浅水矩方程的渐近分析

Mieke Daemen[1], Julio Careaga[1],Zhenning Cai[2],和 Julian Koellermeier[1,3]

[1] 伯努利研究所，格罗宁根大学，Nijenborgh 9，格罗宁根，9747 AG，荷兰[2] 数学系，新加坡国立大学，10 Lower Kent Ridge Road，新加坡 119076，新加坡[3] 数学、计算机科学与统计学系，根特大学，Krijgslaan 281-S9，根特，9000，比利时

arXiv:2603.01886v1 [math.NA] 2 Mar 2026

摘要

浅水矩方程（SWME）是浅水方程（SWE）的扩展，可用于更准确地模拟自由表面流。与浅水方程不同，浅水矩方程纳入了垂向速度剖面的信息。浅水矩方程框架采用勒让德多项式和多项式系数（又称矩变量）进行多项式展开，以近似垂向速度剖面。浅水矩方程所需的变量数量较多，即使流动趋近平衡状态、可用趋于零的矩变量来表征黏性滑移平衡态时，这些变量仍必须全部纳入。为降低流动接近平衡态时浅水矩方程的复杂度，我们对其进行了渐近分析。由此得到适用于偏离平衡态情形的闭式降阶浅水矩方程（RSWME）。与浅水矩方程相比，正则化浅水矩方程所需的变量更少。我们分析了正则化浅水矩方程的双曲性。数值测试包括具有陡峭水深梯度的波、具有较平缓水深梯度的波，以及平方根速度剖面。数值测试表明，与浅水矩方程相比，正则化浅水矩方程可将计算成本降低最高达 77%；与浅水方程相比，精度最高可提升 88%。

关键词：浅水自由表面流、Chapman-Enskog 展开、浅水矩方程**MSC 2020年：**35L60, 76D05, 35C20

1 引言

浅水方程（SWE）广泛用于模拟多种情境下的自由表面流，例如海洋建模 [16]和雪崩模拟 [17]。这些方程通过对纳维–斯托克斯方程进行深度平均，并假设垂向速度剖面可简化为深度平均速度 [21]而得出。这种方法的一个重要局限是无法模拟垂向结构的详细演变，因此在海啸传播等垂向速度剖面不均匀的情形下可能会产生建模误差 [1] 或溃坝流 [14]。此外，存在底部摩擦时，垂向速度剖面会变得不均匀。因此，应用浅水方程会引入误差，尤其是在泥沙输运情形下 [7]。因此，浅水方程不足以模拟不均匀的垂向速度剖面。作为一种可能的补救方法，人们推导出了浅水矩方程（SWME），用于在浅水流模型中近似垂向速度剖面 [12]。

在浅水矩方程框架中，垂向速度剖面通过勒让德多项式展开进行近似，其展开系数称为矩变量。在 [12], 中，浅水矩方程由不可压静水纳维–斯托克斯方程推导而来。推导采用矩方法：利用勒让德多项式基沿垂直方向展开水平速度，随后应用伽辽金投影，推导出矩系数的演化方程。

随后，矩模型的概念也被应用于非静水压情况 [18], 以及涉及泥沙输运的非牛顿情况 [7], 和二维径向对称自由表面流 [20]。此外，正如 [2], 所述，本文分析了二维浅水矩方程，重点关注其数学结构。[12, 18, 20], 研究表明，增加矩的数量可使解更接近通过直接离散纳维–斯托克斯方程得到的参考解，尤其是与浅水方程相比时。因此，浅水矩方程在提高自由表面流模型的精度方面具有明显优势。

在 [11], 中已经证明，对于某些特定情形，输运矩阵的特征值会出现非零虚部。因此，SWME 系统中的传播速度不再为实数，并且可能出现不稳定性。为了解决双曲性的丧失问题，将 SWME 输运矩阵在线性速度剖面附近进行线性化，从而得到双曲浅水矩方程（HSWME） [11]。此外，通过省略 SWME 方程组中的非线性项，浅水线性矩方程（SWLME）提供了另一种双曲模型 [10]。

SWME、HSWME 和 SWLME 包含的变量多于 SWE，因此这些矩模型的计算成本更高。这种计算成本的增加源于：SWME、HSWME 和 SWMLE 都包含额外的矩变量，而不仅仅是流体高度和平均速度变量。为减轻计算成本的增加，我们旨在开发一种减少 SWME 中变量数量的方法。要实现这一点，必须考虑摩擦项，因为它决定了哪些模型变量可以通过适当的闭合进行简化。

因此，我们不仅要考虑浅水矩方程的输运部分，还要考虑源项。 [12] 中的模型研究了带有黏度和滑移长度参数的牛顿摩擦项这一简单情形。在浅水矩方程中，该源项既考虑水体内部的黏性耗散，也考虑流固界面处的边界效应。

[8], 分析了双曲浅水矩方程和浅水线性矩方程模型的平衡态与稳定性，重点关注源项中滑移长度参数的影响。这些模型呈现出三种不同的平衡流形，各自具有特定的源项行为：（1）黏度和滑移长度有限时的静水状态；（2）滑移长度远大于流体高度时的恒定速度状态；（3）滑移长度远小于流体高度时的底部静止状态。通过 [8], 中的结构稳定性分析和数值模拟，研究表明静水状态和恒定速度状态是稳定的，而底部静止状态则可能不稳定。

原始 SWME 系统的恒定速度平衡态无需额外的多项式系数即可描述，而 SWME 正是要求解这些系数的。从该平衡态出发模拟扰动时，完整的 SWME 模型需要解析以多项式系数形式表示的微小垂向变化，因此计算成本可能很高。另一方面，计算速度更快的浅水方程模型仅依赖平均速度和流体高度，无法捕捉这些变化。为兼顾运行时间与精度，我们旨在推导平衡态附近的高效近似解，从而无需针对多项式系数求解一个可能规模庞大的方程组。这些近似解是通过对不同黏度和滑移长度标度下的 SWME 系统系统地应用渐近分析得到的。

在渐近分析中，我们将对滑移长度以及黏性摩擦参数采用不同标度，并对 SWME 应用一种类似于动理学理论中 Chapman-Enskog 展开的技术。关于在无量纲克努森数采用不同标度时对玻尔兹曼方程应用的类似方法，参见 [3, 13, 19]。

通过应用渐近展开并为高阶项推导显式闭合关系，浅水矩方程（SWME）中的变量数量得以减少，从而得到约化浅水矩方程（RSWME）。这一推导过程包括将渐近展开代入控制方程，并进行数量级分析以分离出主导项。推导出部分变量关于其余模型变量的解析表达式，并将其代回 SWME，最终得到一个封闭系统。我们推导了矩数目任意的 RSWME。我们证明，对于较大的矩数目，封闭的 RSWME 系统完全相同。因此，矩数目不同时的数值解均可通过求解同一组偏微分方程获得，从而显著降低模拟接近平衡态的自由表面流动（矩数目可变）的计算成本。

此外，对于任意矩数目，我们分析了 RSWME 的双曲性，并开发了一种双曲正则化过程。数值测试表明，对于接近平衡态的流动，与标准浅水方程（SWE）相比，新的 RSWME 精度更高；与完整的浅水矩方程（SWME）相比，计算效率也更高。

本文其余部分安排如下：第2节介绍浅水矩方程组（SWME 系统），并针对黏度和滑移长度参数的不同标度推导渐近近似。第3节将 Chapman–Enskog 展开法应用于黏性滑移情形，通过对 SWME 系统降维得到正则化浅水矩方程（RSWME）。随后，对 RSWME 进行双曲性分析。第4节介绍针对光滑波情景的数值测试。最后，第5节总结全文，并概述主要发现。

2 浅水矩方程

本节简要介绍基于 [12]推导浅水方程（SWE）和浅水矩方程（SWME）模型的过程。浅水方程组和浅水矩方程组均由不可压缩 Navier–Stokes 方程（NSE）推导而来。

2.1 浅水模型

浅水方程（SWE）是一组双曲型偏微分方程，用于描述水平尺度显著大于垂直尺度的自由表面流。浅水方程通过对 Navier–Stokes 方程进行深度积分推导而得。

流体高度为h 、水平方向x 上深度平均速度为u_m 的水柱，其经典浅水方程为

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x(hu_m) &= 0, \\ \partial_t(hu_m) + \partial_x\left(hu_m^2 + \frac{gh^2}{2}\right) + gh\partial_x(h_b) &= -\frac{\nu}{\lambda}u_m, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 ν 与 λ 分别表示黏度和滑移长度。底部高度由 h_b给出。（1）的右端项表示底部滑移惩罚项。

