运动量（引入破坏 Bethe 拟设可积性的微扰后，这些局域积分运动量会消失）之外，该模型还存在源自碎片化的局域积分运动量（在此类微扰下不会消失）。我们发现，前者仍可通过少量本征态在数值上生成，而后者则需要几乎所有本征态。这表明，关于源自碎片化的局域积分运动量的信息以不同方式编码在本征态中。

本文结构安排如下。在第 II 节中，我们介绍如何利用不完整的本征态集来估计局域积分运动量的数值方法

。在第 III 节中，我们证明，在 XXZ 自旋链中，利用少量本征态也能准确进行这种估计。我们考察不同的对称性扇区，并将研究扩展到准局域运动积分。在第 IV 节中，我们考察该估计方法在折叠 XXZ 模型中的有效性。最后，我们总结研究结果，并在第 V 节作出结论。

II. 从不完整谱中寻找局域积分运动量

我们首先讨论一种数值方法，用于根据哈密顿量的一组不完整本征态估算局域积分运动量，以下记作 $\mathcal{Q}^\alpha$。$H|n\rangle = E_n|n\rangle$此处，指标 α 表示局域积分运动量。我们关注厄米算符，并使用希尔伯特–施密特（HS）内积 $\langle AB\rangle = \mathrm{Tr}(AB)/Z$ 以及希尔伯特–施密特范数 $\|A\|^2 = \langle AA\rangle$，其中迹是在维数为整个希尔伯特空间上计算的 Z。我们要求 $||A||^2 = 1$。为简便起见，我们先考虑非简并谱。这一假设并非必要，只需稍作修改即可研究具有简并本征值的系统。相关讨论见第III 节和第IV节。请注意，对于非简并谱，守恒量的非零矩阵元仅出现在对角线上，即 $\langle m|\mathcal{Q}^\alpha|n\rangle \neq 0$ 仅当 $m = n$。因此，要确认 $\mathcal{Q}_\alpha$ 是守恒量，至少需要计算所有对角矩阵元，并验证$1/Z\sum_n \langle n|\mathcal{Q}^\alpha|n\rangle^2 = \|\mathcal{Q}^\alpha\|^2$。这项任务需要对哈密顿量进行完全对角化，成为数值研究的瓶颈。

为了从选定本征态中估算局域积分运动量，有必要采用一种不依赖希尔伯特–施密特乘积或希尔伯特–施密特范数的方法（不同于 [61–63] 中采用的方法）。参考文献 [55] 最近提出了一种合适的方法。其依据是这样一种观察：局域积分运动量可以通过压缩局域算符对角矩阵元中所储存的信息来获得，$A^s_{nn} = \langle n|A^s|n\rangle$。这里所说的局域算符，是指在热力学极限下，对系统有限子体积产生非平凡作用的算符（或其和）。为此，我们考虑一组 D_O 正交归一的局域算符 $\{A^1, \ldots, A^{D_O}\}$，它们满足 $\langle A^i A^j\rangle = \delta_{ij}$。接下来，我们构造一个维度为 $Z \times D_O$ 的矩阵，该矩阵由这些算符的对角矩阵元组成：

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} A^1_{11} & A^2_{11} & \ldots & A^{D_O}_{11} \\ A^1_{22} & A^2_{22} & \ldots & A^{D_O}_{22} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ A^1_{ZZ} & A^2_{ZZ} & \ldots & A^{D_O}_{ZZ} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

并对其进行奇异值分解，$\mathcal{R} = \mathcal{U}\tilde{\Lambda}\mathcal{V}^T$。这里，$\mathcal{U}$和 $\mathcal{V}$分别是维度为 $Z \times Z$ 和 $D_O \times D_O$的正交矩阵。此外，$\tilde{\Lambda} = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\min(D_O,Z)}]$，其主对角线上的元素即所谓的奇异值，而其他元素均为零。$\mathcal{R}$ 的秩至多为 $\min(D_O, Z)$，实际中 $D_O < Z$。在数值计算中，我们总是执行所谓的薄奇异值分解，而不是完整奇异值分解；该分解只保留矩阵 $\mathcal{U}$ 的前 D_O列，而 Λ 则变为维度为 $D_O \times D_O$的方阵。对 $\mathcal{R}$进行压缩，就是寻找一个秩较小且尽可能接近 $\mathcal{R}$ 的矩阵 $\tilde{\mathcal{R}}$（形式上，即最小化 $\|\mathcal{R} - \tilde{\mathcal{R}}\|$）。根据埃卡特–扬–米尔斯基定理，这种压缩相当于保留最大奇异值并舍弃其余奇异值。保留的奇异值数量决定了 $\tilde{\mathcal{R}}$的秩。还可以证明，[55]，最大的奇异值$\tilde{\lambda}_\alpha = \sqrt{Z}$对应于局域积分运动量（LIOM），$\mathcal{Q}^\alpha$。这些量可以用式（1）中引入的局域算符表示，即 $\mathcal{Q}^\alpha = \sum_{s=1}^{D_O} \mathcal{V}_{s\alpha} A^s$。换言之，对初始算符集合 $\{A^1, \ldots, A^{D_O}\}$进行压缩，可以找出所有能够表示为这些算符线性组合的局域积分运动量。

在本文中，我们表明，通过压缩 $\mathcal{R}$ 中随机选取的少量行，可以准确估算局域积分运动量。尽管将压缩限制在一部分本征态上并不能保证找到真正的局域积分运动量，但该问题仍然是适定的，因为它不依赖希尔伯特–施密特乘积。具体而言，我们从哈密顿量的本征态中随机选取 N_S 个，它们对应于矩阵 $\mathcal{R}$ 的 N_S 行。随后将这些行存入矩阵 R，并对其进行奇异值分解：

$$R = \begin{bmatrix} A^1_{11} & \ldots & A^{D_O}_{11} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ A^1_{N_S N_S} & \ldots & A^{D_O}_{N_S N_S} \end{bmatrix} = U\,\mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots]V^T . \tag{2}$$

接下来，我们将近似局域积分运动量定义为

$$Q^\alpha = \sum_{s=1}^{D_O} V_{s\alpha} A^s , \tag{3}$$

对应最大奇异值 λ_α。此外，我们证明，对于数量少得出乎意料的本征态 $N_S \ll Z$，这些近似局域积分运动量与真实的局域积分运动量 $Q^\alpha \simeq \mathcal{Q}^\alpha$ 非常接近。我们强调，从现在起，花体字母表示由完整本征态集合得到的量，例如 $\mathcal{R}$；而非花体字母表示由本征态子集得到的相应量，例如 R。

选定本征态通过针对目标能量 E_T [64]采用移位反演法进行数值求得。由于我们关注守恒总自旋投影的平移不变自旋链，因此根据相应的二项分布和均匀分布，在所有所考虑的磁化和动量扇区中，随机选择 N_S 个 E_T值。对于每个对称性扇区，目标能量按照等于多体态密度的概率密度进行采样，即

多体态密度，$\rho(E_T) = \frac{1}{Z}\sum_n \delta(E_T - E_n) = \exp[-E_T^2/(2L\sigma^2)]/\sqrt{2\pi L\sigma^2}$，其方差通过对具有 $L \in \{14, 16, 18, 20\}$ 的小型系统进行精确对角化获得。这样，每个本征态 $|n\rangle$ 被选中的概率均相等。

III. XXZ 模型中的压缩方法

如上所述，我们考虑保持总自旋投影 $S^z_{tot} = \sum_l S^z_l$ 不变的平移不变自旋模型，其中 S_l 是作用于格点 l 上的自旋 $s = \frac{1}{2}$ 算符。因此，我们研究的算符也具有平移不变性、厄米性，并与 S^z_{tot} 对易。我们按照这些算符的支撑 M 对其分组，即它们能够产生非平凡作用的连续格点的最大数量。例如，$\sum_l S^z_l S^z_{l+1}$ 和 $\sum_l S^+_l S^z_{l+1} S^z_{l+2} S^-_{l+3}$+H。c。 都属于支撑为 $M = 4$ 的一组，而前者还属于支撑为 $M = 2$ 的一组。

