# 开放量子系统非平衡动力学中熵产生的局域方法

Irene Ada Picatoste，[1]，*Alessandra Colla，[1]和 Heinz-Peter Breuer[1,2,†]1弗赖堡大学物理研究所，*Hermann-Herder-Straße 3*，*D-79104 Freiburg*，德国2弗赖堡大学*EUCOR*量子科学与量子计算中心，*Hermann-Herder-Str. 3*，*D-79104 Freiburg*，德国（日期：2026年3月3日）

我们讨论开放系统非平衡量子动力学的熵产生率局域表达式的基本特征，以及它与记忆效应和动力学生成元谱之间的关系。将熵产生率定义为相对于瞬时不动点的相对熵变化率的负值后，我们证明，对于所有可能的初始态，熵产生率的正定性意味着量子主方程的时间局域生成元的特征值实部始终为负。我们进一步证明，马尔可夫动力学（以量子动力学映射的P-可分性为判据）意味着熵产生率为正，从而在非平衡状态下给出一种广义第二定律。我们还通过一个相位协变量子主方程的反例证明，该结论的逆命题并不成立：存在熵产生率始终为正的非马尔可夫动力学。因此，我们得出结论，负熵产生率的出现是量子动力学具有非马尔可夫性的充分条件，但不是必要条件。最后，我们还考察了近期提出的一种基于映射的熵产生概念，并证明对于一般有限维系统，其正定性等价于马尔可夫性。

arXiv:2603.01861v1 [quant-ph] 2 Mar 2026

## I. 引言

强耦合开放系统的热力学是一个新兴且令人振奋的研究领域，仍有许多基础性问题有待解答 [1–3]。文献中已有许多不同的方案，试图解决如何定义非幺正动力学过程中的能量、热、功和熵产生等问题 [4–7], ，但尚未形成普遍共识。

系统的熵衡量其无序程度，同时也代表关于该系统的可用信息，或我们对它的了解。对于经历幺正演化的封闭系统，熵是守恒量；但当系统与外部环境接触时，对系统或环境的约化描述便不再包含全部信息。具体而言，双方建立的相关性信息会丢失，系统的熵也会随时间变化。通常，这种变化的一部分可归因于与环境相互作用所产生的熵流；这两个量之间的差异便称为熵产生 [8], ，它还与过程的不可逆程度有关。

尽管量子热力学取得了重大进展，但强耦合区间的熵产生尚无普遍认可的定义。文献中已有若干种提议 [4, 7, 9], ，但它们未能明确揭示动力学中的记忆效应与违反第二定律之间的联系 [10]。在这项工作中，我们采用广义熵产生率，并证明它恰好建立了这种联系：马尔可夫性保证熵产生率为正，从而为量子区域给出了广义第二定律。我们还研究了其逆命题，并证明马尔可夫性是熵产生率为正的充分而非必要条件。我们通过一个量子比特的相位协变动力学实例说明这一点：尽管其马尔可夫性遭到破坏，但对于所有初始态，熵产生率始终为正。这个框架阐明了不可逆性与记忆效应之间的相互作用，并使我们能够精确刻画超越弱耦合近似的开放量子系统的热力学行为。

我们采用的广义熵产生率扩展了先前建立的弱耦合公式 [11], ，其定义为系统状态与瞬时不动点之间相对熵的变化率的负值。此外，这一定义的优点之一是它是一种局域表达式，仅基于系统的自由度，因此可通过实验测得。该表述已在一些特定情形下提出，例如粗粒化过程 [10], 、纯退相干动力学 [12], 或旋波近似下的高斯玻色模型 [13]。在本文中，我们将其作为熵产生的一般定义。

我们进一步研究熵产生率与动力学生成元谱之间的联系，并表明，对于所有初始态而言，要使熵产生率在任意时刻都为正，生成元特征值实部为负是必要条件。

* irene.ada.picatoste@physik.uni-freiburg.de
† breuer@physik.uni-freiburg.de

此外，我们考察一种近期提出的表述，它扩展了熵产生的定义，使其成为动力学映射 [14] 的一种性质。迄今为止，这种表述仅针对相位协变量子比特动力学进行过研究；本文则探讨它与一般 $d$能级系统的马尔可夫性的联系。

本文结构如下：第二节介绍研究开放量子系统的一般框架，并回顾动力学映射和时间局域生成元背后的理论（第二节 A），生成元的谱性质（第二节 B），以及量子区域中的非马尔可夫性（第二节 C）。接着，在第三节 A 中，我们回顾量子动力学半群熵产生的既有定义；随后在第三节 B 中，将其推广至强耦合情形。在接下来的第三节 C 中，我们表明，采用这一推广后的定义时，生成元本征值实部为负，是熵产生率始终为正的必要条件。第四节探讨熵产生与记忆效应之间的关系。从第四节 A 开始，我们证明马尔可夫性是熵产生率为正的充分条件；而在第四节 B 中，我们通过一个反例证明它并非必要条件。在第四节 C 中，我们介绍熵产生概念近期向动力学映射的扩展。最后，我们在第五节作总结。

## II. 开放量子系统

我们考虑一个由密度矩阵 $\rho_{SE}(t)$ 描述的全局封闭双部系统，其中包含开放系统 $S$ 和环境 $E$ [15]。因此，该复合系统按照冯·诺依曼方程演化，该方程为（令 $\hbar = 1$）

$$\frac{d}{dt}\rho_{SE}(t) = -i\left[H(t), \rho_{SE}(t)\right], \tag{1}$$

微观全局哈密顿量由裸系统和环境的哈密顿量 $H_S(t)$ 与 $H_E$，以及相互作用哈密顿量 $H_I(t)$ 组成：

$$H(t) = H_S(t) + H_E + H_I(t). \tag{2}$$

### A. 动力学映射与时间局域生成元

开放系统可以通过约化密度矩阵 $\rho_S(t) \in \mathcal{S}_S$来描述，其中$\mathcal{S}_S$ 表示系统量子态的集合，约化态通过对环境自由度取迹得到，$\rho_S(t) = \mathrm{Tr}_E\{\rho_{SE}(t)\}$。于是，系统的演化由动力学映射 $\Phi_t$给出，它将初始态传播到其未来状态：

$$\rho_S(t) = \Phi_t\left[\rho_S(0)\right]. \tag{3}$$

该映射始终保持厄米性并保迹，并且当全局初始态不相关 $\rho_{SE}(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_E(0)$时，动力学映射还是完全正（完全正）的。获得动力学映射有许多不同方法：既可以在完整演化已知时解析求得 [12, 16], ，也可以通过数值技术（例如，参见 [17–19]），或者通过在每个时间点重构系统的状态来实验获得 [20]。

因此，映射 $\Phi_t$ 接收初始状态 $\rho_S(0)$，并返回演化态 $\rho_S(t)$。假设该映射可逆（通常如此，但在时间上的孤立点处可能例外 [15, 21, 22]），我们还可以定义映射

$$\Phi_{t,s} = \Phi_t \Phi_s^{-1} \tag{4}$$

该映射将状态从时间 $s$ 传播到时间 $t$。由于动力学映射的逆映射通常不是完全正（CP）的，甚至不一定是正（P）的，因此该传播子通常也不是完全正的，也不是正的。

系统的动力学也由一阶线性微分方程支配，该方程称为主方程，可直接通过计算动力学映射得到

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \dot{\Phi}_t \Phi_t^{-1}\left[\rho_S(t)\right] \equiv \mathcal{L}_t\left[\rho_S(t)\right]. \tag{5}$$

超算符 $\mathcal{L}_t$ 通常称为主方程的时间卷积无关（TCL）生成元或时间局域生成元。除动力学映射不可逆的孤立时间点外，它通常都存在。值得注意的是，这个时间局域主方程精确地描述了动力学，其中包括强系统-环境耦合和非马尔可夫性 [23]带来的所有影响。

### B. 生成元的谱性质

按照 [24], ，我们来考察生成元的谱分解。由于我们关注的是依赖时间的生成元，其特征系统也将依赖时间。因此，在每个时刻，我们都有特征值 $\lambda_i(t)$和特征矩阵 $\sigma_i(t)$，使得

$$\mathcal{L}_t\left[\sigma_i(t)\right] = \lambda_i(t)\sigma_i(t), \tag{6}$$

其中集合$\{\sigma_i(t)\}$ 构成一个完备基。

生成元不是厄米的，因此其特征值可能是复数，特征矩阵也可能不是厄米的。不过，生成元保持厄米性，这意味着

$$\left(\mathcal{L}_t\left[A\right]\right)^\dagger = \mathcal{L}_t\left[A^\dagger\right]. \tag{7}$$

这直接意味着

$$\mathcal{L}_t\left[\sigma_i^\dagger(t)\right] = \lambda_i^*(t)\sigma_i^\dagger(t), \tag{8}$$

这表明，如果 $\lambda_i(t)$是实数，那么 $\sigma_i(t)$可以选为厄米矩阵，反之亦然。反过来，如果 $\lambda_i(t)$是复数，其本征矩阵为 $\sigma_i(t)$，那么 $\sigma_i^\dagger(t)$也将是本征矩阵，其本征值为 $\lambda_i^*(t)$。

生成元也是迹破坏的，这意味着

$$\mathrm{Tr}\{\mathcal{L}_t[X]\} = 0 \quad \forall X. \tag{9}$$

因此，所有本征值非零的特征矩阵的迹均为零。

瞬时不动点（IFP）是本征值为零的特征矩阵，我们将其记为 $\rho_S^\star(t)$:

$$\mathcal{L}_t[\rho_S^\star(t)] = 0. \tag{10}$$

瞬时不动点总是存在的，这可以通过以下论证证明：我们可以将伴随生成元定义为具有如下性质的超算符 [15],

$$\mathrm{Tr}\{A\mathcal{L}_t[\rho_S]\} = \mathrm{Tr}\{\mathcal{L}_t^\dagger[A]\rho_S\}, \tag{11}$$

对于所有系统算符 $A$ 和密度矩阵 $\rho_S$。取 $A = \mathbb{1}$，我们看到 $\mathcal{L}_t^\dagger[\mathbb{1}] = 0$ （因为生成元是迹破坏的），也就是说，单位算符始终是伴随生成元的本征值为 0 的本征算符。因此，生成元总是存在一个本征值为零的厄米本征算符，即瞬时不动点 [25]。