由（1）给出的浅水方程通过深度平均，为流动模拟提供了一个计算高效的双变量方程组。然而，在出现显著水平速度变化的情形下，深度平均会导致误差 [12]。

2.2 由 Navier–Stokes 方程推导浅水矩方程

本节给出浅水矩方程的推导，如 [12], 中所介绍，其中采用多项式展开近似垂向速度剖面，以刻画垂向流动结构。

为得到 SWME 系统，我们通过以下两步变换 Navier–Stokes 方程：（1）映射垂向坐标 z，（2）对速度变量应用多项式勒让德展开。

垂向坐标映射 如 [12], 所述，采用坐标映射，以便更有效地表示沿垂直轴的水平速度变化。该映射将垂直坐标z在底部流体高度$z = h_b(x,t)$与自由表面流体高度$z = h_s(x,t)$之间进行归一化，即

$$\zeta(x,t,z) = \frac{z - h_b(x,t)}{h(x,t)}, \tag{2}$$

其中，$\mathrm{h(x,t)} = \mathrm{h}_b\mathrm{(x,t)} - \mathrm{h}_s\mathrm{(x,t)}$ 为流体高度。式 (2) 中的映射垂直坐标 ζ 定义在区间 $[0,1]$ 内。因此，z 坐标 $\mathrm{z} \in [\mathrm{h}_b\mathrm{(x,t)}, \mathrm{h}_s\mathrm{(x,t)}]$, 被映射到归一化区域 $\zeta\mathrm{(x,t)}:\ \mathbb{R} \times [0, \mathrm{T}\ ] \to [0,1]$。

多项式展开 第二步中，[12]沿垂直方向展开水平速度变量 $u(x,t\ \zeta)$，ζ 以深度平均速度 $u_m(x,t)$为中心进行多项式展开。速度 $u(x,t\ \zeta)$: $\mathbb{R}\times[0,T]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ 表示为

$$u(x,t,\zeta)=u_m(x,t)+\sum_{j=1}^{N}\alpha_j(x,t)\phi_j(\zeta), \tag{3}$$

其中 $\alpha_j(x,\ t)$: $\mathbb{R}\times[0,T]\to\mathbb{R}$ 表示称为矩的展开系数，而 ϕ_j: $[0,1]\to\mathbb{R}$表示次数为j的缩放勒让德多项式，其中$j=0,\ \ldots,\ N$。这些基函数经过归一化，使得 $\phi_j(0)=1$，其中$j=1,\ \ldots,\ N$。缩放勒让德多项式 ϕ_j为

$$\phi_j(\zeta)=\frac{1}{j!}\frac{d^j}{d\zeta^j}\left(\zeta-\zeta^2\right)^j,\quad j=1,\ldots,N. \tag{4}$$

例如，前两个多项式为

$$\phi_1(\zeta)=1-2\zeta,\quad \phi_2(\zeta)=1-6\zeta+6\zeta^2. \tag{5}$$

这些基函数满足正交条件

$$\int_0^1\phi_j(\zeta)\phi_k(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=\frac{\delta_{jk}}{2k+1}, \tag{6}$$

其中 δ_{jk}是对所有$j,\ k=1,\ \ldots,\ N$成立的克罗内克δ。

正交性质（6）对于推导浅水矩方程至关重要。该性质使i阶矩具有独立的时间导数项，从而使非线性项与矩变量相耦合。因此，正交性质导出的浅水矩方程具有稀疏结构，时间导数中不会出现额外的非线性项。

在展开式（3）中，参数 $N\in\mathbb{N}$ 决定多项式近似的阶数。增大 N 通常可以更好地表示垂向上复杂的流动行为 [12], 而设置$N=0$ 则得到式（1）中的经典深度平均浅水方程。

将纳维–斯托克斯动量方程映射到z方向，并代入式（3）中的多项式展开公式后，将动量方程投影到勒让德多项式上。乘以 ϕ_j并在 $\zeta\in[0,1]$上积分，可得到关于 α_j（$j=1,\ \ldots\ldots,\ N$）的微分方程；而投影到$\phi_0=1$ 上则得到 u_m的方程。对垂向映射后的连续性方程进行深度积分，可推导出 h 的演化方程。所得关于变量 h、u_m、$\alpha_1,\ \ldots\ldots,\ \alpha_N$的 $N+2$ 个方程为

$$\partial_t h+\partial_x(hu_m)=0, \tag{7a}$$

$$\partial_t(hu_m)+\partial_x\left(h\left(u_m^2+\sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_j^2}{2j+1}\right)+\frac{gh^2}{2}\right)=-\frac{\nu}{\lambda}\left(u_m+\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\right)-gh\partial_x(h_b), \tag{7b}$$

$$\begin{aligned}\partial_t(h\alpha_i)+\partial_x\left(h\left(2u_m\alpha_i+\sum_{j,k=1}^{N}A_{ijk}\alpha_j\alpha_k\right)\right)&=u_m\partial_x(h\alpha_i)-\sum_{j,k=1}^{N}B_{ijk}\partial_x(h\alpha_j)\alpha_k\\&\quad-(2i+1)\frac{\nu}{\lambda}\left(u_m+\sum_{j=1}^{N}\alpha_j+\frac{\lambda}{h}\sum_{j=1}^{N}C_{ij}\alpha_j\right),\end{aligned} \tag{7c}$$

对于 $i=1,\ \ldots\ldots,\ N$。

为简化起见，我们假设水深地形均匀，因此 $\partial_x(h_b)=0$。常数 A_{ijk}、B_{ijk} 和 $C_{ij}$for$i$、j、$k=1,\ \ldots,\ N$表示由缩放后的深度积分产生的积分。这些常数定义为

$$A_{ijk}=(2i+1)\int_0^1\phi_i\phi_j\phi_k\,\mathrm{d}\zeta, \tag{8}$$

$$B_{ijk}=(2i+1)\int_0^1\partial_\zeta\phi_i\left(\int_0^\zeta\phi_j\,\mathrm{d}\hat{\zeta}\right)\phi_k\,\mathrm{d}\zeta, \tag{9}$$

$$C_{ij}=(2i+1)\int_0^1\partial_\zeta\phi_i\partial_\zeta\phi_j\,\mathrm{d}\zeta. \tag{10}$$

闭合形式的浅水矩方程 浅水矩方程（7a）-（7c）可表示为矩阵形式：

$$\partial_t U + \frac{\partial F(U)}{\partial U}\partial_x U = Q(U)\partial_x U + S(U), \tag{11}$$

其中 $U = (h,\ hu_m,\ h\alpha_1,\ \ldots,\ h\alpha_N) \in \mathbb{R}^{N+2}$。这里，守恒通量 $\partial F(U)\partial U \in \mathbb{R}^{(N+2)\times(N+2)}$的雅可比矩阵定义为

$$\frac{\partial F(U)}{\partial U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ gh - u_m^2 - \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{2i+1} & 2u_m & \frac{2\alpha_1}{2\cdot 1+1} & \cdots & \frac{2\alpha_N}{2N+1} \\ -2u_m\alpha_1 - \sum\limits_{j,k=1}^{N} A_{1jk}\alpha_j\alpha_k & 2\alpha_1 & 2u_m\delta_{11} + 2\sum\limits_{k=1}^{N} A_{11k}\alpha_k & \cdots & 2u_m\delta_{1N} + 2\sum\limits_{k=1}^{N} A_{1Nk}\alpha_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2u_m\alpha_N - \sum\limits_{j,k=1}^{N} A_{Njk}\alpha_j\alpha_k & 2\alpha_N & 2u_m\delta_{N1} + 2\sum\limits_{k=1}^{N} A_{N1k}\alpha_k & \cdots & 2u_m\delta_{NN} + 2\sum\limits_{k=1}^{N} A_{NNk}\alpha_k \end{pmatrix}.$$

非守恒项 $Q(U) \in \mathbb{R}^{(N+2)\times(N+2)}$ 定义为

$$Q(U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & u_m\delta_{11} + \sum\limits_{k=1}^{N} B_{11k}\alpha_k & \cdots & u_m\delta_{1N} + \sum\limits_{k=1}^{N} B_{1Nk}\alpha_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & u_m\delta_{N1} + \sum\limits_{k=1}^{N} B_{N1k}\alpha_k & \cdots & u_m\delta_{NN} + \sum\limits_{k=1}^{N} B_{NNk}\alpha_k \end{pmatrix}.$$

摩擦项 $S(U) \in \mathbb{R}^{N+2}$ 包含来自 [12] 的牛顿滑移项，其表达式为

$$S_0(U) = 0, \quad S_1(U) = -\frac{\nu}{\lambda}\sum_{j=1}^{N}\alpha_j, \quad S_i(U) = -(2i+1)\frac{\nu}{\lambda}\sum_{j=1}^{N}\alpha_j - (2i+1)\frac{\nu}{h}\sum_{j=1}^{N} C_{ij}\alpha_j, \quad i = 2,\ldots,N+2. \tag{12}$$