我们首先确定在 XXZ 链中寻找局域积分运动量所需的本征态数量:

$$H = \frac{1}{2}\sum_l \left(S^+_l S^-_{l+1} + S^-_l S^+_{l+1}\right) + \Delta \sum_l S^z_l S^z_{l+1}, \quad (4)$$

所有计算均使用 $\Delta = 3/4$ 。我们考虑由以下方式构造的两个正交算符子空间

$$A_R = O + O^\dagger, \quad (5)$$
$$A_I = i(O - O^\dagger), \quad (6)$$

为简洁起见，分别称其为 实 算符和虚算符。

这里，O 是由作用于各个格点的算符乘积构成的泡利串。在每个格点 l，我们考虑集合 $\{S^+_l, S^-_l, S^z_l, I_l\}$，其中 I_l 是作用于格点 l的恒等算符。在所有可能的算符 O中，我们只保留与 S^z_{tot}对易的算符。所得算符 A_R 和 A_I 被制成无迹且正交归一。

值得注意的是，XXZ 链存在简并现象。两个简并本征态要么属于不同的动量扇区，要么都属于 $k = 0$或 $k = \pi$ 动量扇区。由于所考虑的算符 A_R 和 A_I具有平移不变性，它们在来自不同动量扇区的本征态之间没有矩阵元。因此，我们在数值模拟中排除$k = 0$ 和 $k = \pi$ 动量扇区。

尽管如此，简并（若规模不大）仍然可以处理。为此，必须针对每个目标能量 E_T 多次运行移位反演法。由于每次运行都从一个新的随机态开始，如果最接近 E_T 的特征值存在简并，该方法将收敛到来自简并子空间的随机非正交态。随后，我们对这些态进行奇异值分解，从而得到简并子空间的维数及其正交基。这样便能正确计算该简并子空间中的所有矩阵元，并将它们纳入 R 矩阵中，具体说明见参考文献 [55]。

使用上述算法，我们已验证，若将 $k = 0$和 $k = \pi$ 动量扇区纳入考虑，可获得一致的结果（未展示）。此外，大量简并问题将在讨论碎片化系统的章节中处理，即第 IV 节。

A. 局域积分运动量

我们从一个压缩问题入手，研究支撑在至多 $M = 4$ 个格点上、在自旋翻转变换 $S^\pm_l \to S^\mp_l$ 和$S^z_l \to -S^z_l$ 下为偶的虚算符。该扇区包含 $D_O = 9$ 个算符，因此只能构造出一个对应于能量流 [65, 66], 的局域积分运动量。

$$\mathcal{Q}^1 = \sum_{s=1}^{3} \mathcal{V}_{s1} A^s, \quad (7)$$

其中

$$A^1 = i\sum_l S^+_l S^z_{l+1} S^-_{l+2} + \text{H.c.}, \quad (8)$$
$$A^2 = i\sum_l S^z_l S^-_{l+1} S^+_{l+2} + \text{H.c.}, \quad (9)$$
$$A^3 = i\sum_l S^-_l S^+_{l+1} S^z_{l+2} + \text{H.c.}, \quad (10)$$

而 $\mathcal{V}_{11} \simeq 0.6860$ 和 $\mathcal{V}_{21} = \mathcal{V}_{31} \simeq 0.5145$，二者由 $\mathcal{V}_{21}/\mathcal{V}_{11} = \mathcal{V}_{31}/\mathcal{V}_{11} = \Delta$关联。

图1(a)–1(c) 展示了平均投影 $\langle|V_{s1}|\rangle$，其定义见式（3），对应于矩阵 R 的最大奇异值 λ_1，见式（2）。平均值是对哈密顿量的不同 N_S 本征态计算得到的。需要指出的是，局域积分运动量的整体符号（Q^α 与 $-Q^\alpha$）是任意的，并会在数值过程中随机出现。因此，平均时取绝对值。面板（a）和（b）中的实线分别表示平均值 $\langle|V_{11}|\rangle$和 $\langle|V_{21}|\rangle = \langle|V_{31}|\rangle$。阴影区域表示对应的标准差，分别对应于最小（$L = 14$）和最大（$L = 24$）系统，并采用一致的颜色标记。为便于辨认，前者的边缘以细黑线标出。

显然，能量流（式（7）中的局域积分运动量）已可仅由$N_S = N^* \simeq 10 \div 10^2$ 个本征态准确估计。平均投影 $\langle|V_{11}|\rangle$ 和 $\langle|V_{21}|\rangle = \langle|V_{31}|\rangle$已非常接近精确结果 $\mathcal{V}_{11}$ 和 $\mathcal{V}_{21} = \mathcal{V}_{31}$。后者在图1(a)-1(b)中以虚线标出。与此同时，对其他算符的平均投影 $\langle|V_{s1}|\rangle$（其中 $s \geq 4$）按 $1/\sqrt{N_S}$减小，见图1(c)。这伴随着重标度奇异值 $\langle\lambda_1^2\rangle/N_S$ 在 $N_S = N^*$时饱和为1，见图1(d)。不仅

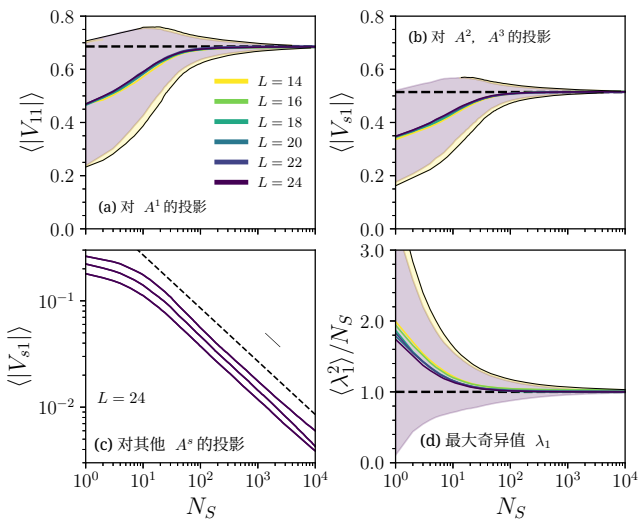

图1. 对一组在自旋翻转变换下为偶、且支撑范围最多为 $M = 4$ 个格点的虚算符，最大奇异值的数值结果。这组算符 $\{A^1, \ldots, A^{D_O}\}$ 包含 $D_O = 9$ 个算符，其中包括式 (8)–(10) 中的算符。(a) 中的实线表示对不同本征态选取方式下的投影 $\langle |V_{11}| \rangle$ 平均值，其中本征态数为 N_s，对应 $L = 14, \ldots, 24$。图2–4中采用的选取方式数量也为 10^4,。阴影区域表示 $|V_{11}|$ 的标准差，分别对应最小系统 ($L = 14$) 和最大系统 ($L = 24$)，颜色编码保持一致。为便于观察，前者的边界以细黑线标出。此外，水平虚线表示能量流的解析预测值 $\mathcal{V}_{11}$，见式 (7)，$\mathcal{Q}_1$。(b) 与 (a) 相同，但显示投影 V_{21}。在所示尺度下，投影 V_{31} 与 V_{21} 无法区分。(c) 实线表示对其他算符 ($s \geq 4$) 的投影 $\langle |V_{s1}| \rangle$，对应 $L = 24$。(d) 最大奇异值 $\langle \lambda_1^2 \rangle / N_S$，见式 (2)。严格的局域积分运动量对应于由所有本征态得到的 $\lambda^2/Z = 1$ （当 $N_S = Z$ 时）。