由于基的完备性，该矩阵的迹非零；并且可以选择归一化，使本征算符的迹为 1。不过，这仍不能确保瞬时不动点是一个状态，因为我们还缺少正定性这一要求。我们将此留作进一步研究的课题，以下仅讨论瞬时不动点为状态的情形，并进一步假设它是满秩的（即它不位于态空间边界上）。

### C. 非马尔可夫性

文献中提出了许多关于如何定义量子区域内非马尔可夫动力学的方案[23, 26, 27]。这里，我们采用基于开放系统与其环境之间信息流的定义 [28, 29]。该信息流通过两个量子态的可区分性来定义$\rho^{1,2}_S(t)$，并以迹距离 [30, 31]量化

$$D_{\mathrm{tr}}(\rho_S^1(t), \rho_S^2(t)) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left|\rho_S^1(t) - \rho_S^2(t)\right|. \tag{12}$$

迹距离的任何动力学减小都可解释为开放系统中的信息损失，而迹距离随时间的增大则对应于从环境到开放系统的信息回流 [28]。因此，若迹距离单调减小，对应于信息从开放系统向环境的持续流失，则称给定的动力学为马尔可夫的。因此，非马尔可夫动力学的特征是由某对初始态 $\rho^{1,2}_S(0)$的迹距离的非单调行为所表征。这一概念还引出了一种由下式定义的记忆效应程度的度量

$$\mathcal{N}_{\mathrm{tr}}(\Phi) = \max_{\rho_S^{1,2}(0)} \int_{\dot{D}_{\mathrm{tr}}>0} dt\ \dot{D}_{\mathrm{tr}}(t) \tag{13}$$

其中 $\dot{D}_{\mathrm{tr}}(t) = \frac{d}{dt} D_{\mathrm{tr}}(\Phi_t[\rho_S^1(0)], \Phi_t[\rho_S^2(0)])$，用于衡量在所有初始态对中取最大值时的信息总回流量 [29]。

迹距离可用于衡量两个量子态 $\rho_S^1$ 和 $\rho_S^2$ 在先验概率相等时的可区分性$p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$。可以引入一定的偏置，使得 $\rho_S^1$ 以概率 $p_1$制备，而另一状态以概率 $p_2 = 1-p_1$制备。在这种情况下，状态的可区分性由矩阵的迹范数 $||\Delta|| = \mathrm{Tr}|\Delta|$ 量化

$$\Delta \equiv p_1\rho_S^1 - p_2\rho_S^2 \tag{14}$$

这称为 Helstrom矩阵 [32, 33]。更准确地说，这一陈述意味着，成功进行态判别的最大概率由表达式 $p_{\max} = \frac{1}{2}(1+||\Delta||)$ 给出。为涵盖此类有偏情形，在上述定义中，我们用相应 Helstrom矩阵的迹范数取代两个量子态的迹距离；此外，根据式 (13) 定义该度量时，还需对概率分布 $p_{1,2}$进行最大化。

本文采用基于 Helstrom矩阵的非马尔可夫性定义。如 [34, 35] 所示，这一定义等价于动力学映射 $\Phi_t$的 P-可分性。我们回顾一下：若式 (4) 中定义的映射$\Phi_t$ 在所有 $t \geq s \geq 0$ 下均为正，且我们假设映射的逆映射 $\Phi_t^{-1}$始终存在，则称动力学映射$\Phi_t$ 是 P-可分的。因此，在下文中，我们将非马尔可夫性视为映射不满足 P-可分性，并将任何 P-可分的（可逆）演化称为马尔可夫演化。

## III. 开放量子系统的熵产生

在建立了研究开放量子系统的理论框架后，我们现在关注熵产生的表述。首先回顾半群的既有表述（例如 Born-Markov近似成立时的情形），然后将此定义推广到弱耦合区间之外的系统。

### A. 动力学半群的熵产生

我们将基于 Spohn [11,36]所提出的弱耦合表述来定义熵产生。该方法适用于 CP半群，即具有如下性质的动力学映射： $\Phi_{t+s} = \Phi_t\Phi_s$。

这意味着生成元与时间无关（因此，任何不动点也与时间无关） [15]。此外，如果存在唯一的不动点，则任何初始态都会在长时间极限下收敛到该不动点，即 $\lim_{t\to\infty}\rho_S(t) = \rho_S^\star$。于是，相对于不动点 $\rho_S^\star$ 且对于初始态 $\rho_S(0)$，熵产生率定义为

$$\sigma_S(t) = -\left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} D\left(\Phi_\tau[\rho_S(t)]||\rho_S^\star\right), \tag{15}$$

其中

$$D(\rho_1||\rho_2) = \mathrm{Tr}\{\rho_1\left(\log\rho_1 - \log\rho_2\right)\} \tag{16}$$

是相对熵。相对熵也是一种衡量两个量子态之间可区分难易程度的表达式 [37], ，因此，式（15）表明，熵产生率是任意状态与不动点之间可区分性（以相对熵衡量）的变化率的负值。

由于每个 CP 半群都是 CP 可分的，且相对熵在 CP 映射下会收缩，因此可以证明，熵产生率始终为正 [11]。

### B. 熵产生的广义表达式

现在，我们希望为主方程显式含时的情形找到熵产生率的表达式。这使我们能够研究强耦合情形、非马尔可夫动力学或驱动系统等。

我们将采用两个假设：每个时刻都有唯一的不动点，且该不动点始终是一个状态。若像 Spohn 那样将熵产生定义为“相对于某个不动点” [36]，则第一个假设可以放宽。我们认为第二个假设的限制更大；为克服这一限制，还应在这方面开展更多研究。

接下来，我们将 Spohn 的表述加以扩展，以定义熵产生率：

$$\begin{aligned}\sigma_S(t) &= -\left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} D(\Phi_\tau^{(t)}[\rho_S(t)]||\rho_S^\star(t)) \\ &= -\left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} D(\rho_S(t+\tau)||\rho_S^\star(t)),\end{aligned} \tag{17}$$

其中我们用到了瞬时映射

$$\Phi_\tau^{(t)} \equiv e^{\tau\mathcal{L}_t}. \tag{18}$$

该表达式考虑了在每一时刻由相对熵度量的系统状态与IFP之间的趋近速率。若系统正在趋近不动点（以相对熵度量），则熵产生率为正；若系统在瞬时远离该不动点，则熵产生率将变为负。

我们注意到，式(17)也可以写成

$$\sigma_S(t) = -\mathrm{Tr}\left\{\mathcal{L}_t[\rho_S(t)]\left(\log\rho_S(t) - \log\rho_S^\star(t)\right)\right\}, \tag{19}$$

这明确表明，熵产生率是开放系统状态的泛函： $\sigma_S(t) = \sigma_S[\rho_S(t)\ t]$。这一概念已在不同背景下提出，例如文献 [14] 中的工作；我们将在第 IV C 节中进一步讨论该工作。在许多情况下，熵产生率的定义与这样的限制相关：IFP 是某种哈密顿量对应的吉布斯态，该哈密顿量可以是系统的裸哈密顿量 [5, 38], 、平均力哈密顿量 [10]„ 也可以是有效重整化哈密顿量 [13]。其原因如下：式 (17) 可以改写为

$$\sigma_S(t) = \dot{S}_S(t) + \mathrm{Tr}\{\dot{\rho}_S(t)\log\rho_S^\star(t)\}, \tag{20}$$

其中 $S_S(t) = -\mathrm{Tr}\{\rho(t)\log\ \rho(t)\}$ 是系统在每个时刻的冯·诺依曼熵。根据这个公式，我们可以将熵产生率解释为两个量之和：系统熵的变化 $\dot{(}\ S_S)$，加上熵流 $\mathrm{Tr}\{\dot{\rho}_S(t)\log(\rho_S^\star(t))\}$。当 IFP 可以写成某个哈密顿量在特定温度下的吉布斯态时， $\rho_S^\star(t) = e^{-\beta_x(t)H_x(t)}/Z_x(t)$，并且该哈密顿量与用于计算第一定律量的哈密顿量相同˙（也就是说，热由 $Q_S(t) = \mathrm{Tr}\{H_x(t)\dot{\rho}_S(t)\}$给出），那么式 (20) 就具有克劳修斯熵产生率的形式：

$$\sigma_S(t) = \dot{S}_S(t) - \beta_x(t)\dot{Q}_S(t). \tag{21}$$

然而，克劳修斯关系只是式（17）中表述的一种特殊情况，并不普遍成立。那么，为什么不使用克劳修斯关系来表述熵产生率呢？我们发现有多种原因。首先，对于开放量子系统中的热交换，仍有许多相互竞争的定义 [4, 7, 39], ，但我们提出的定义独立于我们对第一定律的表述。此外，当环境处于演化状态且与系统强耦合时，如何定义环境的温度并不明确；为解决这一问题而提出的一些方法需要计算热浴的能量 [40] 或熵 [7] 。如果在实验装置中无法完全控制热浴，这类计算可能极其复杂，甚至根本无法进行。另一方面，本文提出的表述避免了使用温度（不过，如上所示，在满足适当条件时，它确实会得到类似克劳修斯关系的表述）。此外，这一表述仅基于系统自身的自由度，因此在实验上更容易实现。再者，这一定义使我们能够将负熵产生率与记忆效应联系起来，稍后将在第 IV 节中讨论。

最后，对式（20）积分，我们得到总熵产生量——

在时间区间 $[0,t]$ 内为 [38]

$$\begin{aligned}\Sigma_S(t) &= \int_0^t ds\ \sigma_S(s)\\ &= \Delta S_S(t) + \int_0^t ds\ \mathrm{Tr}\{\dot\rho_S(s)\log\rho_S^\star(s)\}\\ &= D(\rho_S(0)||\rho_S^\star(0)) - D(\rho_S(t)||\rho_S^\star(t))\\ &\quad - \int_0^t ds\mathrm{Tr}\{\rho_S(s)\partial_s\log\rho_S^\star(s)\}. \end{aligned} \tag{22}$$