系统矩阵 $A(U) \in \mathbb{R}^{(N+2)\times(N+2)}$ 定义为

$$A(U) = \frac{\partial F(U)}{\partial U} - Q(U), \tag{13}$$

因此，完整的方程组（11）可表示为

$$\partial_t U + A(U)\partial_x(U) = S(U). \tag{14}$$

3 具有黏性滑移尺度关系的浅水矩方程渐近近似

本节将使用 Chapman-Enskog 展开，对浅水矩方程进行渐近近似。为此，我们引入一个小的正参数 $\varepsilon \ll 1$，并对式（ν和λ 中的摩擦参数进行尺度变换（12）。根据以下表达式，对方程组（14）中的变量进行渐近展开：

$$U_i = U_i^{(0)} + \varepsilon U_i^{(1)} + \varepsilon^2 U_i^{(2)} + \mathscr{O}(\varepsilon^3), \quad i = 1,\ldots,N+2. \tag{15}$$

不同数量级系数$U^{(}_{j)\,i}$对于 $i = 1,\ldots,N+2$和 $j = 0,1,2$ 可通过将（15）代入（7a)-（7c），或等价地代入（14），并系统地求解不同阶的 ε而得到。我们观察到，当 $\varepsilon \to 0$时，渐近展开（15）简化为

$$U_i = U_i^{(0)}, \quad i = 1,\ldots,N+2, \tag{16}$$

我们将其称为主阶解。随后，代入渐近近似可得到浅水矩方程的降维闭合。

在本研究中，我们选取一种黏性滑移标度，使得黏度为 $\nu = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$，滑移长度为$\lambda = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$。我们引入以下尺度关系，定义为

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\varepsilon}, \quad \nu = \frac{\nu_0}{\varepsilon}, \tag{17}$$

其中 λ_0 和 ν_0 均假设为无量纲。选取较大的滑移长度 λ 是受到 [8], 中研究结果的启发，其中极限 $\lambda \to \infty$ 对应于一种稳定平衡态，其垂直方向上的速度剖面恒定，且矩变量趋于零。在该平衡态附近，即 $\lambda \gg 1$ 但保持有限时，我们研究矩变量 α_j的近似，其中 $i = 1, \ldots\ldots, N$。此外，我们证明，通过选取较大的黏度 $\nu = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$，可以得到一个经过降维的 SWME 模型闭合。在 A中，我们讨论了摩擦参数的其他标度。

将黏性滑移标度（17）应用于（7c），并令 $\varepsilon \to 0$，可得

$$\sum_{j=1}^{N} C_{ij}\alpha_j = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, N. \tag{18}$$

方程 (18) 可表示为矩阵—向量形式：

$$\boldsymbol{C}_N \boldsymbol{\alpha}_N = \boldsymbol{0}, \tag{19}$$

其中 $\boldsymbol{C}_N \in \mathbb{R}^{N\times N}$是一个矩阵，其元素为 $\boldsymbol{C}_{Nij} = C_{ij}$，而 $\boldsymbol{\alpha}_N \in \mathbb{R}^N$是一个向量，其元素为 $(\boldsymbol{\alpha}_N)_j = \alpha_j$，其中 i、$j = 1, \ldots, N$。根据 [8],矩阵 $\boldsymbol{C}_N$可知其可逆。因此，方程 (18) 唯一可能的主阶解为 $\alpha_j = 0, \ \forall j = 1, \ldots, N$。

在 [8], 令滑移变量 $\lambda \to \infty$ 取值时，双曲浅水矩方程和浅水线性矩方程系统中会出现稳定的恒定速度平衡态，使得 $\alpha_j = 0$ 对于 $j = 1, \ldots, N$ 成立。这个大滑移平衡对应于式 (19) 中的黏性滑移主阶解。本研究旨在推导 $\alpha_j = 0$ 附近黏性滑移浅水矩方程系统的近似解，其中 $j = 1, \ldots, N$。值得注意的是，将矩变量 $\alpha_j (j = 1, \ldots, N)$ 设为零会得到一个双曲系统 [12]。

在式（17）所定义的尺度关系下，控制h （7a）和hu_m （7b）的方程不依赖于 ε。因此，在浅水矩方程中取极限 $\varepsilon \to 0$ 并不能得到h或hu_m的主阶解。由此，这种无关性使得无法对变量h和u_m进行渐近展开。然而，如前所示，式（ α_j）中$j = 1, \ldots, N$对应的方程（7c）在尺度关系（17）下确实存在主阶解。随后，对变量 α_i 进行渐近展开，得到

$$\alpha_i = \alpha_i^{(0)} + \varepsilon\alpha_i^{(1)} + \varepsilon^2\alpha_i^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{20}$$

接着，将这些渐近展开（20）代入控制方程组（7c）。

本节余下部分将进行数量级分析，系统地保留 ε 中的主阶、一阶和二阶项。通过该分析，可在黏性滑移主阶解附近对方程组进行降维，从而确保捕捉到 ε多个尺度上的动力学。降维过程包括将 α_j中$j = 1, \ldots, N$的闭合关系表示为其余变量h和u_m的函数，其中包含不同 ε阶的项组合。最后，将这些渐近展开作为闭合关系代回（7c），即可闭合方程组，得到约化浅水矩方程（正则化浅水矩方程）。

请注意，这些闭合关系取决于尺度关系。在A中，我们探讨了在黏度采用其他尺度关系时，浅水矩方程的可能渐近近似 ν 以及滑移长度 λ。

我们首先在黏性滑移标度（7a）-（7c）下，推导浅水矩方程（17）的闭合关系和封闭系统。分析按以下步骤展开：在第3.1小节中，我们讨论$N = 1$的情形；在第3.2小节中，我们将框架扩展到$N = 2$；在第3.3小节中，我们将结果推广到任意N。一个重要发现是，当$N \geq 2$时，所有封闭正则化浅水矩方程组都相同。

此外，我们分析这些方程组在 $N = 1$、$N = 2$ 以及任意 N 情形下的双曲性。分析表明，这些方程组均不是全局双曲的。为解决双曲性的丧失，我们引入一种双曲正则化。

3.1 浅水矩方程中 N =1 的渐近展开

在 [22], 中，针对系数的渐近展开 α_1 由（7a）-（7c）在 $N=1$ 的情形下对浅水矩方程导出。我们遵循 [22], 中的说明来阐述主要思想，然后再推广到更大的 N。令 SWME1 表示阶数为 $N=1$ 的 SWME 模型。当将（17）中的黏性滑移标度应用于 SWME1 时，控制方程变为

$$\partial_t \begin{pmatrix} h \\ hu_m \\ h\alpha_1 \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} hu_m \\ hu_m^2 + \frac{1}{3}h\alpha_1^2 + g\frac{h^2}{2} \\ 2hu_m\alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_m\partial_x(h\alpha_1) \end{pmatrix} - \frac{\nu_0}{\lambda_0} \begin{pmatrix} 0 \\ u_m+\alpha_1 \\ 3\left(u_m+\alpha_1+\frac{4\lambda_0}{\varepsilon h}\alpha_1\right) \end{pmatrix}. \tag{21}$$

(21) 的最后一个方程取决于 ε，因此需要将变量 α_1 展开为

$$\alpha_1 = \alpha_1^{(0)} + \varepsilon\alpha_1^{(1)} + \varepsilon^2\alpha_1^{(2)} + \mathscr{O}(\varepsilon^3). \tag{22}$$

将 (22) 代入方程组 (21) 的最后一个方程，并收集 ε 的同阶项，可得到渐近分量 $\alpha_1^{(i)}$ ($i=0$、1、2) 的显式表达式。

首先，分析最后一个方程中的 $\mathscr{O}(\varepsilon^{-1})$ 项，以推导出 $\alpha_1^{(0)}$。接着，将 $\alpha_1^{(0)}$ 代回 (21) 的最后一个方程，并保留 $\mathscr{O}(\varepsilon^0)$分量，以确定关于$\alpha_1^{(1)}$ 的闭合关系。最后，保留 ($\mathscr{O}(\varepsilon^1)$的 21分量，以推导关于 $\alpha_1^{(2)}$ 的闭合关系。

浅水矩方程 SWME1 的 $\mathscr{O}(\varepsilon^{-1})$ 阶近似。将 关于 22 的渐近展开 α_1 代入 (21) 的最后一个方程。该代入产生了 ($\mathscr{O}(\varepsilon^{-1})$ 阶的 (21) 分量，其表达式为

$$\frac{4\lambda_0}{h}\alpha_1^{(0)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1^{(0)} = 0. \tag{23}$$

浅水矩方程 SWME1 的 $\mathscr{O}(\varepsilon^0)$近似保留方程组（ $\mathscr{O}(\varepsilon^0)$中最后一个演化方程的 $\mathscr{O}(\varepsilon^0)$ 阶项21，并代入 $\alpha_1^{(0)}=0$，即可得到 $\alpha_1^{(1)}$ 的闭合关系:

$$u_m + \frac{4\lambda_0}{h}\alpha_1^{(1)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1^{(1)} = -\frac{u_m h}{4\lambda_0}. \tag{24}$$