平均投影收敛到精确结果，其标准差也变得非常小。这意味着随机选取的一组 $N_S > N^*$个本征态即可重构局域积分运动量。有趣的是，为此所需的本征态数目几乎与系统尺寸无关，甚至随 L增大而缓慢减小。标准差也呈现出相同的有限尺寸标度。与此同时，希尔伯特空间的维数随 L呈指数增长。因此，我们可以得出结论：局域积分运动量可由指数级小比例的本征态获得（例如，$N_S = 100$ 对于 $L = 24$ 仅对应于全部本征态的 $\sim 10^{-5}$ ）。

为了说明决定本征态最小数量的因素，N^*，我们对图 1 进行了相同的计算，不过采用了大得多的一组局域算符。为此，我们将支撑从 $M = 4$ 扩展到 $M = 6$，从而针对由 $D_O = 155$ 个算符构成的集合执行压缩问题。这一集合可以重构两个局域积分运动量：此前讨论的的 $\mathcal{Q}^1$ ，以及一个额外的 $\mathcal{Q}^2$ ，它对应于第二大奇异值 λ_2。后者可写作 $\mathcal{Q}^2 = \sum_{s=1}^{21} \mathcal{V}_{s2} A^s$，其中幅值最大的两个投影位于

$$A^1 = i \sum_l S_l^+ S_{l+1}^z S_{l+2}^z S_{l+3}^z S_{l+4}^- + \text{H.c.}\,, \quad (11)$$

$$A^2 = i \sum_l S_l^z S_{l+1}^+ S_{l+2}^z S_{l+3}^z S_{l+4}^- + \text{H.c.}\,, \quad (12)$$

$$A^3 = i \sum_l S_l^+ S_{l+1}^- S_{l+2}^+ S_{l+3}^z S_{l+4}^- + \text{H.c.}\,, \quad (13)$$

$$A^4 = i \sum_l S_l^- S_{l+1}^+ S_{l+2}^+ S_{l+3}^z S_{l+4}^- + \text{H.c.}\,, \quad (14)$$

$$A^5 = i \sum_l S_l^+ S_{l+1}^z S_{l+2}^- S_{l+3}^+ S_{l+4}^- + \text{H.c.}\,, \quad (15)$$

$$A^6 = i \sum_l S_l^- S_{l+1}^z S_{l+2}^+ S_{l+3}^+ S_{l+4}^- + \text{H.c.}\,, \quad (16)$$

$$A^7 = i \sum_l S_l^+ S_{l+1}^z S_{l+2}^z S_{l+3}^- S_{l+4}^z + \text{H.c.}\,, \quad (17)$$

$$A^8 = i \sum_l S_l^+ S_{l+2}^z S_{l+3}^- + \text{H.c.}\,, \quad (18)$$

$$A^9 = i \sum_l S_l^z S_{l+2}^+ S_{l+3}^- + \text{H.c.}\,, \quad (19)$$

$$A^{10} = i \sum_l S_l^+ S_{l+1}^z S_{l+3}^- + \text{H.c.}\,, \quad (20)$$

$$A^{11} = i \sum_l S_l^+ S_{l+1}^- S_{l+3}^2 + \text{H.c.}\,, \quad (21)$$

取值为 $\mathcal{V}_{12} \simeq 0.3344$, $\mathcal{V}_{22} = \mathcal{V}_{42} = \mathcal{V}_{72} = \mathcal{V}_{82} = \mathcal{V}_{10,2} \simeq -0.2508$ 和 $\mathcal{V}_{32} = \mathcal{V}_{52} = \mathcal{V}_{62} = \mathcal{V}_{92} = \mathcal{V}_{11,2} \simeq 0.2508$。

多个局域积分运动量的存在引入了一个小的技术性复杂因素，使得数值结果难以与已知的解析公式进行比较。注意，对于 $M = 6$、$\mathcal{Q}_M^1$ 和 $\mathcal{Q}_M^2$ 的两个正交归一局域积分运动量进行任意旋转，会生成另一对正交归一局域积分运动量 $\mathcal{Q}'^1_M$ 和 $\mathcal{Q}'^2_M$。它们之间的关系为 $\mathcal{Q}_M^1 = \cos(\phi)\, \mathcal{Q}'^1_M + \sin(\phi)\, \mathcal{Q}'^2_M$ 以及$\mathcal{Q}_M^2 = \cos(\phi)\, \mathcal{Q}'^2_M - \sin(\phi)\, \mathcal{Q}'^1_M$。奇异值分解给出了任意旋转后的一对局域积分运动量 $\mathcal{Q}'^1_M$ 和 $\mathcal{Q}'^2_M$。后者这些算符同样是有效的局域积分运动量，因为它们与哈密顿量对易，并且对于任意可观测量 O，即 $\sum_{i=1}^2 \langle O \mathcal{Q}'^i_M \rangle^2 = \sum_{i=1}^2 \langle O \mathcal{Q}_M^i \rangle^2$，都会对 Mazur界作出相同贡献；Mazur界为O [65, 67, 68]的自相关函数提供了一个下界。然而，在已知的解析公式中，总是假定 $\mathcal{Q}_M^1 = \mathcal{Q}_{M-2}^1$，因此，方便的做法是对从较大支撑上获得的局域积分运动量进行旋转，使其与从较小M上获得的局域积分运动量相匹配。形式上，这相当于最大化 $\langle \mathcal{Q}_M^1 \mathcal{Q}_{M-2}^1 \rangle^2$，其对应的旋转角满足

$$\tan(2\phi) = \frac{2 \langle \mathcal{Q}'^1_M \mathcal{Q}^1_{M-2} \rangle \langle \mathcal{Q}'^2_M \mathcal{Q}^1_{M-2} \rangle}{\langle \mathcal{Q}'^1_M \mathcal{Q}^1_{M-2} \rangle^2 - \langle \mathcal{Q}'^2_M \mathcal{Q}^1_{M-2} \rangle^2}. \quad (22)$$

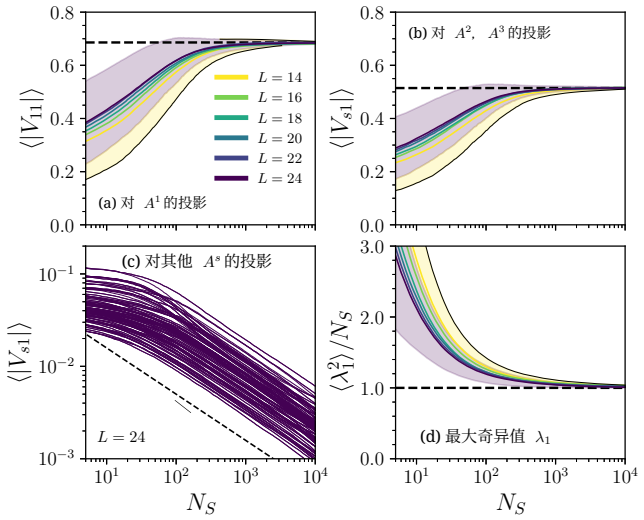

图 2. 与图 1相同，但针对更大的支撑 $M = 6$，其中集合 $\{A^1, \ldots, A^{D_O}\}$ 包含 $D_O = 155$ 个算符。对应于两个最大奇异值 Q'^1 和 Q'^2的近似局域积分运动量按照正文所述步骤进行旋转，见式（22）。(a) 和 (b) 分别显示 Q^1 在式（8）和（9）中算符上的投影。在式（9）-（10）中算符上的投影在所示尺度上彼此无法区分。(c) Q^1 在其他具有 $s \geq 4$的算符上的投影。(a) 和 (b) 中的虚线标出解析预测，如式（10）下方所解释。

