arXiv:2603.01877v1 [math.AG] 2 Mar 2026

BERKOVICH 2-动机与赋范环叠

KO AOKI

摘要。Simpson 的德拉姆叠构造表明，D-模是修正几何上的拟凝聚层。Drinfeld 进一步引入了环叠视角（又称嬗变），其核心观点是，系数理论由环叠决定。Scholze 提议用（∞，2）-范畴语言将这一思想与动机实现联系起来。

本文阐述并证明了这一原理的一个精确版本：动机同伦论的核所构成的可呈范畴，是由一个同调平凡光滑缝合环叠自由生成的线性对称幺半（∞，2）-范畴。我们还证明了这一陈述的étale 版本，将 étale 下降归约为 Kummer 条件和 Artin–Schreier 条件。最后，我们证明了一个解析版本，将 Scholze 的 Berkovich 动机与带绝对值的环叠联系起来。这有助于在解析几何中构造动机实现函子，例如 Habiro 实现和 Hyodo–Kato 实现。

目录

1. 引言 2. 一些 2-范畴论 3. 代数 2-动机 1
4. 2- 范畴上的栈 5. 下降 6. 下降的例子 5
7. 代数 2-动机与环叠 8. Étale 2-动机 9
9. 一些 Berkovich 几何 10. 12
Berkovich 2-动机 参考文献 18
23
25
28
34
41
49

1. 引言

本文中， n-范畴指的是一个（∞， n）-范畴。

本文致力于研究 2-动机。最重要的是，我们证明了若干泛性质。我们在第 1.1 节阐释促使我们提出这一概念的思想，在第 1.2 节陈述主要结果，并在第 1.3 节讨论应用。

1.1. 思想。 在算术几何中，人们借助各种上同调理论研究簇。对于域 k 上的簇 X，可以研究其贝蒂上同调、德拉姆上同调、étale 上同调、晶体上同调等。这些理论通过比较同构彼此关联，但其构造方式截然不同。为统摄这一复杂局面，Grothendieck 提出了动机的概念，设想存在一种普适的“绝对”上同调理论。它将采取动机阿贝尔范畴 Mot(k) 的形式，[1] 使得每个簇 X 都有一个相应的动机 $[X]$。此后，每种已知的上同调理论 H^* 都将成为从 Mot(k) 到向量空间范畴的实现函子 。这一概念旨在捕捉簇的上同调本质，即一种能够解释其各种不同上同调“表现”的对象。尽管 Grothendieck 最初关于 Mot(k) 的设想仍未

日期：2026年3月3日。[1]本文中，记号 Mot（或 2Mot）没有全局定义，只是表示某种（2-）动机。

停留在猜想阶段，但后来 Voevodsky 在很大程度上实现了这一设想 [60], ，他构造的动机三角范畴 $\mathrm{DM}(k)$ 促成了他著名的米尔诺猜想证明。与本文更相关的是 Morel–Voevodsky 的稳定动机同伦论 $\mathrm{SH}(k)$ [45]。

与此同时，Grothendieck 在 Verdier 的重要贡献下，研究了六种运算。这是研究这些上同调理论的基本框架。它描述了良好“系数理论”（如 étale 层范畴或 D-模范畴）必须具备的基本结构性质，例如函子性、庞加莱对偶和 Künneth 公式。如今，这六种运算可以封装为一个从跨（亦称对应）出发的函子。Gaitsgory–Rozenblyum 的一部著作 [28], 广为人知地阐述了这一观点，并将使用跨的想法归功于 Lurie。

由此我们进入现代语境。如果 Grothendieck 的动机对上同调理论进行分类，那么考虑对系数理论进行分类便顺理成章。Drew–Gallauer [21] 证明了SH 是一个泛六函子形式体系。Scholze [51] 则从范畴化的角度对此进行考察：应当存在一个2-动机2-范畴，作为六函子形式体系的泛接收对象。在这一框架中，2-动机 $[X]$ 捕捉了 X的层论本质。由此，2-动机范畴是一个2-范畴，其中簇决定对象，而层上的运算决定态射。然而，这一统一图景引出了一个技术问题：这个2-范畴的精确数学性质究竟是什么？它应当类似于线性范畴的范畴。Stefanich [58] 率先为这类理论奠定了基础。我们先前的工作 [4]展示了如何在不借助宇宙的情况下实现这一点。当前工作直接建立在这一基础之上。我们在定理A中看到了这一思想的精确表述。

尽管我们已经很好地封装了系数理论，但如何系统地构造这些系数理论仍然是一项挑战。德拉姆上同调的研究带来了突破。德拉姆上同调的自然系数理论是 Sato 提出的 D-模理论。在一个关键洞见中，Simpson [56] 意识到， X在 $\mathbf{Q}$ 上的簇上的 D-模，可以重新解释为某个新的几何对象上的拟凝聚层；这一对象被称为德拉姆叠 X^{dR}。这首次表明，各种系数范畴其实只是与 X相关的某种修正几何上的拟凝聚层。Drinfeld [22]进一步完善了这一思想。他所强调的是环叠视角，如今称为嬗变，这一术语由 Bhatt 创造（参见 [13, 注 2.3.8]）。其思想是，整个系数理论都可以由一条数据生成；例如，对于 D-模，可以将 $(\mathbb{A}^1)^{\mathrm{dR}}$视为一个环叠。通过指定什么 $\mathbb{A}^1$ 映射到何处，就可以将簇的底层几何“嬗变”为一种新的几何，而该新几何上的拟凝聚层便赋予你相应的系数理论。

鉴于此，Scholze [51]进一步提出，$2\mathrm{Mot}(\textbf{整数环})$应当能够对满足某些条件的环叠进行分类。本文将这一结果精确表述为定理 B。借助 Scholze–Stefanich 的形态理论 [55], ，我们可以说，它为与稳定动机同伦论相关联的形态提供了模空间描述。

此外，我们还证明了该定理的若干变体。值得注意的是，Scholze [52]引入了*Berkovich* 动机这一范畴，旨在将其应用于局部朗兰兹纲领。它是动机同伦论的某种解析版本。他为其构造了六种运算，并证明了若干理想性质。这一理论的一个缺点是，实现函子难以构造，因为其定义本身就涉及 Arc 下降。在定理D中，我们通过带绝对值的环叠刻画了这一理论。这使得实现函子的构造更加便利：首先建立2-范畴实现。

1.2. **结果**。 设QProj 表示整数环**整数环**(参见注 1.3 关于这一选择的说明)。我们取SH 为 Morel–Voevodsky 稳定动机同伦论（参见第3.1节）。Ayoub [7, 8]的工作提供了六种运算的构造。应用 Liu–Zheng [38], 的工具，我们得到一个松对称幺半函子 $\mathsf{SH}\colon \mathrm{Span}(\mathsf{QProj}) \to \mathsf{Pr}^{\mathrm{st}}_{\otimes}$。

定义 1.1. 设 S 为一个除子诺特静态概形。[2] 我们用$2\mathrm{SH}(S)$ 表示可表现对称幺半2-范畴，即核（见第2.2节）所对应的$\mathsf{SH}\colon \mathrm{Span}(\mathsf{QProj}_S) \to \mathsf{Pr}^{\mathrm{st}}_{\otimes}$。

[2]引入这一假设的唯一目的，是确保拟射影性这一概念具有唯一性。

非正式地说，它由一个对称幺半函子 $[-]\colon \mathrm{QProj}_S^{\mathrm{op}} \to 2\mathrm{SH}(S)$ 的像自由生成，该像描述如下：

- 从 $[X]$ 到 $[Y]$ 的映射范畴是 $\mathrm{SH}(X\times Y)$。
- 恒等映射 $\mathrm{id}_{[X]}$ 是 $d_!\mathbf{1}\in \mathrm{SH}(X\times X)$（在此情形下等价于 $d_*\mathbf{1}$），其中$d\colon X\to X\times X$ 是对角线。
- 对于 $M\colon [X]\to[Y]$和 $N\colon [Y]\to[Z]$，其复合为 $(\mathrm{pr}_{X,Z})_!(\mathrm{pr}_{X,Y}^*M\otimes \mathrm{pr}_{Y,Z}^*N)$，其中 pr 表示来自 $X\times Y\times Z$的相应投影。

首先，我们通过其泛性质来刻画它：

定理 A。 函子 $[-]\colon (\mathrm{QProj}_S)^{\mathrm{op}}\to 2\mathrm{SH}(S)$ 在满足以下公理的、取值于稳定且可呈示的对称幺半2-范畴的对称幺半函子中具有泛性质：

(i) 设 $f\colon Y\to X$ 是一个光滑态射。则 $f^*\colon [X]\to[Y]$ 具有左伴随 $f_\natural$。此外，对于任意拉回方块，*Beck–Chevalley*变换 $f'_\natural q^*\to p^*f_\natural$ 是一个等价。

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{q} & Y \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X' & \xrightarrow{p} & X. \end{array} \tag{1.2}$$

（*ii*）对于闭子簇 $i\colon Z\hookrightarrow X$，其补集为 U，图 $[U]\leftarrow[X]\to[Z]$是一个粘合（见定义 2.9）。特别地，$i^*\colon [X]\to[Z]$ 具有右伴随 i_*。（*iii*）对于投影 $f\colon \mathbb{A}^1_X\to X$，余单位 $f_\natural f^*\to$ 恒等映射 是一个等价。（*iv*）对于投影 $f\colon \mathbb{A}^1_X\to X$及其零截面 $s\colon X\to\mathbb{A}^1_X$，态射 $f_\natural s_*$是 $[X]$的一个自等价。

注 1.3。 我们对 QProj_S 在定理 A中的选择并不重要；例如，我们可以考虑 S 上的有限型分离静态概形范畴，从而得到相同的结果。采用这种2-范畴化封装的一个优点是，我们无需指定要使用哪一种几何对象范畴。

现在我们将讨论特例 $S=\mathrm{Spec}$**整数环**。下面用环叠的语言给出其刻画：

定理 B. 稳定、可呈现的对称幺半2-范畴 $2\mathrm{SH}$(**整数环**) 由一个同调平凡光滑缝合环堆自由生成。

注 1.4。 根据命题 4.30，定理 B 也可以等价地表述为： $2\mathrm{SH}$(**整数环**)由一个稳定同调平凡弱光滑环堆自由生成。现在，“稳定”“缝合的”“同调平凡”和“弱 suave”分别对应定理 iv、ii、iii和i中的条件。值得注意的是，所有这些条件都只涉及 $\mathbb{A}^1$。特别是，定理 B完全没有提及一般概形。

接下来我们考虑它的 étale 变体，其中 $2\mathrm{SH}_{\text{ét}}$ 表示核的可呈 2-范畴，其中 $\mathrm{SH}_{\text{ét}}$是 SH 的 étale 层化版本（见第 8.1节）：

定理 C。 稳定的、可呈的对称幺半2-范畴$2\mathrm{SH}_{\text{ét}}$(**整数环**) 由一个同调平凡光滑缝合环堆自由生成，该环堆具有以下意义下的 *Kummer* 和 *Artin–Schreier* 性质：

Kummer： 由 $x\mapsto x^l$ 给出的态射 $R[1/l]^\times\to R[1/l]^\times$ 对任意素数 l 都是一个覆盖。
Artin–Schreier： 由 $x\mapsto x^p-x$ 给出的态射 $R/p\to R/p$ 对任意素数 p 都是一个覆盖。

上述陈述中，覆盖 这一概念十分重要，我们在第5 节以下降之名对其进行了深入研究。

注 1.5. 定理 C 表明，存在一个幂等代数 E 属于 $2\mathrm{SH}$(**整数环**) ，使得模$_E(2\mathrm{SH}$(**整数环**))等价于 $2\mathrm{SH}_{\text{ét}}$(**整数环**)。

接下来我们转向解析情形。Scholze [52] 引入了带整数系数的 Berkovich 动机 $\mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(-;\textbf{整数环})$ 并为其构造了六种运算。我们考虑带球面系数的 Berkovich 动机 $\mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(-;\mathbf{S})$；参见第 10.1 节。在此，我们将拓扑上有限表示的一致巴拿赫环作为“簇”这一类对象，以得到可呈的 2-范畴的核，记作 $2\mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(\mathbf{Z};\mathbf{S})$。接下来我们对其作如下刻画：

定理 D。 稳定的可呈示对称幺半2-范畴 $2\mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(\textbf{整数环};\mathbf{S})$ 由一个带有绝对值且其开单位圆盘同调平凡的 *Kummer–Artin–Schreier* 同调平凡光滑环堆栈自由生成。

注 1.6。 注意，$2\mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(\textbf{整数环};\mathbf{S})$ 对任意半赋范环都承认一个类。在这种情况下，如命题 10.19所示，这些类是真类。这意味着，与 Scholze 的 Berkovich 动机不同，无需任何有限性假设即可成立真基变换。

1.3. **应用**。 一个直接的应用是构造动机实现函子。为此，我们首先利用泛性质结果考察 2-范畴实现。然后，通过取 End(1)，我们得到所需的实现 1-函子。下面是一个例子：

定理 1.7。 *Scholze* 的解析 *Habiro* 堆栈 [53] 以及 *An- schütz–Bosco–Le Bras–Rodríguez Camargo–Scholze* [1] 的 *Hyodo–Kato* 堆栈决定了实现函子。

另一个应用涉及这些 2-范畴的性质。例如，我们看到如下 g:

定理 1.8。 设 $2\mathrm{Mot}(\textbf{整数环})$ 是 $2\mathrm{SH}(\textbf{整数环})$、$2\mathrm{SH}_{\text{ét}}(\textbf{整数环})$ 或 $2\mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(\textbf{整数环};\mathbf{S})$ 中的任意一个。那么它是 交换代数$(22\mathrm{Pr})^{\mathrm{op}}$ 中一个 1-截断对象，也就是说，典范态射

$$2\mathrm{Mot}(\mathbf{Z})^{\otimes S^2} \to 2\mathrm{Mot}(\mathbf{Z})$$

是一个等价。

证明。 对于对象 $\mathcal{C}\in$交换代数(2Pr)，我们有

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}(2\mathrm{Pr})}\big(2\mathrm{Mot}(\mathbf{Z})^{\otimes S^2},\mathcal{C}\big)\simeq \mathrm{Map}\big(S^2,\mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}(2\mathrm{Pr})}(2\mathrm{Mot}(\mathbf{Z}),\mathcal{C})\big).$$

因此，只需证明 $\mathrm{Map}^{\mathrm{CAlg}(2\mathrm{Pr})}(\textbf{2Mot(整数环)},\mathcal{C})$ 是 1-截断的。为此，只需证明每个对象都是 0-截断的，也就是说，对角态射

$$R\to \mathrm{Map}(S^1,R)$$

是一个环叠的等价 R，该环叠满足定理 B的条件。这可由引理4.26推出。 □

注 1. 9. 定理 1.8 关于 $2\mathrm{Mot}(\textbf{整数环})=2\mathrm{SH}(\textbf{整数环})$ 也可直接由定理推出 A.

这种方法使我们无需直接考察 2-范畴，就能证明某些性质。以下结果的证明将见于 [6], ，届时我们会引入 n-刚性的概念：

定理 1.10 ([6])。 对于任意全虚数环 O，稳定且可呈示的对称幺半 2-范畴 $2\mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(\textbf{整数环};\mathbf{S}[1/2])$和 $2\mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(O;\mathbf{S})$ 都是2-刚性的。

在 Scholze–Stefanich 的整体几何语境中（参见 [55]），可呈示范畴谱（见 [4, 注 2.10]）被视为几何的构建模块；这意味着 Berkovich 动机的整体几乎是真。

概要。 我们首先在第 2 节回顾高阶范畴论中的一些基本工具，这些工具对后续的研究至关重要。在第 3 节，我们运用这些工具证明定理 A。接下来，我们介绍一些一般性方法。第 4 节介绍栈的基本概念，这些概念对于陈述我们的主要定理不可或缺。第 5 节发展下降理论，这是理解可呈现的对称幺半 n-范畴的基础工具。我们在第 6 节通过实例阐释这些概念。做好这些准备后，我们转而证明主要定理。在第 7 节和第 8 节，我们分别证明定理 B 和 C。最后，我们考察解析环境。第9节研究 Berkovich 几何，为第 10 节的结果提供框架；我们将在该节证明定理 D。

致谢。 我感谢 Peter Scholze 在本项目早期阶段与我进行的有益讨论。感谢 Adam Dauser、Hadrian Heine、Juan Esteban Rodríguez Camargo 和 Germán Stefanich 在撰写本文期间与我进行的有益交流。感谢 Peter Scholze 对本文草稿提出宝贵意见。感谢马克斯·普朗克数学研究所。

2. 一些2-范畴论

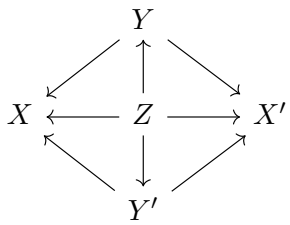
我们回顾本文所需的一些2-范畴论。在第2.1节，我们回顾跨。在第2.2节，我们回顾核的2-范畴。在第2.3节，我们交换一个由Beck–Chevalley变换构成的六边形。在第2.4节，我们讨论一些2-范畴同调代数。

我们假定读者熟悉可呈示 n-范畴论的基础知识；参见 [58]或 [4]。本文的关键在于，正如 [4, 第 3], 节所展示的，可呈示2-范畴论具有良好的性质。

2.1. 跨。 对于一个具有有限极限的1-范畴 $\mathcal{G}$ ，我们得到Haugseng的迭代跨$n\mathrm{Span}(\mathcal{G})$ n-范畴（先前的研究另见 [32, 第1.5] 节）。本文中，变体$\mathrm{Span}_E(\mathcal{G})$和$2\mathrm{Span}_{E;P,\ J}(\mathcal{G})$发挥着重要作用，其中 $\mathcal{G}$是一个1-范畴，而 J、 P和 E是 $\mathcal{G}$ 的宽子范畴，在基变换下稳定，并满足 $J \subset E \supset P$。具体而言，$2\mathrm{Span}_{E;P,\ J}(\mathcal{G})$描述如下；精确定义见 [19, 构造4.12] ：

- 对象是 $\mathcal{G}$的对象。
- 从 X 到 X' 的 1-态射是 $\mathcal{G}$ 中的 Span $X \leftarrow Y \rightarrow X'$ ，且 $Y \rightarrow X'$ 属于 E。
- 从 $X \leftarrow Y \rightarrow X'$ 到 $X \leftarrow Y' \rightarrow X'$ 的 2-态射是一个图

(2.1)



在 $\mathcal{G}$ 中，且 $Z \rightarrow Y$属于 P， $Z \rightarrow Y'$ 属于 J。

令 J 和 P 为所有等价的类，我们得到 $\mathrm{Span}_E(\mathcal{G}) = 2\mathrm{Span}_{E;\mathrm{all},\ \mathrm{all}}(\mathcal{G})$，这是一个 1-范畴。注意包含关系 $\mathcal{G}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathrm{Span}_E(\mathcal{G}) \rightarrow 2\mathrm{Span}_{E;P,\ J}(\mathcal{G})$。在 [19], 中，在适当的假设下得到了这个范畴的泛性质。这里我们回顾 [19,定理 B] 中考虑 $\mathcal{G}$上的笛卡儿对称幺半结构的版本：

定理 2.2 (Cnossen–Lenz–Linskens)。 设 $\mathcal{G}$ 是一个具有有限积的 1-范畴。考虑其子范畴 J、 P和 E，它们满足以下条件：

- J 与 P 均在基变换下封闭，并满足消去。
- 一个态射属于 E ，当且仅当对 $j \in J$ 与 $p \in P$，它可以写成 pj 。
- $J \cap P$ 中的每个态射对某个 n （依赖于该态射）是 n-截断的。

于是，对任意对称幺半2-范畴 $\mathcal{C}$，限制函子

$$\mathrm{Fun}^{\text{lax-}\otimes}(2\mathrm{Span}_{E;P,J}(\mathcal{G}), \mathcal{C}) \rightarrow \mathrm{Fun}^{\text{lax-}\otimes}(\mathcal{G}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C})$$

是子范畴包含。

- 对象由满足投影公式的(J, P)-双伴随函子 D 张成：对任意 $j \in J$ ，态射 $j^* = D(j)$ 具有满足投影公式与 ***Beck–Chevalley*** 条件的左伴随 $j_!$ 。类似地，对任意 $p \in P$ ， $p^* = D(p)$ 具有满足对偶条件的右伴随 p_* 。此外，这些伴随满足双重 ***Beck–Chevalley*** 条件；即，对任意拉回方块

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{k} & Y \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X' & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

使得 $j \in J$ 和 $p \in P$所诱导的态射 $j_! p'_* \rightarrow p_* k_!$ 是一个等价。

- 态射 $\alpha\colon\ D \to D'$ 是与上述 $j_!$和 p_* 的构造相容的自然变换：对于 J中的 $j\colon\ Y \to X$，态射 $D'(j)_{\mathrm{L}}\ \alpha_X \to \alpha_Y D(j)_{\mathrm{L}}$ 是一个等价；对于 P中的 $p\colon\ Y \to X$，态射 $\alpha_X D(p)_{\mathrm{R}} \to D'(p)_{\mathrm{R}}\ \alpha_Y$是一个等价。

这里，$\mathrm{Fun}^{\text{lax-}\otimes}$ 表示松对称幺半函子的范畴。

注 2.3。 本文始终使用定理 2.2 ，即使较弱的结果可能已经足够。关于其他先前方法的历史回顾，请参阅 [19, 第 1] 节。我们常常可以将其与先前的构造进行比较，例如 Liu–Zheng 的工作 [38], ，方法是使用 Dauser–Kuijper 的唯一性定理 [20]。

2.2. **核**。 考虑一个具有有限极限的范畴 $\mathcal{G}$ 以及一个松对称幺半函子$D\colon \mathrm{Span}(\mathcal{G}) \to \mathrm{Cat}$。我们与 D 相关联的对称幺半2-范畴，基于 Lu–Zheng 的工作 [39]，曾用于 [26,第 2 节3] [3] 。它具有以下特征：

- 对象与 $\mathcal{G}$中的对象相同。我们将对应于 $X \in \mathcal{G}$的对象记作 $[X]$ 。
- 从 $[X]$ 到 $[Y]$ 的映射范畴为 $D(X \times Y)$。
- 恒等映射是 $d!\mathbf{1}$，其中 $d\colon\ X \to X \times X$ 是对角线。
- 对于 $F\colon\ [X] \to [Y]$和 $G\colon\ [Y] \to [Z]$，其复合为 $(\mathrm{pr}_{X,\ Z})!(\mathrm{pr}^*_{X,\ Y} F \otimes \mathrm{pr}^*_{Y,\ Z} G)$，其中 pr 表示来自 $X \times Y \times Z$ 的相应投影。

以下精确表述得自 Dauser：

定义 2.4。 设 $\mathcal{G}$ 是一个具有有限极限的范畴，且 $D\colon \mathrm{Span}(\mathcal{G}) \to \mathrm{Cat}$ 是一个松对称幺半函子。那么，由于 $\mathrm{Span}(\mathcal{G})$ 是闭的，它可由自身充实。沿着 D 作基变换，我们得到 $\mathrm{Span}(\mathcal{G})$ 上的 Cat-充实。我们称之为核的 2-范畴。

在可呈情形下，我们可以对一个类似的范畴作另一种定义。以下定义得自 Dauser：

定义 2.5。 设 $\mathcal{G}$ 是一个具有有限极限的范畴，且 $D\colon \mathrm{Span}(\mathcal{G}) \to \mathrm{Pr}$ 是一个松对称幺半函子，我们将其视为 $\mathrm{Fun}(\mathrm{Span}(\mathcal{G}), \mathrm{Pr})$ 中带有 Day卷积对称幺半结构的交换代数对象。我们考虑 $\mathrm{Mod}_D(\mathrm{Fun}(\mathrm{Span}(\mathcal{G}), \mathrm{Pr}))$，并称之为核的可呈 2-范畴。

这一概念的一个优点是，它避免了使用富化范畴论。尽管如此，这两种构造可以通过以下方式进行比较：

定理 2.6. 设 $\mathcal{S}$ 是一个小闭对称幺半范畴，$\mathcal{V}$ 是 交换代数(Pr)中的一个对象。设 $D\colon\ \mathcal{S} \to \mathcal{V}$ 是一个松对称幺半函子。则存在典范等价

$$\mathrm{PShv}^{\mathcal{V}}(\widetilde{\mathcal{S}^{\mathrm{op}}}) \simeq \mathrm{Mod}_D(\mathrm{Fun}(\mathcal{S}, \mathcal{V})),$$

$\widetilde{\ }$其中 $\mathcal{S}$ 是沿着 D对 $\mathcal{S}$的自富化进行基变换所得到的 $\mathcal{V}$-富化范畴。

推论 2.7. 在定义 *2.5*的情形下，我们选取一个正则基数 κ 使得 D经由 Pr^{κ}。按照定义 *2.4*中的步骤，我们得到Pr^{κ}-富化范畴 $\mathcal{K}$。于是$\mathrm{PShv}^{\mathrm{Pr}^{\kappa}}(\mathcal{K})$ 等价于 模$_D(\mathrm{Fun}(\mathrm{Span}(\mathcal{G}),\mathrm{Pr}^{\kappa}))$。

Heine 协助完成了以下证明：

定理 2.6 的证明。我们将 U 写作 $\mathrm{Ani} \to \mathcal{V}$，表示单位函子。由于 $U(\mathrm{Maps}_{\mathcal{S}}(1, -))$ 是 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Fun}(\mathcal{S}, \mathcal{V}))$ 中的单位，我们由此得到一个态射 $U(\mathrm{Maps}_{\mathcal{S}}(1, -)) \to D$。沿此态射对 $\mathcal{S}$ 的自富化作基变换$\widetilde{\ }$，即可得到一个 $\mathcal{V}$-函子 $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$，其中源范畴带有平凡富化。我们将其对偶记为 f。这在 $\mathrm{Mod}_{\mathcal{V}}(\mathrm{Pr})$ 中诱导出一个伴随 $f_! \dashv f^*$。注意，$f^*\colon \mathrm{PShv}^{\mathcal{V}}(\widetilde{\mathcal{S}^{\mathrm{op}}}) \to \mathrm{PShv}^{\mathcal{V}}(\mathcal{S}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Fun}(\mathcal{S}, \mathcal{V})$ 具有单子性。只需证明这个$\mathcal{V}$-线性单子 $f^*f_!$ 与 D 相同。首先，根据定义，$f^*\mathbf{1}$ 与 D 相同，由此得到一个单子态射 $D \to f^*f_!$。由线性性可知，只需在可表对象上验证这一等价，这显然成立。□

[3]参见 [31, 第 3] 节和 [33, 注 1.3.11] 关于这一关系。

2.3. **关于双重 Beck–Chevalley 变换**。我们证明关于 2-范畴中立方体的下述结论：

命题 2.8。 设 $\mathcal{G} = [1] \times [1]$ 为一个按（1.2）标记的方形范畴，且 $\mathcal{C}$ 为一个 2-范畴。存在一个函子 $D\colon \mathcal{G}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$，使得方形

$$\begin{array}{ccc} D(X) & \xrightarrow{D(p)} & D(X') \\ {\scriptstyle D(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle D(f')} \\ D(Y) & \xrightarrow{D(q)} & D(Y') \end{array}$$

是垂直左伴随可且水平可右伴随。另有一个满足相同条件的图 D'，以及一个自然变换 $\alpha\colon D \to D'$。则图

$$\begin{array}{ccccc} & & \alpha_X D(f)^{\mathrm{L}} D(q)^{\mathrm{R}} & \longrightarrow & \alpha_X D(p)^{\mathrm{R}} D(f')^{\mathrm{L}} & & \\ & \nearrow & & & & \searrow & \\ D'(f)^{\mathrm{L}} \alpha_Y D(q)^{\mathrm{R}} & & & & & & D'(p)^{\mathrm{R}} \alpha_{X'} D(f')^{\mathrm{L}} \\ & \searrow & & & & \nearrow & \\ & & D'(f)^{\mathrm{L}} D'(q)^{\mathrm{R}} \alpha_{Y'} & \longrightarrow & D'(p)^{\mathrm{R}} D'(f')^{\mathrm{L}} \alpha_{Y'} & & \end{array}$$

由四个 *Beck–Chevalley*变换和两个双重 *Beck–Chevalley* 变换组成的图是可交换的。

在下面的证明中，我们打破了对称性；例如，我们无法确定所选的见证是否与通过另一种方式打破对称性所得到的见证一致：

证明。 通过拼接 Beck–Chevalley变换，我们将图化简为

$$\begin{array}{ccc} D'(f)^{\mathrm{L}} \alpha_Y D(q)^{\mathrm{R}} & \longrightarrow & \alpha_X D(p)^{\mathrm{R}} D(f')^{\mathrm{L}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D'(f)^{\mathrm{L}} D'(q)^{\mathrm{R}} \alpha_{Y'} & \longrightarrow & D'(p)^{\mathrm{R}} \alpha_{X'} D(f')^{\mathrm{L}}, \end{array}$$