浅水矩方程 SWME1 的 $\mathscr{O}(\varepsilon^1)$阶近似

浅水矩方程 SWME1 的近似将 $\alpha_1^{(1)}$ 代入（24），并代入 $\mathscr{O}(\varepsilon)$阶项（21），得到

$$\partial_t(h^2u_m) + 2\partial_x(h^2u_m^2) = u_m\partial_x(h^2u_m) - 3\frac{\nu_0}{\lambda_0}\left(u_m h - \frac{16\lambda_0^2}{h}\alpha_1^{(2)}\right). \tag{25}$$

为简化（25），使用 [22] 得到

$$\partial_t(h^2u_m) = -\frac{1}{2}\partial_x(h^2u_m^2) - h\left[\partial_x\left(hu_m^2 + \frac{gh^2}{2}\right) + \frac{\nu_0}{\lambda_0}u_m\right]. \tag{26}$$

方程（26）是对链式法则应用结果，并将质量守恒方程与（21）的第一个方程结合，同时将（ $\mathscr{O}(\varepsilon^0)$ 动量项置于（21）的第二行 [22]。

将（26）代入（25），可得 $\alpha_1^{(2)}$ 的闭合关系

$$\alpha_1^{(2)} = \frac{1}{48\nu_0\lambda_0}\left(-\frac{g}{4}\partial_x(h^4) + \frac{2\nu_0}{\lambda_0}u_m h^2\right). \tag{27}$$

闭合约化 SWME1 模型 将（23）、（24）和（25）代入（22），可推导出 α_1的闭合关系

$$\alpha_1 = \varepsilon\left(-\frac{hu_m}{4\lambda_0}\right) + \varepsilon^2\left[\frac{1}{48\nu_0\lambda_0}\left(-\frac{g}{4}\partial_x(h^4) + 2\frac{\nu_0 u_m h^2}{\lambda_0}\right)\right] + \mathscr{O}(\varepsilon^3). \tag{28}$$

为得到关于h 和hu_m的封闭系统，将 α_1 从（28）代入（21）。忽略阶数为$\mathscr{O}$（ε^3）及更高阶的项后，关于$N = 1$ 的封闭约化浅水矩方程（RSWME1）定义如下：[22]

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x(hu_m) &= 0, \\ \partial_t(hu_m) + \partial_x\left(hu_m^2 T_1^1(h,u_m) + \frac{gh^2}{2}T_2^1(h,u_m)\right) &= -\frac{\nu_0 u_m}{\lambda_0}T_3^1(h,u_m), \end{aligned} \tag{29}$$

其中

$$T_1^1(h,u_m) = 1 + \frac{\varepsilon^2 h^2}{48\lambda_0^2}, \quad T_2^1(h,u_m) = 1 - \frac{\varepsilon^2 h^2}{96\lambda_0^2}, \quad T_3^1(h,u_m) = 1 - \frac{\varepsilon h}{4\lambda_0} + \frac{\varepsilon^2 h^2}{24\lambda_0^2}. \tag{30}$$

注 1. 用于刻画速度剖面偏离均匀速度剖面的 *Boussinesq* 系数为 *[15]*

$$\beta = \frac{1}{hu_m^2}\int_{h_b}^{h_s} u(x,z,t)^2\,\mathrm{d}z. \tag{31}$$

在 *[9],* 中的 *SWME1* 框架下，该系数的形式为

$$\beta = 1 + \frac{1}{3}\frac{\alpha_1^2}{u_m^2}. \tag{32}$$

将关于（28）的闭合关系代入 α_1 并忽略项 $\mathscr{O}$（ε^3）和 $\mathscr{O}$（ε^4），得到

$$\beta \approx 1 + \frac{1}{48}\frac{\varepsilon^2 h^2}{\lambda_0^2} = T_1^1(h,u_m). \tag{33}$$

这一发现意味着，*RSWME1* 的平流项与采用 *Boussinesq* 系数对垂向速度剖面进行近似的结果一致。这一事实凸显了我们的模型相对于文献中类似模型的意义，参见 *[15]*。

我们推导出了一个封闭系统（29），用于描述 h 和 u_m。该系统采用关于恒定速度剖面的黏性滑移主阶解的显式闭合来描述其小偏差，适用于 α_1 的 $\mathscr{O}(\varepsilon^2)$，其计算采用数量级方法，考虑了直到 $\mathscr{O}(\varepsilon^2)$ 的各项。这意味着，理论上，正则化浅水矩方程1（RSWME1）方程组能够近似大黏度、大滑移长度下的浅水矩方程1（SWME1），同时只需数值求解一个包含两个变量而非三个变量的方程组。

式（29）中的 RSWME1 与浅水方程（1）依赖于相同的变量。此外，当 $\varepsilon \to 0$ 时，RSWME1 与浅水方程一致。与浅水方程不同，RSWME1 中的摩擦项包含与 $\varepsilon u_m h$ 和 $\varepsilon^2 u_m h^2$, 成正比的额外贡献，这些贡献表示平均速度 u_m周围的变化。此外，RSWME1 左端的输运矩阵中还包含额外的 $\mathscr{O}(\varepsilon^2)$线性组合，包括 $h^3u_m^2$ 和 h^2，而浅水方程中没有这些项。

RSWME1 的双曲性 RSWME1 方程组（29）可表示为非守恒形式
as

$$\partial_t U + A^1(U)\partial_x U = S^1(U), \tag{34}$$

其中 $U = (h, hu_m)$，且系统矩阵 $A^1(U) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$由下式给出

$$A^1(U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u_m^2\left(1 - \frac{\varepsilon^2 h^2}{48\lambda_0^2}\right) + gh - \frac{g\varepsilon^2 h^3}{48\lambda_0^2} & 2u_m\left(1 + \frac{\varepsilon^2 h^2}{48\lambda_0^2}\right) \end{pmatrix}. \tag{35}$$

此外，源项 $S^1(U) \in \mathbb{R}^2$ 定义为

$$S^1(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{v_0 u_m}{\lambda_0}\left(1 - \frac{\varepsilon h}{4\lambda_0} + \frac{\varepsilon^2 h^2}{24\lambda_0^2}\right). \end{pmatrix} \tag{36}$$

RSWME1（形式为（34））使我们能够对方程组进行更深入的分析。矩阵$A^1(U)$ 由（35）给出的特征值对应于波的传播速度，这是方程组的一项关键性质。如果这些特征值为复数，则不再存在实传播速度，可能会导致不稳定性。在本小节中，我们将考察（34）是否保持双曲性。

为分析双曲性，我们判断 $\lambda_{1,2}$ 的 $A^1(U)$ 由（35）给出的特征值是否为实数且互不相同。这些特征值为

$$\lambda_{1,2} = u_m\left(1 + \frac{h^2\varepsilon^2}{48\lambda_0^2}\right) \pm \sqrt{gh}\sqrt{\frac{\varepsilon^4 h^3 u_m^2}{2304\lambda_0^4 g} - \frac{\varepsilon^2 h^2}{48\lambda_0^2} + \frac{\varepsilon^2 h u_m^2}{16\lambda_0^2 g} + 1}. \tag{37}$$

双曲性要求判别式为正，即

$$\left(\frac{\varepsilon^4 h^3}{2304\lambda_0^4 g} + \frac{\varepsilon^2 h}{16\lambda_0^2 g}\right) u_m^2 - \frac{\varepsilon^2 h^2}{48\lambda_0^2} + 1 \geq 0. \tag{38}$$

鉴于难以 确定 h 和 u_m 使条件（38）成立的取值，我们先分析 当$u_m = 0$时的情况。特定情形下，为保证双曲性，h 必须满足以下条件

$$0 < h < \frac{4\sqrt{3}\lambda_0}{\varepsilon}. \tag{39}$$

由于（38）中依赖于u_m^2 的项随u_m单调增加，因此在$u_m = 0$ 处具有双曲性，意味着对所有$u_m > 0$均具有双曲性。

条件（39）要求$h\ \lambda = h_{\lambda_0}^{\varepsilon} = \mathcal{O}(\varepsilon)$ 必须低于某个阈值，这与尺度关系（$\varepsilon \ll 1$）一致。因此，当 RSWME1 不再能描述黏性滑移区间时，双曲性便会失效。

定理 1（RSWME1 的双曲正则化）。通过在最后一个方程左端添加以下项，*RSWME1* 方程组（29）可获得全局双曲正则化：

$$\partial_x\left(\frac{4\varepsilon^4 h^6 g}{6 \cdot 192^2 \lambda_0^4}\right), \tag{40}$$