注意，当 IFP 与时间无关时，最后一项为零。在这种情况下，$[0,t]$ 中产生的总熵 [38, 41]归结为该时间区间内相对熵的变化。基于上述考虑，下面我们将熵产生率的正定性解释为

$$\sigma_S(t) \geq 0, \tag{23}$$

非平衡量子热力学中的一种广义第二定律，它体现了动力学的不可逆性。

### C. 熵产生率的正定性与生成元的谱之间的关系

本节研究生成元的谱与熵产生率之间的关系。我们首先提出一些假设。首先，再次假设 IFP 是一个状态。此外，进一步假设它属于动力学映射 $\Phi_t$ 的像是合理的（对于大多数无驱动的开放系统情形，这一假设都成立；而在强驱动存在时可能不成立），并且它不位于态空间边界上。于是，对于任意无迹厄米矩阵 $X$ 以及足够小的 $\varepsilon>0$，任意形如 $\rho_S(t) = \rho_S^\star(t) + \varepsilon X$ 的状态都可能是在时间 $t$ 达到的状态。

那么，我们可以对生成元的特征值作何判断？设在时间 $t$ 的状态具有如下形式

$$\rho_S(t) = \rho_S^\star(t) + \varepsilon\sigma_\alpha(t), \tag{24}$$

其中，$\sigma_\alpha(t)$是生成元的厄米且无迹的特征矩阵之一。将其代入式（19），得到

$$\begin{aligned}&\sigma_S(t) = \\ &-\varepsilon\lambda_\alpha(t)\mathrm{Tr}\left\{\sigma_\alpha(t)\Big[\log\left(\rho_S^\star(t)+\varepsilon\sigma_\alpha(t)\right) - \log\rho_S^\star(t)\Big]\right\},\end{aligned} \tag{25}$$

其中，$\lambda_\alpha(t)$ 是与 $\sigma_\alpha(t)$ 对应的实本征值。现在我们可以注意到，方程 (25) 可以改写为

$$\begin{aligned}\sigma_S(t) = -\varepsilon\lambda_\alpha(t)\Big[\ & D(\rho_S^\star(t)+\varepsilon\sigma_\alpha(t)||\rho_S^\star(t))\\ &+D(\rho_S^\star(t)||\rho_S^\star(t)+\varepsilon\sigma_\alpha(t))\ \Big],\end{aligned} \tag{26}$$

其中出现了对称化相对熵。由于两个状态之间的相对熵始终为正，因此我们可以得出结论：对于所有初始态，若 $\sigma_S(t)$ 为正，则 $\lambda_\alpha(t)$ 为负。

对于复特征值的实部，也可以得到类似但稍复杂的证明。为简化记号，下文将省略对时间 $t$的依赖。接下来，为考察复特征值的影响，我们定义厄米矩阵 $X_\alpha \equiv \sigma_\alpha + \sigma_\alpha^\dagger$ 和 $Y_\alpha \equiv i(\sigma_\alpha - \sigma_\alpha^\dagger)$，其中 $\sigma_\alpha$ 现在是生成元的非厄米特征矩阵之一，并计算状态$\rho_1 = \rho_S^\star + \varepsilon X_\alpha$ 和状态 $\rho_2 = \rho_S^\star + \varepsilon Y_\alpha$的熵产生率。相应熵产生率的表达式如下：

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -\varepsilon\mathrm{Tr}\Big\{(\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha X_\alpha + \mathrm{Im}\,\lambda_\alpha Y_\alpha)\\ &\qquad\Big[\log(\rho_S^\star+\varepsilon X_\alpha) - \log\rho_S^\star\Big]\Big\},\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= -\varepsilon\mathrm{Tr}\Big\{(\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha Y_\alpha - \mathrm{Im}\,\lambda_\alpha X_\alpha)\\ &\qquad\Big[\log(\rho_S^\star+\varepsilon Y_\alpha) - \log\rho_S^\star\Big]\Big\}.\end{aligned} \tag{28}$$

若对于所有初始态，熵产生率均为正（依照 $\geq 0$的含义），则上述两个量之和也应为正。将二者合并，并用相对熵重写，可得

$$\begin{aligned}&\sigma_1+\sigma_2 \\ &= -\varepsilon\Big\{\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha\ \Big[\ D(\rho_S^\star+\varepsilon X_\alpha||\rho_S^\star) + D(\rho_S^\star||\rho_S^\star+\varepsilon X_\alpha)\\ &\qquad +D(\rho_S^\star+\varepsilon Y_\alpha||\rho_S^\star) + D(\rho_S^\star||\rho_S^\star+\varepsilon Y_\alpha)\Big]\\ &\quad +\mathrm{Im}\,\lambda_\alpha\ \Big[\ D(\rho_S^\star||\rho_S^\star+\varepsilon Y_\alpha) - D(\rho_S^\star+\varepsilon Y_\alpha||\rho_S^\star)\\ &\qquad +D(\rho_S^\star+\varepsilon X_\alpha||\rho_S^\star) - D(\rho_S^\star||\rho_S^\star+\varepsilon X_\alpha)\\ &+D(\rho_S^\star+\varepsilon Y_\alpha||\rho_S^\star+\varepsilon X_\alpha) - D(\rho_S^\star+\varepsilon X_\alpha||\rho_S^\star+\varepsilon Y_\alpha)\Big]\Big\}.\end{aligned} \tag{29}$$

这里，本征值的实部再次与对称化相对熵相乘，而虚部则与我们可称为反对称化相对熵的量相乘（此外，表达式前面还有 $\varepsilon$）。可以证明（详情见附录 A），对称化相对熵随$\varepsilon^2$缩放，而反对称化相对熵，亦即相对熵的不对称性，是 $\varepsilon^3$ [42]阶。因此，当 $\varepsilon$足够小时，只剩下含本征值实部的项。该项由一系列相对熵之和构成，这些相对熵总是正的，并乘以 –Re$\lambda_\alpha$。因此，我们得出

$$\sigma(t)\geq 0 \quad \forall\rho_S(0) \quad\Rightarrow\quad \mathrm{Re}\,\lambda_i(t)\leq 0\ \forall i, \tag{30}$$

这正是要证明的结论。据我们所知，公式 (30) 的反向命题不一定成立。

另一方面，否定公式 (30) 中的逻辑关系意味着，如果生成元谱中的某个特征值实部为正，并且

映射满足我们的假设，即 IFP 周围的一个小体积始终属于该映射的像，那么就存在某个初始态，使得第二定律被违反。这使得我们能够根据生成元谱对第二定律作出预测。

## IV. 熵产生率与非马尔可夫性之间的联系

接下来，我们将研究本文提出的熵产生率表述与记忆效应的存在或缺失之间的联系；这里，记忆效应以P-可分性来理解。首先，我们证明，对于所有可能的初始态，P-可分性意味着任意时刻的熵产生率均为正。随后，我们借助一个采用相位协变量子比特动力学模型的反例，说明其逆命题并不成立。

### A. P-可分性意味着正的熵产生率

沿用 [43], 中的论证，我们假设动力学映射 $\Phi_t$ 是P可分的。这意味着，若固定时间 $t$，超算符$\mathcal{L}_t$ 就是一个正半群的生成元，该正半群由式（18）中定义的瞬时映射给出。此外，正如布劳威尔不动点定理所示，任意正半群都有一个不动点，且该不动点也是正的（因此是一个状态）[44]。因此，对于任意 P-可分映射，熵产生都有明确定义。

由于式(17)中的IFP在应用式(18)中的瞬时映射时保持不变，我们可以将熵产生率改写为

$$\sigma_S(t) = -\left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} D\left(\Phi_\tau^{(t)}[\rho_S(t)]||\Phi_\tau^{(t)}[\rho_S^\star(t)]\right). \quad (31)$$

文献 [45] 中已证明，相对熵在对其两个自变量同时施加正映射时具有收缩性，因此式(31)中的导数为负，从而使熵产生率为正。

因此，我们已证明

$$\text{P-divisibility} \Rightarrow \sigma_S(t) \geq 0 \quad \forall \rho_S(0). \quad (32)$$

最后，我们可以反过来审视这一逻辑论证，并看到第二定律的任何违背，即负的熵产生率，都可以直接与缺乏P-可分性联系起来，从而与该映射的非马尔可夫性联系起来。

### B. 正的熵产生率是否意味着P-可分性?

鉴于上述马尔可夫性与熵产生率之间的联系，自然会产生如下问题：能否由始终为正的熵产生率推断出P-可分性。答案是否定的；我们在此给出一个反例，其中P-可分性被破坏，但这无法从熵产生率判断出来，因为对所有初始态而言，熵产生率始终为正。我们在相位协变模型中发现了这一点，该模型是量子比特动力学的一个典范模型 [46–48]。因此，我们首先给出以布洛赫向量表示的量子比特熵产生率的紧凑表达式，然后再展示该反例本身。

#### 1. 量子比特的熵产生率

对于量子比特，量子态可以用其布洛赫向量来描述 $\vec{v}$，使得

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \vec{v}\cdot\vec{\sigma}\right), \quad (33)$$

其中， $\vec{\sigma} = (\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z)$为泡利矩阵。现在，我们推导一个公式，用系统状态的布洛赫向量 $\vec{v}(t)$和 IFP$\vec{v}^\star(t)$表示熵产生率。

要使用式（19）中给出的熵产生率定义，我们需要计算密度矩阵的对数。因此，将量子态改写为指数形式 $\rho = e^{\vec{r}\cdot\vec{\sigma}}/Z$会很有用，其中 $Z = \text{Tr}\{e^{\vec{r}\cdot\vec{\sigma}}\}$ 确保状态的迹等于 1。利用关系式 $e^{i\theta(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})} = \mathbb{1}\cos\theta + i(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\sin\theta$, 其中 $\vec{n}$ 为归一化向量，我们得到

$$\frac{e^{\vec{r}\cdot\vec{\sigma}}}{Z} = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \tanh|\vec{r}|\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\cdot\vec{\sigma}\right). \quad (34)$$

我们希望该表达式描述与式 (33) 中相同的状态，而这只有在向量 $\vec{r}$与布洛赫向量 $\vec{v}$方向相同，并且该向量的模为 $|\vec{r}| = \text{arctanh}|\vec{v}|$时才能直接成立。因此，若我们选择

$$\vec{r} \equiv \text{arctanh}|\vec{v}|\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}. \quad (35)$$

回顾式 (19)，并将状态和 IFP 写成指数形式，我们得到熵产生率

$$\sigma_S(t) = -\text{Tr}\left\{\dot{\rho}_S(t)\left(\log\frac{e^{\vec{r}(t)\cdot\vec{\sigma}}}{Z(t)} - \log\frac{e^{\vec{r^\star}(t)\cdot\vec{\sigma}}}{Z^\star(t)}\right)\right\}, \quad (36)$$