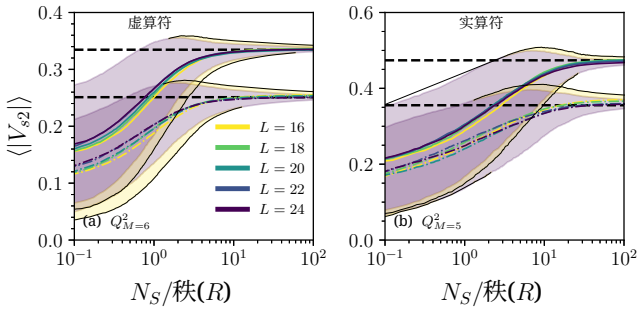

图3. (a) 与图 2(a) 和图 2(b) 相同，但针对 Q^2 而非 Q^1。该图显示 Q^2 在式 (11)-(21) 中算符上的投影。最大投影位于式 (11) 中的 A^1，而在其他算符上的投影在 (a) 所示尺度上彼此无法区分。水平虚线标出解析预测，见式 (21) 下方的文字。本征态数目 N^* 按秩($\mathcal{R}$) = 57重新标度。(b) 由在自旋翻转变换下为偶、且支撑在至多 $M = 5$ 个格点上的实算符集合构造的 Q^2的数值结果。在该扇区中，Q^1 表示归一化哈密顿量。该图显示 Q^2 在式 (23)-(28) 中算符上的投影。最大投影位于式 (23) 中的 A^1，而在其他算符上的投影在 (b) 所示尺度上无法区分。本征态数目 N^* 按秩(R) = 31重新标度。

对于来自方程（3）的近似局域积分运动量，也可以进行相同的旋转。具体而言，对于每组 N_S本征态，我们确定了 Q^1_{M-2} 以及一对Q'^1_M 和 Q'^2_M，随后按照上述步骤进行旋转。由此，我们获得了两个近似局域积分运动量：$Q^1_M \simeq Q^1_{M-2}$ 以及另一个 Q^2_M。图 2 和 3(a) 展示了 $Q^1 = Q^1_M$和 $Q^2 = Q^2_M$的结果。

我们发现，图 1 中得出的结论对于更大的支撑（$M = 6$）和更复杂的局域积分运动量（$\mathcal{Q}^2$）仍然成立。然而，考虑的算符越多，所需的本征态也越多。换言之，N^*会随 M 增加。通过比较若干 M的数值结果，我们发现，当比值 $N^*/\text{rank}(\mathcal{R})$处于 $\mathcal{O}(1) \div \mathcal{O}(10)$量级时，对局域积分运动量的估计是有效的。在图 1 中，$M = 4$ 和 $\text{rank}(\mathcal{R}) = 5$；而在图 2 中，$M = 6$ 和 $\text{rank}(\mathcal{R}) = 57$。$N^*$ 与 $\text{rank}(\mathcal{R})$之间的关系，与局域积分运动量是通过压缩得到这一事实相符；这种压缩会降低 R的秩。对于 $N_S < \text{rank}(\mathcal{R})$，秩受本征态数量 N_S的限制。随后，压缩过程会确定哪些状态对于矩阵 R所包含的信息最为相关，因而需要在降低其秩的同时予以保留。只有对于 $N_S > \text{rank}(\mathcal{R})$，秩才受算符数量 D_O的限制。在这种情况下，压缩会选出最相关的算符，即局域积分运动量。因此，

认为 $N^* > \text{rank}(R)$并不十分令人意外。然而，令人惊讶的是，一旦超过阈值$N^* = \text{rank}(\mathcal{R})$，对局域积分运动量的估计很快就会变得有效；也就是说，压缩开始以算符而非状态为目标后不久，估计便会生效。

最后，我们确认这些发现同样适用于其他对称性扇区。图 3(b)展示了类似研究的结果，但研究对象是经 $M = 5$ 个格点支撑、在自旋翻转变换下为偶的实算符。这使得我们能够重构两个局域积分运动量。具体而言，哈密顿量 $\mathcal{Q}^1 = H/\|H\|$ 和另一个局域积分运动量

$$\mathcal{Q}^2 \qquad \mathcal{Q}^2 = \text{，后}$$

$\sum_{s=1}^{10} \mathcal{V}_{s2} A^s$
者可写为，其中幅值最大的两个投影位于

$$A^1 = \sum_l S^+_l S^z_{l+1} S^z_{l+2} S^-_{l+3} + \text{H.c.}\,, \tag{23}$$

$$A^2 = \sum_l S^+_l S^-_{l+2} + \text{H.c.}\,, \tag{24}$$

$$A^3 = \sum_l S^+_l S^z_{l+1} S^-_{l+2} S^z_{l+3} + \text{H.c.}\,, \tag{25}$$

$$A^4 = \sum_l S^-_l S^+_{l+1} S^+_{l+2} S^-_{l+3} + \text{H.c.}\,, \tag{26}$$

$$A^5 = \sum_l S^+_l S^-_{l+1} S^+_{l+2} S^-_{l+3} + \text{H.c.}\,, \tag{27}$$

$$A^6 = \sum_l S^z_l S^+_{l+1} S^z_{l+2} S^-_{l+3} + \text{H.c.}\,, \tag{28}$$

与 $\mathcal{V}_{12} \simeq 0.4739$、$\mathcal{V}_{22} = \mathcal{V}_{32} = \mathcal{V}_{42} = \mathcal{V}_{62} \simeq 0.3554$

以及 $\mathcal{V}_{52} \simeq -0.3554$。与之前一样，可以通过将 Q'^1_M 和 Q'^2_M 相对于 $Q^1_{M-2} \simeq H/\|H\|$进行旋转，得到近似的局域积分运动量。图3(b) 展示了$Q^2 = Q^2_M$的结果。

B. 准局域运动积分

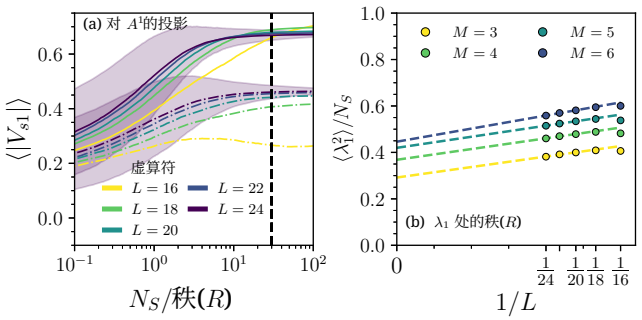

图4. 自旋翻转变换下为奇的虚算符子空间的结果。我们考虑支撑 $M = 6$的算符集合，其中秩(R) $= 66$。此对称性子空间包含自旋流算符，但不包含任何局域积分运动量。(a) Q^1 在式(29)- (30中定义的算符上的投影。阴影区域表示最大（$L = 24$）系统的标准差，颜色编码保持一致。(b) 最大奇异值 $\langle\lambda_1^2\rangle/N_S$，由$N_S = 30$秩($R$)得到。对 $L \to \infty$ 的外推表明，在热力学极限下，该值会随支撑增大而增大，这表明它可能对应一个准局域运动积分。

我们现在验证，准局域运动积分（QLIOM）是否也能从全部本征态中占比趋于零的一部分本征态中确立。与严格局域的局域运动积分不同，QLIOM 在作用于任意大距离范围的算符上具有指数小但非零的权重 [30, 61, 69, 70]。因此，即使考虑所有本征态（即 $N_s = Z$），也无法仅凭支撑范围任意有限的一组算符精确重构 QLIOM。这一点体现在比值 λ^2/Z 上：对于任意有限的 M，该比值都小于 1，且只有在 $M \to \infty$ 极限下才趋近于 1。尽管如此，QLIOM 仍可对局域算符的 Mazur界作出贡献，影响其动力学，甚至阻止其热化。其要求（也可视为准局域性的判据）是：它在某些支撑范围有限的算符上的投影 $\mathcal{V}_{s\alpha}$，在热力学极限下仍非零。