证明。为建立全局双曲性，我们在方程组（29）的最后一个方程中加入正则化项（40），从而得到修正后的系统矩阵（35：

$$A^{1,H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u_m^2\left(1 - \frac{\varepsilon^2 h^2}{48\lambda_0^2}\right) + gh - \frac{\varepsilon^2 h^3 g}{48\lambda_0^2} + \frac{4h^5\varepsilon^4 g}{192^2\lambda_0^4} & 2u_m\left(1 + \frac{\varepsilon^2 h^2}{48\lambda_0^2}\right) \end{pmatrix}. \tag{41}$$

双曲型 RSWME1（HRSWME1）的系统矩阵（41）的特征值为

$$\lambda_{1,2} = u_m\left(1 + \frac{h^2\varepsilon^2}{48\lambda_0^2}\right) \pm \sqrt{gh}\sqrt{\frac{\varepsilon^4 h^3 u_m^2}{2304\lambda_0^4 g} - \frac{\varepsilon^2 h^2}{48\lambda_0^2} + \frac{\varepsilon^2 h u_m^2}{16\lambda_0^2 g} + 1 + \frac{4\varepsilon^4 h^4}{192^2\lambda_0^4}}. \tag{42}$$

对于$u_m = 0$的特殊情形，特征值为

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{gh}\left(1 - \frac{2h^2}{192\lambda_0^2}\varepsilon^2\right). \tag{43}$$

(42) 中平方根下的项对于所有 $h > 0$ 且 $u_m = 0$时均严格为正。因此，当 u_m 变化时，该值始终为正，因为对于 $h > 0$，含有 u_m 的项均大于或等于零。因此，对于所有$h > 0$ 和 u_m(41) 的特征值均为实数且互不相同，从而保证了 HRSWME1 的全局双曲性。

□

需要注意的是，纳入 $\mathcal{O}$（ε^4）项（40）并不会降低 HRSWME1 的精度，因为 RSWME1 为 $\mathcal{O}$（ε^2）阶。

3.2 $N = 2$时浅水矩方程的渐近展开

在本小节中，将 $\mathscr{O}(\varepsilon^2)$ 阶浅水矩方程（针对$N = 2$ （SWME2））利用渐近近似进行简化，以便推导任意N的约化SWME系统。该约化将方程组由四个方程减少为两个方程，类似于先前推导的 $N = 1$ 情形。基于（7a）-（7c）的黏性滑移系统 SWME2 由下式给出

$$\begin{aligned}\partial_t \begin{pmatrix} h \\ hu_m \\ h\alpha_1 \\ h\alpha_2 \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} hu_m \\ hu_m^2 + \frac{1}{3}h\alpha_1^2 + \frac{1}{5}h\alpha_2^2 + g\frac{h^2}{2} \\ 2hu_m\alpha_1 + \frac{4}{5}\alpha_1\alpha_2 \\ 2hu_m\alpha_2 + \frac{2}{3}h\alpha_1^2 + \frac{2}{7}h\alpha_2^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (u_m - \frac{1}{5}\alpha_2)\partial_x(h\alpha_1) + \frac{1}{5}\alpha_1\partial_x(h\alpha_2) \\ \alpha_1\partial(h\alpha_1) + (u_m + \frac{\alpha_2}{7})\partial_x(h\alpha_2)) \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{\nu_0}{\lambda_0}\begin{pmatrix} 0 \\ u_m + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 3(u_m + \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{4\lambda_0}{\varepsilon h}\alpha_1) \\ 5(u_m + \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{12\lambda_0}{\varepsilon h}\alpha_2) \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{44}$$

与小节 3.1中的正则化浅水矩方程第一种情形类似， α_1 和 α_2 的渐近展开表示为

$$\alpha_1 = \alpha_1^{(0)} + \varepsilon\alpha_1^{(1)} + \varepsilon^2\alpha_1^{(2)} + \mathscr{O}(\varepsilon^3), \tag{45}$$

$$\alpha_2 = \alpha_2^{(0)} + \varepsilon\alpha_2^{(1)} + \varepsilon^2\alpha_2^{(2)} + \mathscr{O}(\varepsilon^3). \tag{46}$$

将（45）和（46）代入方程组（44的最后两个方程中，系数 $\alpha_1^{(i)}$ 和 $\alpha_2^{(i)}$ 针对$i = 0$，1，2，逐阶系统地推导得出。

浅水矩方程第二种情形的 $\mathscr{O}(\varepsilon^{-1})$ 阶近似。将渐近展开式（45）和（46）代入（44）的最后两个方程，并仅保留 $\mathscr{O}(\varepsilon^{-1})$ 阶项。求解 $\alpha_1^{(0)}$ 和 $\alpha_2^{(0)}$ 可得

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^{(0)} \\ \alpha_2^{(0)} \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \tag{47}$$

浅水矩方程第二种情形的 $\mathscr{O}(\varepsilon^0)$ 阶近似。仅保留（ $\mathscr{O}(\varepsilon^0)$ 阶项，并将（44）中的项与（47）结合，求解 $\alpha_1^{(1)}$ 和 $\alpha_2^{(1)}$，得到

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-hu_m}{4\lambda_0} \\ \frac{-hu_m}{12\lambda_0} \end{pmatrix}. \tag{48}$$

该 $\mathscr{O}(\varepsilon^1)$近似 浅水矩方程二阶近似的 $\mathscr{O}(\varepsilon)$阶贡献给出闭合关系（44）

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^{(2)} \\ \alpha_2^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\nu_0\lambda_0}\begin{pmatrix} \frac{1}{48}\left(\frac{-g}{4}\partial_x(h^4) + 3\frac{\nu_0}{\lambda_0}u_m h^2\right) \\ \frac{1}{720}\left(\frac{-g}{4}\partial_x(h^4) + 19\frac{\nu_0}{\lambda_0}u_m h^2\right) \end{pmatrix}. \tag{49}$$

由（49）得到的闭合关系遵循 $\alpha_1^{(2)}$ 第 3.1 小节中的推导步骤。

封闭约化SWME2模型将（47）、（48）和（49）中的闭合关系代入渐近展开（45）-（46），可得到系数 α_1 和 α_2的闭合关系：

$$\alpha_1 = \varepsilon\left(-\frac{hu_m}{4\lambda_0}\right) + \varepsilon^2\left(\frac{1}{48\nu_0\lambda_0}\left(-\frac{g}{4}\partial_x(h^4) + 3\frac{\nu_0 u_m h^2}{\lambda_0}\right)\right) + \mathscr{O}(\varepsilon^3), \tag{50}$$

$$\alpha_2 = \varepsilon\left(-\frac{hu_m}{12\lambda_0}\right) + \varepsilon^2\left(\frac{1}{720\nu_0\lambda_0}\left(-\frac{g}{4}\partial_x(h^4) + 19\frac{\nu_0 u_m h^2}{\lambda_0}\right)\right) + \mathscr{O}(\varepsilon^3). \tag{51}$$

为了得到h和hu_m的封闭系统，将 α_1 和 α_2 由（50）和（51）给出的表达式代入（44）的第二个和第三个方程。由于我们忽略了阶数为 $\mathscr{O}(\varepsilon^3)$ 及更高阶的高阶项，封闭约化SWME2（RSWME2）为

$$\begin{aligned}&\partial_t h+\partial_x(hu_m)=0,\\&\partial_t(hu_m)+\partial_x\left(hu_m^2T_1^2(h,u_m)+\frac{gh^2}{2}T_2^2(h,u_m)\right)=-\frac{\nu_0u_m}{\lambda_0}T_3^2(h,u_m),\end{aligned}\tag{52}$$

其中

$$T_1^2(h,u_m)=1+\frac{\varepsilon^2h^2}{45\lambda_0^2},\quad T_2^2(h,u_m)=1-\frac{\varepsilon^2h^2}{90\lambda_0^2},\quad T_3^2(h,u_m)=1-\frac{\varepsilon h}{3\lambda_0}+\frac{\varepsilon^2h^2}{45\lambda_0^2}.$$

注意，式（52）中的 RSWME2 与式（29）中的 RSWME1 具有相同的结构。唯一的区别在于缩放 $\mathscr{O}$（ε）和 $\mathscr{O}$（ε^2）项的常数。

注意，如注释1所示，可以推导出 RSWME2 的 Boussinesq 系数。重复这一过程可以表明，RSWME2 方程组也具有一个平流项，该项与基于 Boussinesq 系数的垂向速度剖面近似相一致。

双曲 性的 RSWME2式（52）中的方程组可以表示为非守恒形式 as

$$\partial_t U+A^2(U)\partial_x U=S^2(U),\tag{53}$$

其中$U=(h,\ hu_m)$。系统矩阵$A^2(U)\in\mathbb{R}^{2\times2}$为

$$A^2(U)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -u_m^2\left(1-\frac{\varepsilon^2h^2}{45\lambda_0^2}\right)+gh-\frac{g\varepsilon^2h^3}{45\lambda_0^2} & 2u_m\left(1+\frac{\varepsilon^2h^2}{45\lambda_0^2}\right)\end{pmatrix}.\tag{54}$$