经过直接计算后，由此得到

$$\sigma_S(t) = -\left[\vec{r}(t) - \vec{r}^\star(t)\right]\cdot\dot{\vec{v}}(t), \quad (37)$$

从而得到一个用布洛赫向量表示熵产生率的紧凑表达式。

### 2. 反例

我们采用量子比特动力学的相位协变主方程，其P-可分性判据已为人所知[46, 47]。该主方程表示为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t\left[\rho_S(t)\right] \;=\; & -i\left[\frac{\omega_r(t)}{2}\sigma_z,\rho_S(t)\right] \\ & +\gamma_z(t)\left[\sigma_z\rho_S(t)\sigma_z-\rho_S(t)\right] \\ & +\gamma_+(t)\left[\sigma_+\rho_S(t)\sigma_- -\frac{1}{2}\left\{\sigma_-\sigma_+,\rho_S(t)\right\}\right] \\ & +\gamma_-(t)\left[\sigma_-\rho_S(t)\sigma_+ -\frac{1}{2}\left\{\sigma_+\sigma_-,\rho_S(t)\right\}\right],\end{aligned} \tag{38}$$

其中 $\sigma_z$ 中包含哈密顿量项，其频率 $\omega_r(t)$ 随时间变化；吸收 $\gamma_+(t)$、发射 $\gamma_-(t)$ 和纯退相干 $\gamma_z(t)$ 的速率及其对应的耗散子。

由主方程 (38) 可得布洛赫向量的海森堡运动方程：

$$\begin{aligned}\dot{v}_x(t) &= -\omega_r(t)v_y(t)-\left(\frac{\gamma_+(t)+\gamma_-(t)}{2}+2\gamma_z(t)\right)v_x(t),\\ \dot{v}_y(t) &= \omega_r(t)v_x(t)-\left(\frac{\gamma_+(t)+\gamma_-(t)}{2}+2\gamma_z(t)\right)v_y(t),\\ \dot{v}_z(t) &= -(\gamma_+(t)+\gamma_-(t))v_z(t)+\gamma_+(t)-\gamma_-(t).\end{aligned} \tag{39}$$

定义以下函数即可求解这些方程

$$\lambda(t)\equiv\exp\left[-\frac{\Gamma_+(t)+\Gamma_-(t)}{2}-2\Gamma_z(t)\right], \tag{40}$$

$$\lambda_z(t)\equiv\exp\left[-\Gamma_+(t)-\Gamma_-(t)\right], \tag{41}$$

$$t_z(t)\equiv\lambda_z(t)\int_0^t ds\left[\gamma_+(s)-\gamma_-(s)\right]e^{\Gamma_+(s)+\Gamma_-(s)}, \tag{42}$$

其中 $\Gamma_{\pm(z)}(t)\equiv\int_0^t ds\;\gamma_{\pm(z)}(s)$，于是布洛赫向量的演化可表示为

$$v_x(t) \;=\; \lambda(t)\left[v_x(0)\cos\Omega(t)+v_y(0)\sin\Omega(t)\right], \tag{43}$$

$$v_y(t) \;=\; \lambda(t)\left[-v_x(0)\sin\Omega(t)+v_y(0)\cos\Omega(t)\right], \tag{44}$$

$$v_z(t) \;=\; v_z(0)\lambda_z(t)+t_z(t), \tag{45}$$

这里还用到了 $\Omega(t)\equiv\int_0^t ds\;\omega_r(s)$。

此外，主方程有一个唯一且随时间变化的不动点，其形式为

$$\vec{v}^{\star}(t)=\left(0,0,\frac{\gamma_+(t)-\gamma_-(t)}{\gamma_+(t)+\gamma_-(t)}\right). \tag{46}$$

我们将讨论范围限定在瞬时不动点为状态的参数范围内（为此，$|\vec{v}^{\star}(t)|\le 1$，或者等价地，$\gamma_{\pm}(t)$ 在每个时刻都具有相同的符号），因此熵产生有明确定义。

我们的目标是找到一种非P可分动力学，尽管如此，其熵产生率始终为正。关于映射具有 P-可分性的充要条件为 [46]

$$\gamma_{\pm}(t) \;\ge\; 0, \tag{47}$$

$$\sqrt{\gamma_+(t)\gamma_-(t)}+2\gamma_z(t) \;\ge\; 0, \tag{48}$$

这些条件必须在所有时刻都满足。

另一方面，为了使熵产生率保持为正，映射的所有特征值都必须具有负实部（如前文第 III C 节所示，这是一个必要条件）。生成元的特征值和特征矩阵（未归一化）如下：

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_t\left[\rho_S^{\star}(t)\right]=0,\\ &\mathcal{L}_t\left[\sigma_z\right]=-(\gamma_+(t)+\gamma_-(t))\sigma_z,\\ &\mathcal{L}_t\left[\sigma_+\right]=\left[-i\omega_r(t)-\left(\frac{\gamma_+(t)+\gamma_-(t)}{2}+2\gamma_z(t)\right)\right]\sigma_+,\\ &\mathcal{L}_t\left[\sigma_-\right]=\left[i\omega_r(t)-\left(\frac{\gamma_+(t)+\gamma_-(t)}{2}+2\gamma_z(t)\right)\right]\sigma_-.\end{aligned} \tag{49}$$

掌握了这些信息后，我们便可以选择主方程的参数。为了减少参数数量，我们选择 $\omega_r(t)=0$。随后，负特征值的要求与保持瞬时不动点为状态的要求共同迫使我们为 $\gamma_{\pm}(t)$ 选择正值。此外，我们还需要

$$-\frac{\gamma_+(t)+\gamma_-(t)}{4}<\gamma_z(t)<-\frac{\sqrt{\gamma_+(t)\gamma_-(t)}}{2}, \tag{50}$$

其中，左侧不等式确保生成元的特征值实部为负；为保证熵产生率为正，该条件必须在所有时间都成立（见式（49））。右侧不等式则用于违反式（48）中的 P-可分性判据，且只需在之后的某个时刻成立。

我们选择 $\gamma_+(t)=0.2$ 和 $\gamma_-(t)=0.8$。对于 $\gamma_z(t)$，我们选择函数为

$$\gamma_z(t)=\begin{cases}0 & \text{for } t\le 1\\ -0.22(t-1) & \text{for } 1<t\le 2\\ -0.22 & \text{for } t>2,\end{cases} \tag{51}$$

该函数从零速率开始，因此映射最初是 P可分的（这也使其可以是完全正的），随后线性递减，直至达到违反 P-可分性的值。在附录 B 中，我们证明所选映射是完全正的。

现在，我们利用式（37）计算并绘制不同初始态下的熵产生率，如图 1 所示。

由于动力学具有相位协变性，即在绕 $z$ 轴旋转时保持不变，因此只需研究 $xz$ 平面上的初始态。因此，我们取如下形式的量子态

$$\vec{v}(0)=v(0)(\cos\theta,0,\sin\theta)^T, \tag{52}$$

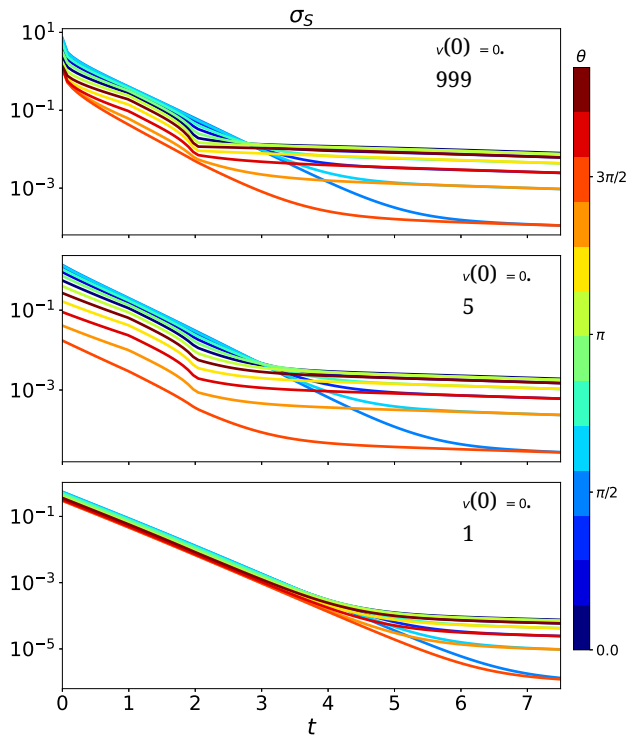


图1. 相位协变模型的熵产生率随时间的变化，针对具有布洛赫向量 $\vec{v}(0) = v(0)(\cos\theta,\ 0,\ \sin\theta)^T$ 的不同初始态。每个子图对应 $v(0)$ 的一个不同取值，每条不同颜色的线则表示 $\theta$ 的一个不同取值。主方程的参数为 $\gamma_+ = 0.2$、$\gamma_- = 0.8$，以及一个时间依赖的 $\gamma_z(t)$，其表达式见式（51）。该映射违反 P-可分性，但熵产生率并未反映这一点，其始终为正。

其中，我们同时改变角度 $\theta$ 和初始半径$v(0)$。此外，由于 IFP 仅在 $z$ 方向上有分量，因此关于 $z$轴镜像对称的量子态会得到相同的熵产生率，见方程（37）：如果代入 $v_x \to -v_x$，则还可得到$r_x \to -r_x$ 和 $\dot{v}_x \to -\dot{v}_x$，因此负号会相互抵消。因此，我们希望选择满足 $\theta = n\frac{2\pi}{N}$ 的值，其中 $N$ 是奇数，且 $n$ 从 0 取到 $N-1$。这样，不同的初始态之间就不会关于 $z$轴互为镜像，从而避免重复。

图1展示了式（52）所示形式的不同初始态下，熵产生率随时间的变化。可以看到，所有情况下熵产生率始终为正，而选择 $\gamma_z(t)$ 会使该映射变为非 P可分。

我们可以进一步研究图像，并发现大多数曲线在 $\gamma_z(t)$ 发生突变的时间点也会发生突变。也就是说，除了带有$\theta \approx \frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$ 的曲线之外；这些曲线对应于位于 $z$ 轴上的初始态。正如从式 (45) 中布洛赫向量的 $z$ 分量的演化可以看出的那样，这些量子态的动力学与 $\gamma_z(t)$无关。对应于 $v(0) = 0.1$ 的图也呈现出这种平滑的行为。这似乎表明，即使对于非常接近不动点的量子态，$z$ 的贡献也超过了熵产生。此外，我们还看到，当 $t$较大时，曲线会两两成对：对应于关于 $x$ 轴镜像对称的初始态最终具有相同的熵产生率。这是因为，在所选参数下，布洛赫向量的 $z$ 分量朝其平衡值衰减的速度远快于其他方向。因此，关于 $x$ 轴镜像对称的量子态在时间较长时会到达同一点。