其中由四个 Beck–Chevalley变换组成。然后我们展开各行；于是只需使下图的右方形可交换

$$\begin{array}{ccccc} \alpha_Y D(q)^{\mathrm{R}} & \longrightarrow & \alpha_Y D(q)^{\mathrm{R}} D(f') D(f')^{\mathrm{L}} & \xrightarrow{\simeq} & D'(f) \alpha_X D(p)^{\mathrm{R}} D(f')^{\mathrm{L}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D'(q)^{\mathrm{R}} \alpha_{Y'} & \longrightarrow & D'(q)^{\mathrm{R}} \alpha_{Y'} D(f') D(f')^{\mathrm{L}} & \xrightarrow{\simeq} & D'(f) D'(p)^{\mathrm{R}} \alpha_{X'} D(f')^{\mathrm{L}}. \end{array}$$

移除 $D(f')^{\mathrm{L}}$ 后，现在我们需要使下图可交换

$$\begin{array}{ccccc} \alpha_Y D(q)^{\mathrm{R}} D(f') & \xleftarrow{\simeq} & \alpha_Y D(f) D(p)^{\mathrm{R}} & \xrightarrow{\simeq} & D'(f) \alpha_X D(p)^{\mathrm{R}} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ D'(q)^{\mathrm{R}} \alpha_{Y'} D(f') & \xrightarrow{\simeq} & D'(q)^{\mathrm{R}} D'(f') \alpha_{X'} & \xleftarrow{\simeq} & D'(f) D'(p)^{\mathrm{R}} \alpha_{X'}. \end{array}$$

再次拼接 Beck–Chevalley 变换后，这可简化为

$$\begin{array}{ccc} \alpha_Y D(f) D(p)^{\mathrm{R}} & \xrightarrow{\simeq} & D'(f) \alpha_X D(p)^{\mathrm{R}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D'(q)^{\mathrm{R}} \alpha_Y D(f') & \xrightarrow{\simeq} & D'(q)^{\mathrm{R}} D'(f') \alpha_{X'}, \end{array}$$

它交换。 □

2.4. **粘合与切除方块**。 这里我们进行一些2-范畴同调代数。

定义 2.9。我们称一个图

$$C_U \xleftarrow{j^*} C_X \xrightarrow{i^*} C_Z$$

i如果满足以下条件，则称 n 为一个稳定可表现2-范畴中的 粘合 d:

(i) 态射 j^* 有一个左伴随 $j_!$，且余单位 $j_!j^* \to$恒等映射 是一个等价。(ii) 态射 i^* 有一个右伴随 i_*，且单位 恒等映射 $\to i_*i^*$ 是一个等价。(iii) 复合 j^*i_* 为零[4] (或者等价地， $i^*j_!$ 为零)，且诱导方块

$$\begin{array}{ccc} j_!j^* & \longrightarrow & \mathrm{id} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & i_*i^* \end{array}$$

在 End(C_X) 中是一个推出。

我们来做一些 2-范畴同调代数。

命题 2.10. 在一个稳定可呈2-范畴中，我们考虑一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} C_U & \xleftarrow{j^*} & C_X & \xrightarrow{i^*} & C_Z \\ {\scriptstyle g^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \| \\ C_V & \xleftarrow{l^*} & C_Y & \xrightarrow{k^*} & C_Z \end{array}$$

满足以下条件：

(i) 顶行是一个粘合。*(ii)* 底行是一个粘合。*(iii)* 右侧方块垂直左伴随可；也就是说， f^* 有一个左伴随 $f_\natural$，且 *Beck–Chevalley*变换 $k^* \to i^*f_\natural$ 是一个等价。

那么左侧方块是笛卡尔的。

证明。 首先， $g_\natural = j^*f_\natural l_!$ 确定了 g^*的一个左伴随。按照此定义，左侧方块也垂直左伴随可。

我们对任意对象 D 应用 Hom(D, –)，将问题归约为 $\mathrm{Pr}_{\mathrm{st}}$的情形。我们将 Hom($D, C$_) 记作 $\mathcal{C}_{\_}$。我们用 Map_ 表示 Map$_{\mathcal{C}_{_}}$。

我们首先证明，从 $\mathcal{C}_X$ 到拉回的诱导函子是全忠实的。这等价于下面的方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_U(j^*C, j^*D) & \longleftarrow & \mathrm{Map}_X(C, D) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Map}_V(l^*f^*C, l^*f^*D) & \longleftarrow & \mathrm{Map}_Y(f^*C, f^*D) \end{array}$$

对于 $\mathcal{C}_X$ 中的对象 C 和 D 是一个拉回。这等价于断言下面的方块

$$\begin{array}{ccc} j_!j^*C & \longrightarrow & C \\ \uparrow & & \uparrow \\ f_\natural l_! l^* f^* C & \longrightarrow & f_\natural f^* C \end{array}$$

是一个推出。这可以通过考察各行的余纤维来验证。

接着，我们证明诱导的函子是本质满的。考虑带有等价 $g^*(C_U) \simeq l^*(C_Y)$ 的 $C_U \in \mathcal{C}_U$ 和$C_Y \in \mathcal{C}_Y$。我们得到一个映射

$$i_*k^*(C_Y)[-1] \overset{\text{(iii)}}{\simeq} i_*i^*f_\natural(C_Y)[-1] \xrightarrow{\text{(i)}} j_!j^*f_\natural(C_Y) \simeq j_!g_\natural l^*(C_Y) \simeq j_!g_\natural g^*(C_U) \to j_!(C_U)$$

[4]注意，这是一个条件，而非数据。

其余纤维即为所需的对象。 □

我们指出以下退化情形：

推论 2.11。 对于定义 2.9中的粘合，

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longleftarrow & C_Z \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_*} \\ C_U & \xleftarrow{j^*} & C_X \end{array}$$

是一个拉回方块。

注 2.12。 推论 2.11 意味着粘合由 $j^*\colon C_X \to C_U$ (或$i^*\colon C_X \to C_Z$，因为我们可以通过取左伴随得到 C_U是 i^*的核。

定义 2.13。 根据注 2.12，命题 2.10 中的左方块称为切除方形。

注 2.14。 定义 2.9和 2.13中，我们考虑了非交换情形。当图表位于交换代数($\mathcal{C}$)中时，只需考虑模$C_X(\mathcal{C})$中的相同概念，即可定义交换版本。

3. 代数 2-动机

在第 3.1 节中，我们回顾SH 及其必要事实。在第 3.2 节中，我们证明定理 A。在第 3.3 节中，我们证明（相对）Künneth 公式。

3.1. **代数动机谱综述**。以下内容引入于 [45]:

定义 3.1 (Morel–Voevodsky)。 设 X 是一个拟紧拟分离静态概形。我们将 Sm_X 记为有限表示光滑 X-概形的范畴。 X 上的动机谱范畴 定义为

$$\mathrm{SH}(X) = \mathrm{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathsf{Sm}_X; \mathsf{Sp})_{\mathbb{A}^1}[(\Sigma^\infty \mathbb{P}^1)^{\otimes -1}], \tag{3.2}$$

其中 $\mathrm{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathsf{Sm}_X; \mathsf{Sp})_{\mathbb{A}^1}$ 表示由 $\mathbb{A}^1$-不变 Nisnevich 层生成的全子范畴。参见 [49, 第 2.1] 节了解反演程序。

注 3.3。 更确切地说， [45] 其中考虑的是超完备层，而非定义 3.1。注意，$\mathrm{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathsf{Sm}_X)$ 当 X 是有限型整数环上的对象时是超完备的（参见 **整数环** （参见 [17,定理 3.18]）。我们更倾向于使用这一版本，因为按此定义，$\mathrm{SH}\colon \mathsf{Ring} \to \mathrm{CAlg}(\mathsf{Pr})$ 保持滤过余极限。

注意显然的函子性；SH 本身是到 $\mathrm{CAlg}(\mathsf{Pr}_{\mathrm{st}})$ 的反变函子。因此，我们有四个运算。根据定义，光滑基变换是直接可得的。SH 的真基变换由 Ayoub 在其论文中确立 [7, 8].[5] 更确切地说，他在 [7,Scholie 1.4.2] 中证明，一组特定的公理蕴含真基变换。他还在 [7, 第 2 节3] 中考虑了对称幺半版本。我们在此陈述这两个版本：

定理 3.4 (Ayoub)。 设 S 是一个除子诺特静态概形。我们将 QProj_S 记作所有在 S上拟射影的静态概形所构成的范畴。设 $D\colon (\mathsf{QProj}_S)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Pr}_{\mathrm{st}}$[6] 是一个函子。我们假设它满足以下条件：

(i) 光滑态射满足基变换；也就是说，当 $f\colon Y \to X$ 是光滑态射时， $f^*\colon D(X) \to D(Y)$ 存在一个左伴随 $f_\natural$，使得对于任意拉回方块 *(1.2)*，*Beck–Chevalley* 变换 $f'_\natural q^* \to p^* f_\natural$ 都是等价。*(ii)* 对于任意闭浸入 $i\colon Z \hookrightarrow X$ 及其补集 $j\colon U \hookrightarrow X$，图$D(U) \leftarrow D(X) \to D(Z)$ 是一个粘合[7]；见下文注 *3.5*。*(iii)* 对于典范映射 $f\colon \mathbb{A}^1_X \to X$，函子 $f^*\colon D(X) \to D(\mathbb{A}^1_X)$ 是全忠实的。

[5]Voevodsky 最初提出了这一结论，但没有给出证明。Röndigs 也独立研究了这一问题，但相关成果尚未发表。[6]更一般地说，他在三角范畴的框架下进行了研究。[7]Morel–Voevodsky [45, 定理 2.21] 证明了 SH 满足这一性质。

(iv) 在 *(iii)* 的情形下，函子 $f_\natural s_*$: $D(X) \to D(X)$ 是一个等价，其中s: $X \to \mathbb{A}^1_X$ 是零截面。

于是，射影态射满足基变换；也就是说，当 p: $X' \to X$ 是射影的时，p^*: $D(X) \to D(X')$ 在 p_* 中有一个右伴随 $\mathsf{Pr}_{\mathrm{st}}$，使得对于任意拉回方块（*1.2*），*Beck–Chevalley*变换 $f'_\natural q^* \to p^* f_\natural$是一个等价。

此外，我们考虑一个松对称幺半函子 D: $(\mathsf{QProj}S)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Pr}_{\mathrm{st}}$，它满足上述条件，其中（*i*）替换为以下内容：

(v) 光滑态射满足基变换和投影公式；也就是说，（*i*）成立，此外 $f_\natural$ 是 $D(X)$-线性的。

在这种情况下，投影公式对射影态射成立；也就是说，p_* 也是 $D(X)$-线

ar 对于任意 *pr* 态射 p: $Y \to X$。

注 3.5。对于定理 3.4，Ayoub 最初将（ii）表述为 $D(\emptyset) = 0$、i_* 的全忠实性，以及（j^*，i^*）：$D(X) \to D(U) \oplus D(Z)$ 的保守性。该等价由将光滑基变换应用于 $U \to X$（沿 i）而得出。

注 3.6。为证明定理 3.4，Ayoub 首先在三角范畴的层面上构造了 shriek函子性。然后他用它证明了 $\mathbb{P}^n$ 的真基变换。关键在于，我们不能使用基于紧化的通常识别原理来获得 shriek函子性，因为真性正是我们希望证明的。

注 3.7。定理3.4 的至少第一部分在 $\mathsf{Pr}_{\mathrm{st}}$ 被替换为一般的稳定可呈 2-范畴时成立。我们在下文的推论 3.11 中证明这一点。

Drew–Gallauer [21] 将 SH 确定为泛六函子形式体系：

定理 3.8（Drew–Gallauer）。我们使用 S 与 $\mathsf{QProj}S$，如定理*3.4*（但见下文注*3.9*）。我们考虑如下非全子范畴（属于交换代数(Fun((QProj$S$)^{op}，$\mathsf{Pr}_{\mathrm{st}}$)))：

- 对象是松对称幺半函子 D:（QProj$S$）$_{\mathrm{op}} \to \mathsf{Pr}_{\mathrm{st}}$，且满足（*ii*）至（*v*）（定理*3.4*）。
- 态射是那些自然变换 α: $D \to D'$，使得对任意光滑态射 f: $Y \to X$，典范态射 $f_\natural \alpha_Y \to \alpha_X f_\natural$ 为等价。

于是SH 是该范畴中的初始对象。

注 3.9。更精确地说，Drew–Gallauer [21] 考虑的是有限维诺特底上的有限型概形范畴，这与定理 3.8不同。在我们的情形中，他们的证明先验地对 X 给出定义3.2 中的范畴，其中 S m_X 被替换为其由在 X上拟射影的对象所张成的全子范畴，但借助标准基论证，它与 $\mathrm{SH}(X)$ 一致。注意，当我们把 $\mathsf{QProj}S$ 替换为由仿射概形张成的全子范畴时，同一注记仍然适用（因而同一结果成立）。

3.2. **代数2-动机**。在证明中，我们需要定理3.4的如下增强：

命题 3.10. 在定理*3.4*的情形下，假设我们有一个满足条件的函子之间的自然变换α: $D \to D'$。若 α 与光滑基变换相容（参见定理 *3.8*），则它也与射影基变换相容。

证明。我们将此分为闭浸入和 $\mathbb{P}^n_X \to X$两种情形。前一种情形由（ii）以及开浸入的光滑基变换得出。因此，只需考虑后一种情形。

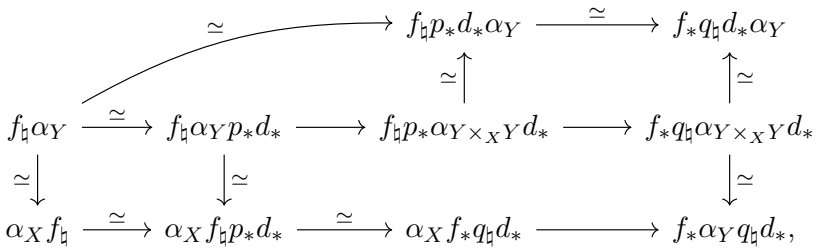
现在考虑一个一般的光滑射影态射 f: $Y \to X$。我们构造如下图

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "d"] & Y \times_X Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & Y \arrow[r, "f"] & X. \end{tikzcd}$$

那么对于 D（对于 D' 也类似），我们考虑自然变换

$$f_\natural \simeq f_\natural p_* d_* \to f_* q_\natural d_*,$$

其中第二个态射由双重 Beck–Chevalley 变换诱导。Ayoub 证明了这个自然变换是一个等价，且 $q_\natural d_*$ 是可逆的。根据交换图



其中，六边形根据命题 2.8交换，右下方的水平态射$\alpha_X f_* q_\natural d_* \to f_* \alpha_Y q_\natural d_*$ 也为等价。由于 $q_\natural d_*$ 可逆，所考虑的 Beck–Chevalley变换 $f_\natural \alpha_Y \to \alpha_X f_\natural$ 是等价。 □

推论 3.11。 定理 *3.4* 的第一部分在将 $\mathrm{Pr}_{\mathrm{st}}$ 替换为任意稳定可呈2-范畴 $\mathcal{C}$时仍然成立。

证明。 我们使用定理 3.4 和 Yoneda。我们可以利用命题验证伴随性3.10。 □

现在我们证明定理A：

定理 *A*的证明。 在此证明中，我们用 $2\mathrm{Mot}(S)$ 表示泛目标。我们希望证明由泛性质给出的态射 $F\colon 2\mathrm{Mot}(S) \to 2\mathrm{SH}(S)$ 是一个等价。

我们首先在 $(\mathsf{QProj}_S)^{\mathrm{op}}$ 下构造一个态射 $G\colon 2\mathrm{SH}(S) \to 2\mathrm{Mot}(S)$。回顾定义 2.5，$2\mathrm{SH}(S)$ 定义为 $\mathrm{Mod}_{\mathrm{SH}}(\mathrm{Fun}(\mathrm{Span}(\mathsf{QProj}_S, \mathrm{Pr}_{\mathrm{st}})))$。因此，这等价于构造一个对称幺半函子 $\mathrm{Span}(\mathsf{QProj}_S) \to 2\mathrm{Mot}(S)$，将 $[-]\colon \mathsf{QProj}_S^{\mathrm{op}} \to 2\mathrm{Mot}(S)$ 延拓，并在 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Fun}(\mathrm{Span}(\mathsf{QProj}_S), \mathrm{Pr}_{\mathrm{st}}))$ 中构造一个态射 $\alpha\colon \mathrm{SH} \to \mathrm{Hom}^{2\mathrm{Mot}(S)}(\mathbf{1}, [-])$。

我们首先通过将一个函子从 $2\mathrm{Span}_{P,J}(\mathsf{QProj}_S)$ 限制下来，构造 $[-]$ 所需的延拓；其中 J 和 P 分别由开浸入和射影态射组成。我们验证定理 2.2 中的 (J, P)-双伴随性条件。 J 的基变换由 (i) 得出。对于 P，基变换由推论 3.11 得出。通过考虑互补闭浸入并使用 (ii)，可以验证双重 Beck–Chevalley 条件。由于 $(\mathsf{QProj}_S)^{\mathrm{op}} \to 2\mathrm{Mot}(S)$ 是对称幺半的，投影公式自动由基变换推出。

我们现在构造 α。我们记 $D = \mathrm{Hom}_{2\mathrm{Mot}}(\mathbf{1}, [-])$。通过应用定理 3.8，在限制到$(\mathsf{QProj}_S)^{\mathrm{op}}$之后得到一个自然变换。我们希望再次援引定理 2.2 并限制到 $\mathrm{Span}(\mathsf{QProj}_S)$ 以构造 α。这需要验证定理 2.2 中的条件；也就是说，我们需要证明

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SH}(X) & \xrightarrow{j^*} & \mathrm{SH}(U) \\ {\scriptstyle \alpha_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_U} \\ D(X) & \xrightarrow{j^*} & D(U), \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{SH}(X) & \xrightarrow{p^*} & \mathrm{SH}(Y) \\ {\scriptstyle \alpha_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_Y} \\ D(X) & \xrightarrow{p^*} & D(Y) \end{array}$$

对任意开浸入 $j\colon U \to X$ 与射影态射 $p\colon Y \to X$ 分别左右可伴随。前者由此得出，因为它按构造与光滑基变换相容。后者由命题3.10。

尚需证明它们互为逆。按构造， GF 在与 $[-]\colon \mathsf{QProj}^{\mathrm{op}} \to 2\mathrm{Mot}(S)$ 复合之后与恒等映射同伦，因而由万有性， GF 与恒等映射同伦。因此，只需证明 FG 与恒等映射同伦。按构造，它在 $(\mathsf{QProj}_S)^{\mathrm{op}}$ 下与恒等映射同伦，并且由定理 2.2，在 $\mathrm{Span}(\mathsf{QProj}_S)$ 下亦然。于是我们得到 D 在交换代数$(\mathrm{Fun}(\mathrm{Span}(\mathsf{QProj}_S), \mathrm{Pr}_{\mathrm{st}}))$ 中相应的自等价，由定理 3.8，它与恒等映射同伦。
□

3.3. 拉回的 2-**动机**。 这里，我们提出一种公理化方法来得到相对Künneth公式：

命题 3.12. 设 $\mathcal{G}$ 是一个具有有限极限的范畴，$\mathcal{C}$ 是一个可呈示的对称幺半2-范畴，且 $[-]\colon \mathcal{G}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ 是一个对称幺半函子。假设 I 是 $\mathcal{G}$ 的一个在基变换下稳定的宽子范畴，并且对于 $i \in I$，态射 $i^* = [i]$ 存在一个满足真基变换的全忠实右伴随 i_*。那么，对于 $\mathcal{G}$ 中的一个拉回 $Y' = X' \times_X Y$，若 X 的对角线属于 I，则 $\mathcal{C}$ 中的典范态射 $[X'] \otimes_{[X]} [Y] \to [Y']$ 是一个等价。

引理 3.13. 设 $\mathcal{C}^\bullet$ 是 Cat 中的一个余单纯对象，且所有余面映射都是全忠实的。假设

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^m & \xrightarrow{d^0} & \mathcal{C}^{m+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}^n & \xrightarrow{d^0} & \mathcal{C}^{n+1} \end{array}$$

对任意 $[m] \to [n] \in \Delta$ 都可右伴随。那么，其全化 $\mathcal{C}^{-1}$ 可识别为 $\mathcal{C}^0$ 的全子范畴，该子范畴由满足以下条件的对象 C 张成：$d^0(C)$ 等价于 $d^1(C)$。

证明。记 $F\colon \mathcal{C}^{-1} \to \mathcal{C}^0$ 为典范函子。通过余半单纯地计算 $\mathcal{C}^{-1}$，我们看到 F 是全忠实的。此外，显然 $C \in \mathcal{C}^0$ 属于 F 的像，因此 $d^0(C) \simeq d^1(C)$ 成立。

我们证明逆命题。假设 $C \in \mathcal{C}^0$ 满足 $d^0(C) \simeq d^1(C)$。我们应用 [41,定理4.7.5。2] 以便看到

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{-1} & \xrightarrow{F} & \mathcal{C}^0 \\ {\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d^1} \\ \mathcal{C}^0 & \xrightarrow{d^0} & \mathcal{C}^1 \end{array}$$

是可右伴随的。由 $C \simeq d^0,\ {}^{\mathrm{R}}d^0(C) \simeq d^0,\ {}^{\mathrm{R}}d^1(C) \simeq FF^{\mathrm{R}}(C)$，我们看到 C 属于 F 的像。□

命题 *3.12*的证明。我们将 $[X'] \otimes_{[X]} [Y]$ 实现为 $[X' \times X^{\times \bullet} \times Y]$在 $\mathcal{C}$中的几何实现。然后通过考虑 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\ C)$ 对于任意对象 C，这可归结为引理 3.13。□

注 3.14。我们可以使用的另一种有用技巧是 $X' \times_X Y = X \times_{X \times X} (X' \times Y)$；参见命题 10.14的证明。

推论 3.15。在定理 *A*的情形下，对于拉回 $Y' = X' \times_X Y$ 在 QProj_S中，典范态射 $[X'] \otimes_{[X]} [Y] \to [Y']$ 是 $2\mathrm{SH}(S)$中的等价。

推论 3.16。在定理 *A*的情形下，对于 $X \in \mathsf{QProj}_S$，态射 $2\mathrm{SH}(S) \to 2\mathrm{SH}(X)$ 诱导一个等价 模 $[X](2\mathrm{SH}(S)) \simeq 2\mathrm{SH}(X)$。

证明。这由命题 3.12 及 [59, 命题 4。8]。□

推论 3.17。设 X 为除子诺特静态概形，且 $X' \to X \leftarrow Y$ 为准射影态射。则典范态射

$$2\mathrm{SH}(X') \otimes_{2\mathrm{SH}(X)} 2\mathrm{SH}(Y) \to 2\mathrm{SH}(X' \times_X Y)$$

是一个等价。

注 3.18。按照 [59, 第 3], 节，我们还可以得到可呈对称幺半n-范畴 n**SH(整数环)**，即关于 $n \geq 3$的 n-动机。根据上述结果，它是 **2SH(整数环)**上的迭代模n-范畴。换言之，稳定动机同伦论是 2-仿射的。

4. Stacks over a 2-category

在本节中，我们固定一个可呈对称幺半 2-范畴 $\mathcal{C}$，并研究以下对象的几何：

定义 4.1. 我们将 $\mathbf{CAlg}(\mathcal{C})^{\mathrm{op}}$ 称为 $\mathcal{C}$上的栈范畴。对于一个栈 X，我们用 $[X]$表示 $\mathbf{CAlg}(\mathcal{C})$ 中对应的对象。

注 4.2。 用 Scholze–Stefanich 的语言来说（参见 [55]），忽略大小限制后，定义 4.1给出了 1-仿射 gestalt 在 $\mathrm{Gest}(\mathcal{C})$ 上的范畴。

以下例子尤为重要：

例 4.3. 设 X 为一个 locale。那么 $\mathrm{Shv}(X)$ 是 Pr 上的一个 0-截断栈；这由 [5, 推论 1.10] 得出（在这个特定情形下，证明更为直接）。若不会引起混淆，我们将 X 记作此栈。

例 4.4. 设 X 是 $\mathrm{CAlg}^{\mathrm{op}}$ 上的一个可达预层，其中 $\mathrm{CAlg}^{\mathrm{op}}$ 是 $\mathbb{E}_\infty$-环的对范畴。那么 $\mathrm{D}(X) = \varprojlim_{\mathrm{Spec}(A)\to X} \mathrm{D}(A)$ 是 $\mathrm{Pr}_{\mathrm{st}}$ 上的一个栈。

在第 4.1 节中，我们引入若干类叠态射。在第 4.2 节中，我们说明一种构造六种运算的方法。在第 4.3 节中，我们说明定理 B 至 D 中所用的环叠概念。在第 4.4 节中，我们说明定理 D 中所用的环叠上的绝对值概念。

4.1. S **uave 与 prim 映射**。 关于这些术语的来源，见 [33, 注 4.4.2]

定义 4.5. 我们考虑一个叠态射 $Y \to X$。当$[X] \to [Y]$ 容许一个 $[X]$-线性左伴随时，我们称其为弱 *suave* 。若进一步 $[Y]$ 在 $[X]$ 上可对偶，则称其为$suave$。当 $[X] \to [Y]$ 容许一个 $[X]$-线性右伴随时，我们称其为$prim$。

注 4.6. 在定义 4.5中，由引理 4.7 下文可知，成为 suave 的附加条件等价于如下假设：态射 模$_{[X]}(\mathcal{C}) \to$ 模$_{[Y]}(\mathcal{C})$ 也容许一个模$_{[X]}(\mathcal{C})$-线性左伴随。

引理 4.7. 考虑 $A \in$交换代数$(\mathcal{C})$。以下各项等价：

(i) A的底层对象是可对偶的。*(ii)* 函子 $\mathcal{C} \to$ 模$_A(\mathcal{C})$ 容许一个 $\mathcal{C}$-线性左伴随。*(iii)* 遗忘函子 模$_A(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ 容许一个 $\mathcal{C}$-线性右伴随。

证明。 等价（i） $\Leftrightarrow$ （iii）是众所周知的。等价（ii） $\Leftrightarrow$（iii）由将两边取作 $\mathcal{C}$-模的对偶可得。□

例4.8。 设 $\mathcal{G}$ 是一个具有有限极限的范畴。假设 $\mathcal{C}$ 是与松对称幺半函子 $D\colon \mathrm{Span}(\mathcal{G}) \to \mathrm{Pr}_{\mathrm{st}}$ 相关联的可呈示核 2-范畴。那么，要验证 $Y \to X$ 在 $\mathcal{G}$ 中确定了一个关于 $\mathcal{C}$的 suave（或 prim）态射，只需验证$[X] \to [Y]$ 具有一个 $[X]$-线性左（或右）伴随。

例4.9。 拓扑斯 $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$之间的任意 étale 几何态射，即形如$\mathcal{X}_{/X} \to \mathcal{X}$ 的态射，其中 $X \in \mathcal{X}$是某个对象，都确定了一个关于 Pr 的弱 suave 栈态射；参见 [40,注6.3.5.12]。

例4.10。 并非每个拓扑斯的真态射 $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ （参见 [40, 定义 7.3.1.4]）都确定一个 Pr 上栈之间的 prim 态射。然而，$\mathrm{Shv}(\mathcal{X};\mathrm{Sp}) \to \mathrm{Shv}(\mathcal{Y};\mathrm{Sp})$ 是 $\mathrm{Pr}_{\mathrm{st}}$ 上栈之间的 prim 态射；例如参见 [2, 引理 6.7]。

例4.11。 设 $Y \to X$ 是拟紧拟分离概形态射。则相应的 $\mathrm{Pr}_{\mathrm{st}}$ 上栈之间的态射是 prim 的。

定义4.12。 开浸入 是 suave 单态射。闭浸入 是 prim 单态射。

引理4.13。 设 $f\colon Y \to X$ 是栈态射。当且仅当 $[X] \to [Y]$ 具有一个全忠实的 $[X]$-线性左（或右）伴随时，它是开（或闭）浸入。

证明。 我们只讨论开浸入的情形；闭浸入的情形更容易。

我们先证明“只有当”这一方向。由于 f 是弱 suave，它有一个线性左伴随 $f_\natural$。该方块的左伴随性

$$\begin{array}{ccc} [X] & \longrightarrow & [Y] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [Y] & \longrightarrow & [Y] \end{array}$$

这意味着单位恒等映射 $\to f^* f_\natural$ 是一个等价。

然后我们证明“如果”方向。在这种情况下，$[Y] \to [Y] \otimes_{[X]} [Y]$ 有一个全忠实左伴随，并且由于

$$\begin{array}{ccc} [X] & \longrightarrow & [Y] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [Y] & \longrightarrow & [Y] \otimes_{[X]} [Y] \end{array}$$

是左伴随可延拓的，它必定是一个等价。因此，它是一个单态射。根据定义，它是弱 suave 的。我们看到，在这种情况下，$[Y]$ 在 $[X]$ 上是自对偶的，因此它是 suave 的。□

定义 4.14。我们考虑一个栈的静态态射。如果一个栈的静态映射非分歧，则称其对角线是一个开浸入。若它是 suave 且非分歧的，则称其为 *étale*。若其对角线是一个闭浸入，则称其为分离。若它是 prim 且分离的，则称其为真。