此外，源项由 $S^2(U)\in\mathbb{R}^2$ 给出：

$$S^2(U)=\begin{pmatrix}0\\ -\frac{\nu_0u_m}{\lambda_0}\left(1-\frac{\varepsilon h}{3\lambda_0}+\frac{\varepsilon^2h^2}{45\lambda_0^2}\right)\end{pmatrix}\tag{55}$$

为分析双曲性，我们确定 $\lambda_{1,2}$ 是否为 $A^2(U)$ 根据（54）得到的特征值，并判断它们是否为实数且互不相同。这些特征值为

$$\lambda_{1,2}=u_m\left(1+\frac{h^2\varepsilon^2}{45\lambda_0^2}\right)\pm\sqrt{gh}\sqrt{\frac{\varepsilon^4h^3u_m^2}{2025\lambda_0^4g}-\frac{\varepsilon^2h^2}{45\lambda_0^2}+\frac{\varepsilon^2hu_m^2}{15\lambda_0^2g}+1}.\tag{56}$$

要满足双曲性，必须满足以下条件：

$$\left(\frac{\varepsilon^4h^3}{2025\lambda_0^4g}+\frac{\varepsilon^2h}{15\lambda_0^2g}\right)u_m^2-\frac{\varepsilon^2h^2}{45\lambda_0^2}+1\geq0.\tag{57}$$

与分析 RSWME1 方程组的双曲性类似，我们先分析$u_m=0$时的双曲性。对于这一特定情况，双曲性要求h 满足以下条件：

$$0<h<\frac{3\sqrt{5}\lambda_0}{\varepsilon}.\tag{58}$$

方程（u_m 左端依赖于 57）的项对于 $h\ >0$ 以及任意非零的 u_m始终为正。满足条件（58）且 $u_m=0$ 时，可确保对于所有 $u_m\geq0$，双曲性均成立。

条件（58）要求 $h\ \lambda\ =\ h\frac{\varepsilon}{\lambda_0}=\mathscr{O}(\varepsilon)$ 必须低于某个阈值，这与尺度关系（$\varepsilon\ll1$）一致。因此，当 RSWME2 不再能描述黏性滑移区间时，双曲性便会丧失。

定理 2（RSWME2 的双曲正则化）。 方程 （52）中定义的 *RSWME2* 方程组，通过在其最后一个方程的左侧添加以下项，可实现全局双曲正则化：

$$\partial_x \left(\frac{4\varepsilon^4 h^6 g}{6 \cdot 180^2 \lambda_0^4} \right). \tag{59}$$

证明。该结果可仿照定理1的证明得出。 □

3.3 任意 N 的浅水矩方程渐近展开

本节推导矩数为任意值的解，该矩数记为N。对任意N 进行阶次分析时，采用如下形式的渐近展开

$$\alpha_{N,i} = \alpha_{N,i}^{(0)} + \varepsilon \alpha_{N,i}^{(1)} + \varepsilon^2 \alpha_{N,i}^{(2)} + \mathscr{O}(\varepsilon^3), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{60}$$

并将其代入（7a）–（7c）。注意，我们使用记号 $\alpha_{N,\,i}$，对于$i = 1,\ \ldots\ldots,\ N$，表示N阶浅水矩方程中的矩变量 α_i。在本小节余下部分中，我们推导闭合关系$\alpha_{N,\,i}$；这些关系也可能随N而变化。

浅水矩方程的 $\mathscr{O}(\varepsilon^{-1})$ 近似将60）中的渐近展开代入$i = 1,\ \ldots\ldots,\ N$阶方程（7c）可得 $\mathscr{O}(\varepsilon^{-1})$阶项

$$\frac{v_0}{h} \left(\sum_{j=1}^{N} C_{ij} \alpha_{N,j}^{(0)} \right) = 0. \tag{61}$$

方程组（61）的矩阵—向量形式为

$$\boldsymbol{C}_N \boldsymbol{\alpha}_N^{(0)} = \mathbf{0}, \tag{62}$$

其中， $\boldsymbol{C}_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 的定义见（19）， $\boldsymbol{\alpha}^{(0)}{}_N$ 是一个向量，其第j个分量对应于 $\alpha^{(0)}{}_{N,j}$。如 [8], 所示，矩阵 $\boldsymbol{C}_N$ 可逆，因此解为

$$\alpha_{N,i}^{(0)} = 0, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{63}$$

浅水矩方程的 $\mathscr{O}(\varepsilon^0)$ 近似将（63）代入 $\mathscr{O}(\varepsilon^0)$阶方程组（7c），得到系数变量 $\alpha^{(1)}{}_{N,j}$的N个闭合关系：

$$\sum_{j=1}^{N} C_{ij} \alpha_{N,j}^{(1)} = -\frac{u_m h}{\lambda_0},$$

其中$i = 1,\ \ldots\ldots,\ N$。用矩阵—向量形式表示， $\boldsymbol{\alpha}^{(1)}{}_N \in \mathbb{R}^N$的解可写为

$$\boldsymbol{C}_N \boldsymbol{\alpha}_N^{(1)} = -\mathbf{1} \frac{u_m h}{\lambda_0}, \tag{64}$$

其中 $\boldsymbol{C}_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$的各项为 $C_{Nij} = C^{ij}$， $\boldsymbol{\alpha}^{(1)}{}_N$ 是由以下各项组成的一阶系数向量（$\boldsymbol{\alpha}^{(1)}{}_N$）$_i = \alpha^{(1)}{}_{N,\,i}$（对于 $i = 1,\ \ldots\ldots,\ N$），而 $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^N$是全 1 向量。重写方程（64）可得到系数 $\alpha^{(1)}{}_{N,\,i}$（$i = 1,\ \ldots\ldots,\ N$）的闭合关系：

$$\alpha_{N,i}^{(1)} = -\frac{u_m h}{\lambda_0} \sum_{j=1}^{N} (\boldsymbol{C}_N^{-1})_{ij}. \tag{65}$$

因此，闭合关系 $\alpha^{(1)}{}_{N,\,i}$（对于 $i=1,\ .....,\ N$）可表示为

$$\alpha_{N,i}^{(1)} = -\frac{1}{\lambda_0}\widetilde{B}_i^{(N)}\, u_m h, \tag{66}$$

其中 $\widetilde{B}^{(N)}{}_i \in \mathbb{R}$ 是一个与u_m、h、t和x无关的常数，其表达式为

$$\widetilde{B}_i^{(N)} = \sum_{j=1}^{N} (\boldsymbol{C}_N^{-1})_{ij}. \tag{67}$$

浅水矩方程的 $\mathscr{O}(\varepsilon^1)$阶近似将式（63）和（65）中的解代入方程（ $\mathscr{O}(\varepsilon)$的阶项7c）。求解 $\alpha^{(2)}{}_{i,N}$ $(i=1,\ldots,N)$可得 $\boldsymbol{\alpha}^{(2)}{}_N \in\mathbb{R}^N$对应的以下闭合关系

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}_N \boldsymbol{\alpha}_N^{(2)} = -\frac{g}{4\nu_0\lambda_0}(\widetilde{\boldsymbol{I}}_1^N \mathbf{1})\partial_x(h^4) - \frac{1}{\lambda_0^2}(\widetilde{\boldsymbol{I}}_2^N \mathbf{1}) u_m h^2, \tag{68}$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$其中，$\boldsymbol{C}_N \in \mathbb{R}^{N\times N}$、$\boldsymbol{I}_1^N \in \mathbb{R}^{N\times N}$和 $\boldsymbol{I}_2^N \in \mathbb{R}^{N\times N}$是矩阵，其元素对于$i$、$j=1,\ldots,N$由下式给出

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}_{Nij} = (2i+1)C_{ij}, \tag{69}$$

$$(\widetilde{\boldsymbol{I}}_1^N)_{ij} = (\boldsymbol{C}_N^{-1})_{ij}, \tag{70}$$

$$(\widetilde{\boldsymbol{I}}_2^N)_{ij} = (\boldsymbol{C}_N^{-1})_{ij} - (2i+1)\Big(\sum_{k,l=1}^{N}(\boldsymbol{C}_N^{-1})_{kl}\Big)\delta_{ij}. \tag{71}$$

对于$i=1,\ldots,N$，将方程（68）改写为

$$\alpha_{N,i}^{(2)} = \frac{1}{\lambda_0^2}\widetilde{D}_i^{(N)}\, u_m h^2 - \frac{g}{4\nu_0\lambda_0}\widetilde{F}_i^{(N)}\,\partial_x(h^4), \tag{72}$$