这些数值证据支持这样一种观点：对于这个非 P 可分映射，熵产生率始终为正。不过，我们仍将寻求这一结论的解析证明。

首先，我们要根据式（37）中推导出的量子比特系统公式，写出相位协变模型中熵产生的表达式。我们回顾布洛赫向量的运动方程（见式（39）），并将其改写为

$$\dot{\vec{v}}(t) = \begin{pmatrix} -\omega_r(t)v_y(t) + \mu_2(t)v_x(t) \\ \omega_r(t)v_x(t) + \mu_2(t)v_y(t) \\ \mu_1(t)\left(v_z(t) - v_z^\star(t)\right) \end{pmatrix}, \tag{53}$$

其中，我们将$\mu_{1,\ 2}(t)$定义为生成元特征值的实部：

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= -\gamma_+(t) - \gamma_-(t) = -1, \\ \mu_2(t) &= -\left(\frac{\gamma_+(t) + \gamma_-(t)}{2} + 2\gamma_z(t)\right) = -0.5 - 2\gamma_z(t). \end{aligned} \tag{54}$$

利用式（35）中向量 $\vec{r}$ 的定义，结合式（37）以及式（46）中的不动点，我们得到熵产生

$$\begin{aligned} \sigma_S(t) &= -\mu_2(t)\frac{\operatorname{atanh}|\vec{v}(t)|}{|\vec{v}(t)|}\left(v_x^2(t) + v_y^2(t)\right) \\ &\quad -\mu_1(t)(v_z(t) - v_z^\star(t)) \\ &\quad \cdot\left(\frac{\operatorname{atanh}|\vec{v}(t)|}{|\vec{v}(t)|}v_z(t) - \frac{\operatorname{atanh}|v_z^\star(t)|}{|v_z^\star(t)|}v_z^\star(t)\right). \end{aligned} \tag{55}$$

下面为简化记号，我们将省略时间依赖。现在注意到，熵产生可以改写为三个变量的函数：$v_z$、$v \equiv |\vec{v}|$ 和 $\mu_2$:

$$\begin{aligned} \sigma_S &= -\mu_2\frac{\operatorname{atanh} v}{v}\left(v^2 - v_z^2\right) \\ &\quad -\mu_1(v_z - v_z^\star)\cdot\left(\frac{\operatorname{atanh} v}{v}v_z - \frac{\operatorname{atanh}|v_z^\star|}{|v_z^\star|}v_z^\star\right), \end{aligned} \tag{56}$$

而其他所有参数（即 $\mu_1$ 和 $v_z^\star$）均与时间无关。此外，该函数仅限于该区域

$$-1 \le v_z \le 1, \qquad |v_z| \le v \le 1. \tag{57}$$

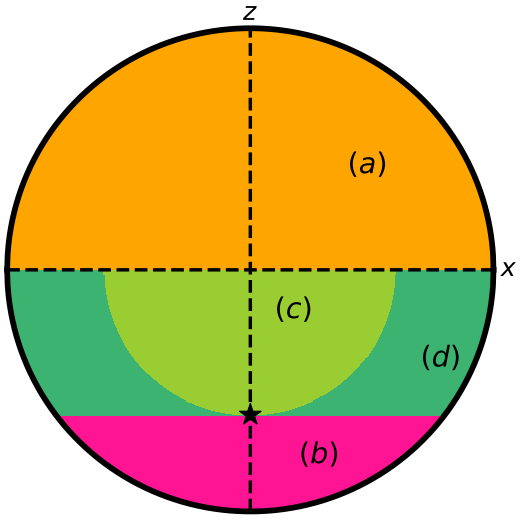


图 2. 将布洛赫球投影到 $xz$ 平面上，不同颜色突出显示了证明熵产生率始终为正时所用的不同区域。

我们通过区分布洛赫球上的四个不同区域来展开证明，并指出，对于所选参数 $v_z^\star = -0.6 < 0$ 和 atanh $x/x$而言，该函数关于 $x \geq 0$为正且单调递增。图 2 展示了下文区分的不同区域。

(a) $v_z \geq 0$。由于特征值的实部始终为负，公式（56）的第一行始终为正，而负贡献可能出现在第二项中。此外，在这种情况下，公式（56）中熵产生率第二部分的两个因子均为正：

$$v_z - v_z^\star > 0, \qquad \frac{\operatorname{atanh} v}{v} v_z - \frac{\operatorname{atanh}|v_z^\star|}{|v_z^\star|} v_z^\star > 0.$$

因此，构成熵产生率的所有项均为正，我们可以得出结论 $\sigma_S(t) \geq 0$。

(b) $v_z \leq v_z^\star$ 这种情况与上面的情况类似，因为第二行中的两个因子符号相反：

$$v_z - v_z^\star \leq 0, \qquad \frac{\operatorname{atanh} v}{v} v_z - \frac{\operatorname{atanh}|v_z^\star|}{|v_z^\star|} v_z^\star \leq 0.$$

这意味着熵产生率再次始终大于或等于零。

(c) $0 > v_z > v_z^\star$ 和 $v \leq |v_z^\star|$。我们首先注意到

$$v_z - v_z^\star > 0.$$

至于第二项，我们可以论证

$$\frac{\operatorname{atanh} v}{v} v_z - \frac{\operatorname{atanh}|v_z^\star|}{|v_z^\star|} v_z^\star \geq \frac{\operatorname{atanh}|v_z^\star|}{|v_z^\star|} (v_z - v_z^\star) > 0,$$

由此，公式（56）中的第二项也为正，从而 $\sigma_S \geq 0$。

(d) $0 > v_z > v_z^\star$ 和 $v > |v_z^\star|$。证明的这一部分更为复杂，我们在附录 C 中给出其细节。

这为“对第二定律的观测可以判定P-可分性”这一假说提供了一个反例。然而我们注意到，我们发现反例的参数范围（使得该映射是完全正的，但不是P可分的，并且所有特征值均为负）相对较小，这表明这种特殊行为并不容易出现。

为结束我们的研究，我们考察相位协变模型的一个特例，即动力学映射成为幺正保持映射的情形。在这种情况下，不动点位于布洛赫球的中心 $\vec{v}^\star = \vec{0}$，而这只有当 $\gamma_+(t) = \gamma_-(t)$时才会发生。于是，P-可分性判据（见公式（47）和（48））变为

$$\gamma_+(t) \geq 0, \qquad \gamma_+(t) + 2\gamma_z(t) \geq 0. \tag{58}$$

此外，如果我们考察公式（54）中特征值的实部，就会看到这些实部为负的条件与公式（58）中的P-可分性条件等价。最后，回顾公式（56）中得到的熵产生率表达式，我们看到对于幺正保持映射，它变为

$$\sigma_S = \frac{\operatorname{atanh} v}{v} \left[ -\mu_2 \left( v_x^2 + v_y^2 \right) - \mu_1 v_z^2 \right], \tag{59}$$

只有当 $\mu_1, \mu_2 \leq 0$ 在所有时间都成立时，它才始终为正。因此，对于幺正相位协变模型，所考虑的三种性质（映射的 P-可分性、本征值为负以及熵产生率为正）彼此等价。

### C. 非马尔可夫性与映射熵产生率的等价性

就在本文撰写期间，Théret等人 [14]近期针对相同问题开展了一项类似研究。该研究的作者比较了不同熵产生率定义在 Jaynes-Cummings 模型中的动力学行为，其中包括我们在式（17）中给出的定义，并特别指出其中两种定义相同：即本文研究的定义与 Esposito等人在 [4]中提出的定义。尽管这是一个有趣的结果，但我们注意到，它并非普遍成立；正如我们近期对纯退相干模型的研究所示 [12]。作者还进一步证明，熵产生率的正定性并不等同于动力学映射的 P-可分性。他们还采用一个相位协变模型进行了数值验证。巧合的是，本研究也选用了该模型作为反例，得到了一致的结果；此外，我们还对非 P-可分映射的熵产生率始终为正这一事实给出了解析证明。

最后，Theret等人引入了一个函数，并将其称为映射熵产生，定义如下：

$$\sigma_{\rm map}(t) \equiv \min_{\rho_A} \left\{ -{\rm Tr}\left\{ \mathcal{L}_t[\rho_A] \left[ \log \rho_A - \log \rho_S^\star(t) \right] \right\} \right\}, \quad (60)$$

这与式 (19) 的不同之处在于，该函数对所有可能的输入态取最小值 $\rho_A$，并且对于任意时间 $t$，参数 $\rho_A$ 可以是任意正迹为1矩阵，即使该状态已无法通过动力学到达。回想一下，这正是我们在反例中证明熵产生率的正定性时必须采用的考量（见附录 C）：$\sigma_S(t)$ 仍保持正定，这是因为某些状态在经过一段时间 $t$ 后不再可用。文献 [14] 的作者研究了该量与映射在时间 $t$ 的 P-可分性之间的关系；这里的 P-可分性指存在 $\tau > 0$，使得传播子 $\Phi_{t,\ t'}$ 对所有 $t \le t' < t + \tau$ 都是正的。我们也希望在下文研究这个函数。

首先，当映射在时间 $t$ 处是 P-可分的，$\sigma_{\rm map}$ 可以改写为具有类似式 (17) 结构的形式：

$$\sigma_{\rm map}(t) = \min_{\rho_A} \left\{ -\left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} D(\Phi_\tau^{(t)}[\rho_A] || \rho_S^\star(t)) \right\}. \quad (61)$$

那么，正如 [14], 中所证明的，正映射下相对熵的压缩性 [45]意味着

$$\text{P-divisibility} \ \Rightarrow \ \sigma_{\rm map} \ge 0. \quad (62)$$

此外，总可以选择 $\rho_A = \rho_S^\star(t)$，使得式（60）中待最小化的量等于零，因此当映射具有 P-可分性时，便有 $\sigma_{\rm map} = 0$。