为了检测准局域积分运动量（QLIOMs），我们研究了在自旋翻转变换下为奇的虚算符子空间。例如，自旋流算符就属于这个子空间。同时，该子空间不包含局域积分运动量（LIOMs），因此由式（2）得到的最大奇异值可能对应于准局域积分运动量。图4(a) 展示了 Q^1的最大投影结果，它们是在以下局域算符中找到的：

$$A^1 = i\sum_l S_l^+ S_{l+1}^- + \text{H.c.}\,, \tag{29}$$

$$A^2 = i\sum_l S_l^+ S_{l+2}^- + \text{H.c.}\,. \tag{30}$$

数值计算针对集合$\{A^1, \ldots, A^{D_O}\}$进行，其中包含支撑最多延伸至 $M = 6$ 个格点的算符。

与上文讨论的情形类似，这些投影 V_{s1} 在 $s \le 2$时，仅需少量本征态便已收敛，$N^* \simeq \text{rank}(\mathcal{R}) \div 10$ r ank($\mathcal{R}$)。由于它们不会随 L 减小，并且lim $_{L\to\infty} V_{s1} = \mathcal{V}_{s1}$，我们预计 Q^1 确实是一个准局域算符。我们还展示了相应奇异值 λ_1 如何依赖于L和 M，见图4(b)。这些结果是在 $N_s/\text{rank(R)} = 30$时得到的，该值在面板(a)中以竖直虚线标出。虽然我们无法得到lim $_{M\to\infty}\lim_{L\to\infty}\langle\lambda_1^2\rangle/N_s$的精确值，但观察到它接近于1，这正是守恒算符应有的性质。

总之，本节指出，在贝特 ansatz 可积 XXZ 链中，仅凭极少一部分本征态就能很好地估算局域积分运动量。此外，系统越大，所需的本征态就越少。对于所有考察的对称性扇区，以及检测准局域运动积分，这一结论同样成立。我们强调，对于固定的尺寸 L 和支撑范围 M，纳入更多本征态并不会为局域积分运动量或准局域积分运动量的存在与结构提供任何额外的显著信息。

IV. 碎裂系统中的基于压缩的方法

希尔伯特空间碎裂是一种被认为有别于可积性的遍历性破缺现象 [47–51]。然而，通常用于刻画封闭量子系统的许多度量——例如能谱统计 [71–73], 纠缠熵 [7–11], 局域可观测量的矩阵元 [74–78]以及保真度易感性 [79–84] ——在这两种情况下都表现出非常相似的行为。因此，哪些性质（如果确有其事）能从根本上区分这两种遍历性破缺机制，仍不清楚。

在局域基（例如计算基）下，碎裂系统的哈密顿量会裂解为指数多个不连通块。对于最大块的维数 Z_B，需要满足 $\lim_{L\to\infty} Z_B/Z = 0$。因此，对于少数随机选取的本征态，自然可以预期它们都属于不同的不连通 Krylov 子空间。为了探究这一性质是否会影响局域积分运动量的构造（是否会影响局域积分运动量相关信息在本征态中的编码方式），我们考虑

折叠 XXZ 模型 [58–60]:

$$H = \sum_l \left(\frac{1}{4} + S^z_{l-1}S^z_{l+2}\right)\left(S^+_l S^-_{l+1} + S^-_l S^+_{l+1}\right) + g\sum_l \left(S^z_l S^z_{l+2} + S^z_l S^z_{l+3}\right). \tag{31}$$

方程（31）中的自旋翻转项守恒畴壁数目，

$$A^1 = \sum_l S^z_l S^z_{l+1}. \tag{32}$$

因此，当 $g = 0$ 时，式（31）中的哈密顿量便成为 XXZ 链在 Δ趋于无穷大时的有效模型，见式（4）。我们添加了一个额外项 $\sim g$，以便在不破坏希尔伯特空间碎片化的情况下打破贝特 Ansatz 可积性。如下文所示，该项使我们能够确定数值研究中出现的反常行为的起因。

折叠 XXZ 模型具有大量简并的本征态。因此，需要对该方法做一些技术上的修改。由于我们研究的是平移不变算符，其非零矩阵元只存在于动量扇区内部，因此我们只考虑这些扇区内的简并。由于所有扇区都存在简并，我们还将 $k = 0$ 和 $k = \pi$ 动量扇区纳入考虑。式（ $\mathcal{R}$ 1）中的矩阵以及式（ R 2）中的矩阵应始终包含简并子空间内的所有矩阵元，也就是说，这些矩阵应按列存储（ˆ）所有 $A^s_{nm} = \langle n|A^s|m\rangle$ 对应于 $E_m = E_n$ [55]的本征态。为便于对具有大量简并的本征值问题进行数值计算，我们采用精确对角化，而非移位反演法。最后需要指出的是，在存在简并的情况下，随机抽取固定数量的本征态并无明确的定义。此外，还应避免简并子空间中的态比非简并态更有可能被纳入矩阵 R 的情况。因此，我们不抽取 N_S 个本征态，而是抽取 N_D 个简并子空间。为与前文保持一致，所有数值结果都将以

$$\tilde{N}_s = N_D \bar{Z}_D, \tag{33}$$

¯其中，Z_D 是根据所有动量扇区计算得到的简并子空间的平均维数。我们注意到，˜在非简并情形下，N_S 与此前考虑的 N_S相同。此外，考虑所有简并˜子空间时，可得 $N_S = Z$。

我们首先将基于压缩的方法应用于一小组算符。这些算符仅由每个格点上的 S^z_l和I_l 算符构成，支撑范围最多为 $M = 4$个格点。为清楚起见，这组算符不包括显然守恒的总磁化量 $\sum_l S^z_l$。其中包含一个局域积分运动量，$\mathcal{Q}^1 = A^1$ 来自方程（32），我们旨在为其单独提取

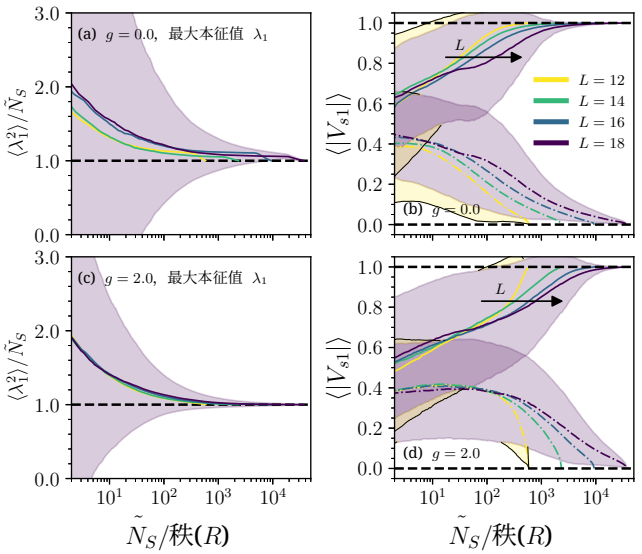

图5. 式（31）中的折叠 XXZ 模型的结果。集合 A^s 仅由作用于至多 S^z_l和 I_l 的算符构成，这些算符作用于至多 $M = 4$ 个连续格点，此时 秩(R) $= 7$。所有结果均对 10^4 种不同的 N_S 本征态选取进行平均，图7中也如此。(a) 最大奇异值 $\langle\lambda_1^2\rangle/\tilde{N}_s$，对应 $g = 0$。(b) 上方曲线对应 Q^1 在式（ A^1 32）中的算符 上的最大投影，下方曲线则对应次大的投影。阴影区域表示最小（$L = 12$）和最大（$L = 18$）系统中投影的标准差，颜色编码保持一致。为便于观察，前者的边缘以黑色细线标出。(c) 和 (d) 图分别展示与 (a) 和 (b) 图相同的结果，但针对的是具有 $g = 2.0$ 的微扰模型。

出 $g = 0$。图 5（a）显示了最大奇异值，$\langle\lambda_1^2\rangle/\tilde{N}_s$。同时，图 5（b）展示了 Q^1 在 $\mathcal{Q}^1 = A^1$ 上的最大投影（实线）以及第二大投影 Q^1（虚线）如何随 $\tilde{N}_s$变化。正如预期，$\langle\lambda_1^2\rangle/\tilde{N}_s$ 最终趋近于 1，相应的 Q^1 最终在 $\mathcal{Q}^1$ 较大时变为 $\tilde{N}_s$。然而，为了准确估计这一局域积分运动量，必须使用大多数本征态（$N^* \simeq Z$）；系统越大，所需的本征态就越多。这与之前在 XXZ 模型（具有有限 Δ）中观察到的局域积分运动量行为恰恰相反，参见图 2。