4.2. **开栈的六种运算**。我们需要在无法使用紧化的情况下构造它。我们使用2.2 定理来构造它。

定义 4.15. 我们称叠态射 $Y \to X$ 为例外的，若它对某个 n 是 n-截断的，并且对任意 $n \geq 0$，对象 $[Y]$ 在 $[Y^{\times_X S^{n-1}}] = [Y]^{\otimes_{[X]} S^{n-1}}$ 上可对偶。

命题 4.16. 例外态射在基变换和复合下封闭，并满足消去性质。

引理 4.17. 对于交换代数(𝒞)中的态射 $A \to B \to C$，若 B 在 A 上可对偶，且 C 在 B上可对偶，则 C 在 A上可对偶。

证明. 这由引理4.7推出。 □

命题*4.16*的证明。基变换显然。我们考虑叠态射$Z \to Y \to X$。复合由引理 4.17 以及下图推出

$$\begin{array}{ccccc} Z & \longrightarrow & Z^{\times_Y S^{n-1}} & \longrightarrow & Z^{\times_X S^{n-1}} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & Y & \longrightarrow & Y^{\times_X S^{n-1}}, \end{array}$$

其中该方块是一个拉回。消去性质由引理4.17以及下图推出

$$\begin{array}{ccccccc} Z & \longrightarrow & Z^{\times_{Y\times_X Z} S^{n-1}} & = & Z^{\times_{Y\times_X Z} S^{n-1}} & \longrightarrow & Z^{\times_Y S^{n-1}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Y^{\times_X S^n} & & Z & \longrightarrow & Z^{\times_X S^{n-1}}, \end{array}$$

其中两个方块都是拉回。 □

因此，相关的 Span 范畴定义良好。我们证明如下：

定理 4.18. 我们用 $\mathcal{G}$ 表示栈的范畴，用 E 表示例外态射类。于是我们得到一个典范的对称幺半函子 $\mathrm{Span}_E(\mathcal{G}) \to \mathcal{C}$，它扩张了$\mathcal{G}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$。

证明。我们考虑由 $X \mapsto \mathrm{Mod}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ 给出的 $\mathcal{G}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{C}}(2\mathrm{Pr})$。我们声称它满足定理 2.2 的 (E, E)-双伴随性条件。若确实如此，则根据定理 2.2，我们得到一个典范扩张 $2\mathrm{Span}_{E;E,E}(\mathcal{G}) \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{C}}(2\mathrm{Pr})$，再考察 End(1)，即可得到所需的函子。

我们需要确认双伴随性条件成立；投影公式由对称幺半性自动得到。$P = E$ 的 Beck–Chevalley 条件是显然的。对于 $J = E$，当 $Y \to X$ 为例外时，我们首先看到模$_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) \to$ 模$_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ 具有由 $[Y]^\vee \otimes_{[Y]} -$给出的左伴随，其中 $[Y]^\vee$ 表示 $[Y]$ 在 $[X]$上的对偶。通过考虑 Beck–Chevalley变换中出现的所有态射的右伴随，Beck–Chevalley 条件归结为 P的 Beck–Chevalley 条件。为检验双重 Beck–Chevalley 条件，我们同样可以考虑右伴随。□

例 4.19. 考虑 $\mathcal{C} = \mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{st}}$。设 $\mathcal{G}$ 为可数权的局部紧豪斯多夫空间的范畴，即$\mathbf{R}^n$ 随 $n \geq 0$变化的开子集之不交并。一旦我们验证态射$\mathbf{R} \to *$ 与 $* \xrightarrow{0} \mathbf{R}$ 是例外的，定理4.18 便给出六种运算，其中 E 由所有态射组成。这与经典情形一致。

4.3. **环叠**。 我们使用 Lawvere 理论来定义这些概念。

定义 4.20。 我们用 Lat^+、Lat 和 Pol 表示阿贝尔幺半群、阿贝尔群和交换环的全子范畴，它们分别由$\mathbf{N}^n$、$\mathbf{Z}^n$和$\mathbf{Z}[T_1, \ldots, T_n]$ for$n \geq 0$张成。

定义 4.21。 幺半群栈、群栈和环叠 分别是保持有限余积的函子 $\mathrm{Lat}^+ \to \mathrm{CAlg}(\mathcal{C})$、$\mathrm{Lat} \to \mathrm{CAlg}(\mathcal{C})$ 和 $\mathrm{Pol} \to \mathrm{CAlg}(\mathcal{C})$。

注 4.22。 在定义 4.21中，更准确地说，它们是严格的或动画的，因为它们在范畴意义上并非自由对象。本文将注意力限于此类情形。

例 4.23。 从交换环到阿贝尔幺半群的“乘法”遗忘函子的左伴随限制在 $\mathrm{Lat}^+ \to \mathrm{Pol}$ 上。将其与一个环叠复合，我们便得到底层乘法幺半群的幺半群栈。类似地，将 $\mathrm{Lat} \to \mathrm{Pol}$ 复合，我们得到底层加法群栈。

此外，通过考虑由 $\mathbf{Z}^n \mapsto \mathbf{Z}[\mathbf{Z}^n]$ 给出的 $\mathrm{Lat} \to \mathrm{PShv}_{\Sigma}(\mathrm{Pol})$，我们也得到了可逆元素的乘法群栈。

例 4.24. 当 X 是一个幺半群局部时，$\mathrm{Shv}(X)$ 自然成为 2Pr 中的幺半群栈。

有两个例子特别重要。首先是 Sierpiński 空间 $\{s, \eta\}$，其中 s 是特殊点，η 是泛点，乘法由 $s \cdot s = s$、$s \cdot \eta = s$ 给出，且 $\eta \cdot \eta = \eta = 1$ 是一个幺半群局部。其次，配备通常乘法的 $[0, \infty)$ 也是一个幺半群局部。注意，对于 $r > 0$，$\{s, \eta\}$ 是 $[0, \infty)$ 作为幺半群局部在 $0 \mapsto s$ 和 $r \mapsto \eta$ 下的商。

定义 4.25. 如果一个环叠是缝合的，则称之为缝合的；如果 $R^\times \to R \xleftarrow{0} *$ 的栈图诱导出一个粘合模$_R(\mathcal{C})$ （参见注2.14）。

引理 4.26. 缝合环堆的对角线是闭浸入。特别地，任意缝合环堆都是静态的。

证明. 考虑剪切映射 $(x, y) \mapsto (x, x - y)$，对角线 $R \to R \times R$ 与恒等映射 id $\times 0$: $R \times * \to R \times R$ 同构。由于 $0 : * \to R$是闭点包含到 Sierpiński 空间中的基变换，所需结论即得。□

定义 4.27. 若 $f_\natural s_*$ 可逆，其中s: $* \to R$ 是零截面，则称缝合的弱 suave 环叠稳定 。

引理 4.28。 稳定的缝合的弱光滑环叠是 *suave* 且例外的。

证明。 为证明这一点，我们需要一个关于对偶性的基本事实。考虑态射

$$\eta\colon \mathbf{1} \to C \otimes D, \qquad\qquad \epsilon\colon D \otimes C \to \mathbf{1}$$

在一个幺半（1,1）范畴中。根据定义，当复合

$$C \xrightarrow{\eta\otimes \mathrm{id}_C} C \otimes D \otimes C \xrightarrow{\mathrm{id}_C \otimes \epsilon} C, \qquad\qquad D \xrightarrow{\mathrm{id}_D \otimes \eta} D \otimes C \otimes D \xrightarrow{\epsilon \otimes \mathrm{id}_D} D$$

是恒等映射时， C 与 D 互为对偶。然而，即使复合只是同构而非恒等映射，我们仍然可以通过扭转 η 得到对偶数据，从而得出 [54,引理 5。11]中所述的结论。

利用上述观察，我们证明 $[R]$ 是自对偶的。记 $f\colon \ R \to *$ 为典范映射，记 $d\colon R \to R \times R$为对角线；根据引理 4.26，它是一个闭浸入。我们断言

$$\eta\colon [*] \xrightarrow{f^*} [R] \xrightarrow{d_*} [R \times R], \qquad\qquad \epsilon\colon [R \times R] \xrightarrow{d^*} [R] \xrightarrow{f_\natural} [*]$$

符合上述情形。为此，我们考虑图

$$\begin{array}{ccccc} R & \xrightarrow{d} & R \times R & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} & R \\ {\scriptstyle d}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\times d} & & \\ R \times R & \xrightarrow{d\times \mathrm{id}} & R \times R \times R & & \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_1}\downarrow & & & & \\ R, & & & & \end{array}$$

其中正方形是一个拉回。根据真基变换，我们看到第一个复合等价于

$$[R] \xrightarrow{\mathrm{pr}_2^*} [R \times R] \xrightarrow{d^*} [R] \xrightarrow{d_*} [R \times R] \xrightarrow{\mathrm{pr}_{1,\natural}} [R].$$

仿照引理 4.26 的证明进行剪切，我们看到稳定性蕴含这是一个等价（但仍不等价于恒等映射）。另一个复合可类似处理。

由于 $[R]$ 亦自对偶于 $[R] \otimes [R]$，由引理 4.26，故它是例外的。 □

定义 4.29. 我们称缝合环堆为光滑的，若它是 suave（于是由引理 4.26 它自动为例外，因而六种运算有意义），且 $f^!\mathbf{1}$ 在$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, [R])$中可逆。

命题 4.30. 对于缝合环堆，它是光滑的当且仅当它是弱 *suave* 且稳定的。

证明. 我们记 $\mathcal{G}$ 为例外堆范畴，并考虑

$$D = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, [-])\colon \mathrm{Span}(\mathcal{G}) \to \mathsf{Pr}$$

由定理 4.18 得到。注意在两种情形下， $R = \mathbb{G}_a$ 由引理 4.26 与 4.28 可知为例外。根据 Mann [43, 第 A.5] 节的延拓结果（亦见 [33, 第 3.4] 节），我们将此延拓到典范态射 $t\colon * \to B\mathbb{G}_a$ 可 shriek 的情形。我们考虑该图

$$\begin{array}{ccccc} * & \xrightarrow{s} & \mathbb{G}_a & \xrightarrow{f} & * \\ & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t} \\ & & * & \xrightarrow{t} & B\mathbb{G}_a. \end{array}$$

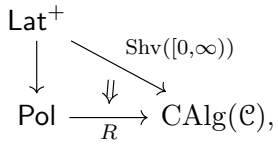
由 $f^!\mathbf{1} \simeq f_!t^*\mathbf{1} \simeq f^*t^!\mathbf{1}$，我们可知，当且仅当 $L = t^!\mathbf{1}$ 可逆时， R 光滑。由于 $f_!s_* \simeq f_!s_! \simeq$恒等映射，我们有

$$L \simeq s^*f^!\mathbf{1} \simeq f_!s_*s^*f^!\mathbf{1} \simeq f_!(f^!\mathbf{1} \otimes s_*\mathbf{1}) \simeq f_\natural s_*\mathbf{1}.$$

因此， 稳定性等价于 L 的可逆性，因此所需结果得证。 □

4.4. **绝对值**。

定义 4.31。环叠 R over $\mathcal{C}$ 上的绝对半赋值是一个乘法映射$N\colon R \to [0,\infty)$，即一个 2-胞腔



其中我们使用例4.23 和4.24，并满足以下条件：

- 我们有 $N(0) \leq 0$；也就是说，态射 $0\colon * \to R$经由 $\{0\} \to [0,\infty)$分解，而后者是一个单态射。
- 它满足三角不等式 $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$；也就是说，对于 $r, s \in [0,\infty)$，我们有 $N(N^{-1}([0,r]) + N^{-1}([0,s])) \subset [0, r+s]$。

如果它还满足以下条件，我们就称之为绝对值：

- 我们有 $N^{-1}(\{0\}) = \{0\}$。
- 我们有 $N^{-1}((0, \infty)) = R^{\times}$。

注 4.32。 带有绝对值的环叠自动是缝合的。事实上，可以仿照定义 4.31，用 Sierpiński 空间 S 代替$[0,\infty)$ (见例 4.24)。

注 4.33。 在定义 4.31中，考虑态射 $R \to [0,\infty)$时，某种完备性或过收敛性已然蕴含其中。这是因为 $[0,\infty)$ 自动具有过收敛性，因此这一性质也由 R继承；例如，对于任意 r，半径为 r 的圆盘（作为 R的子栈）是半径为 r' 的圆盘（ $r' > r$）的交集。

我们将在第10节继续研究这一概念，并证明定理 D。本节最后将具体说明乘法映射 $R \to [0,\infty)$ 意味着什么：

引理 4.34。 设 X 为一个栈。态射 $X \to [0,\infty)$ 是幂等代数 $\cdots \to D_r \to \cdots \to D_0$（对应于 $r \in [0,\infty)$ ）以及 $\mathbf{1} = E_0 \to \cdots \to E_r \to \cdots$ （对应于 $r \in [0,\infty)$ ）在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, [X])$ 中的一种规格，满足以下条件：

（*i*）有 $\lim_{\longrightarrow r'>r} D_{r'} = D_r$。 （*ii*）有 $\lim_{\longrightarrow r'<r} E_{r'} = E_r$。 （*iii*）以及 $D_r \vee E_r = \mathbf{1}$ 对应于 $r \geq 0$。 （*iv*）有 $D_r \otimes E_s = 0$ 对应于 $0 \leq r < s$。

证明。 根据 [5], ，我们需要验证，由这些条件描述的泛框架与 $[0,\infty)$ 一致。

首先， （i）描述了 $[0,\infty)$ 上的拓扑，使得 (r,∞) 对 $r \geq 0$ 是开集。然后， （ii）描述了 $[0,\infty)$ 上的拓扑，使得 $[0,r)$ 对 $r \geq 0$ 是开集。这意味着泛局部是它们乘积的一个子局部。条件（iii）和（iv）将其限制到该空间的对角线部分，这恰好是 $[0,\infty)$上的通常拓扑。 □

引理4.35. 设 M 是一个幺半群栈。乘法映射 $M \to [0,\infty)$ 是引理 *4.34*中所述且满足以下条件的数据

$$\{1\} \subset D_1, \qquad D_r \cdot D_s \subset D_{rs}, \qquad \{1\} \subset E_1, \qquad E_r \cdot E_s \subset E_{rs}$$

对于 r 和 $s \in [0,\infty)$，其中我们将幂等代数与相应的闭子叠等同；例如， $D_r \cdot D_s \subset D_{rs}$表示来自 M 上的二元乘法的 $[M]$在 模$_{D_r}[M] \otimes$模$_{D_s}[M]$ 上的作用经由 模$_{D_{rs}}[M]$分解。

证明。 由 $[0,\infty)$ 的 0-截断性可知，乘法性是一个条件，恰好等价于图表的交换性（这也是一个条件）：

$$\begin{array}{ccc} * & \longrightarrow & * \\ {\scriptstyle 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ M & \longrightarrow & [0,\infty), \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} M^2 & \longrightarrow & [0,\infty)^2 \\ {\scriptstyle m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ M & \longrightarrow & [0,\infty), \end{array}$$

其中 m 是乘法映射。由于在万有情形下，$\mathbf{1}:*\to[0,\infty)$对应于 $D_1\otimes E_1$，我们看到，第一个方块的交换性等价于 $\{1\}\subset D_1$ 和 $\{1\}\subset E_1$。我们考虑第二个方块。类似地，由于以下关系成立，我们可以匹配其余部分：

$$m^*(D_t)=\bigvee_{rs\le t} D_r\boxtimes D_s, \qquad m^*(E_t)=\bigvee_{rs\le t} E_r\boxtimes E_s$$

在万有情形下成立。 □

引理 4.36. 设 R 是一个环叠。那么， R 上的绝对半赋值是一个满足 $\{0\}\subset D_0$ 和 $D_r\cdot D_s\subset D_{r+s}$的数据，如引理 *4.35* 所述。若进一步满足$\{0\}=R\setminus R^\times=D_0$，则它是一个绝对值。

证明。 这是显然的。 □

5. 下降

我们将建立下降的公理化理论。在本文中，它不仅是定理 C陈述的前提，也是证明定理 B的重要组成部分。

在第 5.1 节引入这一概念后，我们将在第 5.2 节确立其基本性质。在第 5.3 节，我们将证明，在 prim 情形下，该条件有一种更简单的表述，并且与可下降性的概念相关；我们将在第 5.4 节讨论可下降性。在第 5.5 节，我们将回到栈理论，给出一些应用。第 6 节中将看到许多下降的例子。

5.1. 下降。

我们首先引入以下条件：

定义 5.1。 在一个可呈现的对称幺半 n-范畴中，我们称 E_0-余代数，即一个态射 $C\to\mathbf{1}$，是忠实的，如果增广半单纯对象 $C^{\otimes\bullet+1}$ 是一个余极限图。

引理 5.2。 在定义 *5.1*的情形下，当 C 是一个 E_1-余代数时， $C^{\otimes\bullet+1}$ 的几何实现是一个幂等余代数。

证明。 这是因为 $C^{\otimes\bullet+2}$ 是一个分裂增广单纯对象 . □

命题 5.3。 设 A 是一个可呈现的对称幺半n-范畴 $\mathcal{C}$中的交换代数对象。我们考虑以下条件：

(i) 态射 $|\text{模}_{A^{\otimes\bullet+1}}(\mathcal{C})|\to\mathcal{C}$ *(*其中过渡映射是遗忘函子*)*在模$_{\mathcal{C}}(n\mathrm{Pr})$中有一个全忠实右伴随。*(ii)* *(i)*中的态射是一个等价，即模$_A(\mathcal{C})\to\mathcal{C}$ 在模$_{\mathcal{C}}(n\mathrm{Pr})$ 中按照定义*5.1*的意义是忠实的。

那么它们是等价的。若 A 是 $\mathcal{C}$ 中一个可对偶对象的底层对象，那么它们还等价于以下内容：

(iii) 对偶 $A^\vee$ 在定义*5.1.*的意义下是忠实的

证明。 注意， (ii) $\Rightarrow$ (i) 显然成立。我们来考虑其逆命题。由引理 5.2，余极限（记作 $\mathcal{D}$）是 模$_{\mathcal{C}}$（$n\mathrm{Pr}$）中的一个余幂等代数。我们断言，在（i）成立时， $F\colon\ \mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 是一个等价。令 G 为右伴随；根据假设，它是全忠实的。只需证明 恒等映射 $\to GF$ 是一个等价。与 $\mathcal{C}$张量化后，它是一个等价，因为 $\mathcal{D}$ 是余幂等的。然而，此态射与原来的态射等价，因为 $\mathcal{D}$ 是余幂等的。

现在假设 A 作为 $\mathcal{C}$中的一个对象是可对偶的。条件（ii）要求态射|模$_{A^{\otimes\bullet+1}}(\mathcal{C})^{\vee}| \to \mathcal{C}$ 是一个等价。由任意交换代数对象 B对应的 $\mathrm{Mod}_B(\mathcal{C})$ 的自对偶性，这等价于要求 $L\colon$ |模$_{A^{\otimes\bullet+1}}(\mathcal{C})| \to \mathbf{1}$ 是一个等价，其中转移映射是遗忘函子。现在，我们遗忘退化态射，转而考虑半单纯图表。由于 A 是可对偶的，每个转移映射在 $\mathrm{Mod}_{\mathcal{C}}(n\mathrm{Pr})$ 中都有一个右伴随；在此，遗忘退化态射至关重要。这意味着 L 的源可以通过取极限来计算，并且 L 在 $\mathrm{Mod}_{\mathcal{C}}(n\mathrm{Pr})$ 中有一个右伴随 R，可描述为 $C \mapsto$ （$(A^{\vee})^{\otimes\bullet+1} \otimes C$）。利用这一极限描述， L 可以表示为 $(M_\bullet) \mapsto |M_\bullet|$。现在考虑条件 $\epsilon\colon$ $LR \to$ 恒等映射是一个等价，这恰好就是（i）。这意味着，对于任意 $C \in \mathcal{C}$， $|(A^{\vee})^{\otimes\bullet+1} \otimes C| \to C$ 是一个等价，而该条件等价于（iii）。□

定义 5.4。 设 $\mathcal{C}$ 是一个可呈示的对称幺半 n-范畴，且 A 是一个交换代数对象。我们称 A 满足 下降，如果命题 ii）中的 5.3 成立。我们称一个态射 $A \to B$ 满足 下降，如果 B 作为$_A\mathrm{Mod}(\mathcal{C})$ 中的交换代数对象满足下降。

我们记录命题 5.3 及其证明中的以下结论：

推论 5.5。 在定义*5.4*的情形下，以下各条件等价：

（*i*）交换代数对象 A 满足下降。（*ii*）$\mathit{Mod}_A(\mathcal{C}Pr)$ 中的交换代数对象 $\mathit{Mod}_{\mathcal{C}}(n)$ 满足下降。（*iii*）函子 $\mathit{Mod}_{\mathcal{C}}(nPr) \to \mathit{Tot}(\mathit{Mod}_{\mathrm{Mod}_{A^{\otimes\bullet+1}}(\mathcal{C})}(nPr))$ 是全忠实的。（*iv*）函子 $\mathit{Mod}_{\mathcal{C}}(nPr) \to \mathit{Tot}(\mathit{Mod}_{\mathrm{Mod}_{A^{\otimes\bullet+1}}(\mathcal{C})}(nPr))$ 是等价。（*v*）对于任意 $\mathcal{C}$-模 $\mathcal{M}$，态射 $\mathcal{M} \to \mathit{Tot}(\mathit{Mod}_{A^{\otimes\bullet+1}}(\mathcal{M}))$ 是等价。

请注意，对于任意 A，以上所有全化均存在。

我们以如下 suave 映射的下降判据结束本节；参见 [54,命题 6。19]我们将在下文第 5.3 节讨论原始下降。

命题 5.6。 设 $\mathcal{C}$ 是一个可呈对称幺半$(n+1)$范畴，且$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1})$可呈。设 A 是 $\mathcal{C}$ 中的一个交换代数对象，满足 $f^*\colon \mathbf{1} \to A$ 有左伴随 $f_\natural$，且 A 可对偶。则 $A^{\vee}$ 忠实，当且仅当$(f^*)^{\vee}(f_\natural)^{\vee}$ 在$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1})$中忠实。

证明。 仿照命题 5.3 中 ($\Rightarrow$ (iii) 的证明，可得“仅当”方向。下面证明“若”方向。利用 A的可对偶性，可得一个余交换余代数 $A^{\vee}$。因此，忠实性条件就是增广单纯对象 $(A^{\vee})^{\otimes\bullet+1}$ 是一个余极限图。仿照命题 5.3 中 ($\Rightarrow$ (ii) 的证明，可得所需结果。□

由于下降条件涉及高阶范畴，通常无法普遍地施加该条件。不过请注意以下情形，这正是我们在定理 C 中所需的情形：

引理 5.7。 设 $\mathcal{C}$ 为一个可呈对称幺半 n-范畴，且 $A \to B$ 是交换代数对象的一个态射。那么存在一个泛态射 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$，使该态射满足下降条件。

证明。 这直接由命题 5.3 得出：要求 $B_A^{\vee}$ 在模$_A(\mathcal{C})$ 中忠实，等价于要求 $(B_A^{\vee})^{\otimes\bullet+1}$ 是 $\mathcal{C}$中的一个余极限图。因此，我们可以沿此条件局部化 $\mathcal{C}$ 。□

注 5.8。 一般而言，若要施加下降条件，就必须牺牲仿射性：当我们处理最终仿射可呈范畴谱时（见 [4, 注 2.9]），总可以通过将仿射性降低 1 来施加下降条件。

5.2. **基本性质**。 下面记录一些基本的保持性质：

引理 5.9。 设 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是可呈示的对称幺半 n-范畴之间的一个态射。那么它将满足下降的交换代数对象映射为另一个满足下降的交换代数对象。

证明。 这直接由定义得出。□

引理 5.10。 设 $\mathcal{C}$ 为一个可呈示的对称幺半 n-范畴，且 A 和 B 为交换代数对象。

(1) 当 A 满足下降时， $B \to A \otimes B$ 也满足下降。*(2)* 当 B 和 $B \to A \otimes B$ 满足下降时， A 也满足下降。

证明。 首先，(1) 由引理 5.9 得出。

我们考虑 (2)。我们希望证明 $\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})$ 在 $\mathrm{Mod}_{\mathcal{C}}(n\mathrm{Pr})$ 中是忠实的。由于 B 满足下降，只需证明 $\mathrm{Mod}_{A\otimes B}(\mathcal{C})$ 在 $\mathrm{Mod}_{\mathrm{Mod}_B(\mathcal{C})}(n\mathrm{Pr})$ 中是忠实的，而这可由假设 $B \to A \otimes B$ 满足下降得出。□

引理 5.11。 设 $\mathcal{C}$ 是一个可呈示的对称幺半 n-范畴，且 $A \to B$ 是交换代数对象的一个态射。

(1) 如果 A 和 $A \to B$ 满足下降，那么 B 也满足下降。*(2)* 当 B 满足下降时， A 也满足下降。

证明。 我们先证明（2）。根据引理 5.10 的（2），只需证明 $B \to B \otimes A$ 满足下降。该态射有一个直缩，因此根据下文的引理5.12，它满足下降。

接着证明（1）。根据引理 5.10 的（2），我们需要证明 $A \to A \otimes B$ 满足下降。由于复合 $A \to A \otimes B \to B$ 满足下降，所需结论由（2）得出。□

对于下文，我们回顾 n-直缩 在 ∞-范畴中的概念。该概念由 Gaiotto–Johnson-Freyd [27] 引入时称为 n-凝聚 （另见 [48]）：考虑一对态射$s\colon C \to D$和 $r\colon D \to C$。如果它们是等价，则称 s为 0-截面，称 r为 0-直缩。对于 $n \geq 0$，如果存在一个 n-截面恒等映射 $\to rs$ 和一个 n-直缩恒等映射 $rs \to$，则称 s 为（$n+1$）-截面，称 r 为（$n+1$）-直缩。

引理 5.12。 设 $\mathcal{C}$ 是一个可呈对称幺半 n-范畴，且 A 是一个交换代数对象。若 $\mathbf{1} \to A$ 在 $\mathcal{C}$ 中的底层态射存在一个 n-直缩，则它满足下降。

证明。 注意，$\mathrm{Mod}_{\mathcal{C}}(n\mathrm{Pr})$ 中的态射 $\mathcal{C} \to \mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})$ 存在一个 $(n+1)$-直缩。因此，将 A 替换为 $\mathrm{Mod}_A\mathcal{C}$后，我们可以假设 A 是刚性的。现在，我们需要验证增广单纯形图 $A^{\otimes \bullet+1}$ 是一个余极限图。它是 $A \otimes A^{\otimes \bullet+1}$的一个 n-直缩，而 $A \otimes A^{\otimes \bullet+1}$是一个余极限图。因此，所需结论成立。□

5.3. **原始下降**。 根据定义，要验证下降，我们需要向上推进。这里，我们考虑如何向下推进。

引理 5.13。 设 $\mathcal{C}$ 是一个可呈对称幺半$(n+1)$-范畴，且 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1})$是可呈的。考虑 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1})$中的一个交换代数对象 A 。则以下条件等价：

(i) 交换代数 A在$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1})$中满足下降。*(ii)* 交换代数$\mathrm{Mod}_A(\mathbf{1})$在 $\mathcal{C}$中满足下降。

证明。 考虑全忠实嵌入 $\mathrm{Mod}_{\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1})}(n\mathrm{Pr}) \to \mathcal{C}$。那么，(i) 等价于增广单纯形图 $\mathrm{Mod}_{A^{\bullet+1}}(\mathcal{C})$ 在源范畴中是余极限图这一条件。那么，(ii) 等价于目标范畴中的同一条件。□

定理 5.14。 设 $\mathcal{C}$ 是一个可呈的对称幺半$(n+1)$范畴，且$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1})$可呈。考虑一个交换代数对象 A，其单位 $u\colon \mathbf{1} \to A$ 存在右伴随 u^{R}。则以下条件等价：

(i) 交换代数 A 在 $\mathcal{C}$ 中满足下降。*(ii)* 交换代数 $u^{\mathrm{R}}u$在$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}$ $(\mathbf{1})$中满足下降。

证明。 我们将 u 分解为 $\mathbf{1} \to \mathrm{Mod}_{u^{\mathrm{R}}u}(\mathbf{1}) \to A$。由引理 5.13，条件 (ii) 等价于第一个映射满足下降这一条件。因此，由引理 5.11，只需注意到 $\mathrm{Mod}_{u^{\mathrm{R}}u}(\mathbf{1}) \to A$ 满足下降，这由引理 5.12可得。□

例 5.15. 设 $f\colon Y \to X$ 是拟紧拟分离（谱的）概形之间的态射。那么，$\mathrm{D}(X) \to \mathrm{D}(Y)$ 在 $\mathrm{Pr}_{\mathrm{st}}$ 中满足下降，当且仅当 $f_*(\mathbf{1}_Y)$ 在 $\mathrm{D}(X)$ 中满足下降。

5.4. **可下降性**。 正如我们在定理 5.14中所见，在良好的情形下，我们可以将下降条件归结为一个较低范畴层次的问题。Mathew 的以下概念 [44] （另见 [12]）在这种情形下很有用：