然而，当 P-可分性遭到破坏时，式（60）所定义的映射熵产生便不再等同于式（61），因为非正的瞬时映射 $\Phi_\tau^{(t)}$会将某个状态 $\rho_A$ 映射为非正矩阵，而只有当相对熵的两个自变量都是状态时，它才是定义良好的函数。因此，该函数不再能解释为状态 $\rho_A$ 与瞬时映射作用下的瞬时不动点之间相对熵的变化。

尽管如此，本文仍在 [14]中选用这一量，因为它与记忆效应有关；作者还表明，对于相位协变的量子比特动力学，正的 $\sigma_{\rm map}(t)$意味着 P-可分性，因此 $\sigma_{\rm map}$ 的正定性是判定映射正定性的充要条件。

我们希望探究能否将这一证明推广到 $d$能级系统。对于一般的动力学，是否可以通过 $\sigma_{\rm map}$ 检测到任何 P-可分性的缺失？为回答这一问题，我们首先指出，根据 Kossakowski 的一个定理，[34, 49] 映射在时间 $t$ 是 P-可分的，当且仅当生成元满足条件

$$\langle j | \mathcal{L}_t \left( |i\rangle\langle i| \right) |j\rangle \ge 0 \quad \forall i \ne j \quad (63)$$

对于所有正交归一基 $\{|i\rangle\}$。因此，如果一个映射不是 P可分的，那么就存在一个正交归一基 $\{|i\rangle\}$，使得 that

$$\langle m | \mathcal{L}_t \left( |n\rangle\langle n| \right) |m\rangle < 0 \quad (64)$$

对于某一对量子态 $|n\rangle$、$|m\rangle$。接着，我们取一个具有如下谱分解的状态

$$\rho_A = \sum_{i=1}^{d} p_i |i\rangle\langle i|, \quad (65)$$

并确定式（60）中最小化项内的第一项，即

$$\begin{aligned} \dot{S}_S(\rho_A) &= -{\rm Tr}\left\{ \mathcal{L}_t(\rho_A) \log \rho_A \right\} \\ &= -\sum_{i,j=1}^{d} p_i \log p_j \langle j | \mathcal{L}_t(|i\rangle\langle i|) | j \rangle. \end{aligned} \quad (66)$$

我们看到，生成元的任何负分量（表明存在非马尔可夫性）都会出现在求和中。因此，我们希望以一种合适的方式选择状态 $\rho_A$，使这一分量占据主导地位。若选择 $\rho_A$ 位于态空间边界上（即非满秩：$p_i = 0$ 对于某个 $i$），则相应的对数项会发散，并在对 $j$求和时占据主导地位。这恰好是通常在经过一定时间后无法通过动力学到达的那类状态，而这正是$\sigma_{\rm map}$ 与熵产生率的区别。

我们首先考虑最简单的情形：二能级系统。在这种情况下，我们选取 $p_n = 1 - \varepsilon$ 和 $p_m = \varepsilon$，并令 $\varepsilon > 0$，使得式 (66) 变为

$$\dot{S}_S(\rho_A) = -(\log \varepsilon)(1 - \varepsilon) \, \langle m | \mathcal{L}_t(|n\rangle\langle n|) | m \rangle + \ldots, \quad (67)$$

其中省略号表示在极限 $\varepsilon \to 0$下保持有限的项。因此，我们看到，在此极限下，$S_S(\rho_A)$趋近于 $-\infty$。另一方面，式 (60) 中的第二项始终有限（假设 IFP 为满秩），因此，$\sigma_{\rm map}$ 变为 $-\infty$。

对于一个 $d$维系统，我们选取 $p_n = 1 - \varepsilon - \eta$、$p_m = \varepsilon$ 以及所有其他 $p_i = \eta/(d-2)$（以确保归一化），令 $\varepsilon$，$\eta > 0$，并得到

$$\begin{aligned} \dot{S}_S(\rho_A) &= -\log \varepsilon \Big[ (1 - \varepsilon - \eta) \langle m | \mathcal{L}_t(|n\rangle\langle n|) | m \rangle \\ &\quad + \frac{\eta}{d-2} \sum_{i \ne n,m} \langle m | \mathcal{L}_t(|i\rangle\langle i|) | m \rangle \Big] + \ldots \end{aligned} \quad (68)$$

现在我们选取足够小的 $\eta$，使得 $S_S(\rho_A)$ 的符号由上一个表达式第一行中的项决定，然后取极限 $\varepsilon \to 0$。这导出与之前相同的结论，即 $S_S(\rho_A)$在此极限下趋近于 $-\infty$，因此，$\sigma_{\rm map}$ 再次等于 $-\infty$。

总之，我们已经证明，任何非P可分动力学都会导致一个负的 $\sigma_{\rm map}$（或者反过来说，如果 $\sigma_{\rm map} \ge 0$，那么就不可能违反P-可分性）。结合式（62），可得结果

$$\text{P-divisibility} \iff \sigma_{\rm map} \ge 0, \quad (69)$$

对于任何有限维系统。然而，正如我们所见，$\sigma_{\mathrm{map}}$ 只有两个可能的取值，即 $\sigma_{\mathrm{map}}$ =若映射是P可分的，则为0；若映射不是P可分的，则为 $\sigma_{\mathrm{map}} = -\infty$ 。因此，这个量应被理解为一个二元变量，用以表示动力学是否为P可分，而不是映射的熵产生率。

## V. 讨论与结论

在本研究中，我们探讨了开放量子系统熵产生率的一种局域定义。该定义（见式（17））考察系统状态在每个时刻与一个瞬时不动点之间相对熵的变化率；该瞬时不动点由系统演化的时间局域生成元得到。因此，这是一种纯粹局域的定义，仅基于系统自身的自由度，从而只要能够全面追踪系统的动力学，就可通过实验测得各种系统与环境的耦合情形。

目前，该定义的主要限制是只能用于 IFP 为状态的情形。这限制了对某些强耦合情形等问题的研究，未来工作将探讨如何放宽这一条件。另一方面，该定义有两项主要优势：它与记忆效应相关，且不依赖于热力学第一定律，也不依赖于对环境温度的定义；当环境并非热浴时，或即便环境初始时是热浴、但演化改变了热浴的内部状态时，温度的定义可能并不简单。

这种与记忆效应的联系源于该表述所具有的信息论性质：它衡量状态相对于 IFP 的可区分性。我们已经证明，当这种可区分性增加时，它可以直接与动力学中记忆效应的存在联系起来。同时，选择相对熵作为衡量这种可区分性的函数，是有其依据的：当 IFP 可以写成决定热交换的哈密顿量对应的吉布斯态时，我们的表述便导出广为人知的克劳修斯表达式，尽管经过某种修正，但仍可恢复。相对熵表述与类克劳修斯表达式之间的联系在更一般情形下如何成立，也留待未来研究。

基于所提出的表述，我们证明了以下逻辑链：

$$\text{P-divisibility} \;\Rightarrow\; \sigma_S(t) \geq 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{Re}\,\lambda_i(t) \leq 0, \quad (70)$$

其中，动力学的马尔可夫性被理解为映射的P可分性，$\lambda_i(t)$是生成元的特征值，并且 $\sigma_S(t) \geq 0$ 必须在所有时刻对所有初始态成立。这有助于更好地理解马尔可夫性、第二定律与热力学以及支配该动力学的生成元谱之间的联系。相比之下，我们还通过一个反例表明，第一个陈述的逆方向并不成立：熵产生率始终为正并不足以使动力学成为P可分的。

此外，在撰写本文期间，Théret等人 [14] 发表了一项类似研究。作者还研究了熵产生率的不动点表述，并进一步提出将熵产生推广到动力学映射；他们证明，对于相位协变的量子比特动力学，这一推广等价于 P-可分性。我们也研究了这项近期工作，并将这一联系推广到了普遍的 $d$ 能级系统。

总而言之，我们希望通过这项工作阐明开放量子系统熵产生的一些基本概念，并为强耦合量子热力学的未来研究铺平道路。

## 致谢

作者感谢 Camille L. Latune、Guillaume Théret 和 Dominique Sugny 的精彩讨论。I.A.P. 感谢德国人民奖学金基金会提供的资助。A.C. 感谢德国研究联合会资助的研究生培训组“受控原子与分子系统的动力学”（RTG 2717）提供的支持。

## 附录 A：相对熵的微扰展开

下面我们推导两个量子态 [42, 50, 51] 之间相对熵的微扰展开。首先，我们写出矩阵对数的积分表达式

$$\log A = \int_0^\infty ds \left[(\mathbb{1}+s)^{-1} - (A+s)^{-1}\right]. \quad (A1)$$

接下来，我们要在 $\varepsilon = 0$ 附近对函数 $g(\varepsilon)$ =log( $\rho + \varepsilon X$) 作泰勒展开，其中 $\rho$ 是一个满秩态，$X$ 是一个无迹厄米矩阵。零阶项简单地为 $g(0) = \log \rho$。对于一阶项，我们计算函数 $g$ 关于 $\varepsilon$ 的一阶导数，记作 $g'$:

$$g'(\varepsilon) = -\int_0^\infty ds \frac{d}{d\varepsilon}(\rho + \varepsilon X + s)^{-1}. \quad (A2)$$

逆矩阵的导数必须谨慎计算，因为它可能不与矩阵本身对易。利用单位算符 $\mathbb{1} = M^{-1}(\varepsilon)M(\varepsilon)$，结合链式法则，我们得到 $(M^{-1}(\varepsilon))' = -M^{-1}(\varepsilon)M\prime(\varepsilon)M^{-1}(\varepsilon)$。因此，

$$g'(0) = \int_0^\infty ds(\rho+s)^{-1}X(\rho+s)^{-1}. \quad (A3)$$

高阶项也可以用类似的方法计算，二阶项为

$$g''(0) = -2\int_0^\infty ds(\rho+s)^{-1}X(\rho+s)^{-1}X(\rho+s)^{-1}. \quad \text{(A4)}$$

由此，我们可以展开相对熵中的对数项，得到

$$\begin{aligned} &D(\rho+\varepsilon X||\rho) \\ &= \mathrm{Tr}\left\{(\rho+\varepsilon X)\left[\varepsilon g'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2}g''(0) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\right]\right\}. \end{aligned} \quad \text{(A5)}$$

因此，相对熵的一阶项为

$$\varepsilon \mathrm{Tr}\left\{X\int_0^\infty (\rho+s)^{-1}\rho(\rho+s)^{-1}\right\}, \quad \text{(A6)}$$