为了确凿地将 $\mathcal{Q}^1$ 与希尔伯特空间碎片化联系起来，我们在通过设定 $g = 2$破坏贝特 Ansatz 可积性的同时重复了计算。图5(c)与5(d)所示的相应结果，分别与可积情形下图5(a)与5(b)的结果非常相似。这表明 $\mathcal{Q}^1$ 的守恒与贝特 Ansatz 可积性无关。

有趣的是，我们的数值结果表明，$\mathcal{Q}^1$并非希尔伯特空间碎裂所产生且在非零 g时仍然存在的唯一守恒量。在图6中，我们给出了第二大和第三大的奇异值，它们是通过同一组算符得到的——

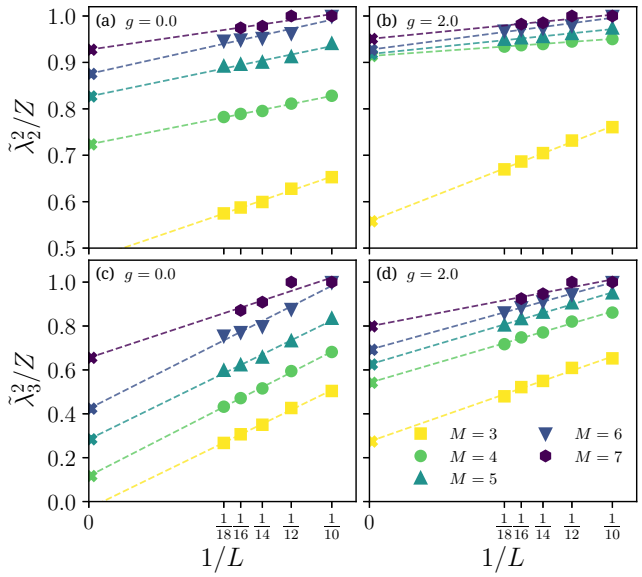

图 6. (a)、(b) 折叠 XXZ 模型中的第二个奇异值，以及 (c)、(d) 第三个奇异值；这些结果是由与图 5 $\tilde{N}_S =$ 中相同的 Z 一组算符得到的，但涵盖所有本征态（即 ）。(a)、(c) 展示未扰动模型在 $g = 0.0$时的结果，而 (b)、(d) 展示相对较强微扰在 $g = 2.0$时的结果。

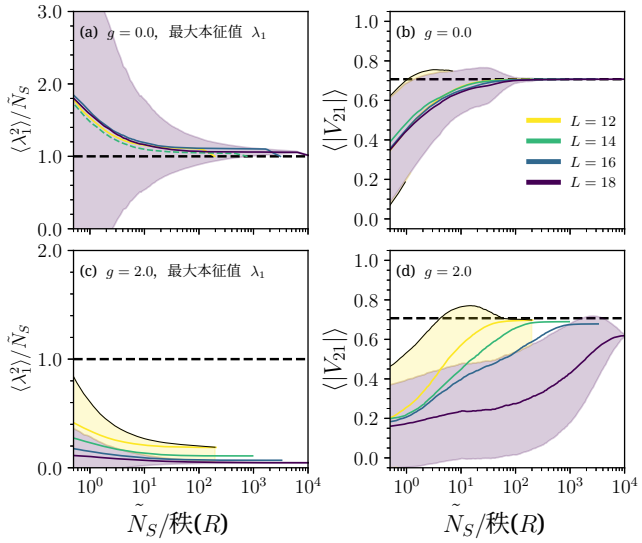

图 7. XXZ 折叠模型的结果，与图 5相同，但采用另一组算符。这里使用了与图 1中相同的一组算符，其中 $M = 4$ 且 秩$(R) = 5$。(b)、(d) 展示了 Q^1 在方程（9）中的算符 A^2 上的最大投影。

这些算符仅由 S_l^z和 I_l的乘积构成。在这个特定情形下，我们使用了哈密顿量˜（见式（31））的所有本征态，即 $N_s = Z$。图6 展示了这些奇异值如何依赖于系统尺寸 L 和支撑范围M。与先前讨论的情形，见图 4(b)。特别是，$\lim_{M\to\infty}\lim_{L\to\infty} \tilde{\lambda}_{2,\ 3}^2/Z$ 更清晰地趋近于 1。这一点在微扰系统中尤为明显，其中 $g = 2$ [见图 6(b) 和 6(d)], 进一步支持了这些守恒定律并非源于贝特 Ansatz 可积性的论断。要确定这些准局域积分运动量的确切结构，还需要额外的计算，而这超出了本文的范围。

最后，我们考虑另一组算符，它们可用于构造源于贝特 Ansatz 可积性的局域积分运动量。具体而言，我们考虑先前用于带有 $\Delta = 3/4$ 的 XXZ 模型的同一组算符，其结果如图 1 所示。对于折叠 XXZ 模型，最大奇异值 $\langle \lambda_1^2 \rangle / \tilde{N}_s$ 如图 7(a) 所示。相应的 Q^1 表示能量流，其在式 (8) 的算符 A^1 上的最大投影绘制于图 7(b)。为了将所得运动积分与贝特 Ansatz 可积性联系起来，我们对 $g = 2$ 重复了相同的计算，见图 7(c) 和 7(d)。显然，当 g 不为零时，同一组算符并不包含任何局域积分运动量。将图 7(a) 和 7(b) 分别与图 1(d) 和 1(a) 进行比较表明，希尔伯特空间碎片化并不妨碍局域积分运动量的构造，前提是这些局域积分运动量并非源于该碎片化。即使存在碎片化，此类局域积分运动量仍可从 $N^* \simeq$ 秩$(R) \div 10$ 秩(R) 个本征态中可靠地估计出来。

由于能量流可以从少量本征态中重构，$N^* \ll Z$，无法对源自希尔伯特空间碎裂的局域积分运动量做同样的事情，似乎并不仅仅是大量简并的后果。人们可能会预期，关于局域积分运动量的信息并不包含在简并子空间内的单个本征态中，而是以某种方式分布在它们之间。在这种情况下，纳入单个简并子空间更类似于纳入单个非简并本征态。请注意，对于 $L = 16$，当希尔伯特空间维数为65536时，存在8314个（动量分辨的）简并子空间，平均维数为8，而最大维数为665。然而，所观察到的这种无能似乎反映了碎片化系统更为微妙的性质。

V. 结束语

在这项工作中，我们证明了可积性会在单个本征态中留下显著印记，使得能够从不完整谱中重建局域运动积分（LI-OM）。这极大拓展了我们对单个本征态中所编码信息的理解。具体而言，少量本征态不仅有助于识别遍历系统并估算其热性质，还使得在可积系统中确立局域守恒定律成为可能，进而估算其

定态的性质。

我们通过压缩局域可观测量的对角（或更一般地说，等能量）矩阵元中包含的信息来构造局域积分运动量。即使本征态集合不完整，这一压缩问题仍然定义良好。通过研究可积的 XXZ 链，我们发现，仅使用数量略多于 D_O 的本征态，就可以从一组 D_O 局域算符构造出局域积分运动量。该数量不随系统尺寸增长，并且不同本征态选择之间的变化仍然很小。这些性质不仅适用于不同对称性扇区中的局域积分运动量，也适用于准局域运动积分。

相比之下，折叠 XXZ 模型具有希尔伯特空间碎片化现象，因此不具备上述性质。该模型存在一些守恒量，而这些守恒量与 Bethe 拟设可积性无关，因为即使施加破坏可积性但保留碎片化的微扰，它们仍然稳健。有趣的是，构造这些守恒量需要利用几乎全部本征态。我们认为，这不能完全归因于模型中存在的大量简并。这一发现揭示了目前已知的可积性与碎片化之间为数不多的根本差异之一。