定义5.16。 设 $\mathcal{C}$ 是一个稳定可呈对称幺范范畴， A 是其中的交换代数对象。若与 Adams 塔相关联的 Pro-对象等价于常值 Pro-对象 $\mathbf{1}$，则称 A 是可下降的 。根据 [14, 引理11.20], ，这等价于如下条件：对于某个 $d \geq 0$，典范映射 $I^{\otimes d} \to \mathbf{1}$ 为零，其中 $I = \mathrm{fib}(\mathbf{1} \to A)$。此时，我们称 A 为指数为 $\leq d$ 的可下降对象。

首先，我们注意到如下事实（参见 [44, 推论3.42]）：

命题 5.17。 在定义*5.16*的情形下，若 A是可下降的，则它满足下降 $t.$

证明。 记 I 为 $\mathrm{fib}(\mathbf{1} \to A)$。根据推论 5.5，只需证明对于任意 $\mathcal{C}$-模 $\mathcal{M}$，态射

$$\mathcal{M} \to \mathrm{Tot}\big(\mathrm{Mod}_{A^{\otimes \bullet+1}}(\mathcal{M})\big),$$

转移映射为基变换的.....是一个等价。由 [41, 推论 4.7.5.3], ，只需证明 $F\colon \mathcal{M} \to$ 模$_A(\mathcal{M})$ 是保守的，并保留 F-分裂全化。

首先，我们证明保守性。假设 $A \otimes M \simeq 0$ 对 $M \in \mathcal{M}$成立。那么 $I \otimes M \to M$ 是一个等价，但这意味着 $I^{\otimes n} \otimes M \to M$ 为零，且对于 $n \gg 0$ 是一个等价，因此对于 $M \simeq 0$也是如此。

接着考虑一个 F-分裂余单纯对象 $M\colon \Delta \to \mathcal{M}$。我们声称，与 M 关联的 Pro-对象是常值的。同样，在这种情况下， $I^n \otimes M \to M$ 的余纤维满足关于 $n \geq 0$的该条件。对于 $n \gg 0$，它将 M 作为一个直和项。□

反向结论不成立：

例 5.18. 设 $R_n \to S_n$ 是一个（静态）环的态射，它是可下降的，但 $\mathrm{fib}(R_n \to S_n)^{\otimes n} \to R_n$ 非零；构造见 [61] 或 [3] 。考虑非拟紧概形 $X = \coprod_n \mathrm{Spec}\, R_n$ 和 $Y = \coprod_n \mathrm{Spec}\, S_n$，以及诱导态射 $f\colon Y \to X$。于是根据命题 5.17， $f_*(\mathbf{1}_{Y_n}) \in \mathrm{D}(X_n)$ 对每个 n都满足下降，因此 $f_*(\mathbf{1}_Y) \in \mathrm{D}(X)$ 也满足下降。然而，根据假设，它不是可下降的。

例5.19。 固定一个素数 p 并考虑 $\mathrm{Fun}(BC_p, \mathrm{D}(\mathbf{F}_p))$。则正则表示$\mathbf{F}_p[C_p]$ 不可下降。这是因为存在一个态射 $\mathbf{F}_p[-1] \to \mathrm{fib}(\mathbf{F}_p \to \mathbf{F}_p[C_p])$ 对应于上同调环 $H^*(BC_p; \mathbf{F}_p)$的生成元，其幂不为零。然而，根据命题 6.19，它仍满足下降。

The 上述两个例子中的单位元都不是紧致的。事实上，这是唯一的障碍 ：

命题5.20。 在定义 *5.16*的情形下， $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$ 是紧致的。[8] 那么，如果A满足下降，它就是可下降的。

证明。 我们用 $(T^n)_n$ 表示 A 的 Adams 塔，并希望证明它是恒定的。我们用$[-,-]$ 表示 $\mathcal{C}$ 中的内部映射对象。对于 $C \in \mathcal{C}$，我们有

$$\varinjlim_n \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(T^n, C) \simeq \varinjlim_n \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, [T^n, C]) \simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, \varinjlim_n [T^n, C]) \simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, |[A^{\otimes \bullet+1}, C]|)$$

由 C 的（序列）紧致性可知。因此，只需证明该态射

$$|[A^{\otimes \bullet+1}, C]| \to C \tag{5.21}$$

对任意 $C \in \mathcal{C}$ 都是等价。

我们取一个满足以下条件的正则基数 κ：

- 可呈对称幺半范畴 $\mathcal{C}$ 属于 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^{\kappa}$).
- 函子 $C \mapsto [A, C]$ 保持 κ-滤过余极限。

在此条件下，只需验证（5.21）对 $C \in \mathcal{C}_{\kappa}$ 是等价。

我们现在取一个满足以下条件的正则基数 $\lambda \geq \kappa$：

[8]或者更 一般而言，只需假设它是序列紧致的，即 Map(**1**， –) 与 h
序列紧 极限可交换。

- 全子范畴 $\mathcal{C}_\lambda$ 对 κ-小极限封闭。
- 当 C 是 κ-紧致且 D 是 λ-紧致时，$[C,D]$ 是 λ-紧致的。

接下来，我们将 $\mathcal{D}=\mathrm{Ind}_\kappa((\mathcal{C}_\lambda)^{\mathrm{op}})$ 视为一个 $\mathcal{C}$-模，使得 $\mathcal{C}_\kappa$ 在 $\mathcal{D}$ 上的作用限制到 $(\mathcal{C}_\lambda)^{\mathrm{op}}$，并由 $(C,D)\mapsto[C,D]$ 给出。由于根据假设，$\mathcal{D}\to\mathrm{Tot}(\mathrm{Mod}_{A^{\otimes\bullet+1}}(\mathcal{D}))$ 是一个等价，我们可知对于 $D\in\mathcal{D}$，$|A^{\otimes\bullet+1}\otimes D|\to D$ 是一个等价。将此结论展开到 $D\in\mathcal{D}_\kappa=(\mathcal{C}_\lambda)^{\mathrm{op}}$ 上，即得所需结果。□

我们在本节最后汇总一些关于可下降性的事实：

引理 5.22。设 $\mathcal{C}$ 是一个稳定可呈对称幺半范畴，且 $A\to B$ 是交换代数对象之间的一个态射。

(1) 若 B 的指数为 $\leq e$ 的可下降对象，则 A 也是如此。*(2)* 若 A 的指数为 $\leq d$ 的可下降对象，且 B 在 模$_A(\mathcal{C})$ 中的指数为 $\leq e$ 的可下降对象，则 B 是指数为 $\leq de$ 的可下降对象。

证明。记 I、J 和 K 分别为 $\mathbf{1}\to A$、$\mathbf{1}\to B$ 和 $A\to B$的纤维。我们有一个余纤维序列 $I\to J\to K$。由于 $I\to\mathbf{1}$ 经过 $J\to\mathbf{1}$分解，我们得到（1）。在假设（2）下，我们看到 $J^{\otimes e}\to\mathbf{1}\to A$为零，这意味着 $J^{\otimes e}\to\mathbf{1}$经过 I分解。因此，我们得到了所需的结论。□

以下内容摘自 [14,引理 11.22]:

引理 5.23。设 $\mathcal{C}$ 是一个稳定可呈对称幺半范畴，$A_0\to\cdots$ 是交换代数对象的一个序列。若对任意 n，A_n 的指数为 $\leq d$ 的可下降对象，则$\varinjlim_n A_n$ 是指数为 $\leq 2d$的可下降对象。

证明。记 I_n 为 $\mathrm{fib}(\mathbf{1}\to A_n)$。根据米尔诺序列

$$0\to\varprojlim_n{}^1\,\pi_1\,\mathrm{Map}(I_n^{\otimes d},A)\to\pi_0\,\mathrm{Map}(I^{\otimes d},A)\to\varprojlim_n\pi_0\,\mathrm{Map}(I_n^{\otimes d},A)\to 0,$$

障碍位于 $\varprojlim_n{}^1\,\pi_1\,\mathrm{Map}(I_n^{\otimes d},A)$ 中，其平方为 0。□

以下内容引自 [1, 引理 5.46]:

引理 5.24。设 $\mathcal{C}$ 是一个稳定可呈对称幺半范畴，A 是一个交换代数对象。考虑一个幂等余代数 $\mathbf{1}_U$ 及其补幂等代数 $\mathbf{1}_Z$，它们分别定义 $\mathcal{C}_U$和 $\mathcal{C}_Z$。假设 $A_U=A\otimes\mathbf{1}_U$和 $A_Z=A\otimes\mathbf{1}_Z$分别在 $\mathcal{C}_U$ 和 $\mathcal{C}_Z$中是指数为 $\leq d_U$和 $\leq d_Z$ 的可下降对象。那么 A 是指数为 $\leq d_U+d_Z$的可下降对象。

证明。由于复合 $F^{\otimes d_Z}\to\mathbf{1}\to\mathbf{1}_Z$为零，$F^{\otimes d_Z}\to\mathbf{1}$经由 $\mathbf{1}_U$分解。因此，$F^{\otimes d_U+d_Z}\to\mathbf{1}$为零，因为 $F_U^{\otimes d_U}\to\mathbf{1}_U$为零。□

注 5.25。我们往往不知道所关注的范畴是否具有紧单位，因此当每个分量上都有下降时，无法使用引理 5.24 。尽管如此，在某些情形下我们仍可使用命题5.6，然后进行分层；参见引理 8.19的证明。

5.5. **下降 suave 映射和 prim 映射**。我们回到第 4 节的背景；固定一个可呈示的对称幺半2-范畴 $\mathcal{C}$。

定义 5.26。如果态射 $Y\to X$ 在 $\mathcal{C}$ 上满足下降性质，我们称之为覆盖 $[X]\to[Y]$ 。

T以下是（迭代）模范畴下降的直接推论 s:

命题 5.27。设 $Y\to X$ 是一个栈态射。设 $X'\to X$ 是一个覆盖。如果基变换 $Y'\to X'$ 是弱 *suave* 的，那么 $Y\to X$也是如此。将所有“弱 *suave*”替换为“*suave*”或“*prim*”，结论同样成立。

命题 5.28。设 $Y\to X$ 是一个栈态射。设 $Y'\to Y$ 是一个弱 *suave* 覆盖。如果复合 $Y'\to X$ 是弱 *suave* 的，那么 $Y\to X$ 也是弱 *suave* 的。

证明。在这种情况下，$[Y]$ 可以计算为 $[Y'^{\times_Y\bullet+1}]$的全化，它也是沿左伴随的半单纯余极限。这个描述给出了我们所需的左伴随。□

6. 下降示例

本节介绍一些下降的例子。在第6.1节和6.2节中，我们讨论由开子集和闭子集构成的覆盖。在第6.3节中，我们考察紧豪斯多夫空间之间的满射。在第6.4节中，我们介绍 Clausen 定理，并在定理D的证明中使用它。

6.1. 开覆盖。 我们注意到，即使在不稳定情形下，这种下降也成立：

命题 6.1. 设 X 是一个 *locale*，且$(U_i)_{i\in I}$ 是一个开覆盖。那么态射 $\mathrm{Shv}(X)\to\prod_{i\in I}\mathrm{Shv}(U_i)$ 在 Pr中满足下降。

将此结果与引理 5.10结合，我们得到一个更强的断言：

推论 6.2. 设 $Y\to X$ 是一个存在局部截面的 *locale* 态射。那么$\mathrm{Shv}(X)\to\mathrm{Shv}(Y)$ 在Pr中满足下降。

命题 6.1 的证明。记 Y 为 $\coprod_{i\in I}U_i$，它有一个到 X的典范映射。由于 $\mathbf{Shv}(Y)$ 在 $\mathbf{Shv}(X)$ 上自对偶，且 $\mathbf{Shv}(Y)^{\otimes_{\mathrm{Shv}(X)}2}\simeq\mathbf{Shv}(Y^{\times_X 2})$（见 [5, 推论 1.10]），只需证明 $\mathbf{Shv}(Y)^{\otimes_n\bullet+1}\simeq\mathbf{Shv}(Y^{\times_X\bullet+1})$ 是 Pr 中的余极限图。由于 $\mathbf{Shv}(Y^{\times_X n})\simeq\mathbf{Shv}(X)_{/Y^{\times_X n}}$，这由以下事实及 [40, 命题 6.3.5.14]可得：$Y\to X$ 是拓扑斯 $\mathbf{Shv}(X)$ 中的有效满射。□

6.2. 有限闭覆盖。 我们回顾如下内容：

定义 6.3。 设 $(Z_i)_{i\in I}$ 是集合 X的一个子集族。若对于任意基数为 $>d$的子集 $I_0\subset I$，都有 $\bigcap_{i\in I_0}Z_i=\emptyset$，则称其阶为。

命题 6.4。 设 X 是一个 *locale*，且$(Z_i)_{i\in I}$ 是一个阶为 $\le d$ 的闭覆盖，那么交换代数 $\prod_{i\in I}\mathbf{S}^{Z_i}$ 在 $\mathrm{Shv}(X;\mathsf{Sp})$ 中是指标为 $\le d$ 的可下降对象。

证明。我们考虑由闭子集 $\emptyset=X_0\subset X_1\subset\cdots\subset X_d=X$ 构成的滤过 X，使得 X_n 是由至多 n 个 Z_i覆盖的点所组成的子空间。于是，在 $Z_n\setminus Z_{n-1}$上，对于$1\le n\le d$，该交换代数存在一个分裂。因此，所需结果由引理5.24得出。□

6.3. 紧豪斯多夫空间的满射。 我们在此回顾：任意两个有限维、具有可数权的紧豪斯多夫空间之间的满射都满足下降。

命题 6.5。 沿二进展开的推前

$$\{0,1\}^{\mathbf{N}}\to[0,1];\qquad (x_n)_n\mapsto\sum_n\frac{x_n}{2^{n+1}}$$

确定了$\mathrm{Shv}([0,1];\mathsf{Sp})$中一个指数为 ≤ 4 的可下降交换代数。

证明。它是以下对象的极限

$$\coprod_{k=0}^{2^n-1}\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]\to[0,1].$$

由于这是一个阶为2 的闭覆盖（由命题6.4），所求结果由引理5.23得出。□

推论 6.6。 任意维数为 $\le d$的非空可数权紧豪斯多夫空间都容许一个由康托尔集给出的、指数为 2^{4d+2}的覆盖。

证明。通过将该空间嵌入 $[0,1]^{2d+1}$，该结果由命题6.5得出。□

推论 6.7。 考虑从一个轻紧豪斯多夫空间到一个维数为 $\le d$的轻紧豪斯多夫空间的满射 $Y\to X$。则它是指数为 $\le 2^{4d+3}$的可下降对象。

证明。由推论 6.6，我们得到一个映射 $C\to X$，其定义域为康托尔集 C。接着考虑一个满射 $D\to C\times_X Y$，其定义域为康托尔集 D。根据引理 1的（5.22），只需给出 $D\to X$ 的可下降性上界。映射 $D\to C$ 是有限集之间一列满射的序列极限。由引理 5.23，这是一个指标为 ≤ 2 的可下降对象。□

注 6.8。 推论 6.7 中的上界并非最优；例如，可以构造一个从康托尔集到 $[0,1]^2$ 的满射，其可下降性指标为 ≤ 6。

注 6.9。 推论 6.7中，对 X 的有限维假设不可省略。当 $X=[0,1]^{\mathbb{N}}$时，我们无法找到来自概形有限集的覆盖，因为连通常的下降都不成立。

注 6.10。 推论6.7中，即使在零维情形下，也不能省略大小限制；一般而言，概形有限集之间的满射并非 $\mathsf{Pr}_{\mathrm{st}}$上的覆盖，如 [3]所示。

6.4. **凝聚 anima**。 我们在 [16, 第 6]节回顾 Clausen 的逐点可下降性判据。首先，我们需要回忆 Clausen–Scholze [18]给出的以下定义：

定义 6.11。 若一个概形有限集是轻的，即其权可数，我们就称之为轻的。我们用 $\mathrm{PFin}^{\mathrm{lgt}}$ 表示轻的概形有限集范畴。我们在其上考虑由有限联合满射族生成的格罗滕迪克拓扑。（轻）凝聚 *anima* 是 $\mathrm{PFin}^{\mathrm{lgt}}$上的超层。我们用 $\mathrm{ConAni}^{\mathrm{lgt}}$ 表示这个范畴。

定义 6.12. 设 X 为一个凝聚 anima。我们将 $\mathsf{Shv}^{\wedge}(X;\mathsf{Sp})$ 记为对轻概形有限集 X 的 $X\mapsto \mathsf{Shv}(X;\mathsf{Sp})$ 施行下降所得之物。我们类似地定义 $\mathsf{Shv}^{\wedge}(X;\mathsf{D}(\text{整数环}))$。

例 6.13. 由 [29, 推论 2.8], ，当 X 为轻紧豪斯多夫空间时，这就是 Postnikov 完备层的范畴，故采用此记号。

我们回顾如下内容：

定义 6.14. 设 X 为一个凝聚 anima。其上同调维数 $\dim_{\mathbf{Z}} X$ 是满足如下条件的最小整数 d（若存在）：对任意集中于次数 0 的 $M\in \mathsf{Shv}^{\wedge}(X;\mathsf{D}(\text{整数环}))$，上同调 $\Gamma(X;M)$ 属于 $\mathsf{D}(\text{整数环})^{\geq -d}$。对于概形有限群 G，我们径直称 $\dim_{\mathbf{Z}}(BG)$ 为 G的上同调维数。

注 6.15. 定义 6.14 中所定义者常被称为严格上同调维数，见于概形有限群的文献；其中上同调维数可以指相对于挠层的维数。由引理 6.16 可知，我们可以将这些概念联系起来。

引理 6.16. 当 $\Gamma(X;-)\colon \mathsf{Shv}^{\wedge}(X;\mathsf{D}(\text{整数环}))\to \mathsf{D}(\text{整数环})$ 保持滤过余极限时，$\dim_{\mathbf{Z}} X\leq \max(\dim_{\mathbf{Q}} X, \sup_p(\dim_{\mathbf{F}_p} X)+1)$ 成立。

证明。我们假设右侧是有限的，并将其记为 d。我们作相反的假设，从而存在 $i>d$与 M，使得 $H^i(X;M)\neq 0$。取一个素数 p，并把 p的像记为 $pM\colon M\to M$。然后考虑短正合列 $0\to M[p]\to M\to pM\to 0$与 $0\to pM\to M\to M/p\to 0$。现在 $M[p]$ 与 M/p 是 $\mathbf{F}_p$-向量空间，因此对 $i>d$而言，态射 $H^i(X;M)\to H^i(X;pM)$与 $H^i(X;pM)\to H^i(X;M)$都是单射。于是，p在 $H^i(X;M)$上单射地作用。由于这对任意素数 p都成立，我们得到 $H^i(X;M)\otimes \mathbf{Q}=H^i(X;M\otimes \mathbf{Q})\neq 0$，这是一个矛盾。□

例 6.17。 设 G 为自由概形群。由自由性可知，G的挠上同调在次数 ≥ 2上消失。因此，由注 6.15，可得 维数$_{\mathbf{Z}}(BG)\leq 2$。除平凡情形外，这个不等式是尖锐的，因为 $\pi_0(\text{整数环};\text{整数环})=\text{有理数}/\text{整数环}\neq 0$。

定理 6.18 (Clausen)。 设 X 是一个有限上同调维数的 1-截断轻概形有限 *anima*；也就是说，G_x 的上同调维数一致有界。交换代数对象 A 在 $\mathrm{Shv}^{\wedge}(X;\mathsf{Sp})$ 中可下降，当且仅当存在 d，使得对任意 $x\colon *\to X$，$x^*(A)$ 在 Sp 中的指数为 $\leq d$ 的可下降对象。

证明。 这是 [16, 定理 6.21] 的特例。事实上，其假设由 [16,例 6.14.2 和 6.19.3] 满足。□

定理 6.18 仅在可下降性成立的情形下有用。这里我们指出如下简单例子（参见例5.19）：

命题 6.19。 设 G 是一个有限群。那么 $\mathrm{Fun}(BG;\mathsf{Sp})=\mathrm{Shv}^{\wedge}(BG;\mathsf{Sp})\to \mathsf{Sp}$ 满足 $2\mathsf{Pr}_{\mathrm{st}}$ 中的下降。

证明。 我们可以应用命题 5.6，因为 $\mathrm{Fun}(BG,\mathsf{Sp}) \to \mathsf{Sp}$ 和 $\mathrm{Fun}(G,\mathsf{Sp}) \to \mathsf{Sp}$ 都存在左伴随。展开定义后，问题归结为证明正则表示在 $\mathrm{Fun}(BG,\mathsf{Sp})$ 中是忠实的。我们可以改为在 Sp 中计算余极限，而在那里我们有一个分裂。 □

7. 代数 2-动机与环叠

在本节中，我们证明B，它刻画了2SH(**整数环**) 与环叠之间的关系。在第7.1节中，我们首先将定理A 改写为适合我们使用的形式。在第7.2节中，我们首先在泛接收对象中构造六种运算。在第7.3节中，我们通过公理化论证表明，在泛目标中得到了一类光滑态射。在第7.4节中，我们证明定理A。在第7.5节中，我们证明代数2-动机满足 cdh 下降。

7.1. 2-**动机的环。为了证明定理**B，我们需要一个定理A 的版本，其中用（静态）环替代拟射影静态簇：

定理 7.1. 我们用$\mathsf{Ring}^{\heartsuit}$ 表示静态环范畴。态射 $[-]\colon (\mathsf{Ring}^{\heartsuit})_{\aleph_0} \to$2SH(**整数环**) 定义为 $[\mathrm{Spec}(-)]$，是满足以下条件的泛对称幺半函子：

(i) 当 $A \to B$ 光滑时，$f^*\colon [A] \to [B]$ 有一个满足基变换的 $[A]$-线性左伴随 $f_\sharp$。*(ii)* 对于 A 和一个元素 $a \in A$，$[A[a^{-1}]] \leftarrow [A] \to [A/a]$ 是一个粘合。*(iii)* 对于任意 A，态射恒等映射 $\to f^*f_\sharp$ 是 $f\colon A \to A[T]$ 的等价。*(iv)* 对于由 $T \mapsto 0$ 给出的 $f\colon A \to A[T]$ 和 $s\colon A[T] \to A$，态射 $f_\sharp s_*$ 是一个等价。

我们将 2SH′（**整数环**）记作定理 7.1 的泛目标。由定理 A，我们得到一个态射 $F\colon$ 2SH′（**整数环**）$\to$ 2SH(**整数环**)。

引理 7.2。 对于 $(\mathsf{Ring}^{\heartsuit})_{\aleph_0}$中的 $A' \leftarrow A \to B$，态射 $[A'] \otimes_{[A]} [B] \to [A' \otimes_A B]$ 是 2SH′（**整数环**）中的一个等价。

证明。 这由命题 3.12得出；任意闭浸入都是主闭浸入的有限复合。 □

引理 7.3. *Zariski* 覆盖 $A \to B$ 在 $(\mathsf{Ring}^{\heartsuit})_{\aleph_0}$ 中决定了 2SH′(**整数环**) 上的层叠覆盖。

证明。 我们需要考虑 $A \to \prod_{i=1}^n A[1/a_i]$，其中 a_i 生成单位理想。此外，它可归结为情形 $n = 0$ 与 2。情形 $n = 0$ 是显然的，因此我们考虑情形 $n = 2$。

利用命题 2.10 与（ii），我们看到态射 $[A] \to [A[1/a_1]] \times_{[A[1/a_1a_2]]} [A[1/a_2]]$是一个等价。

然后我们使用命题 5.6。根据上述极限公式，只需看出它在$A[1/a_1]$ 上以及在 $A[1/a_2]$上是一个覆盖，这是显然的。 □

定理 7.1 的证明。我们构造 $G\colon$ 2SH(Z) $\to$ 2SH′(Z)。我们对 $(\mathsf{Ring}^{\heartsuit})_{\aleph_0} \to$2SH′(Z) 作右 Kan 延拓，这由 [4, 定理 D],[9] 保证可行，从而得到 $\mathrm{PShv}((\mathsf{Ring}^{\heartsuit})_{\aleph_0})^{\mathrm{op}}) \to$ 2SH′(Z)。根据引理 7.3，这可经由扎里斯基层范畴分解。我们验证，当 $S = \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}$ 时，其在 QProj 上的限制满足定理 A 中的条件。

我们证明，在 $U \to X \leftarrow Z$ 定理 A 的情形（ii）中，我们有一个 $[X]$-线性粘合以及关于 $U \hookrightarrow X$ 的光滑基变换（因此关于 $Z \hookrightarrow X$的真基变换）。根据假设，我们仅在 X 为仿射概形且 U 为主开集时知道这一点。

我们先证明当 X 为仿射概形且 U 是 X中的拟仿射概形时这一点成立。这可以通过对覆盖 U所需的仿射概形数量进行归纳来证明。

接下来我们来看一般情形。具体做法是将 X 写成 $\mathrm{Spec}\ A$ 的余极限（作为扎里斯基层），并对开浸入使用光滑基变换，对闭浸入使用真基变换。

因此，我们得到（ii）。沿用引理7.3证明中的论证，我们得到扎里斯基下降。特别地，对于 X，存在$\mathrm{Spec}\ A \to X$，使得 $[X] \to [A]$ 满足下降。这推出（iii）和（iv）。对于（i），根据相对Künneth公式（它可由

[9]我们可以 避免使用这一点，因为只需延拓到 QProj，而且我们可以具体地看到极限的存在 ly.

命题 3.12，我们需要证明任意光滑态射 $Y \to \operatorname{Spec} A$ 都会诱导一个弱 suave 映射。根据命题5.28，我们可以将问题归结为 Y 也为仿射的情形。

现在我们已经构造了 G。根据构造， GF 与 恒等映射同伦。另一个等价来自以下事实：$\mathrm{QProj}^{\mathrm{op}} \to 2\mathrm{SH}(\textbf{整数环})$ 是一个扎里斯基层，这可由引理 7.3 的论证得出。 □

7.2. **六种运算**。 现在我们回过头来证明定理 B。

定义 7.4. 我们用 2Mot(**整数环**) 表示泛目标。根据定义，它带有一个保余极限函子 Ring $\to$ CAlg(2Mot(**整数环**))。我们用 $[-]$ 表示它。

引理 7.5. 定义 *7.4* 中的函子可经由 $\mathrm{Ring}^{\heartsuit}$。

证明。 令 **整数环**$[T_d]$ 为由一个次数为 $d \geq 0$ 的元素生成的自由动画环。我们首先证明，对于 $d \geq 1$，典范映射 $\mathbf{1} \simeq [\textbf{整数环}] \to [\textbf{整数环}[T_d]]$ 是一个等价。我们利用关系式 **整数环** $\otimes_{\mathbf{Z}[T_{d-1}]}$ **整数环** $\simeq$ **整数环**$[T_d]$ 并通过归纳法证明这一点。基例 $d = 1$ 由缝合性得出。

我们回到该陈述。我们证明，对于 A，态射 $A \to \pi_0(A)$ 诱导一个等价。我们将 A 写成一个序列的余极限

$$\mathbf{Z} = A_{-1} \to A_0 \to A_1 \to \cdots,$$

其中 A_n 由 A_{n-1} 通过粘贴 n-胞腔得到。根据上一段，我们看到$[A_1] \to \cdots$是等价。从 A_1出发，考虑另一个消去更高维胞腔的序列 $A_1 \to A_2' \to \cdots$，我们也可以将 $\pi_0(A)$ 作为一个余极限得到。这表明了所需的结果。 □

我们关于定理 B 的证明的关键在于推出，环的光滑映射决定了栈的 suave 态射，其基为 2-动机(**整数环**)。用六种运算来说明这一点是方便的。我们使用第 4.2 节中发展的材料来构造如下：

命题 7.6. 每个映射 $A \to B$ 于 $(\mathrm{Ring}^{\heartsuit})_{\aleph_0}$ 中决定一个例外态射。因此，我们有一个函子 $\mathrm{Span}(((\mathrm{Ring}^{\heartsuit})_{\aleph_0})^{\mathrm{op}}) \to$ 2动机(**整数环**)，由定理 *4.18*给出。

证明。 记 R 为 $2\mathrm{Mot}(\mathbf{Z})$上的泛环栈。由命题 4.16可知，只需对零截面 $s\colon * \to R$ 和典范映射 $f\colon R \to *$证明即可。对于 s，结论显然。对于 f，这由引理 4.28得出。 □

7.3. **光滑蕴含 suave**。

定理 7.7。 设 $A \to B$ 是静态环之间的一个光滑态射。那么，相应的栈态射在$2\mathrm{Mot}(\mathbf{Z})$上是 *suave*。

我们首先说明如何将问题约化为以下特例：

命题 7.8。 设 A 是一个有限型静态环，且 P 是一个首一多项式。考虑$A \to A[T][(P')^{-1}]/P$。那么，相应的栈态射在 $2\mathrm{Mot}(\mathbf{Z})$ 上是 *étale*（见定义 *4.14*；我们已知它是静态的）。

引理 7.9. （Ring）中的 *Zariski* 覆盖 $A \to B$ $^{\heartsuit\aleph_0}$ 确定了 $2\mathrm{Mot}(\textbf{整数环}$上的层叠覆盖 $)$.