其中，$\widetilde{D}^{(N)}{}_i$和 $\widetilde{F}^{(N)}{}_i \in \mathbb{R}$ 是与u_m、h、x和t无关的常数。$\widetilde{D}^{(N)}{}_i$和$\widetilde{F}^{(N)}{}_i$ 的显式表达式为

$$\widetilde{D}_i^{(N)} = -\sum_{j=1}^{N}(\widetilde{\boldsymbol{C}}_N^{-1}\boldsymbol{C}_N^{-1})_{ij} + \left(\sum_{k,l=1}^{N}(\boldsymbol{C}_N^{-1})_{k,l}\right)\left(\sum_{j=1}^{N}(\boldsymbol{C}_N^{-1})_{ij}\right), \tag{73}$$

$$\widetilde{F}_i^{(N)} = \sum_{j=1}^{N}(\widetilde{\boldsymbol{C}}_N^{-1}\boldsymbol{C}_N^{-1})_{ij}. \tag{74}$$

任意 N 的封闭 RSWME 模型将 (63)、(66) 和 (72) 代入 (60)，可得 $\alpha_{N,j}(j=1,\ldots,N)$ 的闭合关系如下：

$$\alpha_{N,j} = -\frac{\varepsilon}{\lambda_0}\widetilde{B}_j^{(N)} u_m h + \varepsilon^2\left(\frac{1}{\lambda_0^2}\widetilde{D}_j^{(N)} u_m h^2 - \frac{g}{4\nu_0\lambda_0}\widetilde{F}_j^{(N)}\partial_x(h^4)\right) + \mathscr{O}(\varepsilon^3). \tag{75}$$

将 (75) 代入 (7b) 并忽略 $\mathscr{O}(\varepsilon^3)$和 $\mathscr{O}(\varepsilon^4)$各项，可得到如下形式的封闭 RSWME 方程组

$$\partial_t U + A^N(U)\partial_x U = S^N(U). \tag{76}$$

系统矩阵 $A^N(U) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 式（76）定义为

$$A^N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u_m^2\left(1-\frac{\varepsilon^2 h^2}{\lambda_0^2}\Gamma^N\right) + gh\left(1-\frac{\varepsilon^2 h^2}{\lambda_0\nu_0}\Phi^N\right) & 2u_m\left(1+\frac{\varepsilon^2 h^2}{\lambda_0^2}\Gamma^N\right) \end{pmatrix}, \tag{77}$$

其中，常数 Γ^N 和 $\Phi^N \in \mathbb{R}$ 由下式给出

$$\Gamma^N = \sum_{j=1}^{N} \frac{\left(\widetilde{B}_j^{(N)}\right)^2}{2j+1}, \quad \Phi^N = \sum_{j=1}^{N} \widetilde{F}_j^{(N)}. \tag{78}$$

源项 $S^N(U) \in \mathbb{R}^2$ 在 (76) 中为

$$S^N(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{v_0}{\lambda_0} u_m \left(1 - \frac{\varepsilon}{\lambda_0}\Omega^N h + \frac{\varepsilon^2}{\lambda_0^2}\Lambda^N h^2\right) \end{pmatrix}, \tag{79}$$

其中，常数 Ω^N 和 $\Lambda^N \in \mathbb{R}$ 定义为

$$\Omega^N = \sum_{i=1}^{N} \widetilde{B}_i^{(N)}, \quad \Lambda^N = \sum_{i=1}^{N} \widetilde{D}_i^{(N)}. \tag{80}$$

我们进一步给出以下关于阶数为 N 的正则化浅水矩方程的定理。

定理 3 (相同的封闭正则化浅水矩方程组)。 对于 $N \geq 2$，所有正则化浅水矩方程组均相同。

证明。 详细证明见附录 B。 □

由定理 3 可知，对于所有 $N \geq 2$，系统矩阵 $A^N \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ （77）和源项$S^N \in \mathbb{R}^2$ （79）保持不变。因此，利用从 RSWME2 系统数值计算得到的 h 和 u_m，通过在后处理步骤中将这些解代入 (3) 的闭合关系，可得到任意 N 下的速度剖面，其中 $\alpha_{N,\,i}$，对于 $i = 1,\ldots,N$，由 (72) 给出。

理论上，与使用规模大得多、维度按$N+2$增长的方程组的浅水矩方程相比，正则化浅水矩方程可大幅缩短运行时间。

任意 N 下正则化浅水矩方程的双曲性 作为定理 3 的推论，任意 N ≥ 2 时的双曲性条件与 N $= 2$时的情形相同，具体如条件 (58) 所述。对于任意 N，只要满足假设 $\lambda = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ 和 $\nu = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$，该模型就是双曲的，其中$\varepsilon \ll 1$ 是一个较小的尺度关系。此外，定理 2 中提出的适用于 N $= 2$ 的双曲正则化方法，可扩展以确保任意 N 下的全局双曲性。因此，对于任意 N ≥ 2，在 (76) 左侧加上 (59) 中的正则化项，即可实现全局双曲性。

4 数值模拟

本节首先介绍处理黏性滑移浅水矩方程中刚性源项所需的时间积分格式。随后介绍三项数值测试：具有陡峭梯度的波（基于 [12]）、光滑正弦波，以及初始平方根速度剖面。

为考察正则化浅水矩方程及其矩变量闭合关系的精度和计算成本，我们进行了数值实验，并以浅水矩方程作为参考解。

4.1 数值方法

当滑移长度的标度较大时，λ且黏度 ν如（17）所示，浅水矩方程系统（*14*）中的源项S(U) 为 $\mathcal{O}($ ε^{-1})量级。这种尺度关系可能导致刚性，进而引发数值不稳定性。为避免这些数值不稳定性， [8], 采用算子分裂，使源项能够以隐式方式积分，同时保持数值格式的稳定性。

在 [8], 中，SWME 模型 (7a)-(7c) 按如下方式拆分为两部分

$$\partial_t U + A(U)\partial_x U = 0, \tag{81}$$

$$\partial_t U = S(U). \tag{82}$$

表1：尖锐梯度波模拟的数值设置。

黏度	$\nu \in \{100, 10, 1\}$
滑移长度	$\lambda \in \{100, 10, 1\}$
时间域	$t \in [0, 2]$
空间域	周期性 $x \in [-1, 1]$
空间分辨率	$n_x = 1000$
初始高度	$h(x,0) = 1 + \exp(3\cos(\pi(x+0.5)) - 4.0)$
初始速度剖面	$u(x0,\xi) = 0.5\xi$
CFL 条件	0.7
数值格式	PRICE [4, 5]

为求解 (81)，我们采用基于针对非守恒乘积所发展的多项式黏性方法的路径守恒有限体积格式，如 [4, 5]，中所述，并使用线性路径和多项式黏性矩阵。对于 (82) 中的源项，采用隐式后向欧拉格式，从而得到

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = S(U^{n+1}), \tag{83}$$

其中 U^n 表示向量 U 在离散时间 $t = t^n$，满足 t^n 对应于第 n 个时间步。由于 S 是线性的，因此可以通过求逆矩阵直接求解方程组（83），与 [8]类似。

假设 $\lambda = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ 和 $\nu = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$，浅水方程（1）和正则化浅水矩方程（76）对应的源项阶数为 $\mathcal{O}(1)$。因此，这些源项不存在刚性，可以选择显式数值格式来处理源项。本文中，用于求解浅水方程和 RSWME 模型中的（82）的显式格式如下：

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = S(U^n). \tag{84}$$

4.2 采用陡峭水深梯度测试 Iwave

为评估 RSWME1 模型的准确性，我们开展了一个具有陡峭水深梯度的波浪测试，并将结果与 SWME1 模型所得结果进行比较。该测试的配置见表1。

在本分析中，我们采用 [12], 中的波浪测试，仅修改黏度 ν和滑移长度 λ 的取值，使得（17）成立。我们针对 $\varepsilon \in \{0.01, 0.1, 1\}$的不同取值评估 RSWME 模型的数值结果。最小值 $\varepsilon = 0.01$符合平衡假设，其中$\varepsilon \ll 1$。中间值 $\varepsilon = 0.1$对应于偏离平衡态的中等程度，而最大值 $\varepsilon = 1$则表示显著偏离平衡态，使$\varepsilon \ll 1$这一假设失效。

在方程（17）中，我们设定 $\lambda_0 = 1$ 和 $\nu_0 = 1$。因此，在数值模拟中，我们采用 $\lambda = \nu = \varepsilon^{-1}$。

对于空间离散，我们在多项式黏性方法框架下采用 PRICE 格式 [4, 5]。

针对 ε 的不同取值，我们进行了为期两秒的数值实验。图 1展示了浅水方程、RSWME1 和 SWME1 方程组的平均速度 u_m 和水深 h 的数值解。当 $\varepsilon = 0.01$ 且 $\varepsilon = 0.1$时，浅水方程、RSWME1 和 SWME1 的解无法区分。当 $\varepsilon \to 0$时，RSWME1 与浅水方程一致。根据 [8]， $\lambda \to \infty$ 表示矩系数消失时的平衡态。由于 $\lambda \to \infty$ 当 $\varepsilon \to 0$时，SWME1模型中的矩变量在 ε较小时可以忽略不计。