这里用到了迹的循环性质。由于所有项彼此对易，积分等于 1；又因为 $X$ 是无迹的，这一项便消失了。

相对熵的二阶贡献为

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2 \mathrm{Tr}\left\{\int_0^\infty dsX\left(\mathbb{1}-(\rho+s)^{-1}\rho\right)(\rho+s)^{-1}X(\rho+s)^{-1}\right\} \\ &= \varepsilon^2 \mathrm{Tr}\left\{\int_0^\infty ds\ sX(\rho+s)^{-2}X(\rho+s)^{-1}\right\} \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2}\mathrm{Tr}\left\{X\int_0^\infty ds\ (\rho+s)^{-1}X(\rho+s)^{-1}\right\}, \end{aligned} \quad \text{(A7)}$$

从第一行到第二行时，我们用到了单位算符 $\mathbb{1}-(\rho+s)^{-1}\rho = s(\rho+s)^{-1}$，最后一行则是通过分部积分得到的。

定义关于参考态 $\rho$ [50] 的两个矩阵 $A$ 和 $B$ 之间的量子 Fisher标量积:

$$K_\rho(A,B) = \mathrm{Tr}\left\{A\int_0^\infty ds(\rho+s)^{-1}B(\rho+s)^{-1}\right\}, \quad \text{(A8)}$$

我们可以将相对熵写为

$$D(\rho+\varepsilon X||\rho) = \frac{\varepsilon^2}{2}K_\rho(X,X) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad \text{(A9)}$$

这里可以看到，相对熵的二阶项与无迹矩阵 $X$ 相对于参考态 $\rho$ 的 Fisher平方范数成正比，因此相对熵在二阶及以下对其两个自变量是对称的。不对称性最早可出现在微扰参数的三阶。

## 附录 B：映射的完全正性

完整映射成为完全正映射的条件为 [46]

$$f_1(t) \equiv |\lambda_z(t)| + |t_z(t)| - 1 \le 0, \quad \text{(B1)}$$
$$f_2(t) \equiv 4\lambda^2(t) + t_z^2(t) - [1+\lambda_z(t)]^2 \le 0. \quad \text{(B2)}$$

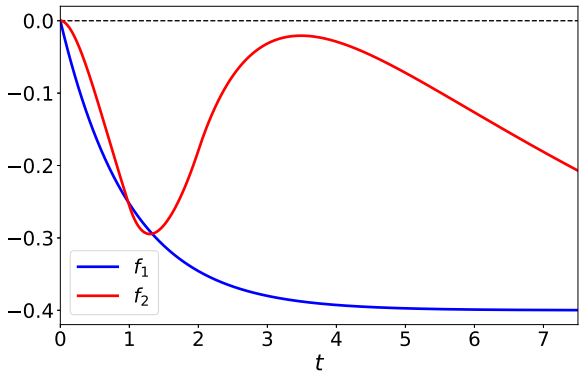


图 3. 方程 (B1) 中的函数，它们决定了映射的完全正性。 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 均小于或等于零，这一事实证实所研究的映射是完全正的。

在图 3 中，我们绘制了在反例所选参数下，函数$f_{1,\ 2}(t)$随时间的变化（参见第 IV B 2 节中的图 1），结果表明这些条件均得到满足，且所研究的映射是完全正的。

## 附录 C：反例中 $\sigma_S(t) \ge 0$ 的证明

这里我们证明了第 IV B2 节所示反例中，布洛赫球区域 (d)（见图 2）的熵产生率具有正定性。

区域 (d) 由 $0 > v_z > v_z^\star$ 和 $v > |v_z^\star|$ 定义。这个证明会变得更加复杂，因此我们必须将其分为三个时间区间：先是 $t \le 1$，然后是$1 < t \le 1.5$，最后是 $t > 1.5$。

我们先考察$t \le 1$时的熵产生率。在这个时间区间内，$\gamma_z(t) \equiv 0$，其值为 $\mu_2 = -0.5 \equiv \mu_{2,\ \mathrm{min}}$。对于这个值，我们将表达式改写为

$$\begin{aligned} \sigma_S = &\frac{\mathrm{atanh}v}{v}\left[-\mu_{2,\min}\left(v^2 - v_z^2\right) - \mu_1(v_z - v_z^\star)v_z\right] \\ &+ \frac{\mathrm{atanh}|v_z^\star|}{|v_z^\star|}\mu_1(v_z - v_z^\star)v_z^\star. \end{aligned} \quad \text{(C1)}$$

该表达式的第二行始终为正，乘在第一行前面的因子也始终为正，因此我们必须考察抛物线的行为

$$\begin{aligned} &(\mu_{2,\min}-\mu_1)v_z^2 + \mu_1 v_z^\star v_z - \mu_{2,\min}v^2 \\ &\ge (\mu_{2,\min}-\mu_1)v_z^2 + \mu_1 v_z^\star v_z - \mu_{2,\min}|v_z^\star|^2, \end{aligned}$$

其中，在第二行中，我们利用了描述区域 (d) 的条件。代入参数值后可以看出，第二行变为$0.5v_z^2+0.6v_z+0.18$，描述了一条开口向上的抛物线，其最小值为 0，位于 $v_z = -0.6$。因此，该函数始终为非负值，并且结合其他项，我们可以证明，对于所有可能的

区域 (d) 中的量子态，只要 $\mu_2 = \mu_{2,\ \min}$ （即，对于 $t \leq 1$）。

对于 $t > 1$，参数 $\mu_2$ 随时间与$\gamma_z(t)$一同变化（回顾式(51)），此时抛物线不再保持为正。然而，当 $\mu_2$ 不同于其最小值（位于 $t > 1$）时，所有量子态均已演化，并非 $v$ 与 $v_z$ 的所有组合都代表可及量子态。特别地，在每一时刻， $v$所能取的值存在一个最大值。

为了求出距布洛赫球中心的这一最大距离，我们考察式(43)-(45)中给出的布洛赫向量演化，并计算

$$v^2(t) = \left[v^2(0) - v_z^2(0)\right] \lambda^2(t) + \left[t_z(t) + v_z(0)\lambda_z(t)\right]^2 . \quad \text{(C2)}$$

利用 $v(0) \leq 1$这一事实并重新整理，我们得到

$$\begin{aligned} v^2(t) \leq \quad & \left[\lambda_z^2(t) - \lambda^2(t)\right] v_z^2(0) \\ & + 2\lambda_z(t) t_z(t) v_z(0) + t_z^2(t) + \lambda^2(t). \end{aligned} \quad \text{(C3)}$$

在此，右端再次出现另一个关于 $v_z(0)$的抛物线函数。引入 $x = v_z(0)$后，我们将其改写为

$$\begin{aligned} P(x) \equiv \quad & \left[\lambda_z^2(t) - \lambda^2(t)\right] x^2 \\ & + 2\lambda_z(t) t_z(t) x + t_z^2(t) + \lambda^2(t). \end{aligned} \quad \text{(C4)}$$

为了求出其最大值，我们需要研究其中出现的系数。由式(40)-(42)并结合式(51)，我们得到为该反例所选取参数的显式表达式：

$$\lambda(t) = \begin{cases} e^{-0.5t} & \text{for } t \leq 1 \\ e^{0.22 - 0.94t + 0.22t^2} & \text{for } 1 < t \leq 2 \\ e^{-0.66 - 0.06t} & \text{for } t > 2, \end{cases} \quad \text{(C5)}$$

$$\lambda_z(t) = e^{-t}, \quad \text{(C6)}$$

$$t_z(t) = -0.6(1 - e^{-t}). \quad \text{(C7)}$$

根据这些方程，很容易看出 $\lambda_z(t) < \lambda(t)$，因此，式 (C4) 中的函数是一条开口向下的抛物线。因此，其一阶导数为零的点就是它的最大值，该点为

$$x_0(t) = \frac{\lambda_z(t) t_z(t)}{\lambda^2(t) - \lambda_z^2(t)}, \quad \text{(C8)}$$

可以验证（利用式 (C5)–(C7)），它始终属于区间 $[-0.6, 0]$，如图4所示。在此取值处，式 (C4) 中的抛物线达到最大值

$$P_0(t) = \frac{\lambda_z^2(t) t_z^2(t)}{\lambda^2(t) - \lambda_z^2(t)} + t_z^2(t) + \lambda^2(t). \quad \text{(C9)}$$

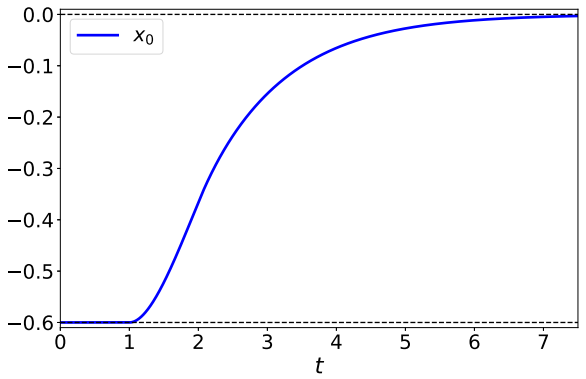


图 4. 式 (C8) 中定义的 $x_0$ 函数随时间的变化（蓝色实线），以及标示边界值 0 和 $-0.6$ 的水平黑色虚线。

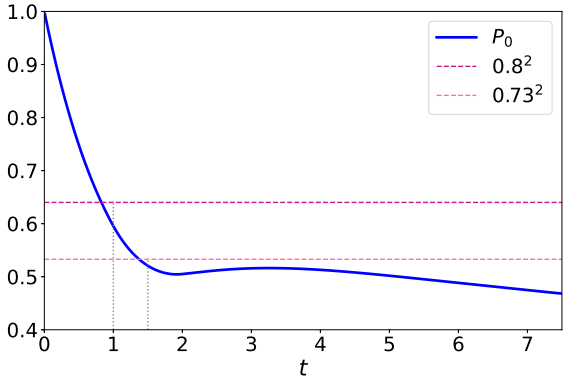


图 5. 式 (C9) 中定义的 $P_0$ 函数随时间的变化（蓝色实线），以及标示数值 $0.8^2$ 和 $0.73^2$ 的水平虚线。垂直点线标示时间 $t = 1$ 和 $t = 1.5$。由于 $v^2(t) \geq P_0(t)$，可以看出，对于 $t \geq 1$，不等式 $v(t) \leq 0.8$ 成立；对于 $t > 1.5$， $v(t) \leq 0.73$ 也成立。