致谢

我们感谢 Lev Vidmar 富有成果的讨论。本工作得到波兰国家科学中心（NCN）通过项目 2023/49/N/ST3/01033 的资助。

[1] M. Rigol、V. Dunjko 和 M. Olshanii，《一般孤立量子系统中的热化及其机制》，《自然》452，854–858（2008）。[2] A. Polkovnikov、K. Sengupta、A. Silva 和 M. Vengalattore，《封闭相互作用量子系统的非平衡动力学》，《现代物理评论》83，863（2011）。[3] L. D'Alessio、Y. Kafri、A. Polkovnikov 和 M. Rigol，《从量子混沌和本征态热化到统计力学与热力学》，《物理进展》65，239（2016）。[4] T. Mori、T. N. Ikeda、E. Kaminishi 和 M. Ueda，《孤立量子系统中的热化与预热化：理论概述》，《物理学杂志 B：原子、分子与光学物理》51，112001（2018）。[5] J. R. Garrison 和 T. Grover，《单一本征态是否编码了完整的哈密顿量？》，Physical Review X 8，021026（2018）。[6] D. N. Page，《子系统的平均熵》，《物理评论快报》71，1291（1993）。[7] W. Beugeling、A. Andreanov 和 M. Haque，《局域多体哈密顿量所有本征态的整体特征：参与比与纠缠熵》，J. Stat. Mech. 2015，P02002（2015）。[8] L. Vidmar 和 M. Rigol，《量子混沌哈密顿量本征态的纠缠熵》，《物理评论快报》119，220603（2017）。[9] M. Haque、P. A. McClarty 和 I. M. Khaymovich，《混沌多体系统中谱中部本征态的纠缠：偏离随机系综的原因》，Phys. Rev. E 105，014109（2022）。[10] E. Bianchi、L. Hackl、M. Kieburg、M. Rigol 和 L. Vid- mar，《典型纯量子态的体积律纠缠熵》，《PRX Quantum》3，030201（2022）。[11] M. Kliczkowski、R. Świętek、L. Vidmar 和 M. Rigol，《量子混沌相互作用哈密顿量谱中部本征态的平均纠缠熵》，Phys. Rev. E 107，064119（2023）。[12] W. Buijsman、M. Haque 和 I. M. Khaymovich，《幂律带状随机矩阵系综作为量子多体哈密顿量的模型》（2025 2503 08825），[ ] arXiv: . cond-mat.dis-nn。[13] B. Bauer 和 C. Nayak，《多体系统中的面积律》域化态及其对拓扑序的影响，J. Stat. Mech. 2013，P09005 (2013)。[14] M. Serbyn、Z. Papić 和 D. A. Abanin，局域守恒定律与多体局域化态的结构，《物理评论快报》111，127201 (2013)。[15] K. Pawlik、P. Sierant、L. Vidmar 和 J. Zakrzewski，量子太阳模型中的多体迁移率边，Phys. Rev. B 109, L180201 (2024)。[16] J. Šuntajs、M. Hopjan、W. De Roeck 和 L. Vidmar，多体量子雪崩模型与超度量随机矩阵模型之间的相似性，Phys. Rev. Res. 6, 023030 (2024)。[17] P. Sierant、M. Lewenstein、A. Scardicchio、L. Vidmar 和 J. Zakrzewski，经典计算时代的多体局域化，Rep. Prog. Phys. 88, 026502 (2025)。[18] M. Srednicki，量子化混沌系统趋近平衡热态的过程，J. Phys. A: Math. Theor. 32, 1163 (1999)。[19] J. M. Deutsch，本征态热化假说，Rep. Prog. Phys. 81, 082001 (2018)。[20] R. Steinigeweg、A. Khodja、H. Niemeyer、C. Gogolin 和 J. Gemmer，将本征态热化假说的适用范围拓展至介观量子系统，《物理评论快报》112, 130403 (2014)。[21] 杨振宁和杨振平，各向异性自旋-自旋相互作用的一维链。I. 有限系统基态的贝特假设证明，Phys. Rev. 150, 321 (1966)。[22] 杨振宁和杨振平，各向异性自旋-自旋相互作用的一维链。II. 无限系统中每个晶格点的基态能量性质，Phys. Rev. 150, 327 (1966)。[23] 杨振宁和杨振平，各向异性自旋-自旋相互作用的一维链。III. 应用，Phys. Rev. 151, 258 (1966)。[24] W. Beugeling、R. Moessner 和 M. Haque，本征态热化的有限尺寸标度，Phys. Rev. E 89, 042112 (2014)。[25] V. Alba，量子自旋链中的本征态热化假说与可积性，Phys. Rev. B 91, 155123 (2015)。[26] T. LeBlond、K. Mallayya、L. Vidmar 和 M. Rigol，纠

缠与相互作用可积系统中可观测量的矩阵元，Phys. Rev. E 100, 062134 (2019)。[27] M. Mierzejewski 和 L. Vidmar，运动积分对本征态热化假说的定量影响，《物理评论快报》124, 040603 (2020)。[28] M. Rigol、V. Dunjko、V. Yurovsky 和 M. Olshanii，完全可积多体量子系统中的弛豫：一维晶格硬核玻色子高激发态动力学的第一性原理研究，《物理评论快报》98, 050405 (2007)。[29] B. Pozsgay，海森堡自旋链的广义吉布斯系综，J. Stat. Mech. 2013, P07003 (2013)。[30] E. Ilievski、J. De Nardis、B. Wouters、J.-S. Caux、F. H. L. Essler 和 T. Prosen，相互作用理论中的完备广义吉布斯系综，《物理评论快报》115, 157201 (2015)。[31] L. Vidmar 和 M. Rigol，可积晶格模型中的广义吉布斯系综，J. Stat. Mech. 2016, 064007 (2016)。[32] M. Kollar、F. A. Wolf 和 M. Eckstein，广义吉布斯系综对预热化平台的预测及其与可积系统中非热稳态的关系，Phys. Rev. B 84, 054304 (2011)。[33] A. C. Cassidy、C. W. Clark 和 M. Rigol，可积晶格系统中的广义热化，《物理评论快报》106, 140405 (2011)。[34] K. Fukai、Y. Nozawa、K. Kawahara 和 T. N. Ikeda，孤立可积量子系统中的非对易广义吉布斯系综，Phys. Rev. Res. 2, 033403 (2020)。[35] B. Bertini、M. Collura、J. De Nardis 和 M. Fagotti，非平衡 XXZ 链中的输运：荷与流的精确分布，《物理评论快报》117, 207201 (2016)。[36] O. A. Castro-Alvaredo、B. Doyon 和 T. Yoshimura，非平衡可积量子系统中涌现的流体力学，Physical Review X 6, 041065 (2016)。[37] E. Ilievski 和 J. De Nardis，可积量子模型中理想电导的微观起源，《物理评论快报》119, 020602 (2017)。[38] B. Doyon 和 T. Yoshimura，关于广义流体力学的简述：非均匀场及其他概念，SciPost Physics 2, 014 (2017)。[39] S. Gopalakrishnan、D. A. Huse、V. Khemani 和 R. Vasseur，相互作用可积系统中算符扩展与准粒子扩散的流体力学，Phys. Rev. B 98, 220303(R) (2018)。[40] J. De Nardis、D. Bernard 和 B. Doyon，可积系统中的流体动力学扩散，《物理评论快报》121, 160603 (2018)。[41] U. Agrawal、S. Gopalakrishnan、R. Vasseur 和 B. Ware，易平面 XXZ 自旋链中的反常低频电导率，Phys. Rev. B 101, 224415 (2020)。[42] A. J. Friedman、S. Gopalakrishnan 和 R. Vasseur，可积性破缺导致的扩散流体力学，Phys. Rev. B 101, 180302 (2020)。[43] A. Bastianello、A. D. Luca 和 R. Vasseur，弱可积性破缺的流体力学，J. Stat. Mech. 2021, 114003 (2021)。[44] S. Gopalakrishnan 和 R. Vasseur，相互作用自旋链中由高温准粒子引发的反常输运，Rep. Prog. Phys. 86, 036502 (2023)。[45] F. Hübner、E. Vernier 和 L. Piroli，广义流体力学