证明。 这可由引理 7.3 中的相同论证得出。 □

定理 7.7 的证明。 根据引理 7.9，由命题 5.28 可知，suave 性可在源和目标上局部地按 Zariski 拓扑检验。因此，我们假设 $Y \to X$ 分解为 $Y \to \mathbb{A}^n_X \to X$，其中第一个态射是 étale。第二个态射是 suave，因此只需证明 étale 态射是 suave。

我们仍可在源和目标上作 Zariski 局部讨论，并由 [57, 标签 00UE], ，只需考虑 $A \to B = A[T][Q^{-1}]/P$使得 P是单态射且 P'在 B中可逆的情形。它可分解为 $A \to A[T][(P')^{-1}]/P \to B$，其中第二个态射是 suave。因此，所需结论由命题 7.8 得出。 □

接下来证明命题 7.8。记 $f\colon\ Y \to X$ 为相应的栈态射。考虑图

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{d} & Y \times_X Y & \xrightarrow{p} & Y \\ & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ & & Y & \xrightarrow{f} & X. \end{array}$$

我们知道 f 是静态且非分歧的，因此有 $d_!$ 的典范同一化，可将其视为 $d_\natural$。要证明 f 是 étale 的，我们需要证明态射

$$\mathrm{id}_{[Y]} \simeq q_! d_! d^* p^* \simeq q_! d_\natural d^* p^* \to q_! p^* \simeq f^* f_!$$

是伴随的单位。不过，根据 [54, 命题 6.13]，我们需要检查的条件更少；另见 [33, 引理 4.6.4]:

L引理 7.10. 在上述情形中，要证明 f 是 *étale* 的，只需证明

$$f^! \mathbf{1}_X \simeq d^* p^* f^! \mathbf{1}_X \to d^* q^! f^* \mathbf{1}_X \simeq d^! q^! f^* \mathbf{1}_X \simeq f^* \mathbf{1}_X \simeq \mathbf{1}_Y$$

在 $\mathrm{Hom}^{2\mathrm{Mot}(\mathbf{Z})}(\mathbf{1}, [Y])$ 中是一个等价。

因此，从现在起，我们只考虑松对称幺半函子

$$D = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_{[A]}(2\mathrm{Mot}(\mathbf{Z}))}([A], -)\colon \mathrm{Span}(\mathsf{Aff}_A) \to \mathsf{Pr}_{\mathrm{st}},$$

其中，Aff_A 是 A上的有限型仿射概形范畴。现在，我们重复 [54, 第 10]节中的论证来完成证明。我们将 $\mathrm{Spec}\, A$ 视为隐含的基底。

引理 7.11. 在上述情形中，设 U 和 V 分别是 $\mathbb{A}^m$和 $\mathbb{A}^n$的拟紧开仿射子概形。对于任意态射 $g\colon\ V \to U$，对象 $g^!\mathbf{1}$ 等价于 $\mathbf{1}(n-m)[2n-2m]$。此构造与从点出发的基变换相容；也就是说，对于 $\mathbb{A}^l$的任意拟紧开仿射子概形 W，典范态射 $p^* g^! \mathbf{1} \to$ (恒等映射$_W \times g)^! \mathbf{1}$ 是一个等价，其中 $p\colon\ W \times V \to V$是投影。

证明。 我们将典范态射记为 $f\colon\ U \to *$和 $h\colon\ V \to *$。由命题4.30，可得 $f^!\ \mathbf{1} = \mathbf{1}(m)[2m]$和 $h^!\mathbf{1} = \mathbf{1}(n)[2n]$。由 $g^! f^! \simeq h^!$,

$$g^!\mathbf{1} \simeq g^! f^! \mathbf{1}(-m)[-2m] \simeq h^! \mathbf{1}(-m)[-2m] \simeq \mathbf{1}(n-m)[2n-2m]$$

成立。所需的基变换相容性也可由此证明得出。 □

命题 *7.8* 的证明。 考虑图

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & U & \hookrightarrow & \mathbb{A}^1 \\ \downarrow & & {\scriptstyle g|_U}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle g} & \\ * & \xrightarrow{0} & \mathbb{A}^1, & & \end{array}$$

其中 g 由多项式 P确定。我们需要证明 X 是 étale。反之，我们希望证明 $g|_U$ 是 étale。为此，我们需要证明态射 $(g|_U)^!\mathbf{1} \to \mathbf{1}$ （由引理 7.10构造）是一个等价。根据引理 7.11，这是一个$\mathbf{1}$的自同态。

沿 $U \to *$对整个图作基变换后，我们现在处于这样的情形：存在一个截面 $s\colon\ * \to U$，如图所示

$$\begin{array}{ccccc} * & \xrightarrow{s} & U & \hookrightarrow & \mathbb{A}^1 \\ & & {\scriptstyle g|_U}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle g} & \\ & & \mathbb{A}^1. & & \end{array}$$

由引理 7.11的第二部分，只需证明 $(g|_U)^!\mathbf{1} \to \mathbf{1}$ 在施加 s^* 后是一个等价。

经过平移，我们假设顶部箭头的复合为零。这意味着 $P = T^n + \cdots + a_1 T + a_0$ with $a_1 \in A^\times$。现在，我们考虑 $Q = a_0 + a_1 T + S(a_2 T^2 + \cdots + T^n) \in A[S,T]$以及图

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{A}^1_S & \xrightarrow{s} & V & \hookrightarrow & \mathbb{A}^1_S \times \mathbb{A}^1 \\ & & {\scriptstyle h|_V}\downarrow & \swarrow_{h} & \\ & & \mathbb{A}^1_S \times \mathbb{A}^1, & & \end{array}$$

其中 h 由到 S 的投影以及多项式 Q给出，且 V 是 étale 轨迹。若我们证明 $(h|_V)^! \mathbf{1} \to \mathbf{1}$ 在 s^*之后是一个等价，则沿着 $S = 1$拉回即可得到所需结果；根据引理 7.11 的第二部分，这样做是可行的。然而，根据引理 7.11 的第一部分，它是一个对象之间的映射，这些对象来自点；而由 $\mathbb{A}^1$-不变性，只需证明沿着 $S = 0$拉回后成立。此处再次根据引理 7.11 的第二部分，我们回到了带有截面的原始情形，其中 P 的次数为一。在这种情况下， g 是同构，因此所需结果成立。 □

7.4. 代数 2-动机与环叠。 现在我们已经具备完成证明所需的所有分支：

定理 B 的证明。 根据定理7.1，二者都是通过刻画从 Ring 出发的映射的泛性质定义的。因此，只需构造两个方向上的态射，使其与从 Ring 出发的泛映射相容。

态射 2-动机(**整数环**) $\to$ 2SH(**整数环**) 可以很容易地构造出来。我们构造另一个方向上的态射。我们有一个函子 Ring $\to$ 2动机(**整数环**)。我们证明，它在$(\mathsf{Ring}^{\heartsuit})_{\aleph_0}$ 上的限制满足定理 7.1中的条件。我们已将（i）作为定理 7.7。条件（ii）至（iv）由对泛情形作基变换得到。 □

7.5. 代数 2-动机的 cdh 下降。 我们注意到，SH 的经典下降结果可推广到 2SH：

定理 7.12。 有限型静态仿射概形的 *cdh* 覆盖在2SH(**整数环**)上确定一个覆盖。因此，模[–](2SH(**整数环**)): Ring $\to 2\mathsf{Pr}_{\mathrm{st}}$ 是一个 *cdh* 层。

证明。 我们首先处理 Nisnevich 下降。考虑 Nisnevich 方形

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & X \end{array}$$

有限型仿射概形的。根据命题 5.6，我们需要证明 $[U] \oplus [Y] \to \mathbf{1}$ 在$\mathrm{SH}(X)$ 中是忠实的。这可以通过拉回到 $\mathrm{SH}(U)$ 和 $\mathrm{SH}(Y)$来验证。

我们 证明 cdp 下降。为此，使用拟射影 e
概形。 这样，只需证明对于一个（具体的）爆破方块

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & X, \end{array}$$

其中 X 是有限型仿射概形，态射 $[X] \to [Y] \times [Z]$ 满足下降。现在，利用定理 5.14，问题归结为验证 $\mathbf{1}_{Y \amalg Z}$ 在 $\mathrm{SH}(X)$ 中的推前满足下降。我们可以利用引理 5.24验证其可下降性。 □

8. Étale 2-motives

本节中，我们证明定理 C。记 $2\mathrm{SH}_{\mathrm{KAS}}$(**整数环**)为定理 C的泛目标，它由引理 5.7保证存在。我们希望证明它与 $2\mathrm{SH}_{\text{ét}}$(**整数环**)等价。

在第8.1节，我们回顾 étale 动机谱。在第8.2节，我们回顾动机欧拉示性数理论。在第8.3节，我们证明伽罗瓦下降适用于定理

C 定理C。在第8.4节，我们证明定理C。在第8.5节，我们证明 h 下降对 étale 2-动机成立。

8.1. **概　述 étale 动机谱**。首先，我们回顾 étale 动机谱的定义 a:

定义 8.1. 对于一个环 A，我们将 $\mathrm{SH}_{\text{ét}}(A)$ 定义为 SH(A) 的 étale 层化版本；也就是说，对于 A 上有限表示光滑概形的任意 étale 覆盖 $Y \to X$，我们要求 $[Y^{\times_X \bullet+1}]$ 是一个余极限图。由于已经施加了 Nisnevich 下降，因此只需对光滑仿射概形之间的有限 Galois 覆盖这样做。

文献中通常考虑超完备版本。定义 8.1 的优点如下：

引理 8.2. 函子

$$\mathrm{SH}_{\text{ét}} : \mathsf{Ring} \to \mathrm{CAlg}(\mathsf{Pr}_{\mathrm{st}})$$

与滤过余极限可交换。

证明。 这由关于 SH 的同一观察，以及任意两个光滑仿射概形之间的有限伽罗瓦覆盖$Y \to X$ 都源自有限表示环上的相同情形这一事实得出。 □

不过， [11, 定理 6.29] 证明，在较弱的假设下，这些范畴相同：

定理 8.3 (Bachmann–Burklund–Xu)。 设 A 是一个有限维诺特环，其剩余域的虚拟上同调维数一致有界（例如， A 是有限型的 **整数环**上的概形）。那么$\mathrm{SH}_{\text{ét}}(A)$ 与其超完备版本相同。

稍后我们将使用以下变体：

推论 8.4。 在定理 *8.3*中，如果 A 在极大理想处的所有局部环都满足定理*8.3*的假设，同样的结论也成立。

证明。 只需证明这些函子 $\mathrm{SH}_{\text{ét}}(A) \to \mathrm{SH}_{\text{ét}}(A_{\mathfrak{m}})$ 是联合保守的，其中$\mathfrak{m}$ 遍历 A的极大理想。若某个对象 M 映到 0上方的 $A_{\mathfrak{m}}$，由引理 8.2，我们可以取$f \notin \mathfrak{m}$ 使其在 0 上方为 $A[f^{-1}]$。这覆盖了 A，因此也覆盖了 $M \simeq 0$。 □

注 8.5。 在 [9, 推论 5.7], 中证明了，至少在定理 8.3的假设下，范畴 $\mathrm{SH}_{\text{ét}}(A)$ 由 $\Sigma^\infty_+ X$ 紧生成，条件是 X 是一个在 A 上有限表示且具有有限上同调维数的光滑概形。由此可知，通过使用引理 $\mathrm{SH}_{\text{ét}}(A)$ 8.2，我们的范畴总是紧生成的。

一个微妙之处在于 $\mathbf{1} \in \mathrm{SH}_{\text{ét}}(A)$ 不一定是紧致的。不过，我们总可以用 A覆盖 $A[1/2][\zeta_4] \times A[1/3][\zeta_6]$，以确保单位是紧致的：为说明这一点，同样由引理 8.2，我们可以考虑 A 为有限型的情形。于是，结论由上文对一组紧生成元的描述推出。

Ayoub 为拟射影概形上的 $\mathrm{SH}_{\text{ét}}$ 构造了六种运算**整数环**；也就是说，在这种情形下我们可以应用定理 3.4 （注意，ii ）已在 [8, Corollaire4.5.47] 中得到证明）。这里我们考虑 2SH(**整数环**) 的 étale 变体：

定义 8.6。 我们将 $2\mathrm{SH}_{\text{ét}}$(**整数环**) 记为 2-范畴（见定义 2.5）中关于 $\mathrm{SH}_{\text{ét}}$ 的核的可呈 Span(QProj) $\to \mathsf{Pr}_{\mathrm{st}}$。

引理 8.7。 存在一个典范[10] 态射 SH $\to \mathrm{SH}_{\text{ét}}$，它属于 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Fun}(\mathrm{Span}(\mathrm{QProj}),\mathsf{Pr}_{\mathrm{st}}))$，并扩展了 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Fun}(\mathrm{QProj}^{\mathrm{op}},\mathsf{Pr}_{\mathrm{st}}))$ 中的典范态射。

我们可以直接使用命题 3.10 来证明这一点，但也可以如下使用定理 A ： s:

证明。 态射 $[-]$: $\mathrm{QProj}^{\mathrm{op}} \to 2\mathrm{SH}_{\text{ét}}$**(整数环)** 满足定理 A 的假设，因此我们得到一个态射 **2SH(整数环)** $\to 2\mathrm{SH}_{\text{ét}}$**(整数环)**。它与 $2\mathrm{Span}_{\mathrm{all};P,\ J}$(QProj) $\to$**2SH(整数环)** 的复合（其中 J 由开浸入组成，P 由射影态射组成）与典范态射重合。将其限制到 Span(QProj)，即可得到所需的态射。 □

[10]由 [20] 可知，此态射必然唯一。

8.2. **欧拉示性数回顾**。我们需要以下内容：

命题 8.8。 设 A 是一个静态环，且包含 ζ_4 或 ζ_6， P 是次数为 d的首一多项式。我们考虑 $f\colon A \to A[T]/P$。那么存在一个态射 $\epsilon\colon f_*f^*\mathbf{1} \to \mathbf{1}$ 以及一个可逆态射 $v\colon \mathbf{1} \to \mathbf{1}$，它们位于 $\mathrm{SH}(A)$ 中，使得复合

$$\mathbf{1} \to f_*f^*\mathbf{1} \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{1} \xrightarrow{v} \mathbf{1} \xrightarrow{d} \mathbf{1}$$

与 d^2 同伦。

为证明起见，我们回顾一些动机同伦论。考虑动机 J-同态 $\Omega^\infty K(A) \to \mathrm{SH}(A)$，其中 $K(A)$ 表示 A 的代数 K- 理论谱。由于它将 0 映至 $\mathbf{1}$，我们得到一个态射 $\Omega^{\infty+1}K(A) \to \mathrm{End}^{\mathrm{SH}(A)}(\mathbf{1})$。将其与 $A^\times \to K_1(A)$ 复合后，我们得到一个态射 $A^\times \to \pi_0\mathrm{End}^{\mathrm{SH}(A)}(\mathbf{1})$，记作 $\langle - \rangle$。对于 $d \geq 0$，记作 d_ϵ for$\langle -1\rangle^0 + \cdots + \langle -1\rangle^{d-1}$。

引理 8.9. 设 A 是一个环。当 $\zeta_4 \in A$ 时，我们有 $\langle -1\rangle = 1$ 属于 $\pi_0\mathrm{End}^{\mathrm{SH}(A)}(\mathbf{1})$。当 $\zeta_6 \in A$ 时，我们有 $2\langle -1\rangle = 2$ 属于 $\pi_0\mathrm{End}^{\mathrm{SH}(A)}(\mathbf{1})$。

证明。 设 l 是 2 或 3。假设 $A =$ **整数环**$[\zeta_{2l}]$。由 [23], 可得 $\langle u^2\rangle = 1$ 对于 $u \in A^\times$以及 $\langle u\rangle + \langle v\rangle = \langle u+v\rangle + \langle (u+v)uv\rangle$ 对于 u， v， $u+v \in A^\times$。当 $l = 2$时，第一个式子意味着$\langle -1\rangle = 1$。当 $l = 3$时，我们有 $2 = 1+1 = \langle \zeta_6^2\rangle + \langle \zeta_3^2\rangle = 2\langle \zeta_6^2 + \zeta_3^2\rangle = 2\langle -1\rangle$。 □

引理 8.10。 设 A 是一个包含 ζ_4 或 ζ_6的环。对于 $d \geq 0$，元素 $dd_\epsilon \in \pi_0\mathrm{End}^{\mathrm{SH}(A)}(\mathbf{1})$ 在相差一个单位的意义下为 d^2 。

证明。 若 A 包含 ζ_4，根据引理 8.9，我们有 $d_\epsilon = d$。

若 A 包含 ζ_6，根据引理 8.9，我们有 $2(\langle -1\rangle - 1) = 0$。我们对模 4进行逐案分析。当 $d \equiv 0$ 或 1时，我们有 $d_\epsilon = d$。当 $d \equiv 3$时，我们有 $d_\epsilon = d\langle -1\rangle$。因此剩下的情况是 $d \equiv 2$，但由于在这种情况下 d 是偶数，$2d_\epsilon = 2d$ 足以得出结论。 □

命题 *8.8* 的证明。 我们应用 [24, 命题 B.1。4] (参见 [25, 命题 2.2。5] ，其表述与此处更相关) 得到一个态射 $f_*f^*\mathbf{1} \to \mathbf{1}$，使得它与 $\mathbf{1} \to f_*f^*\mathbf{1}$的复合为 d_ϵ。根据引理 8.10，我们得到所需结果。 □

8.3. **Kummer–Artin–Schreier 2-动机的 étale 下降。证明定理 C** 的关键如下：

定理 8.11. 设 G 是一个有限群，且 $A \to B$ 是环的一个 G-伽罗瓦态射。那么它会在$2\mathrm{SH}_{\mathrm{KAS}}($**整数环**$)$ 上诱导一个栈覆盖。

我们先简化 Artin–Schreier 条件。下面引用 [10] 中的定理：

定理 8.12 (Bachmann)。 典范态射 $\mathsf{Sp} \to \mathrm{SH}(\mathbf{F}_p)_{(p)}$ 在 交换代数$(\mathrm{Pr}_{\mathrm{st}})$ 中可典范地分解并经过D(**整数环**)。

命题 8.13. 记 $E(\mathbf{F}_p) = \mathrm{Hom}_{2\mathrm{SH}_{\mathrm{KAS}}(\text{整数环})}(\mathbf{1}, [\mathbf{F}_p])$。那么 $p \in \mathrm{End}_{E(\mathbf{F}_p)_{(p)}}(\mathbf{1})^\times$。

注 8.14。 在命题8.13中，事后（在定理C 得到证明之后），我们看到 $p \in \mathrm{End}_{E(\mathbf{F}_p)}(\mathbf{1})^\times$。

证明。 我们考虑复合 $\mathrm{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{Sm}^{\mathbf{F}_p}; \mathsf{Sp}) \to \mathrm{SH}(\mathbf{F}_p) \to E(\mathbf{F}_p)$ 。根据 Artin–Schreier 条件，$\mathbf{F}_p \to \mathbb{G}_a \xrightarrow{T \mapsto T^p - T} \mathbb{G}_a$（带有典范零伦）成为 $E(\mathbf{F}_p)$ 中的一个余纤维序列。由于第二个态射等价于 $\mathrm{SH}(\mathbf{F}_p)$ 中的恒等映射 $\mathsf{id}_{\mathbf{1}}$，这意味着$\mathbf{F}_p$ 在 $E(\mathbf{F}_p)$ 中变为 0。这相当于说，$\mathsf{Sp} \to E(\mathbf{F}_p)$ 将$\mathbf{F}_p$ 映为 0。

现在我们使用定理 8.12 来得到 D(**整数环**) $\to E(\mathbf{F}_p)_{(p)}$。上面一段表明，这个态射将 **整数环** $\otimes_{\mathbf{S}} \mathbf{F}_p$消去，其中我们考虑来自左因子的 **整数环**-线性结构。由于 $\mathbf{F}_p$ 是 $\mathbf{F}_p \otimes_{\mathbf{S}} \mathbf{F}_p$ 在 D(**整数环**) 中的一个直缩，这意味着 $\mathbf{F}_p =$ **整数环** $\otimes_{\mathbf{S}} \mathbf{S}/p$ 也被消去。因此，所需结果得证。 □

然后我们证明若干情形：

引理 8.15. 在 $2\mathrm{SH}_{\mathrm{KAS}}$(**整数环**) 上由环映射 **整数环**$[1/n] \to$**整数环**$[1/n][\zeta_{2n}]$ 诱导的叠态射是 $n \geq 1$ 的覆盖。

证明。 这是沿着态射 $\mathbf{Z}[1/n][T^{\pm}] \to \mathbf{Z}[1/n]$映射 T 到 -1对 Kummer 映射作的基变换。 □

引理 8.16。 由环映射 $2\mathrm{SH}_{\mathrm{KAS}}(\mathbf{Z})$ $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}[1/2][\zeta_4] \times \mathbf{Z}[1/3][\zeta_6]$ 诱导的、在 $2\mathrm{SH}_{\mathrm{KAS}}(\mathbf{Z})$ 上的叠态射是一个覆盖。

证明。 首先，$\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}[1/2] \times \mathbf{Z}[1/3]$ 是环的 Zariski 覆盖，因此由定理 7.12可知它诱导一个覆盖。结合引理 8.15，即可得到所需结果。 □

引理 8.17。 设 A 是一个环， P 是一个次数为 d的首一多项式。如果 $A \to A[T]/P = B$是 ***étale*** 的，那么态射 $[A][1/d] \to [B][1/d]$[11] 满足下降。

证明。 沿着引理 8.16中的映射进行基变换后，所需结果由命题 8.8得出。 □

引理 8.18. 对于环 A 中的可逆元 $n \geq 1$，任意 C_n***-Galois*** 覆盖 $A \to B$ 确定一个覆盖 $r.$

证明。 由引理 8.15，不妨设 A 包含 ζ_n。根据 Kummer 理论，只要 $\mathrm{Pic}(A)$ 消失，这样的覆盖就是 Kummer 映射的基变换。由于 Pic 在 Zariski 局部消失，所需结果由定理 7.12得出。 □

引理 8.19。 对于 $e \geq 0$，任意 C_{p^e}***-Galois*** 覆盖 $A \to B$ 所诱导的、定义在 $2\mathrm{SH}_{\mathrm{KAS}}$(**整数环**) 上的叠态射都是覆盖。

证明。我们考虑 $A \to B$。由于它是真态射，根据定理 5.14，只需证明 $f_*\mathbf{1}$ in $\mathrm{Hom}_{2\mathrm{SH}_{\mathrm{KAS}}(\text{整数环})}(\mathbf{1}, [A])$ 满足下降。此外，由于它是有限 étale 的，因此是可对偶的，并且具有可对偶的对角线。因此，根据命题 5.3，我们需要证明 (E_0-)余代数 $(f_*\mathbf{1})^\vee$ 是忠实的。这可以在映射到 $\mathrm{Hom}_{2\mathrm{SH}_{\mathrm{KAS}}(\text{整数环})}(\mathbf{1}, [A[1/p]])$ 和 $\mathrm{Hom}_{2\mathrm{SH}_{\mathrm{KAS}}(\text{整数环})}(\mathbf{1}, [A/p])$ 后检验。前者由引理 8.18 得出，后者由命题 8.8 和 8.13 得出。 □

定理 8.11 的证明。设 $p_1, \ldots, p_n$ 是小于 G 的素数。我们用 $\mathrm{S}[p_i/p_1 \cdots p_n]$ 覆盖系数 S，其中 $i = 1, \ldots, n$。根据命题 6.4,[12]，所得覆盖满足下降。接下来需要证明，对于每个 i，$[A][p_i/p_1 \cdots p_n] \to [B][p_i/p_1 \cdots p_n]$ 都满足下降。记 $p = p_i$，并选取 G 的一个 p-Sylow 子群 P。由于 P 可解，我们可以将 $A \to B$ 写成扩张序列 $A \to B^P = B_0 \to \cdots \to B_m = B$，其中，对于 $j = 1, \ldots, m$， $B_{j-1} \to B_j$ 是某个 $e_j \geq 1$的 $C_{p^{e_j}}$-伽罗瓦扩张。根据引理 8.19，这会导出一个覆盖。因此，只需证明 $A \to B_0$ 导出一个覆盖。根据本原元定理，它在 Nisnevich 局部上是单生成的，故所需结论由定理 7.12 和引理 8.17 得出。□

8.4. **étale 2-动机与环叠。** 这里，我们证明定理 C。

命题 8.20。 设 G 是一个有限群，且 $A \to B$ 是环之间的 G-伽罗瓦态射。那么它确定了一个覆盖，其底空间为$2\mathrm{SH}_{\text{ét}}$(**整数环**)。

证明。 考虑 $G/H \mapsto A^H$ 后，我们得到一个方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fun}(BG; \mathrm{Sp}) & \longrightarrow & \mathrm{Sp} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{SH}_{\text{ét}}(A) & \longrightarrow & \mathrm{SH}_{\text{ét}}(B) \end{array}$$

在交换代数($\mathrm{Pr}_{\mathrm{st}}$)中，相应地，我们得到一个推出方形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fun}(BG; \mathrm{Sp}) \otimes \mathbf{1} & \longrightarrow & \mathbf{1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ [A] & \longrightarrow & [B] \end{array}$$

[11]不要将其与 $[A[1/d]] \to [B[1/d]]$ 混淆。[12]请注意，扎里斯基谱中的拟紧开集在范畴意义下是闭的。

在 交换代数(2SH$_{\text{ét}}$(**整数环**))中。所需结论由命题 6.19得出。 □

注 8.21。 对于任意有限 étale 映射 $A \to B$，命题 8.20证明中用到的结论可推广到推出方形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Shv}_{\text{fét}}(A) \otimes \mathbf{1} & \longrightarrow & \mathrm{Shv}_{\text{fét}}(B) \otimes \mathbf{1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ [A] & \longrightarrow & [B], \end{array}$$

在 2SH$_{\text{ét}}$(**整数环**)。此外，当 A 和 B 满足定理 8.3的假设时，我们可以将Shv$_{\text{fét}}$ 替换为其超完备版本，因为由 [17,推论 4。40]，超完备化是 smashing 的。

定理 C 的证明。由命题 8.20，我们得到一个态射 F: 2SH$_{\text{KAS}}$(整数环) $\to$ 2SH$_{\text{ét}}$(整数环)。我们按照定理 A 的证明构造一个态射 G: 2SH$_{\text{ét}}$(整数环) $\to$ 2SH$_{\text{KAS}}$(整数环)。我们已经有一个对称幺半函子 Span(QProj) $\to$ 2SH$_{\text{KAS}}$(整数环)。因此，我们希望在 CAlg(Fun(Span(QProj), Pr$_{\text{st}}$)) 中构造一个态射 SH$_{\text{ét}} \to$ Hom$_{\text{2SH}_{\text{KAS}}(\text{整数环})}(\mathbf{1}, [-])$。由定理 8.11，限制到 QProj^{op} 上时，我们可以得到这样的态射。由定理 2.2，要将其提升为所需的态射，我们需要验证定理 2.2 的陈述中所述的相容条件；也就是说，这些方形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SH}_{\text{ét}}(X) & \longrightarrow & \mathrm{SH}_{\text{ét}}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D(X) & \longrightarrow & D(U), \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{SH}_{\text{ét}}(X) & \longrightarrow & \mathrm{SH}_{\text{ét}}(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D(X) & \longrightarrow & D(Y) \end{array}$$

对于任意开浸入 $U \to X$ 和射影态射 $Y \to X$ 分别是左右可伴随的，其中 $D = \mathrm{Hom}_{\text{2SH}_{\text{KAS}}(\text{整数环})}(\mathbf{1}, [-])$。根据引理8.7 以及SH$_{\text{ét}}(-)$ 是SH$(-)$的局部化这一事实，只需验证将SH$_{\text{ét}}$ 替换为SH时结论成立，而这可由引理8.7中的论证得出。

我们需要证明这一构造诱导出一个等价。根据构造， GF 与恒等映射同伦。对于 FG，我们采用定理 A证明中的论证。□

8.5. **étale 2-动机的 h 下降**。 我们注意到，SH$_{\text{ét}}$ 的 h 下降结果可提升至 2SH$_{\text{ét}}$:

定理 8.22。 有限型静态仿射概形的一个 h 覆盖确定了2SH$_{\text{ét}}$(**整数环**)上的一个覆盖。因此，Mod$_{-}$(2SH$_{\text{ét}}$(**整数环**)): Ring $\to$ 2Pr$_{\text{st}}$ 是一个 h 层。

我们通过将其归结为以下命题来证明:

命题 8.23. 有限型静态仿射概形之间的任意有限万有同胚都确定一个覆盖2SH$_{\text{ét}}$(**整数环**)。

该归结基于以下标准观察:

引理 8.24. 设 S 是一个拟紧拟分离静态概形。那么，有限表示静态概形范畴上的 h 拓扑由 *cdp* 拓扑和 *Zariski* 拓扑以及有限局部自由满射生成。

证明. 由 [14, 定理 2.9], , h 拓扑由 cdp 拓扑和 fppf 拓扑生成。根据 [57,标签 05WN], , fppf 拓扑由 Zariski 拓扑和有限局部自由满射生成。□