由于这是式 (C3) 右侧在每个时间点所能取到的最大值，因此我们可以得出结论： $v^2(t) \leq P_0(t)$，从而 $v(t) \leq \sqrt{P_0(t)}$。

在图5中，我们将 $P_0$ 绘制为时间的函数。目的是找到一个能够为上述指定的时间区间界定 $v$ 的值。具体而言，我们看到，对于 $t > 1$，始终成立 $P_0 < 0.8^2$ （从而 $v < 0.8$），而对于 $t > 1.5$，则有 $P_0 < 0.73^2$ （因此 $v < 0.73$）。这些具体数值是为方便起见而选取的，我们将用 $v_{\max}$ 表示相应时间区间的该值。

有了这一点 $v_{\max}$，我们回到公式（56）中的熵产生率表达式。首先注意到，由于公式（56）的第一行是正的，我们可以

通过……界定该表达式

$$\sigma_S \;\geq\; -\mu_{2,\max}\frac{\operatorname{atanh} v}{v}\left(v^2-v_z^2\right) \qquad \text{(C10)}$$
$$-\mu_1(v_z-v_z^\star)\cdot\left(\frac{\operatorname{atanh} v}{v}v_z-\frac{\operatorname{atanh}|v_z^\star|}{|v_z^\star|}v_z^\star\right),$$

其中，$\mu_{2,\ \max}$ 是所考虑时间区间内 $\mu_2$ 可达到的最大值（即，$-\mu_2$ 是最小值）。该值对应于$\mu_{2,\ \max}=-0.28$（当 $1<t\leq 1.5$时）以及$\mu_{2,\ \max}=-0.06$（当 $t>1.5$ 时）（见公式（51）和（54））。利用 $v\leq v_{\max}$这一结果，我们进一步将该表达式上界为

$$\sigma_S \;\geq\; -\mu_{2,\max}\frac{\operatorname{atanh} v}{v}\left(v^2-v_z^2\right) \qquad \text{(C11)}$$
$$-\mu_1(v_z-v_z^\star)\cdot\left(\frac{\operatorname{atanh} v_{\max}}{v_{\max}}v_z-\frac{\operatorname{atanh}|v_z^\star|}{|v_z^\star|}v_z^\star\right),$$

（因为 $-\mu_1$ 为正，$v_z-v_z^\star$ 也为正，但 $v_z$ 本身为负）。接下来，由于定义区域 (d) 的条件，我们可以对 $v^2>(v_z^\star)^2$ 和 atanh$v/v>$进行界定

atanh$|v_z^\star|/|v_z^\star|$:

$$\sigma_S \;\geq\; -\mu_{2,\max}\frac{\operatorname{atanh}|v_z^\star|}{|v_z^\star|}\left((v_z^\star)^2-v_z^2\right) \qquad \text{(C12)}$$
$$-\mu_1(v_z-v_z^\star)\cdot\left(\frac{\operatorname{atanh} v_{\max}}{v_{\max}}v_z-\frac{\operatorname{atanh}|v_z^\star|}{|v_z^\star|}v_z^\star\right),$$

并对上述表达式重新排列可得

$$\sigma_S \;\geq\; (v_z-v_z^\star)\times$$
$$\times\;\left[v_z\left(-\mu_1\frac{\operatorname{atanh} v_{\max}}{v_{\max}}+\mu_{2,\max}\frac{\operatorname{atanh}|v_z^\star|}{|v_z^\star|}\right)\right.$$
$$\left.+\;\frac{\operatorname{atanh}|v_z^\star|}{|v_z^\star|}(\mu_{2,\max}+\mu_1)v_z^\star\right], \qquad \text{(C13)}$$

其中，乘在右侧表达式前的系数在区域 (d) 内始终为正。

现在，我们明确考察剩下的两个待研究时间区间，并将所有参数的具体数值代入式 (C13)（函数 $\sigma_S$ 中的数值近似到小数点后两位）：

- $1<t\leq 1.5:\quad \left\{\begin{matrix}\mu_{2,\max}=-0.28\\ v_{\max}=0.8\end{matrix}\right\}$
$\Rightarrow \sigma_S\geq(v_z-v_z^\star)\,[1.05v_z+0.88]\geq 0,$
- $t>1.5:\quad \left\{\begin{matrix}\mu_{2,\max}=-0.06\\ v_{\max}=0.73\end{matrix}\right\}$
$\Rightarrow \sigma_S\geq(v_z-v_z^\star)\,[1.21v_z+0.73]\geq 0,$

由于我们考察的是区间 $v_z\in(-0.6,\ 0)$，这两个值均为正。至此，我们完成了第 IV B 2 节中反例的熵产生率正定性的证明。

[1] F. Binder、L. A. Correa、C. Gogolin、J. Anders 和 G. Adesso 编，《量子领域的热力学》，第 2018 版，物理学基础理论（施普林格国际出版，钱，瑞士，2019）。[2] P. Strasberg，《量子随机热力学》，牛津研究生教材（牛津大学出版社，伦敦，英格兰，2022）。[3] J. Gemmer、M. Michel 和 G. Mahler，《量子热力学》，第 2 版，物理学讲义（施普林格，柏林，德国，2009）。[4] M. Esposito、K. Lindenberg 和 C. Van den Broeck，《新物理学杂志》**12**，013013（2010）。[5] A. Colla 和 H.-P. Breuer，《物理评论 A》**105**，052216（2022）。[6] F. Nicacio 和 R. N. P. Maia，《物理评论A》**108**，022209（2023）。[7] C. Elouard 和 C. Lombard-Latune，PRX Quantum **4**，020309 2023( )。[8] B. Altaner，《物理学杂志 A：数学与理论》**50**，454001（2017）。[9] Á. Rivas，《物理评论快报》**124**，160601（2020）。[10] P. Strasberg 和 M. Esposito，《物理评论 E》**99**，012120 (2019). [11] H. Spohn 和 J. L. Lebowitz，载于《化学物理进展》（John Wiley & Sons, Inc., 美国新泽西州霍博肯，1978），第109–142页。[12] I. A. Picatoste、A. Colla 和 H.-P. Breuer，《物理评论A》**112**，022210（2025）。[13] A. Colla 和 H.-P. Breuer，《量子科学与技术》**10**，015047（2024）。[14] G. Théret、D. Sugny 和 C. L. Latune，“二能级开放量子系统中的熵产生与记忆效应”，（2026），arXiv:2601.21930 [量子物理]。[15] H.-P. Breuer 和 F. Petruccione，《开放量子系统理论》（牛津大学出版社，2002）。[16] A. Smirne 和 B. Vacchini，《物理评论A》**82**，022110（2010）。[17] Y. Tanimura 和 R. Kubo，《日本物理学会杂志》**58**，101（1989）。[18] Y. Tanimura，《化学物理学杂志》**153**，020901（2020）。[19] D. Suess、A. Eisfeld 和 W. T. Strunz，《物理评论快报》**113**，150403（2014）。

[20] M. Mohseni、A. T. Rezakhani 和 D. A. Lidar，《物理评论A》**77**，032322（2008）。[21] H.-P. Breuer，《物理学杂志B：原子、分子与光学物理》**45**，154001（2012）。[22] V. Jagadish、R. Srikanth 和 F. Petruccione，《物理评论A》**108**，042202（2023）。[23] H.-P. Breuer、E.-M. Laine、J. Piilo 和 B. Vacchini，《现代物理评论》**88**，021002（2016）。[24] F. Minganti、A. Biella、N. Bartolo 和 C. Ciuti，《物理评论A》**98**，042118（2018）。[25] F. Minganti、A. Miranowicz、R. W. Chhajlany 和 F. Nori，《物理评论A》**100**，062131（2019）。[26] A. Rivas、S. F. Huelga 和 M. B. Plenio，《物理学进展报告》**77**，094001（2014）。[27] L. Li、M. J. Hall 和 H. M. Wiseman，《物理学报告》**759**，1（2018），量子非马尔可夫性概念：层级。[28] H.-P. Breuer、E.-M. Laine 和 J. Piilo，《物理评论快报》**103**，210401（2009）。[29] E.-M. Laine、J. Piilo 和 H.-P. Breuer，《物理评论A》**81**，062115（2010）。[30] M. A. Nielsen 和 I. L. Chuang，《量子计算与量子信息》（剑桥大学出版社，剑桥，2000）。[31] M. Hayashi，《量子信息》（施普林格，柏林，2006）。[32] C. W. Helstrom，《量子检测与估计理论》（学术出版社，纽约，1976）。[33] C. W. Helstrom，《信息与控制》**10**，254（1967）。[34] S. Wißmann、H.-P. Breuer 和 B. Vacchini，《物理评论A》**92**，042108（2015）。[35] D. Chruściński、A. Kossakowski 和 A. Rivas，《物理评论A》**83**，052128（2011）。[36] H. Spohn，《数学物理杂志》**19**，1227（1978）。[37] V. Vedral，《现代物理评论》**74**，197（2002）。[38] S. Deffner 和 E. Lutz，《物理评论快报》**107**，140404（2011）。[39] F. Nicacio 和 R. N. P. Maia，《物理评论A》**108**，022209（2023）。[40] P. Strasberg、M. G. Díaz 和 A. Riera-Campeny，《物理评论E》**104**，L022103（2021）。[41] F. Schlögl，《物理学报告》**62**，267（1980）。[42] K. M. R. Audenaert，《数学物理杂志》**54**，073506（2013）。[43] A. Colla，博士论文，弗赖堡大学（2024）。[44] E. B. Davis，开放系统量子理论（学术出版社，圣迭戈，加利福尼亚州，1976）。[45] A. Müller-Hermes 和 D. Reeb，《亨利·庞加莱年刊》**18**，1777（2017）。[46] S. N. Filippov、A. N. Glinov 和 L. Leppäjärvi，《罗巴切夫斯基数学杂志》**41**，617（2020）。[47] G. Théret、C. Lombard-Latune 和 D. Sugny，《物理评论A》**112**，052203（2025）。[48] F. Settimo、H.-P. Breuer 和 B. Vacchini，《物理评论A》**106**，042212（2022）。[49] A. Kossakowski，《波兰科学院数学通报》**20**，1021（1972）。[50] M. Scandi、P. Abiuso、J. Surace 和 D. De Santis，《物理学进展报告》**88**（2025），10.1088/1361-6633/ade453。[51] K. M. R. Audenaert 和 J. Eisert，《数学物理杂志》**46**，102104（2005）。