可积量子电路动力学，SciPost Physics 18, 135 (2025)。[46] B. Doyon、S. Gopalakrishnan、F. Møller、J. Schmied- mayer 和 R. Vasseur，《广义流体力学：一种展望》，Physical Review X 15, 010501 (2025)。[47] V. Khemani、M. Hermele 和 R. Nandkishore，《希尔伯特空间粉碎导致的局域化：从理论到物理实现》，Phys. Rev. B 101, 174204 (2020)。[48] P. Sala、T. Rakovszky、R. Verresen、M. Knap 和 F. Poll- mann，《偶极矩守恒哈密顿量中由希尔伯特空间碎裂引发的遍历性破缺》，Physical Review X 10, 011047 (2020)。[49] S. Moudgalya、A. Prem、R. Nandkishore、N. Regnault 和 B. A. Bernevig，《受限哈密顿量 Krylov 子空间中的热化及其缺失》，载于《Shoucheng Zhang 纪念文集》（World Scientific，2021），第 147–209 页。[50] S. Moudgalya、B. A. Bernevig 和 N. Regnault，《量子多体疤痕与希尔伯特空间碎裂：精确结果综述》，Rep. Prog. Phys. 85, 086501 (2022)。[51] G. Francica 和 L. Dell’Anna，《长程系统中的希尔伯特空间碎裂》，Phys. Rev. B 108, 045127 (2023)。[52] P. Brighi、M. Ljubotina 和 M. Serbyn，《粒子守恒量子East模型中的希尔伯特空间碎裂与慢动力学》，SciPost Physics 15, 093 (2023)。[53] S. Aditya、D. Dhar 和 D. Sen，《具有强希尔伯特空间碎裂的关联跳跃模型中的子空间受限热化：以不可约弦为特征》，Phys. Rev. B 110, 045418 (2024)。[54] M. Ganguli、S. Aditya 和 D. Sen，《量子East模型中希尔伯特空间碎裂的若干方面：碎裂、子空间受限量子疤痕及密度-密度相互作用的影响》，Phys. Rev. B 111, 045411 2025( )。[55] P. Łydżba、P. Prelovšek 和 M. Mierzejewski，《希尔伯特空间碎裂的偶极矩守恒模型中的局域运动积分》，《物理评论快报》132, 220405 2024( )。[56] T. Rakovszky、P. Sala、R. Verresen、M. Knap 和 F. Poll- mann，《统计局域化：从强碎裂到强边缘模》，Phys. Rev. B 101 (2020)。[57] S. Moudgalya 和 O. I. Motrunich，《希尔伯特空间碎裂与交换子代数》，Physical Review X 12, 011050 2022( )。[58] B. Pozsgay、T. Gombor、A. Hutsalyuk、Y. Jiang、L. Pristyák 和 E. Vernier，《具有希尔伯特空间碎裂和可解实时动力学的可积自旋链》，Phys. Rev. E 104, 044106 (2021)。[59] L. Zadnik 和 M. Fagotti，《折叠自旋1/2 XXZ模型：I. 对角化、阻塞与基态性质》，SciPost Physics Core 4, 010 (2021)。[60] L. Zadnik、K. Bidzhiev 和 M. Fagotti，《折叠自旋1/2 XXZ模型：II. 采用最小电荷集合的热力学与流体力学》，SciPost Physics 10, 1 (2021)。[61] M. Mierzejewski、P. Prelovšek 和 T. Prosen，《识别可积系统中的局域与准局域守恒量》，《物理评论快报》114, 140601 (2015)。[62] M. Mierzejewski、T. Prosen 和 P. Prelovšek，《受扰可积晶格模型中的近似守恒定律》，Phys. Rev. B 92, 195121 (2015)。[63] M. Mierzejewski

无序无自旋费米子链和哈伯德链中的局域运动积分计数，《物理评论B》97，064204（2018）。[64] F. Pietracaprina、N. Macé、D. J. Luitz 和 F. Alet，大型多体局域化自旋链的移位反演对角化，SciPost Physics 5（2018）。[65] X. Zotos、F. Naef 和 P. Prelovšek，输运与守恒定律，《物理评论B》55，11029（1997）。[66] M. Grabowski 和 P. Mathieu，具有短程相互作用的量子可积自旋链中守恒定律的结构，《物理年鉴》243，299–371（1995）。[67] P. Mazur，某些系统中相函数的非遍历性，Physica 43，533（1969）。[68] A. Dhar、A. Kundu 和 K. Saito，重新审视Mazur界与Suzuki等式，Chaos, Solitons and Fractals 144，110618（2021）。[69] E. Ilievski、M. Medenjak 和 T. Prosen，各向同性海森堡自旋-1/2链中的准局域守恒算符，《物理评论快报》115，120601（2015）。[70] T. Prosen 和 E. Ilievski，准局域守恒定律族与量子自旋输运，《物理评论快报》111，057203（2013）。[71] V. Oganesyan 和 D. A. Huse，高温下相互作用费米子的局域化，《物理评论B》75，155111（2007）。[72] Y. Y. Atas、E. Bogomolny、O. Giraud 和 G. Roux，随机矩阵系综中连续能级间距之比的分布，《物理评论快报》110，1（2013）。[73] P. Sierant 和 J. Zakrzewski，多体局域化转变中的能级统计，《物理评论B》99，104205 2019（）。[74] D. Jansen、J. Stolpp、L. Vidmar 和 F. Heidrich-Meisner，本征态热化与量子混沌

见 Holstein极化子模型，Phys. Rev. B 99 (2019)。[75] C. Schönle、D. Jansen、F. Heidrich-Meisner 和 L. Vidmar，《通过自相关函数透视本征态热化假说》，Phys. Rev. B 103，235137 2021( )。[76] J. Richter、A. Dymarsky、R. Steinigeweg 和 J. Gem- mer，《超越标准指标的本征态热化假说：低频下随机矩阵行为的涌现》，Phys. Rev. E 102，042127 (2020)。[77] J. Wang、M. H. Lamann、J. Richter、R. Steinigeweg、A. Dymarsky 和 J. Gemmer，《本征态热化假说及其在热化时间之后偏离随机矩阵理论的表现》，《物理评论快报》128，180601 (2022)。[78] A. Dymarsky，《输运对本征态热化的界限》，《物理评论快报》128，190601 (2022)。[79] M. Pandey、P. W. Claeys、D. K. Campbell、A. Polkovnikov 和 D. Sels，《绝热本征态形变：量子混沌的灵敏探针》，Physical Review X 10，041017 (2020)。[80] D. Sels 和 A. Polkovnikov，《无序自旋链中局域化的动力学阻碍》，Phys. Rev. E 104，054105 2021( )。[81] T. LeBlond、D. Sels、A. Polkovnikov 和 M. Rigol，《多体系统中量子混沌起始的普适性》，Phys. Rev. B 104，L201117 (2021)。[82] H. Kim 和 A. Polkovnikov，《可积性作为绝热流的吸引子》，Phys. Rev. B 109，195162 (2024)。[83] R. Ś wi˛etek、P. Łydżba 和 L. Vidmar，《渐消遍历性与最大混沌相遇》，Phys. Rev. B 111，184203 (2025)。[84] M. Lisiecki、J. Bonča、M. Mierzejewski、J. Herbrych 和 P. Łydżba，《可调希尔伯特空间碎裂与扩展临界区》，Phys. Rev. B 112，195116 (2025)。