引理 8.25. 设 $Y \to X$ 是拟紧拟分离静态概形之间的有限局部自由态射。那么它存在一个有限表示闭子概形序列 $\emptyset = Z_0 \subset$
$\cdots \subset Z_n = X$ 使得在每个分层 $Z_{i+1} \setminus Z_i$ 上，它分解为 $Y \to X' \to X$，其中 $Y \to X'$ 是普适同胚，而 $X' \to X$ 是有限 *étale* 映射。

证明。 通过逼近，我们不妨假设 X 是有限型的，且定义在 **整数环**上。由诺特归纳，只需找到一个非空开子概形，使得 $Y \to X$ 存在所需的分解。所需结论由下文的引理 8.26 得出。□

引理 8.26。 设 k 是一个域， B 是一个阿廷 k-代数。那么它存在一个分解$k \to A \to B$ ，使得 $k \to A$ 是 *étale*，且 $A \to B$ 是普适同胚。

证明。 逐一考察每个连通分支后，我们可以假设 B 是局部的；记其剩余域为 l 。令 A 为由 k上的可分元素组成的 B 的子环。只需证明 $A \to B$，等价地， $A \to B \to l$ 是普适同胚。为此，只需证明 l 中任何关于 k 的可分元素都能提升到 B。这由 B的亨泽尔性质推出。□

定理 *8.22* 的证明。 注意， cdh 下降由定理 7.12推出。由引理 8.24，只需证明有限平坦映射的下降。

接着我们使用引理 8.25。根据注 8.5，我们处于可下降的情形。因此，我们可以使用引理 5.24 将问题化归到映射为普适同胚的情形，这正是命题8.23。 □

现在我们转向命题 8.23 的证明。我们回顾 [50,附录 B] 中的以下概念。这里的表述取自 [57, Tag 0EUR]:

定义 8.27。 设 A 是一个静态环。 A 的绝对弱正规化 是由结构态射为普适同胚的 A-代数组成的范畴中的终对象。我们将此映射记为 $A \to A^{\mathrm{awn}}$。对于一般环，其绝对弱正规化是其 π_0 的绝对弱正规化。

引理 8.28。 在定义 *8.27* 的情形下，绝对弱正规化 A^{awn} 可表示为以下 A-代数的滤余极限，其过渡态射是以下态射经过有限次基变换后复合而成：

> *(1)* 态射 **整数环**$[S,T]/(S^3-T^2) \to$**整数环**$[U]$ 分别将 S 和 T 映至 U^2 和 U^3。*(2)* 态射 **整数环** $[S,T]/(p^pS-T^p) \to$**整数环**$[U]$ 分别将 S 和 T 映至 U^p 和 pU。*(3)* 态射 **整数环**$[S,T]/(S^p-T^p,$ $pS-pT) \to$**整数环**$[U]$ 将 S 和 T 都映至 U。

证明。由 [57, Tag 0EUL],静态环是绝对弱正规的，当且仅当满足以下条件 ：

- 当我们有 x 和 y 满足 $x^3=y^2$时，存在 z 使得 $x=z^2$ 和 $y=z^3$。[13]
- 对于每个素数 p，当我们有 x 和 y 满足 $p^px=y^p$时，存在唯一的元素 z使得 $x=z^p$ 和 $y=pz$。

第一个条件对应于 (1)，第二个条件对应于 (2) 和 (3)。 □

命题 *8.23* 的证明。 我们沿着 **整数环** $\to$**整数环**$[1/2][\zeta_4] \times$**整数环**$[1/3][\zeta_6]$ 进行基变换，使其处于可以使用可下降性的情形，尤其是引理 5.24。

设 $A \to B$ 是一个有限万有同胚。它在绝对弱正规化上诱导一个同构；特别地， B 位于 A 与其绝对弱正规化之间。因此，由引理 8.28可知，只需证明其中描述的每个映射都是可下降的。

我们考虑 (1)。我们按 S对基底分层。在开轨迹上，它是一个同构。在闭轨迹上，两边都约化为 **整数环**。

我们考虑 (2)。我们按 p对基底分层。在开轨迹上，它是一个同构。在闭轨迹上，它变为 $\mathbf{F}_p[S,T]/T^p \to \mathbf{F}_p[U]$。考虑约化后，只需证明由 $\mathbf{F}_p[S] \to \mathbf{F}_p[U]$给出的 $S \mapsto U^p$是可下降的。这由命题 8.8得出，因为 p 在 $\mathrm{SH}_{\text{ét}}(\mathbf{F}p)$ 中可逆。

然后我们处理（3）。我们按 p 对基底分层。在开轨迹上，它是一个同构。在闭轨迹上，它变为 $\mathbf{F}_p[S,T]/((S-T)^p) \to \mathbf{F}_p[U]$，其约化是一个同构。 □

推论 8.29。 函子 Ring $\to 2\mathrm{SH}($**整数环**$)$ 经由 $(-)^{\mathrm{awn}}$分解到绝对弱正规环的范畴。

证明。 由引理 8.28可知，只需证明任意有限万有同胚在 $2\mathrm{SH}_{\text{ét}}(\mathbf{Z})$中诱导一个同构。令 $Y \to X$ 为这样一个映射。由命题 8.23可知$[X] \simeq \mathrm{Tot}[Y^{\times x \bullet+1}]$。但由于 $Y^{\times x \bullet+1}$ 的约化与 Y 的约化一致，余单纯对象是常值的。 □

[13]对于弱半正规环，该解自动唯一。

9. 一些 Berkovich 几何

本节回顾 Berkovich 几何的一些关键事实。我们在第 9.1 节介绍半赋范环和一致巴拿赫环，并在第9.2节考察它们的 Berkovich 谱。在第 9.3节，我们介绍严格全不连通空间，这是 Berkovich 几何中的重要构件。第 9.4节讨论弧拓扑。在第 9.5节，我们研究拓扑有限表示的一致巴拿赫环。

9.1. 半赋范环与一致巴拿赫环。 这里，为了完整起见，我们考虑其导出变体，尽管这并非关键，因为赋范环的导出版本自动是静态的。

定义 9.1。 静态环 A 上的半范数 是一个函数 $|-|\colon A \to [0,\infty)$，满足 $|0| \le 0$、$|a+b| \le |a| + |b|$、$|1| \le 1$ 和 $|ab| \le |a||b|$，对任意 a 和 b 均成立。我们将 $\mathsf{SNRing}^{\heartsuit}$ 记作由此类对象构成的范畴，其中态射 $A \to B$ 是满足 $|f(a)| \le |a|$ 的环映射 $f\colon A \to B$，对任意 $a \in A$ 均成立。接着，我们通过拉回方块定义（动画的）半范数环 范畴

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{SNRing} & \longrightarrow & \mathsf{Ring} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_0} \\ \mathsf{SNRing}^{\heartsuit} & \longrightarrow & \mathsf{Ring}^{\heartsuit}. \end{array}$$

在 Pr 中。具体而言，（动画的）环 A 上的半范数 是 $\pi_0 A$ 上的半范数。

例 9.2. SNRing 中的始对象是**整数环**，其通常绝对值为 $|n| = \max(n, -n)$，适用于 $n \in$ **整数环**。

例 9.3. A 与 B 在 SNRing 中的余积（我们记为 $A \otimes B$）的底层环为 $A \otimes B$。其半范数由下式给出

$$|c| = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_i||b_i| \;\middle|\; c = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \right\}.$$

这通常称为射影张量积。

例 9.4. 对于 $r \in [0,\infty)$，我们有半赋范环 **整数环**$[T]_r$，它余表示函子 SNRing $\to$ Ani，该函子将 A 映到满足 $|a| \le r$ 的元素 $a \in A$ 的 anima。具体而言，底层环为 **整数环**$[T]$，半范数由 $|\sum_{i=0}^{n} a_i T^i| = \sum_{i=0}^{n} |a_i| r^i$ 给出。我们有 $\varinjlim_{r'>r}$ **整数环**$[T]_{r'} =$ **整数环**$[T]_r$。

通过取余积，我们也得到 **整数环**$[T_1,\dots,T_n]_{r_1,\dots,r_n}$ 对于 $r_i \in [0,\infty)$ 。

可呈范畴 SNRing 并非紧生成，但它与之相近 t:

命题 9.5. 考虑由 **整数环**$[T_1,\dots,T_n]_{r_1,\dots,r_n}$对于 $r_i \in [0,\infty)$所张成的 SNRing 的全子范畴 SNPol。那么 *Yoneda* 函子

$$\mathsf{SNRing} \to \mathrm{Fun}(\mathsf{SNPol}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Ani})$$

是全忠实的，其本质像由满足以下条件的函子构成：将有限余积映为积，并将余极限

$$\mathbf{Z}[T]_s \otimes_{\mathbf{Z}[T]_r} \mathbf{Z}[T]_s \simeq \mathbf{Z}[T]_s \qquad \varinjlim_{r'>r} \mathbf{Z}[T]_{r'} \simeq \mathbf{Z}[T]_r,$$

其中 $r \le s$，映为相应的极限。特别地，它是 $\aleph_1$-紧生成的 $d.$

证明。 注意，Yoneda 函子 Ring $\to$ Fun(Pol^{op},Ani) 是全忠实的，其本质像由将有限余积映为积的函子构成。

我们首先证明它是全忠实的。对于半赋范环 A，只需证明由 $\mathsf{SNPol}_{/A}$ 指标化的典范图表的余极限等价于 A。这个指标范畴是筛选的。我们先考虑 $\mathsf{SNPol}_{/A} \to \mathsf{Pol}_{/A}$，并注意到它是共终的。因此，余极限给出了正确的底层环。利用 **整数环**$[T]_r$，可以直接得到半范数的识别。

接下来我们检验本质像的描述。假设 F 满足这些条件。我们将 F' 定义为它沿 SNPol $\to$Pol 的左 Kan 延拓。具体而言，我们有 F'(整数环$[T_1,\dots,T_n]$) $=\varinjlim_r F$(整数环$[T_1,\dots,T_n]_{r,\dots,r}$)。因此，它将有限余积映为有限积，故可由一个环 A 表示。对于 $a\in\pi_0(A)$，考虑 F'(整数环$[T]$) 中对应的一个元素。由于根据条件， F(整数环$[T]_r$) $\to F'$(整数环$[T]$) 是单态射，因此 F(整数环$[T]_r$)$\times_{F'}$(整数环$_{[T]}$) $*$要么是终对象，要么是空的。我们令 $|a|$ 为所有满足 F(整数环$[T]_r$)$\times_{F'}$(整数环$_{[T]}$) $*$非空的 r 的下确界；根据条件，这个下确界存在。我们可以验证，这定义了 A上的一个半范数，并且 F 由 A表示。□

Cor推论 9.6。 范畴 SNRing 是 P 中一个紧生成范畴的直缩 r.

证明。我们考虑 Fun(SNPol^{op}, Ani) 的全子范畴 $\mathcal{C}$，它由满足以下条件的函子 F 张成：保持有限余积，并且对于任意 $r\le s$， $F(\mathbf{Z}[T]_s)\to F(\mathbf{Z}[T]_s)\times_{F(\mathbf{Z}[T]_r)}F(\mathbf{Z}[T]_s)$ 是等价。这是一个紧生成范畴。通过证明从 SNRing $\hookrightarrow\mathcal{C}$ 到 Proposition 9.5 的嵌入的左伴随 L 还具有另一个左伴随，我们即可完成证明。只需证明L 保持极限。由 Proposition 9.5，我们看到

$$\mathrm{Map}_{\mathsf{SNRing}}(\mathbf{Z}[T]_r,L(F))\simeq\varprojlim_{r'>r}F(\mathbf{Z}[T]_{r'}),$$

这就证明了所需结果。 □

注 9.7。 推论 9.6 表明SNRing 在 *Johnstone–Joyal* [36] 意义下是连续的，或在 *Lurie* [42, 第 21.1 节2]意义下是紧致组装的。还可以证明推论 9.6的一个对称幺半精化。

接下来我们介绍其重要的全子范畴：

定义 9.8。 设 A 是一个半赋范环。如果具有 $|a|=0$ 的元素 $a\in A$ 的 anima 是平凡的，则称其为一个赋范环 。这迫使其底层动画环是静态的。进一步地，如果每个柯西序列都收敛，则称其为一个巴拿赫环 。如果对任意 $a\in A$都成立 $|a^2|=|a|^2$，则称其为一致[14] 。我们将 URing 记作由一致巴拿赫环张成的 SNRing 的全子范畴。

我们可以利用提升性质刻画这些对象：

命题 9.9。 设 A 是一个半赋范环。

(1) 当且仅当它相对于**整数环**$[T]_0\to$ **整数环**是局部的时，它是赋范的。*(2)* 如果它是赋范的，那么当且仅当它相对于 $A\to B$ （其中 $r>0$）是局部的时，它是巴拿赫的；这里 A 是**整数环** $[T_1,\dots]_{r,\dots\dots}$，其中 $|T_m-T_{m+k}|\le 1/m$ 对 $m\ge1$ 和 $k\ge1$ 成立，而 B 是 $A[U]_r$，其中 $|U-T_m|\le 1/m$ 对 $m\ge1$成立。形式上，为了构造 A，我们首先添加变量 $S_{m,\,k}$，其中 $m\ge1$ 和 $k\ge1$ 的半径为 $1/m$，然后再对 $S_{m,\,k}-T_m-T_{m+k}$取商。对于 B也同样如此。

(3) 如果它是巴拿赫的，那么它是一致的，当且仅当它相对于

$$\mathbf{Z}[T,U]_{r,s}/(T^2-U)\to\mathbf{Z}[T]_{\sqrt{s}}$$

与 $r^2\ge s>0$。

证明。 这是显而易见的。 □

推论 9.10。 定义 *9.8*中的所有全子范畴 $\aleph_1$-均为紧生成的，且局部化存在于Pr$^{\aleph_1}$中。

证明。 这是命题 9.5 和 9.9的直接推论。 □

定义 9.11。 我们将包含 SNRing $\to$UBan 的左伴随称为一致完备化，并将其记作 $A\mapsto A^{\mathrm{ucpl}}$。

例 9.12。 对于一致巴拿赫环 A，我们用 $A\{T_1,\dots,T_n\}_{r_1,\dots,r_n}$ 表示 A 与 **整数环**$[T_1,\dots,T_n]_{r_1,\dots,r_n}$ 的张量积的一致完备化。

[14]这也 称为谱的，因为巴拿赫环满足此条件当且仅当 $|a|=\lim_{n\to\infty}|a^n|^{1/n}$ 对任意 a ny $a\in A$ 成立。

我们通过进行一些计算来结束本节，稍后将用到这些计算：

引理 9.13. 设 A 是一个赋范环， $P = T^n + \cdots + a_0$ 是一个首一多项式。若满足

$$r^n \geq 2(|a_{n-1}|r^{n-1} + \cdots + |a_0|)$$

，则赋范环 是巴拿赫空间。此外，在这种情况下，若 A 是巴拿赫空间，则 $A[T]_r/P$ 也是巴拿赫空间。

证明. 在此证明中，对于多项式 S，我们分别用 $S_{<n}$ 和 $S_{\geq n}$ 表示次数为 $< n$ 和 $\geq n$ 的分支。

为证明该结论，只需证明对于次数为 $< n$ 的 $R \in A[T]$ ，有

$$|PQ + R| \geq |R|$$

对于任意 $Q \in A[T]$ 都成立，其中 $|-|$ 表示 $A[T]_r$ 上的范数。由

$$|PQ + R| = |(PQ + R)_{<n}| + |(PQ + R)_{\geq n}| \geq (|R| - |(PQ)_{<n}|) + |(PQ)_{\geq n}|,$$

只需证明 $|(PQ)_{\geq n}| \geq |(PQ)_{<n}|$。我们有

$$|(PQ)_{<n}| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i (T^i Q)_{<n}\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i||T^i Q| = \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| r^i |Q|.$$

另一方面，我们有

$$|(PQ)_{\geq n}| \geq |T^n Q| - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i||(T^i Q)_{\geq n}| \geq |T^n Q| - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i||T^i Q| = \left(r^n - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| r^i\right)|Q|.$$

因此，该结果由假设得出。

在巴拿赫情形下，可以直接利用上文得到的范数描述来检验完备性。□

注 9.14. 与引理 9.13不同，在扩张一致巴拿赫环结构时，需要考虑不同的问题；例如，$\mathbf{R}[T]_r/T^2$ 的$\mathbf{R}$对任意 r都成立。引理 9.32中讨论一个非常特殊的情形。

9.2. **Berkovich 谱**。 我们引入域的概念，从而定义谱：

定义 9.15。环 A 上的半范数若满足 $|1| = 1$ 和 $|ab| = |a||b|$ ，对任意 a和 $b \in A$均成立，则称为乘法的。赋范域是底层环为域且半范数为乘法半范数的赋范环。我们类似地定义巴拿赫域；注意，巴拿赫域自动是一致的。

例 9.16。取一个素数 p ，考虑带有范数 $\max(|-|_p, |-|_p^2)$ 的$\mathbf{Q}_p$ 。这是一个一致巴拿赫环，但不是巴拿赫域。

定义 9.17 （Berkovich）。设 A 为一个半赋范环。它的*Berkovich* 谱是闭子空间

$$\mathrm{M}(A) \subset \prod_{a \in A} [0, |a|]$$

由 A 上受限于其原有范数的乘法半范数组成，其中范数定义在 A上。

注9.18。在定义9.17中，$\mathrm{M}(A)$ 的底层集合可识别为到赋范域的态射 $A \to K$ K 的等价类集合。等价关系由以下关系生成：$(A \to K) \sim (A \to K')$ 若存在等距嵌入 $K \to K'$ 使图交换。

以下内容已在 [52, 命题 3.2] 中证明：

命题 9.19. 半赋范环 A 的 *Berkovich* 谱具有以下性质：

(1) 当 A 是一个半范数环的滤过余极限时，映射 $\varprojlim_i A_i$， $\mathrm{M}(A) \to \varprojlim_i \mathrm{M}(A_i)$ 是一个同胚。

(2) 当 $B' = A' \otimes_A B$ 是半范数环的推出时，映射 $\mathrm{M}(B') \to \mathrm{M}(A') \times_{\mathrm{M}(A)} \mathrm{M}(B)$ 是满射。

(3) 态射 $A \to A^{\mathrm{ucpl}}$ 诱导一个同胚 $\mathrm{M}(A^{\mathrm{ucpl}}) \to \mathrm{M}(A)$。

本文不考虑一般的有理域；Weierstraß 域和劳朗域已足以满足我们的需求：

引理 9.20。 设 A 是一个半赋范环。 $A[T]_r/(T-a)$ 和$A[T]_{1/r}/(aT-1)$ 的 *Berkovich* 谱分别与沿包含 $[0,r] \to [0,|a|]$和 $[r,|a|] \to [0,|a|]$对$\mathrm{M}(A)$ 作基变换所得的空间相对应。特别地，在此情形下，M 与基变换相容。

证明。 由于 Berkovich 谱是紧致 Hausdorff 空间，只需在底层集合的层面证明即可。这由注 9.18 推出。 □

以下结果已在 [52, 定理 2.18]中证明：

定理 9.21 (Scholze)。 设 A 是一个巴拿赫环。那么$\mathrm{M}(A)$ 的既开又闭子集与 A的幂等元一一对应。

推论 9.22. 设 A 是一个巴拿赫环。将 $|-|$映到其核的典范映射 $\mathrm{M}(A) \to \mathrm{Spec}(A)$ 连续，且在连通分支上诱导出双射。

证明.连续性显然。关于连通分支的结论需要用到定理 9.21。□

推论 9.23. 设 A 是一个巴拿赫环，且$\mathrm{M}(A)$ 全不连通。则映射 $\mathrm{M}(A) \to \mathrm{Spec}(A)$ 是单射，且其像恰为闭点。此外，$\mathrm{Spec}(A)$ 的每个连通分支都有唯一的闭点。

证明. 这是推论 9.22的直接推论。 □

我们来估计 Berkovich 谱的大小：

引理 9.24. 设 $\kappa > \aleph_0$ 是一个正则基数，且 A 是URing中的一个 κ-紧致对象。则$\mathrm{M}(A)$的权为 $< \kappa$。

证明。 它是半赋范环 $A =$**整数环**$[T_i \mid i \in I]_{r_i}$ 的一致完备化的商，其中 I 是基数为 $< \kappa$ 且 $r_i \geq 0$ 的集合。因此，它是 $\mathrm{M}(A^{\mathrm{ucpl}})$ 的闭子集。由 (3) 项（命题 9.19），只需注意到 $\mathrm{M}(A)$ 的权为 $< \kappa$，但这由定义以及 A的基数为 $< \kappa$ 得出，因为 $\prod_{i\in I}[0,r_i]$ 的权为 $< \kappa$。 □

我们仅对 Banach 环使用如下记号：

定义 9.25。 设 A 为巴拿赫环，且 $x \in \mathrm{M}(A)$。（完备）剩余域 $K(x)$ 是 $\ker|-|_x$ 处剩余域的完备化，其中 $|-|_x$ 是对应于 x的乘法半范数。

9.3. **（严格的）全不连通空间**。我们首先回顾如下内容：

引理 9.26. 设 K 是一个非离散巴拿赫域。其可分闭包的完备化是代数闭的。

证明。 阿基米德情形是空泛的。非阿基米德情形由 [15, 命题 3.4.1.3 和 3.4.1.6] 得出。□

定义 9.27 (Scholze)。 称一致巴拿赫环 全不连通，若其底层空间全不连通且所有剩余域均为非离散域。若其剩余域进一步均为可分闭域（因而由引理 9.26 可知也是代数闭域），则称其为严格全不连通。我们将由这类对象分别张成的 TDis 和 STDis 记为 URing 的全子范畴。

我们回顾通常的代数几何中的以下内容：

定义 9.28. 设 A 是全不连通的。对于 $x \in \mathrm{M}(A) \subset \mathrm{Spec}(A)$ （见推论 9.23），我们考虑未完备化的剩余域 $\kappa(x)$，它正是 $\ker|-|_x$ 处的 Zariski 剩余域。[15]接着，我们将其局部环 A_x 定义为它的 Zariski 局部环。

[15]对于一般情形 A 和 $x \in \mathrm{M}(A)$，这并不能 恢复伯科维奇几何中未完备剩余域的定义。
几何。O我们的全不连通性假设确保这里满足这一点。

命题 9.29。 在定义*9.28*的情形下，局部环 A_x 是亨泽尔的 .

证明。 只需证明 $A_x[T]/P$ 对于任意首一多项式 P 都是局部环的有限乘积。通过扩张到更大的基底，我们假设 P 定义在 A上。取 $r \gg 0$ 使得 $A[T]_r/P$根据引理 9.13 是巴拿赫的。由于 $\mathrm{M}(A[T]_r/P) \to \mathrm{M}(A)$ 具有有限纤维， $A[T]_r/P$的谱全不连通。于是再次根据推论 9.23 ， $A_x[T]/P$ 成为 $\mathrm{M}(A[T]_r/P)$ 中位于 x上方的点处局部环的乘积。 □

引理 9.30。 设 A 是一个全不连通的空间。则存在一个态射 **整数环**$\{T, T^{-1}\}_{s,\ 1/r} \to A$其中某个 $0 < r \leq s < 1$。

证明。 我们在局部进行处理。因此有 $A_x \to \kappa(x) \to K(x)$。如果完备化是非离散的，那么 $\kappa(x)$ 也非离散。因此，存在一个一致化参数。于是可以将它及其逆元扩张到元素 π 和 $\pi^{-1} \in A$。

由此，我们得到一个元素 $\pi \in A$ ，使得其范数可经由 (0，1) 因子分解 $\subset [0, \infty]$。我们选择一个包含其像的子集 $[r, s]$ ，所需结论便随之成立。□

我们记录一些关于全不连通空间上的有限 étale 映射的事实：

命题 9.31。 设 A 是一个全不连通空间，且 $x \in A$ 是一个点。考虑一个有限可分扩张 $L(x)$ 上的 $K(x)$。那么存在一个有限 *étale* 映射 $A \to B$ （参见引理 *9.32*），它在谱上诱导一个同胚，使得 $L(x)$ 是沿着 B 的基变换 $A \to K(x)$。

我们首先确认，全不连通空间上的有限 étale 代数具有唯一的全不连通结构：

引理 9.32。 设 A 是一个全不连通空间。遗忘函子 $\mathsf{TDis}^{A/} \to \mathsf{Ring}^{A/}$ 在将目标限制为有限 *étale* 代数的全子范畴时，是一个范畴等价。

在下面的证明中，我们看到了范数的一个显式公式：

证明。 这里我们要证明，任意有限 étale 代数 B 在 A 上都唯一地具有一个全不连通空间的结构，使得 $A \to B$ 是全不连通空间之间的态射；所需的等价由证明得出。

我们首先考虑非离散巴拿赫域 $A \to B$的有限可分扩张。阿基米德情形显然成立。非阿基米德情形由 [15, 定理 3.2.4.2] 得出。由唯一性可知， B 上的范数必定由 $|\mathrm{Nm}^{B/A}(-)|^{1/d}$ 给出，其中 $\mathrm{Nm}^{B/A}$ 是范数映射$B \to A$ ， 而 d 是次数。

回到一般情形。对于 $x \in \mathrm{M}(A)$，我们将 $B(x)$ 记作代数张量积 $K(x) \otimes_A B$。这是 $K(x)$ 的有限个有限可分扩张的有限乘积，因此根据上述论证，它具有唯一的范数，使得 $K(x) \to B(x)$ 是一致巴拿赫环之间的态射。 B 上的范数必须是谱范数，因此唯一可能的候选是将 $b \in B$ 映射到 $\sup_{x \in \mathrm{M}(A)} |b|_x$ 的映射，其中我们用 $|-|_x$ 表示 $B(x)$上的范数。问题在于这个上确界是否存在；但由于它等于 $|\mathrm{Nm}^{B/A}(-)|^{1/d}$，其中 d 是次数（作为局部常值函数），所以定义良好。根据上确界的描述，显然这个函数使 B 具有全不连通空间的结构。□

引理 9.33。 设 $\kappa \to K$ 是赋范域 κ的完备化态射。那么， K 的任意有限可分扩张都可提升为 κ的有限可分扩张。

证明。 在阿基米德情形下，我们只需考虑 $K = \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ ，所需结果显然成立。非阿基米德情形由 [15, 命题 3.4.2.5] 得出。□

命题的证明*9.31*。 我们考虑映射 $A_x \to \kappa(x) \to K(x)$。根据命题 9.29和引理 9.33，有限 étale 代数 $B(x)$ 可提升为 A_x上的有限 étale 代数，因而可提升为 B' 上的有限 étale 代数 $A[e^{-1}]$ ，它对某个幂等元 e 诱导谱之间的同胚，且该幂等元在 $K(x)$中变为可逆元。于是 $B' \times A/e$ 就是所需的 A-代数。□

我们引入一类全不连通空间：

定义 9.34. 如果一个*light* 对象在 URing 中是 $\aleph_1$-紧致的，我们就称其为（严格的）全不连通对象。相应的全子范畴记为 $\mathrm{TDis}^{\mathrm{lgt}}$ 和 $\mathrm{STDis}^{\mathrm{lgt}}$ 。

下面的界限在后文中很重要：

命题 9.35。 轻全不连通空间上的有限 *étale* 代数只有可数多个同构类。

证明。 根据引理 9.32，问题可归约到代数情形。每个有限 étale 代数 B确定一个态射 $\mathrm{M}(B) \to \mathrm{M}(A)$，并且可以将 A 划分为有限多个分支，使得 B 在每个分支上都是有限秩自由模。此外，它是若干单生成元代数的有限乘积。因此，根据引理 9.24，只需证明形如 A 的 étale $A[T]/(T^n + \cdots + a_0)$-代数只有可数多个同构类。

我们将其视为具有由范数诱导的度量的拓扑空间。由于它 is $\aleph_1$-compact 作为一致巴拿赫环， A 含有一个可数稠密子集。因此，它是林德勒夫的 f.

我们考虑一个可分多项式 $P = T^n + \cdots + a_0$。我们希望在次数为 n 的首一多项式空间中，找到 P 的一个邻域（该空间同构于 A^n，且是林德勒夫的），使得当 Q 包含于此邻域时，$A[T]/P \simeq A[T]/Q$。为了构造这样的同构，我们需要找到一个足够接近 T 的元素 $\alpha \in A[T]/P$，使其满足 $Q(\alpha) = 0$；这种接近程度保证该映射是同构。这可以通过牛顿法实现。□

9.4. **弧拓扑。**

定义 9.36 (Scholze)。 URing 上的弧拓扑 $\mathrm{URing}^{\mathrm{op}}$ 是由 Berkovich 谱上的满射以及有限个不交并生成的格罗滕迪克拓扑。由命题 2 的（9.19）可知，这一定义是良定义的。一个弧层叠 [16] 是 $\mathrm{URing}^{\mathrm{op}}$上的一个可访问超层。

例 9.37。 态射 **整数环** $\to$ **整数环**$\{T, T^{-1}\}_{r,\ 1/r}$ 是 $r > 0$ 的弧覆盖。这意味着，对于任意巴拿赫域 K，都存在一个巴拿赫域扩张 $K \to K'$，使得 K' 包含一个满足 $|a| = r$ 的元素 a 。

例 9.38。 对于一致巴拿赫环 a 中的一个元素 A 和 $r \geq 0$，引理 9.20 中给出的环的一致完备化确定了一个弧覆盖。

请注意，严格全不连通空间构成了一个良好的基：

定理 9.39 （Scholze）。 对于任意一致巴拿赫环 A，都存在一个严格全不连通的 B，并带有一个弧覆盖 $A \to B$。

定理 9.40 （Scholze）。 相对于弧拓扑，严格全不连通空间是（超）子典范的。

定义 9.41。 对于一致巴拿赫环 A，我们将对应的弧层叠记为 $\mathrm{Sparc}(A)$。

参见 [52, 定理 3。13] 中关于定理 9.40的证明。由于定理 9.39 的证明很重要，我们在此重述。

注 9.42。 注意，定理 9.39 中给出的第一个证明 [52] 依赖于 [52, 命题 3.11 (i)], ，该命题按原表述是不正确的：固定一个素数 p，考虑 A 由 $\mathbf{Q}_p$ 赋予范数 $|p| = p^{-n}$ 的 $n \geq 1$乘积。于是 $\mathrm{M}(A)$ 确实是全不连通的，但 A 不是解析的。对于 [52, 命题 3.11 (iv)] 也存在类似的反例。

我们使用如下观察：

引理 9.43. 设 A 是一个环，使得 $\operatorname{Spec} A$ 的每个连通分支都存在唯一的闭点，且每个闭点处的局部环都是亨泽尔的。那么存在 A 的有限 *étale* 覆盖的一个滤过余极限 B，使得 B 满足与 A 相同的条件，并且 B 的闭点处的剩余域都是可分闭的。

[16]这在 [52] 中称为“小弧层叠”。我们的弧层叠总是小的。

证明. 设 $\{A_i \mid i \in I\}$ 是 A 的有限 étale 覆盖的同构类的一组代表。取其张量积 $B = \bigotimes_{i\in I} A_i \simeq \varinjlim_{I_0} \bigotimes_{i\in I_0} A_i$，其中 I_0 遍历 I 的有限子集。我们断言，这是所需的 A-代数。

只需验证 B 在极大理想处的剩余域是可分闭的。考虑一个闭点 $y \in \operatorname{Spec} B$。它确定了有限子集 $I_0 \subset I$ 对应的一族相容闭点 $x_{I_0} \in \operatorname{Spec}\left(\bigotimes_{i\in I_0} A_i\right)$。

假设 $\kappa(y)$ 不是可分闭的。那么我们可以找到 $\kappa(x_\emptyset)$ 的一个有限可分扩张 k'，使得不存在在 $\kappa(x_\emptyset)$ 上的同态 $k' \to \kappa(y)$。接着，我们将其扩张为 A 上的一个有限 étale 覆盖 A'。考虑满足 $A_i \simeq A'$ 的 $i \in I$。由于 $A_i \otimes_A \kappa(x_\emptyset) \simeq k'$，我们有$k' \simeq \kappa(x_{\{i\}})$，这与 k' 的选取矛盾。□

注 9.44。引理 A 中假设的拓扑部分 9.43 等价于如下条件：A 中的任意元素都可以写成一个幂等元与一个可逆元之和。这个条件主要是在结合环的语境下提出的，称为 **干净**，最初由 Nicholson [46] 引入。与局部情形一样，A 满足引理 9.43 的全部假设，当且仅当其上的每个有限 étale 代数都是 A 干净的。

注 9.45. 在引理 9.43中，与局部情形不同，我们需要添加闭点：考虑由函数 $\mathscr{C}(\mathbf{N} \cup \{\infty\}; \mathbf{C})$ 组成的子环 f，其中 $f(\infty) \in \mathbf{R}$。

例 9.46. 设 A 是全不连通的。那么，A 的底层环满足引理 9.43的假设；这由推论 9.23 和命题 9.29可得。

定理 *9.39*的证明。首先，通过沿 **整数环** $\to \mathbf{Z}\{T, T^{-1}\}_{1/2\text{进行基变换},\ 2}$(参见例 9.37)，我们可以假设 A 具有非离散剩余域。

然后，对每个 6.5 中所述的康托尔集覆盖 $[0, |a|]$，a我们可以将 A替换为一个全不连通的对象。根据例 9.38，它是一个弧覆盖。

根据例 9.46，我们可以对 A 应用引理 9.43，得到一个有限 étale 覆盖的滤过族。根据引理 9.32，我们将它们视为 上的全不连通有限 étale 覆盖滤过族。我们在 $\mathsf{TDis}^{A/}$ 中取余极限，从而得到所需的严格全不连通 B。□

我们有如下轻变体：

命题 9.47。 对于一个 $\aleph_1$-紧致一致巴拿赫环 A，存在一个带有弧覆盖 $A \to B$的轻严格全不连通 B。

证明。我们验证定理 9.39 证明中的每一步都可以调整为保持轻性。第一步是成立的，因为 **整数环** $\{T, T^{-1}\}_{1/2,\ 2}$是轻的。

对于第二步，根据引理 9.24，我们可以选取一个可数序列 $a_0, \ldots$ 使得$\mathrm{M}(A) \to \prod_{n=0}^{\infty}[0, |a_n|]$ 是单射。随后我们可以用同样的过程得到一个轻的对象。

对于最后一步，根据命题9.35，引理 I 的证明中的指标集 9.43 是可数的，因此所得的环是轻的。□

我们注意到以下直接推论：

推论 9.48. 预层 $\mathsf{URing}^{\aleph_1} \to \mathsf{Ani}$ 是弧（超）层，当且仅当它是从 $\mathsf{STDis}_{\aleph_1} \to \mathsf{Ani}$ 经右 *Kan* 延拓而来；并且它在该范畴中是弧（超）层。特别地，我们有以下等价：

$$\mathrm{Shv}((\mathsf{STDis}_{\mathrm{lgt}})^{\mathrm{op}}) \simeq \mathrm{Shv}((\mathsf{URing}_{\aleph_1})^{\mathrm{op}}), \qquad \mathrm{Shv}^{\mathrm{hyp}}((\mathsf{STDis}_{\mathrm{lgt}})^{\mathrm{op}}) \simeq \mathrm{Shv}^{\mathrm{hyp}}((\mathsf{URing}_{\aleph_1})^{\mathrm{op}}),$$

两者都由右 *Kan* 延拓给出。

9.5. **拓扑有限表示。** 这里我们考虑以下内容：

定义 9.49。 设 A 是一个一致巴拿赫环。若一致巴拿赫环 B 是 A拓扑有限表示的，则称其为 A上的一致巴拿赫环；如果它是 $A\{T_1, \ldots, T_n\}_{r_1,\ldots,r_n}$模一个有限生成理想的商，则称其为 A拓扑有限表示的。当 A =**整数环**时，我们简称 B 是拓扑有限表示的。我们将 $\mathsf{URing}^{\mathrm{tfp}}$ 记为 URing 的全子范畴。等价地，这是包含 **整数环**$\{T\}_r$ （$r > 0$）且对有限余极限封闭的最小全子范畴。

我们证明这类环的一个有限性结论。首先，关于剩余域，我们注意到以下事实：

命题 9.50。 设 O 是一个全虚数环。对于 **整数环**$\{T_1,\dots,T_n\}_{r_1、\dots\dots、r_n}$ 的任意完备剩余域 K，有维数$_{\mathbf{Z}}(\mathrm{Sparc}(K)) \leq n+3$。

证明。 我们只需考虑 $\mathbf{Q}(T_1,\ \dots\dots,\ T_n)$ 或 $\mathbf{F}_p(T_1,\ \dots\dots,\ T_n)$ 的有限扩张；也就是说，当K 是 κ 的完备化时，绝对伽罗瓦群 G_K 嵌入到 G_κ中。现在我们可以使用 étale 上同调的结果（但请参见注 6.15）。根据 [57, 标签 0F0S]，我们归结为 $n=0$ 的情形，而这是经典结果。 □

我们稍后还需要以下结果；例如，证明见 [37,定理 7.3。7]：

命题 9.51. 设 O 为数环。对任意 $r_1,\ \dots\dots,\ r_n>0$，$O\{T_1,\dots,T_n\}_{r_1,\dots,r_n}$的覆盖维数为 $2n+1$。

注 9.52. 当我们通过分别界定拓扑有限表示的一致巴拿赫环的拓扑维数与剩余域的上同调维数来界定其 arc 上同调维数（见 [52, 注 4.11]）时，得到的是一个次优界。通过更细致的论证，可以证明，例如，对全虚数环 O，Sparc($O\{T_1,\dots,T_n\}_{r_1,\dots,r_n}$) 对任意 $r_1,\ \dots\dots,\ r_n>0$ 的上同调维数为 $2n+4$。

我们稍后将使用以下结果，它已在 [47,定理 9.17 与 10.1] 中得到证明：

定理 9.53 (Poineau)。 对于 M(**整数环**) 上 ***Berkovich*** 解析仿射 n-空间中的点 y，考虑局部环 $\mathscr{O}_y$。它是维数为 $\dim(\mathscr{O}_{\mathbf{Z},x})+n$ 的优良诺特局部环，其中 x 是 y 在 M(**整数环**) 中的像。

另见 [37, 定理 8.6.10] 所述的整体诺特性结果，本文并不需要该结果。

10. Berkovich 2-动机

在本节中，我们证明定理 D，它刻画2$\mathrm{D}_{\mathrm{mot}}$(**整数环**)，其刻画借助配备绝对值的环叠。在本节中，我们将2-动机(**整数环**) 记为定理D的泛目标。

在第 10.1 节中，我们回顾 $\mathrm{D}_{\mathrm{mot}}$。在第 10.3 节中，我们考虑半赋范环在 2-动机(**整数环**) 中的类。在第 10.2 与10.4 节中，我们证明若干重要的下降结果。在第 10.5 节中，我们完成定理D的证明。

10.1. **Berkovich 动机谱概述**。 在 [52], 中，Scholze 考虑了整数系数。这里，我们考虑具有球面系数的同一范畴。

定义 10.1。 设 X 是 $\mathrm{STDis}^{\mathrm{op}}$ 上保持有限积的可达预层。 X 上的有限型弧层 是来自另一个此类预层的态射 $Y\to X$，使得对于余滤极限 $T=\lim_{\longleftarrow i} T_i$，下图

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_i Y(T_i) & \longrightarrow & Y(T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varinjlim_i X(T_i) & \longrightarrow & X(T) \end{array}$$

是一个拉回。等价地，它是 $(\mathrm{STDis}^{\mathrm{op}})_{/X}$ 上的有限型弧层。

定义 10.2。 设 X 是一个弧层叠。我们定义

$$\mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(X;\mathbf{S}) = \mathrm{Shv}_{\mathrm{fin}}(X;\mathsf{Sp})_{\mathbb{D}^1}[(\Sigma^\infty\mathbb{P}^1)^{\otimes -1}].$$

首先，$\mathrm{Shv}_{\mathrm{fin}}(X;\mathsf{Sp})$ 是 $(\mathrm{STDis}^{\mathrm{op}})_{/X}$ 上取值于 Sp 的有限型弧层范畴。然后我们限制到 $\mathbb{D}^1$-不变层。这意味着，对于任意一致巴拿赫环 A，态射$A\to A\{T\}_1$ 诱导出一个等价。根据有限型层的 [52, 推论 5.4], ，只需对 $C\to C\{T\}_1$ 检验这一点，其中 C 是一个非离散代数闭巴拿赫域（但仍然

注意， $C\{T\}_1$ 并非全不连通）。我们省略**S** ，在不会引起混淆时简写为 $\mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(X)$。

以下关于 $\mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(-;\mathbf{Z})$ 的结论已在 [52, 定理 92] (另见 [52, 推论 102])。同样的证明也适用于球形情形：

定理 10.3 (Scholze)。 设 $A \to B$ 是一致巴拿赫环之间的一个映射，使得 $Y = \mathrm{Sparc}(B)$嵌入到 $X = \mathrm{Sparc}(A)$ 上的一个有限维球中，并且 $\sup_{x\in \mathrm{M}(A)}$ 维数 $_{\mathbf{Z}}(Y_x)$ 有限。则函子 $f^*\colon \mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(A) \to \mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(B)$ 存在一个 $\mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(A)$-线性右伴随 f_*，且与基变换相容。

注 10.4。 定理 10.3 证明中一个微妙之处是 $\mathbb{P}^1_X \to X$ 的投影公式；当 $X = \mathrm{Sparc}(C)$ 定义在非离散代数闭巴拿赫域 C上时，情况亦是如此。这个结论也可以利用定理 3.4 推导得出。

因此，我们可以应用定理 2.2 得到以下结论：

推论 10.5。 松对称幺半函子 $\mathrm{D}_{\mathrm{mot}}\colon \mathsf{URing}^{\mathrm{tfp}} \to \mathsf{Pr}_{\mathrm{st}}$ （唯一地）延拓到 $2\mathrm{Span}_{\mathrm{all;all,\ iso}}((\mathsf{URing}^{\mathrm{tfp}})^{\mathrm{op}})$。

定义 10.6。 我们将 $2\mathrm{D}_{\mathrm{mot}}$(**整数环**) 记为函子 $2\mathsf{Span}((\mathsf{URing}^{\mathrm{tfp}})^{\mathrm{op}}) \to \mathsf{Pr}_{\mathrm{st}}$的核的可呈 2-范畴，它是推论 10.5中的函子的限制。

10.2. **圆盘不变性**。 我们将各种圆盘不变性的概念联系起来：

命题 10.7。 考虑一个稳定、可呈的对称幺半2-范畴 $\mathcal{C}$ 以及一个稳定的弱光滑环叠 R，其带有绝对值 $N\colon R \to [0,\infty)$ 在 $\mathcal{C}$上。假设 $\mathbb{A}^1 = R$ 和$\mathbb{B}^1 = N^{-1}([0,1))$ 是同调平凡的。

(1) 则 $\mathbb{B}^1_r = N^{-1}([0,r))$ 对任意 $r > 0$ 是 *suave* 且同调平凡的。*(2)* 则 $\mathbb{D}^1_r = N^{-1}([0,r])$ 对任意 $r \geq 0$ 是真且上同调平凡的 .

证明。 由定理B，环叠的规定经由 2SH(**整数环**)。特别地，$\mathbb{P}^1 = R \amalg_{R^\times} R$ 是真的。

我们首先证明 (2) 对于 $r = 1$。因此，扩展范数映射 $\widetilde{N}\colon \mathbb{P}^1 = R \amalg_{R^\times} R \to [0,\infty]$ 是真的。因此， $\mathbb{D}^1 = N^{-1}([0,1]) = \widetilde{N}^{-1}([0,1])$是真的。其上同调可由假设以及由 $\mathbb{B}^1 \to \mathbb{P}^1 \leftarrow \mathbb{D}^1$ 诱导的粘合计算，该粘合是$\lrcorner[0,1) \to [0,\infty] \leftarrow [1,\infty]$ 沿 N的基变换。

我们现在证明一般情形下的（2） $r \geq 0$。其真性由同样的论证得出。为计算其上同调，我们可以使用乘法映射 $\mathbb{D}^1 \times \mathbb{D}^1_r \to \mathbb{D}^1_r$，它给出一个$\mathbb{D}^1$-同伦，介于恒等映射在 $\mathbb{D}^1_r$ 上与常值映射0之间。

最后，我们证明（1）。首先， $\mathbb{B}^1_r$ 是 suave 的，因为 $[0,r) \to [0,\infty)$ 是 suave 的。为计算其同调，如同前面的论证，我们将 $\mathbb{B}^1_r$ 实现为 $\mathbb{D}^1_{1/r}$ 在 $\mathbb{P}^1$中的补集。现在该结果由（2）得出。□

这证明了在相差下降的意义下伪一致化元的存在性：

推论 10.8. 在命题*10.7*的情形下，态射 $N^{-1}(\{r\}) \to *$ 对任意 $r > 0$都是一个覆盖。

证明。我们知道 $\mathbb{P}^1$ 是真的，因此扩展范数映射 $\widetilde{N}$ 也是真的。这意味着 $f\colon N^{-1}(\{r\}) \to *$ 是真的，从而由定理 5.14，只需证明 $f_*\mathbf{1} \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1})$满足下降。我们通过将其视为 $\mathbb{P}^1$中$N^{-1}([0,r]) \cap \widetilde{N}^{-1}([r,\infty])$ 的交来计算它。由 (2)，我们可以将其计算为 $\mathbf{1} \oplus \mathbf{1}(-1)[-1]$，因此它具有一个截面，并且由引理 5.12，它满足下降。□

注 10.9。 推论10.8 的一些较弱变体在不假设圆盘不变性的情况下仍然成立：给定一个带有绝对值的稳定同调平凡弱光滑环叠 N，可以证明 $N^{-1}((r,\ s)) \to *$是任意 $0 < r < s$的一个覆盖。不过， $\mathbb{A}^1$-不变性严格弱于 $\mathbb{B}^1$-不变性。

注 10.10. 至少在证明了定理 D之后，经过额外的工作，可以证明范数映射 $N\colon \mathbb{A}^1 \to [0,\infty)$ 是 2-动机(**整数环**)上的一个覆盖。

10.3. **2-动机的半赋范环。** 根据定理 C，我们得到一个态射 $2\mathrm{SH}_{\text{ét}}(\textbf{整数环}) \to$2-动机(**整数环**)。因此，我们为每个环得到如下类别：

定义 10.11. 对于环 A，我们将 $[A]_{\mathrm{alg}} \in \mathrm{CAlg}(2\mathrm{Mot}(\textbf{整数环}))$ 记作 $[A] \in \mathrm{CAlg}(2\mathrm{SH}_{\text{ét}}(\textbf{整数环}))$ 的像。

在我们的情形下，可以如下定义每个半赋范环的动机：

定义 10.12. 对于半赋范环 A，我们考虑以下推出：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Shv}([0,\infty]^{\pi_0(A)}) \otimes \mathbf{1} & \longrightarrow & [A]_{\mathrm{alg}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Shv}(\mathrm{M}(A)) \otimes \mathbf{1} & \longrightarrow & [A] \end{array}$$

在 $\mathrm{CAlg}(2\mathrm{Mot}(\textbf{整数环}))$中。由于 $[A]_{\mathrm{alg}} \to [A]$ 是一个满态射，根据下文的引理 10.13 ，这可以组合成一个函子 $[-]\colon \mathsf{SNRing} \to \mathrm{CAlg}(2\mathrm{Mot}(\textbf{整数环}))$。

引理 10.13. 设 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个函子。对于 $C \in \mathcal{C}$，我们有一个单态射 $F'_C \to F(C)$。假设对于任意 $C \to C'$，复合 $F'_C \to F(C) \to F(C')$ 都经由 $F'_{C'}$ 分解。那么这一族唯一地组装成一个函子 $F'\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 和一个自然变换 $F' \to F$。

证明。 根据 Yoneda，我们可以设 $\mathcal{D} = \mathrm{Ani}$：更确切地说，我们考虑由 $(C, D) \mapsto \mathrm{Map}(D, F(C))$ 和 $G'_{C,D} = \mathrm{Map}(D, F'_C)$ 给出的 $G\colon \mathcal{C} \times \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ani}$。在此情形下，我们可以将 $F'_0\colon \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ 构造为 $\pi_0 F\colon \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ 的子函子。函子 $F' = F'_0 \times_{\pi_0(F)} F$ 满足所需的性质。唯一性也由该构造得出。□

命题 10.14。 函子 $[-]\colon \mathsf{SNRing} \to \mathrm{CAlg}(2\mathrm{Mot}(\textbf{整数环}))$ 经过 $\mathsf{SNRing}^{\heartsuit}$ 分解，并保持余极限。

证明。 第一个断言直接由定义得出。我们证明关于余极限的第二个断言。对于滤过余极限，这由定义以及命题1的9.19（）直接得出。

我们首先证明它保持有限余积。对于零元情形，我们需要证明 $\mathrm{Shv}([0,\infty]^{\mathbf{Z}}) \to \mathrm{End}_{2\mathrm{Mot}(\mathbf{Z})}(\mathbf{1})$ 经过 $\mathrm{Shv}(\mathrm{M}(\textbf{整数环}))$ 分解。为此，我们回顾一下，$\mathrm{M}(\textbf{整数环}) \subset \prod_n [0,\infty]$ 由乘法半范数公理刻画。因此，这由绝对半赋值的定义得出。同样，我们可以看到它保持二元余积。

接着，我们证明它保持推出 $A' \otimes_A B$，从而完成证明。根据 $A' \otimes_A B = A \otimes_{A \otimes A} (A' \otimes B)$，只需处理 $A \to A'$ 为满射的情形。在这种情况下，$\mathrm{M}(A') \to \mathrm{M}(A)$ 是对角包含 $[0,\infty]^{A'} \to [0,\infty]^{A}$ 的拉回，因此 $\mathrm{M}(A' \otimes_A B) \simeq \mathrm{M}(A') \otimes_{\mathrm{M}(A)} \mathrm{M}(B)$。由此可得所需结论。□

下面来看几个例子：

例10.15。 我们描述这一构造与范数N之间的直接关系：$R \to [0,\infty)$。我们声称，对于 $r \geq 0$，$[\textbf{整数环}[T]_r]$ 对应于 $N^{-1}([0,r])$。为此，我们需要证明，$[\textbf{整数环}[T]_r]$ 在 $[\textbf{整数环}[T]]_{\mathrm{alg}} = [R]$ 中仅由 T切出。这可由与命题 10.14证明类似的论证得出；所有不等式都由 $|T| \leq r$生成。类似地，对于 $r \leq s$，$[\textbf{整数环}[T, T^{-1}]_{s,\ 1/r}]$ 对应于 $N^{-1}([r,s])$。

注 10.16。 我们还可以通过例 210.15来给出半赋范环的 2-动机的另一种定义。具体而言，我们定义 $\mathsf{SNPol} \to 2\mathrm{Mot}(\textbf{整数环})$，将 $\textbf{整数环}[T_1, \ldots, T_n]_{r_1,\ldots,r_n}$ 映射为$N^{-1}([0,r_1]) \times \cdots \times N^{-1}([0,r_n])$。然后可以验证，命题 9.5中描述的关系均成立，因此这扩展为一个函子 $\mathsf{SNRing} \to 2\mathrm{Mot}(\textbf{整数环})$。根据命题 10.14，此定义与我们在此处给出的定义一致。

例10.17。 设 l 是一个素数。考虑**整数环**$[1/l]_1$ 为具有 $|1/l| \leq 1$的泛对象。其动机就是沿着态射 $\mathrm{Shv}(\mathrm{M}(\textbf{整数环})) \otimes \mathbf{1} \to \mathrm{Shv}(\mathrm{M}(\textbf{整数环}[1/l]_1)) \otimes \mathbf{1}$的**1** 的基变换。

Exa例10.18。 设 $A \to A/I$ 是（静态）半范数环的一个商。在这种情况下 ，

$$\begin{array}{ccc} [A]_{\mathrm{alg}} & \longrightarrow & [A/I]_{\mathrm{alg}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ [A] & \longrightarrow & [A/I] \end{array}$$

是 交换代数(2-动机(**整数环**))中的推出。由于二者都与余极限交换，只需对**整数环**$[T]_r \to$ **整数环** 证明 $r \geq 0$即可，这由例 10.15得出。

命题 10.19。 对于任意半赋范环 A，其对应的栈 $[A]$是静态且真的。

证明。根据命题 10.14，不妨设 A 是静态的。我们将其写成形如 $\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]_{r_1, \ldots, r_n}/(P_1, \ldots, P_m)$ 的代数的滤过余极限，从而归约到此类环的情形。此外，根据例 10.18，我们设 $m = 0$。现在问题归约为 $\mathbb{Z}[T]_r$的情形。根据例10.15，对应的栈为 $N^{-1}([0, r])$。现在考虑扩展范数映射 $\widetilde{N}\colon \mathbb{P}^1 \to [0, \infty]$，它由粘合 N 和 N^{-1}得到。由于 $\mathbb{P}^1$ 在 2SH(Z) 上已经是静态且真的，所需结论即得。□

注意，在这一过程中，一致完备化是自动完成的：

定理10.20。 定义 SNRing $\to$ 2动机(**整数环**) 中的函子 *10.12*可经由一致完备化函子分解 SNRing $\to$URing。

证明。我们证明，该函子可经由赋范环、巴拿赫环以及随后的一致巴拿赫环范畴分解。为证明这一点，只需说明命题 9.9 中的每个态射都被映为一个等价。

我们考虑（1）；也就是说，我们希望证明 **整数环**$[T]_0 \to$ **整数环** 被映为一个等价。这由例 10.15得出。

然后我们考虑（2）。固定 $r \gg 0$。情况是 A 为 $\mathbb{Z}[T_1, \ldots]_{r,\ldots}$，其中 $|T_m - T_{m+k}| \leq 1/m$ 对于 $m \geq 1$ 和 $k \geq 1$，而 B 是 $A[U]_r$，其中 $|U - T_m| \leq 1/m$ 对于 $m \geq 1$。我们希望证明 $[A] \to [B]$ 是一个等价。根据命题 10.19 并考虑其对角线（参见推论 8.29 的证明），只需证明映射 $[A] \to [B]$ 满足下降。根据定理 5.14，这归结为判断 $f_*\mathbf{1} \in \mathrm{Hom}^{2\mathrm{Mot}(\mathbb{Z})}(\mathbf{1}, [A])$ 是否满足下降。根据命题 5.17，只需证明它是可下降的。我们先将 $A \to B$ 写成f_n的序列余极限：$A_n \to B_n$对于 $n \geq 0$，只考虑 $T_1, \ldots, T_n$。但该映射 $A_n \to B_n$有一个由 $U \mapsto T_n$给出的截面，因此 $f_{n,*}\mathbf{1} \in \mathrm{Hom}^{2\mathrm{Mot}(\mathbb{Z})}(\mathbf{1}, [A_n])$ 是可下降的。因此，由引理 5.23 可得所需结果。

对于（3），我们无需证明。 □

例 10.21. 设 $A \to B$ 为全不连通空间的有限 étale 态射。则该方块

$$\begin{array}{ccc} [A]_{\mathrm{alg}} & \longrightarrow & [B]_{\mathrm{alg}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ [A] & \longrightarrow & [B] \end{array}$$

是交换代数(2-动机(**整数环**))中的一个推出。

10.4. **Arc 下降**。 我们证明 2-动机(**整数环**)中的两个下降结果。

定理 10.22. 设 $f\colon A \to B$ 为 $\mathrm{STDis}^{\mathrm{lgt}}$ 中的一个弧覆盖。则 $f^*\colon [A] \to [B]$ 在 2-动机(**整数环**) 中满足下降。换言之，函子 $\mathrm{STDis}_{\mathrm{lgt}} \to$ 2Pr 由 $A \mapsto$ 2动机(A) 给出，是一个 *Arc* 层。

注 10.23。 根据定理 10.22，考虑紧豪斯多夫空间上的一致巴拿赫环 $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$ X，由注 6.10 可知，大小假设不能省略；由注6.9 可知，不能改用 $\mathrm{UBan}^{\aleph_1}$。下文推论 10.25 将说明，在拓扑有限表示假设下，下降仍然成立。

证明。 由命题 10.19，该态射是 prim，因此根据定理5.14，只需证明 $f_*\mathbf{1} \in \mathrm{Hom}^{2\mathrm{Mot}(\mathbf{Z})}(\mathbf{1}, [A])$ 满足下降。由命题 5.17，只需证明它是可下降的。

根据 [52, 引理 4.8], 我们可以将 B 写成如下滤过余极限：$\varinjlim_i B_i$ 其中的对象是定义在 A 上的一致巴拿赫环，且每个 $A \to B_i$ 都存在一个分裂。根据 $\aleph_1$-紧致性，不妨设该余极限（相差一个直缩）是序列的。因此，所需结果由引理 5.23得出。 □

定理 10.24。 对于 $B = $**整数环**$\{T_1, \dots, T_n\}_{r_1,\dots,r_n}$，存在一个映射，将其映至一个轻的严格全不连通 B''，使得 $f^*\colon [B] \to [B'']$ 满足 2Mot(**整数环**) 中的下降。

为此，我们需要进行一个稍显复杂的构造：

定理 *10.24* 的证明。 我们先将 B 替换为 $B\{U, U^{-1}\}_{1/2,\ 2}$；推论 10.8证明了这种替换的合理性。然后我们考虑 $A = $**整数环**$\{T_1, \dots, T_n, U, U^{-1}\}^{\dagger}_{r_1,\dots,r_n,1/2,2}$，即它的过收敛对应对象。我们有完备化态射 $A \to B$。

接下来我们将 $B \to B'$ 视为命题9.47中构造的映射，其中我们使用$\mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n, U^{\pm}]$ 中的一列元素，以确保过收敛对应对象的存在$A \to A'$。通过这一构造，我们得到一个推出方形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Shv}(\mathrm{M}(B)) \otimes \mathbf{1} & \longrightarrow & \mathrm{Shv}(\mathrm{M}(B')) \otimes \mathbf{1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ [B] & \longrightarrow & [B'] \end{array}$$

在$\mathrm{CAlg}(2\mathrm{Mot}(\mathbf{Z}))$中，因此根据命题9.51 和推论6.7，态射 $[B] \to [B']$满足下降。

注意， A' 满足引理 9.43 的假设。此外， A' 也满足推论 8.4 的假设。由于它在极大点处的局部环是整数环 Z 上 Berkovich-解析仿射 $(n+1)$-空间的局部环，因此我们需要一致地界定此类局部环的上同调维数；这是可行的，但我们这里的论证用到了拓扑幂零单位的存在性。诺特性来自定理 9.53。现在只需一致地界定素数 l 的 l-挠上同调维数。当 l 在 $\mathscr{O}_y$中可逆时，Gabber 的仿射 Lefschetz 定理 [35, Corollaire XV-1.2.4] 给出了 l-挠上同调维数的最优界。因此剩下唯一需要界定的情形是该点位于 Spec Z 的某个闭点之上。为此，我们将其写成整数环 $\mathbf{Z}_p$ 上巴拿赫代数的滤过余极限。然后对每一项，我们可以使用基于 Huber 仿射域比较定理的 [30,Theorem 1.9], ，得到所需的界；该界由解析 étale 上同调的界推出（参见注记 9.52）；这里我们用到了拓扑幂零单位的存在性。

应用引理 9.43，我们因此得到一个态射 $A' \to A''$。由注 8.21，我们得到一个推出方形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Shv}^{\wedge}_{\text{fét}}(A') \otimes \mathbf{1} & \longrightarrow & \mathrm{Shv}^{\wedge}_{\text{fét}}(A'') \otimes \mathbf{1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ [A'] & \longrightarrow & [A''] \end{array}$$

在 $2\mathrm{SH}_{\text{ét}}($**整数环**$)$。在此情形下，由定理 6.18，我们看到 $\mathrm{Shv}^{\wedge}_{\text{fét}}(A') \to \mathrm{Shv}^{\wedge}_{\text{fét}}(A'')$ 相对于 $\mathsf{Pr}_{\mathrm{st}}$ 满足下降。因此，态射 $[A'] \to [A'']$ 相对于 $2\mathrm{SH}_{\text{ét}}($**整数环**$)$ 满足下降，从而态射 $[A']_{\mathrm{alg}} \to [A'']_{\mathrm{alg}}$ 满足下降。

现在我们沿着 $A' \to A''$ 进行基变换， $A' \to B'$ 从而得到一个全不连通的 B''。根据引理9.32 以及 A'' 是 A'上的有限 étale 代数的滤过余极限这一事实，这是可行的。因此我们得到一个方形

$$\begin{array}{ccc} [A']_{\mathrm{alg}} & \longrightarrow & [A'']_{\mathrm{alg}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ [B'] & \longrightarrow & [B''], \end{array}$$

这是一个 根据例 10.21，这是一个推出方形。因此，态射 $[B] \to [B'']$ 满足下降 t.

现在我们还需要证明 B'' 是轻严格全不连通的。我们首先证明它是轻全不连通的。由构造可知， B' 是轻全不连通的，正如命题 9.47 的证明中那样。为了对 B''证明同样的结论，我们需要证明 A'' 是 A'上有限 étale 代数的序列余极限。由构造可知，我们必须看到，在同构意义下， A'上只有可数多个有限 étale 代数。如同命题 9.35 的论证，我们需要证明：对于 A'的任意直和项 A'_0 ，形如 $A'_0[T]/(T^n + \cdots + a_0)$的有限 étale 代数只有可数多个。由于 A'_0 是整数环上 Berkovich 解析仿射$(n+1)$-空间中由有限多个不等式割出的子空间上过收敛代数的有限积的序列余极限，因此只需对这类代数证明同样的性质。它们每一个都是整数环上拓扑有限型 Banach 环的序列余极限。对于这类环，所需性质已在命题 9.35 的证明中得到验证。因此，剩下只需证明 B'' 的所有完备剩余域都是代数闭的，而这可以在 M(B') 上逐纤维地观察到。□

结合定理 10.22和10.24，我们得到以下结论：

推论 10.25。设 $A \to B$ 是 $\mathsf{URing}^{\mathrm{tfp}}$ 中的一个弧覆盖。则 $[A] \to [B]$ 满足$2\mathrm{Mot}(\textbf{整数环})$中的下降。

证明。由定理 10.22，只需证明任意 $A \in \mathsf{URing}^{\mathrm{tfp}}$ 都存在一个态射 $A \to A'$使得 A' 是轻严格全不连通的。我们可以取定理 10.24中的覆盖，并对其按定义理想取商。□

10.5. Berkovich 2-动机与赋范环叠。我们证明定理 D。首先引入以下几何对象范畴：我们用 $\mathsf{Stk}^{\vee}_{\mathrm{lgt}}$ 表示 $(\mathsf{STDis}^{\mathrm{lgt}})^{\mathrm{op}}$ 上弧层的范畴；这一记号表示不施加超下降条件。我们用 Var 表示 $(\mathsf{URing}^{\mathrm{tfp}})^{\mathrm{op}}$ 在 $\mathsf{Stk}^{\vee}_{\mathrm{lgt}}$ 中的本质像。注意，$2\mathrm{D}_{\mathrm{mot}}$(整数环) 也是 $\mathrm{D}_{\mathrm{mot}}$: Span(Var) $\to \mathrm{Pr}_{\mathrm{st}}$ 的核的可呈范畴。

在第 10.3 节中，我们构造了一个对称幺半函子 $\mathsf{SNRing} \to 2\mathrm{Mot}(\textbf{整数环})$。我们首先将其限制到 $\mathsf{STDis}^{\aleph_1}$ 上。其右 Kan 延拓的存在性由 [4, 定理 D], 保证；根据定理 $(\mathsf{Stk}^{\vee}_{\mathrm{lgt}})^{\mathrm{op}} \to 2\mathrm{Mot}(\textbf{整数环})$ ，该延拓确定了一个对称幺半函子 10.22。

我们从以下内容开始：

命题10.26。 上文构造的态射 $(\mathsf{Stk}^{\vee}_{\mathrm{lgt}})^{\mathrm{op}} \to 2\mathrm{Mot}(\textbf{整数环})$ 将一个具有 $\mathbb{D}^1$-不变性的有限型态射映为弱*suave*态射。

我们回顾以下结果，它在多个地方都很有用：

引理 10.27。 设 F 是一个定义在 A上的有限弧叠。那么，对于严格全不连通的 A 上任意一致巴拿赫环的滤过余极限 $B = \varinjlim_i B_i$ ，若其弧上同调维数一致有界，则态射

$$\varinjlim_i \mathrm{Map}(\mathrm{Sparc}(B_i), F) \to \mathrm{Map}(\mathrm{Sparc}(B), F)$$

是一个等价。

证明。 这是 [52, 注 4.11] 的不稳定类比：当 F 是截断的时，结论显而易见；参见 [52, 引理 4.7]。一般而言，我们写作 $F = \varprojlim_n \tau_{\leq n} F$，并注意到对于每个 k,

$$\left(\pi_k \mathrm{Map}(\mathrm{Sparc}(B_i), \tau_{\leq n} F)\right)_n$$

在 i 中一致稳定；这由我们对上同调维数的假设得出。 □

引理 10.28。 设 D 是一个在严格全不连通 A 上拓扑有限表示的一致巴拿赫环。那么对于任意有限型弧层， $B \mapsto F(B \otimes_A D)$ 确定一个有限型弧层。

证明。 这由引理10.27得出。 □

引理 10.29。 任意定义在严格全不连通的 A 之上的静态有限弧叠 F，都是$\mathbb{B}^n_{r,A}$的开子叠的余极限。

证明。 由引理 10.27，我们可以用 $U = \coprod_i U_i$覆盖 F，其中 U_i 是$\mathbb{B}^n_r$的开子叠，A。接着，我们考虑 $U \to F$的 Čech 神经。对于 $m \geq 0$，由于 $U^{\times_F(m+1)} \to U^{\times(m+1)}$是 $F \to F^{\times(m+1)}$的基变换，而后者是有限型单态射，因此我们看到 $U^{\times_F(m+1)}$是$\mathbb{B}^n_r$的开子叠的不交并，A。□

引理 10.30。 设 F 是严格全不连通 A上的有限弧叠。若 F 在非阿基米德轨迹 $|2| \leq 1$上是(-1)-截断的，则它是$\mathrm{Sparc}(A)$的开子叠的余极限。

证明。 我们考虑所有映射到 F的 Sparc(A) 开子叠的余极限 F'。我们希望证明典范态射 $F' \to F$是一个等价。由于 F和 F' 都是有限型的，只需证明对每个 $x \in \mathrm{M}(A)$拉回后该结论成立。由于开子叠可以延拓，我们假设 $A = C$ 是一个代数闭非离散巴拿赫域。当 A 是阿基米德时，F 只是一个 anima。当 A 是非阿基米德时，根据假设， F 本身就是一个开子叠。□

命题的证明 *10.26*。 将目标写成余极限后，我们可以假设它是 $\mathrm{Sparc}(A)$ 其中 A 是严格的全不连通。

对于有限弧叠的任意态射 $G \to G'$，由引理 10.27，它是等价，当且仅当对于 $\mathbb{B}^n_{r,A}$ 的任意开子栈 U，Map(U, G) $\to$ Map(U, G') 是等价。因此，只需证明其 $\mathbb{D}^1$-同伦化 $L_{\mathbb{D}^1}(U)$ 对任何这样的 U 都是弱 suave；根据引理 5.11], , 它是有限型的。此外，将其写成并后，我们可以假设 U 的形式为 $U' + \mathbb{B}^n_\epsilon$

, $\subset \mathbb{A}^n$ 其中 $\mathbb{B}^n$ 的某个开子栈为 U' $_{,A}$ 且有某个 $\epsilon > 0$。

现在固定这样的 U 和 $\epsilon > 0$，以及嵌入 $U \subset \mathbb{A}^n_A$。取一个小的正数 ϵ。考虑 $U_0 = U$ 以及 $U \times U$ 的开子栈 U_1，它由距离为 $< \epsilon$ 的配对组成。取其 1-余骨架，得到 $U_\bullet$。现在， U_k 是 $\mathbb{B}^{n(k+1)}_{r\,A}$, 的开子栈，因此是弱 suave。因此， $F = |U_\bullet|$ 根据与引理 5.11], 类似的论证是有限型的，并且是弱 suave。注意，在非阿基米德轨迹 $|2| \leq 1$ 上，这等价于 U 上 $\mathbb{B}^n_{\epsilon,A}$ 的平移作用所对应的作用群胚。因此，它在那里是静态的。

我们希望证明 $L_{\mathbb{D}^1}F$ 是弱 suave 的。记 $F^{\mathbb{D}^k}$ 为由引理10.28 针对 $D = A\{T_1, \ldots, T_k\}$得到的栈。由于 $L_{\mathbb{D}^1}F$可以表示为 $F^{\mathbb{D}^\bullet}$的几何实现，只需证明它们是弱 suave 的。与引理10.29的证明一样，我们首先取一个满射 $V = \coprod_i V_i$，其中 V_i 是$\mathbb{B}^n_r$的开子栈，A。考虑 Čech 神经后，问题归结为证明 $V_{i_0} \times_{F^{\mathbb{D}^k}} \cdots \times_{F^{\mathbb{D}^k}} V_{i_l}$是弱 suave 的。只需证明典范映射 $V_{i_0} \times_{F^{\mathbb{D}^k}} \cdots \times_{F^{\mathbb{D}^k}} V_{i_l} \to V_{i_0} \times \cdots \times V_{i_l}$是弱 suave 的，因为它的目标是弱 suave 的。此映射是 $F^{\mathbb{D}^k} \to (F^{\mathbb{D}^k})^{l+1}$的基变换；根据引理10.30，该映射是弱 suave 的。□

定理 D 的证明。我们首先构造一个态射 F: 2Mot(Z) $\to$ 2D$_{\mathrm{mot}}$(Z)。为此，我们需要在 2D$_{\mathrm{mot}}$(Z) 上构造一个带绝对值的环叠。首先，通过复合 (–)^{ucpl}: SNPol $\to$ URing^{tfp}，我们得到一个函子 SNPol $\to$ 2D$_{\mathrm{mot}}$(Z)。然后，沿遗忘函子 SNPol $\to$ Pol 作右 Kan 延拓（根据 [4, 定理 D]，这是可行的），我们得到 Pol $\to$ 2D$_{\mathrm{mot}}$(Z)，它定义了 2D$_{\mathrm{mot}}$(Z) 上的一个环叠。随后，可以将范数具体构造为一个对称幺半函子

$$\mathrm{Shv}([0,\infty)) \to \mathrm{Hom}_{2\mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(\mathbf{Z})}(\mathbf{1}, [\mathbb{A}^1]) \simeq \mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(\mathbb{A}^1) = \varprojlim_r \mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(\mathbb{D}^1_r)$$

与乘法相容，这是一个条件。我们可以通过如下设定来应用引理 4.36 ：

$$D_r = i_{r,*}\mathbf{1}, \qquad E_r = k_{r,*}\mathbf{1}$$

其中 i_r: $\mathbb{D}^1_r \to \mathbb{A}^1$ 且 k_r: $\mathbb{A}^1 \setminus \mathbb{B}^1_r \to \mathbb{A}^1$，其中 $\mathbb{B}^1_r$ 表示半径为 r的开圆盘。

接下来，我们按照定理 G的证明构造一个态射 $_{\mathrm{mot}}$(**整数环**) $\to$ 2Mot(**整数环**) 中所述。首先，根据定理 A，我们有 Stk$^{\vee,\,\mathrm{op}}_{\mathrm{lgt}} \to$ 2Mot(**整数环**) 。由于根据推论 10.22，Var 中的任何对象都确定了一个 2Mot(整数环**)** 上的真栈，根据推论 10.25 和命题 10.19，我们应用定理 2.2 得到

一个对称幺半函子 $2\mathrm{Span}_{\mathrm{all;all,\ iso}}(\mathsf{Var}) \to 2\mathrm{Mot}(\textbf{整数环})$。要构造 G，还需构造

$$\mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(-) \to \mathrm{Hom}_{2\mathrm{Mot}(\mathbf{Z})}(\mathbf{1}, [-])$$

在 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Fun}(\mathrm{Span}(\mathsf{Var}),\mathsf{Pr}_{\mathrm{st}}))$中。为此，我们应用定理 2.2，当 J 由 $\mathbb{D}^1$-不变有限型态射构成时，得到一个对称幺半函子 $2\mathrm{Span}_{J;\mathrm{iso},J}(\mathsf{Stk}^{\vee}_{\mathrm{lgt}}) \to 2\mathrm{Mot}(\textbf{整数环})$。通过考察两侧的 $\mathrm{Hom}(\mathbf{1}, -)$，我们得到函子

$$\mathrm{Shv}_{\mathrm{fin}}(X)_{\mathbb{D}^1} \to \mathrm{Hom}_{2\mathrm{Mot}(\mathbf{Z})}(\mathbf{1}, [X])$$

在 $X \in (\mathsf{Stk}^{\vee}_{\mathrm{lgt}})^{\mathrm{op}}$ 中自然。按构造，该函子保持余极限。此外，它可分解为

$$\mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(X) \to \mathrm{Hom}_{2\mathrm{Mot}(\mathbf{Z})}(\mathbf{1}, [X])$$

根据公理。为了构造 G，我们仍需将这个自然变换延拓到 $\mathrm{Span}(\mathsf{Var})$。我们将其视为从 $2\mathrm{Span}_{\mathrm{all;all,iso}}(\mathsf{Var})$ 出发的对称幺半函子的限制来得到；根据定理 2.2，我们可以构造该函子；我们将在下文核查引理 10.31 中的条件。

接下来我们证明，GF 与恒等映射同伦。我们看到它保持泛环栈；形式上，这意味着与 $\mathrm{Pol} \to 2\mathrm{Mot}(\textbf{整数环})$ 复合后，它是一个等价，而该复合指定了环栈。然后我们可以匹配范数，进而看到 GF 与恒等映射同伦。保持范数这一事实只是一个条件，可以直接验证。

对于 FG，与定理 A 的证明中一样，只需证明复合 $\mathsf{Var}^{\mathrm{op}} \to 2\mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(\textbf{整数环})$ 后这是一个等价。这相当于证明复合

$$\mathsf{URing}_{\mathrm{tfp}} \to \mathsf{Var}^{\mathrm{op}} \hookrightarrow (\mathsf{Stk}^{\vee}_{\mathrm{lgt}})^{\mathrm{op}} \to 2\mathrm{Mot}(\mathbf{Z}) \xrightarrow{F} 2\mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(\mathbf{Z})$$

等价于结构态射。这等价于复合

$$\mathsf{URing}_{\mathrm{tfp}} \hookrightarrow \mathsf{URing} \to 2\mathrm{Mot}(\mathbf{Z}) \xrightarrow{F} 2\mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(\mathbf{Z}).$$

根据定理 10.22 和 10.24。根据 F 的构造，将其与 $\mathsf{SNPol} \to \mathsf{URing}^{\mathrm{tfp}}$ 复合后，得到结构态射。由于结构态射 $\mathsf{URing}_{\mathrm{tfp}} \to 2\mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(\textbf{整数环})$ 根据命题 3.12 保持有限余极限，因此得到所需结果。□

在上面的证明中，我们暂缓处理以下技术步骤：

引理 10.31。对于任意 $f\colon Y \to X$ 属于 Var，该方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(X) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{2\mathrm{Mot}(\mathbf{Z})}(\mathbf{1}, [X]) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Hom}_{2\mathrm{Mot}(\mathbf{Z})}(\mathbf{1}, [Y]) \end{array} \tag{10.32}$$

可右伴随。

证明。由构造可知，方块引理 10.32 在 f 是 $\mathbb{D}^1$-不变有限型态射时，是左伴随可延拓的$\mathsf{Stk}^{\vee}_{\mathrm{lgt}}$中。

通过考察补集，我们看到，对于 f 在 Var中的任意闭浸入，引理 10.32 都是可右伴随的。因此，我们归结为 $f\colon \mathbb{P}^1_X \to X$ 对于 $X \in \mathsf{Var}$。由定理 10.24，我们可以将 X 替换为 $\mathrm{Sparc}(A)$，其中 A 是轻严格全不连通的。

我们使用命题 3.10来验证这一点。首先考虑解析化函子 $\mathsf{QProj} \to \mathsf{Stk}^{\vee}_{\mathrm{lgt}}$，它将 X 映射到 X_A。将其与 $\mathrm{D}_{\mathrm{mot}}$ 和 $\mathrm{Hom}^{2\mathrm{Mot}(\mathbf{Z})}(\mathbf{1}, [-])$复合后，定理3.4 便适用；这一点可通过应用定理 B看出。应用命题 3.10 所剩下的唯一条件是，引理10.32 在$Y \to X$ 是 A中一个光滑态射的解析化时，是左伴随可延拓的QProj。

利用引理 10.32 对 $\mathbb{D}^1$-不变有限型态射的左伴随可延拓性，我们只需证明 $Y = \mathbb{A}^1_X$ 时的情形。通过紧化 X 并再次使用下降，我们只需证明引理 10.32 对 $Y = \mathbb{A}^1_X \to X$具有左伴随性。只需在 $[V] \in \mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(Y)$ 上验证这种左伴随性，其中 V是 $\mathbb{A}^n_Y$的一个开子空间，对某个 n而言，因为根据命题 5，它们在余极限和平移下生成 $\mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(Y)$。 [52, 13]

现在我们考虑 $f\colon\ Y \to X = \mathrm{Sparc}(A)$ 是 $\mathbb{A}^n_X$的一个开子空间。只需证明，引理 10.32 中的方块在 $\mathbf{1} \in \mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(Y)$ 处具有左伴随性。根据粘合，只需分别处理 A 的阿基米德情形和非阿基米德情形。

对于阿基米德情形，我们断言下面这个方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Shv}(\mathrm{M}(X)) \otimes \mathbf{1} & \longrightarrow & \mathrm{Shv}(\mathrm{M}(Y)) \otimes \mathbf{1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ [X] & \longrightarrow & [Y] \end{array}$$

是交换代数(2-动机(**整数环**))中的一个推出，这就得到了所需的结果。为证明这一点，通过对 Y 作紧化，我们可以将其替换为 $\mathbb{P}^n_X$；由下降可得此情形的结论。

接下来我们处理非阿基米德情形。我们取 $r > 0$ 足够小，使得 $\mathbb{B}^n_{r,\ X}$ 通过平移作用于 Y。于是 $g\colon Y/\mathbb{B}^n_{r,\ X} \to X$是有限型且静态的。此外，典范态射$f_\natural\mathbf{1} \to g_\natural\mathbf{1}$ 在 $\mathrm{D}_{\mathrm{mot}}(X)$ 以及 $\mathrm{Hom}_{2\mathrm{Mot}(\mathbf{Z})}(\mathbf{1}, [X])$中都是等价。因此，所需结果由引理 10.32 关于 g 的左伴随性推出。□

参考文献

[1] Johannes Anschütz、Guido Bosco、Arthur-César Le Bras、Juan Esteban Rodríguez Camargo 和 Peter Scholze。Fargues–Fontaine 曲线的解析德拉姆叠，2025。arXiv:2510.15196v1。 [2] Ko Aoki。满足 Verdier 对偶性的偏序集。Selecta Math. (N.S.)，29(5)：论文编号 78，22 页，2023。 [3] Ko Aoki。局部仿紧集的上同调，2024。arXiv:2411.05995v1。 [4] Ko Aoki。高可呈范畴与极限，2025。arXiv:2510.13503v1。 [5] Ko Aoki。层–谱伴随，2025。arXiv:2302.04069v2。 [6] Ko Aoki。高阶原子与高阶刚性，撰写中。 [7] Joseph Ayoub。《Grothendieck 的六种运算与动机世界中的消失循环形式体系》I。Astérisque，(314)：x+466，2007。 [8] Joseph Ayoub。《 Grothendieck 的六种运算与动机世界中的消失循环形式体系》 II。Astérisque，(315)：vi +364，2007。 [9] Tom Bachmann。étale 动机稳定同伦论中的刚性。Algebr. Geom. Topol.，21(1)：173–209，2021。 [10] Tom Bachmann。动机稳定同伦论在特征处是严格交换的。Adv. Math.，410：论文编号 108697，32 页，2022。 [11] Tom Bachmann、Robert Burklund 和 Zhouli Xu。动机稳定茎与胞腔动机范畴的伽罗瓦逼近，2025。arXiv:2503.12060v1。 [12] Paul Balmer。张量三角几何中的可分扩张与广义 Quillen 分层。Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)，49(4)：907–925，2016。 [13] Bhargav Bhatt。棱柱 F-标架，2023。讲义见作者网站。 [14] Bhargav Bhatt 和 Peter Scholze。Witt 向量仿射格拉斯曼量的射影性。Invent. Math.，209(2)：329–423，2017。 [15] S. Bosch、U. Güntzer 和 R. Remmert。《非阿基米德分析》，数学科学基础丛书第 261 卷。施普林格出版社，柏林，1984。 [16] Dustin Clausen。 p-adic 李群的对偶性与线性化，2025。arXiv:2506.18174v1。 [17] Dustin Clausen 和 Akhil Mathew。超下降与 étale K-理论。Invent. Math.，225(3)：981–1076，2021。 [18] Dustin Clausen 和 Peter Scholze。解析叠，2023–2024。讲座视频见 YouTube。 [19] Bastiaan Cnossen、Tobias Lenz 和 Sil Linskens。span 2-范畴的泛性与六函子形式体系的构造，2025。arXiv:2505.19192v1。 [20] Adam Dauser 和 Josefien Kuijper。六函子形式体系的唯一性，2025。arXiv:2412.15780v2。 [21] Brad Drew 和 Martin Gallauer。泛六函子形式体系。Ann. K 理论，7(4)：599–649，2022。 [22] Vladimir Drinfeld。晶体的栈化方法。载于《物理与数学对话——杨振宁百年诞辰纪念》，第 19–47 页。施普林格，尚，2022。 [23] Andrei Druzhinin。基底上的稳定动机同伦群中的朴素 Milnor–Witt K-理论关系。Ann. K理论，6(4)：651–671，2021。 [24] Elden Elmanto、Marc Hoyois、Adeel A. Khan、Vladimir Sosnilo 和 Maria Yakerson。动机无限循环空间。Camb. J. Math.，9(2)：431–549，2021。 [25] Elden Elmanto 和 Adeel A. Khan。动机同伦论中的完美化。Proc. Lond. Math. Soc. (3)，120(1)：28–38，2020。 [26] Laurent Fargues 和 Peter Scholze。局部 Langlands 对应的几何化，2024。arXiv:2102.13459v4。 [27] Davide Gaiotto 和 Theo Johnson-Freyd。高阶范畴中的凝聚，2025。arXiv:1905.09566v3。

[28] Dennis Gaitsgory 和 Nick Rozenblyum。《导出代数几何研究》第一卷：《对应与对偶》，数学调查与专著第 221 卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2017。 [29] Peter J. Haine。紧豪斯多夫空间上的层的下降，2022。arXiv:2210.00186v1。 [30] David Hansen。刚性解析几何中的消失与比较定理。Compos. Math.，156 324，2020 2 299( )：–。[31] David Hansen 和 Peter Scholze。相对偏斜。Commun. Am. Math. Soc.，3：631–668，2023。 [32] Rune Haugseng。迭代跨与经典拓扑场论。Math. Z.，289(3-4)：1427–1488，2018。 [33] Claudius Heyer 和 Lucas Mann。六函子形式主义与光滑表示，2024。arXiv:2410.13038v1。[34] Roland Huber。刚性解析簇与 adic空间的 étale 上同调，数学专题第 E30 卷。Friedr. Vieweg & Sohn，不伦瑞克，1996。 [35] Luc Illusie、Yves Laszlo 和 Fabrice Orgogozo 编。《Gabber 关于局部一致化与准优概形 étale 上同调的著作》。法国数学会，巴黎，2014。巴黎综合理工学院研讨会，2006–2008。 [巴黎综合理工学院研讨会，2006–2008], 在 Frédéric Déglise、Alban Moreau、Vincent Pilloni、Michel Raynaud、Joël Riou、Benoît Stroh、Michael Temkin 和 Weizhe Zheng 的协助下，Astérisque 第 363-364 号（2014）。[36] Peter Johnstone 和 André Joyal。连续范畴与可指数化拓扑斯。J. Pure Appl. Algebra，25(3)：255–296，1982。 [37] Thibaud Lemanissier 和 Jérôme Poineau。《全局 Berkovich 空间——范畴、拓扑、上同调》，数学进展第 353 卷。Birkhäuser/施普林格，尚，2024。 [38] Yifeng Liu 和 Weizhe Zheng。高阶 Artin 叠的增强六种运算与基变换定理，2024。arXiv:1211.5948v4。[39] Qing Lu 和 Weizhe Zheng。范畴迹与相对Lefschetz–Verdier公式。Forum Math. Sigma，10：论文编号 e10，24 页，2022。 [40] Jacob Lurie。《高阶拓扑斯理论》，《数学年刊研究》第 170 卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2009。 [41] Jacob Lurie。《高阶代数》。见作者网站，2017。 [42] Jacob Lurie。《谱代数几何》（编写中）。见作者网站，2018。 [43] Lucas Mann。刚性解析几何中的一个 p-adic 六函子形式体系，2022。arXiv:2206.02022v1。[44] Akhil Mathew。稳定同伦理论的伽罗瓦群。Adv. Math.，291：403–541，2016。 [45] Fabien Morel 和 Vladimir Voevodsky。概形的 $\mathbb{A}^1$-同伦论。Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.，(90)：45–143，1999。 [46] W. K. Nicholson。提升幂等元与交换环。Trans. Amer. Math. Soc.，229：269–278，1977。 [47] Jérôme Poineau。z 上的 Berkovich 空间：局部研究。Invent. Math.，194(3)：535–590，2013。 [48] David Reutter 和 Markus Zetto。Cauchy 完备的 (∞, n)-范畴与高阶幂等元，撰写中。[49] Marco Robalo。

K 269 399 550, -理论与从动机到非交换动机的桥梁。Adv. Math.，：–。[50] David Rydh。浸没与 étale 态射的有效下降。Bull. Soc. Math. France，138 230，2010 2 181( )：–。[51] Peter Scholze。动机与环叠，2024。演讲录像见 https://www.youtube.com/watch? v=I1lChD8fuGc。[52] Peter Scholze。Berkovich 动机，2025。arXiv:2412.03382v2。 [53] Peter Scholze。Habiro上同调，2025。讲座视频见作者网站。 [54] Peter Scholze。六函子形式主义，2025。arXiv:2510.26269v1。 [55] Peter Scholze。几何与高阶范畴论，2026。讲义见作者网站。[56] Carlos Simpson。复数上的同伦与广义德拉姆上同调。载于《向量丛模空间》（三田，1994；京都，1994），纯数学与应用数学讲义第 179 卷，第 229–263 页。Dekker，纽约，1996。 [57] Stacks项目作者。Stacks项目，2026。https://stacks.math.columbia.edu。[58] Germán Stefanich。可呈 (∞, n)-范畴，2020。arXiv:2011.03035v1。[59] Germán Stefanich。层理论的范畴化。见作者网站，2025。 [60] Vladimir Voevodsky。域上的动机三角范畴。载于《循环、转移与动机同调理论》，《数学年刊研究》第 143 卷，第 188–238 页。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2000。 [61] Ivan Zelich。忠实平坦环映射并非可下降，2024。arXiv:2405.08124v2。

马克斯·普朗克数学研究所，维瓦茨街7号，53111 波恩，德国电子邮箱地址：
aoki@mpim-bonn.mpg.de