对于 $\varepsilon = 1$，不同模型之间存在显著差异。具体而言，RSWME1 对 SWME1 平均速度 u_m 的近似比浅水方程更准确。

以 SWME1 为参考计算的浅水方程和 RSWME1模型的相对 L_1 误差为

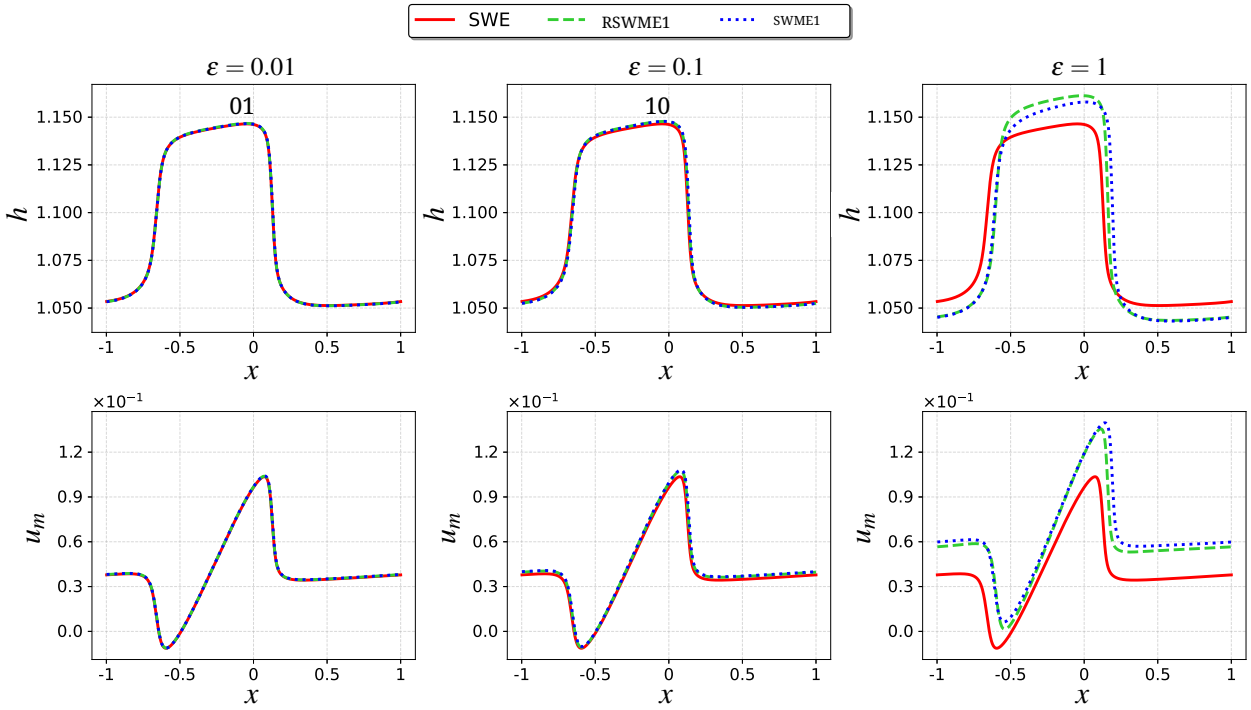


图 1：陡梯度波测试，对比浅水方程（红色实线）、RSWME1（绿色虚线）和 SWME1（蓝色点线）模型在 $t = 2.0$ 时的结果。图中展示了三组 ε 取值下的水深 h （上排）和速度u_m （下排）： $\varepsilon = 0.01$ （左）、 $\varepsilon = 0.1$ （中）和 $\varepsilon = 1$ （右）。

给出如下

$$E_{\mathrm{SWE},h} = \frac{\|h_{\mathrm{SWE}} - h_{\mathrm{SWME}}\|_1}{\|h_{\mathrm{SWME}}\|_1}, \qquad E_{\mathrm{SWE},u_m} = \frac{\|u_{m,\mathrm{SWE}} - u_{m,\mathrm{SWME}}\|_1}{\|u_{m,\mathrm{SWME}}\|_1},$$
$$E_{\mathrm{RSWME},h} = \frac{\|h_{\mathrm{RSWME}} - h_{\mathrm{SWME}}\|_1}{\|h_{\mathrm{SWME}}\|_1}, \qquad E_{\mathrm{RSWME},u_m} = \frac{\|u_{m,\mathrm{RSWME}} - u_{m,\mathrm{SWME}}\|_1}{\|u_{m,\mathrm{SWME}}\|_1}.$$

在表 2中，RSWME1 给出的水深 h 和平均速度 u_m 的解，相比浅水方程，对于 $\varepsilon \in \{0.01, 0.1, 1\}$能更好地逼近 SWME1。

通过将数值计算得到的 h 和 u_m 的解代入闭合关系（28），我们计算系数 α_1。闭合关系（28）涉及 h^4 关于x 的空间导数，我们使用 Godunov 格式对其进行数值近似。采用多种有限体积法格式对 $\partial_x(h^4)$ 进行离散的实验表明没有显著差异。因此，为简洁起见，省略了对比分析。

图（2）展示了 SWME1 模型对 α_1 的数值解，以及通过闭合关系（28）得到的 α_1 近似解。可以观察到，对于 $\varepsilon = 0.01$，两种解都趋于零。对于 $\varepsilon = 0.1$，SWME1 和 RSWME1 的解偏离零的程度相同，这表明 RSWME1 模型具有很高的精度。然而，对于 $\varepsilon = 1$，通过 RSWME1 解得到的近似解会出现较大的峰值。原因如下：闭合关系（28）包含一项，形式为 $_\varepsilon^2 \partial_x(\mathrm{h}^4)$ 4g。当 $\varepsilon = 1$ 且解在 h 上具有尖锐梯度时，该项会导致 α_1 的解出现显著峰值。为探究图2中观察到的这些偏差，我们考察浅水方程、RSWME 和 SWME 模型中 h^4 关于 x 的数值导数。图3展示了该导数在 ε 取不同值时的情况。对于 $\varepsilon = 1$，与浅水方程相比，SWME 和 RSWME 得到的 $\partial_x(\mathrm{h}^4)$ 值都显著更大。由于该导数还要乘以 ε^2，因此产生的峰值不像在 $\varepsilon \ll 1$ 的情况下那样受到阻尼。为了解哪些情况下矩的重构不会出现这些峰值，我们将在下一小节展示一个 h 梯度较小的光滑情形。

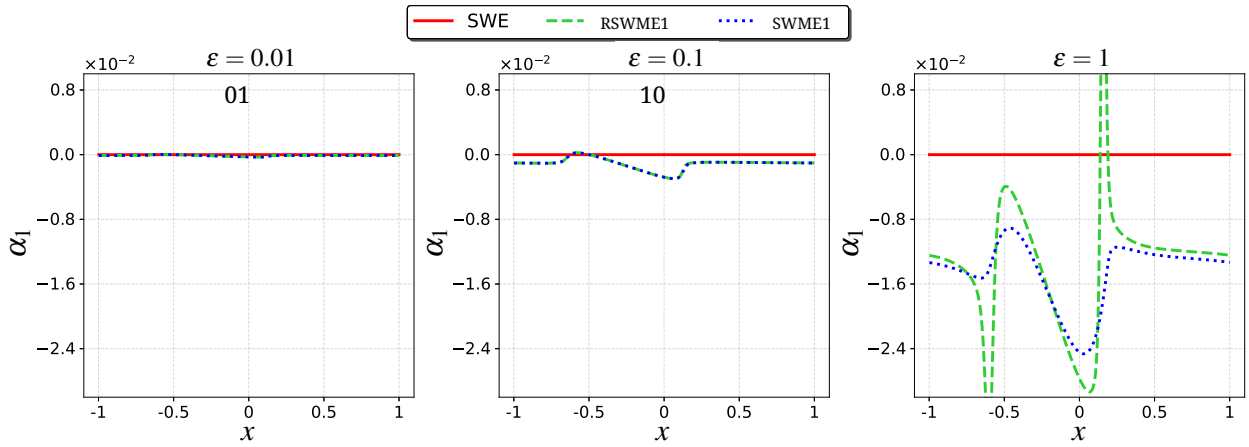


图2：在$t = 2.0$时比较浅水方程（红色实线）、RSWME1（绿色虚线）和SWME1（蓝色点线）模型的尖锐梯度波测试。结果展示了ε取三个值时的矩系数α_1：$\varepsilon = 0.01$（左）、$\varepsilon = 0.1$（中）和$\varepsilon = 1$（右）。

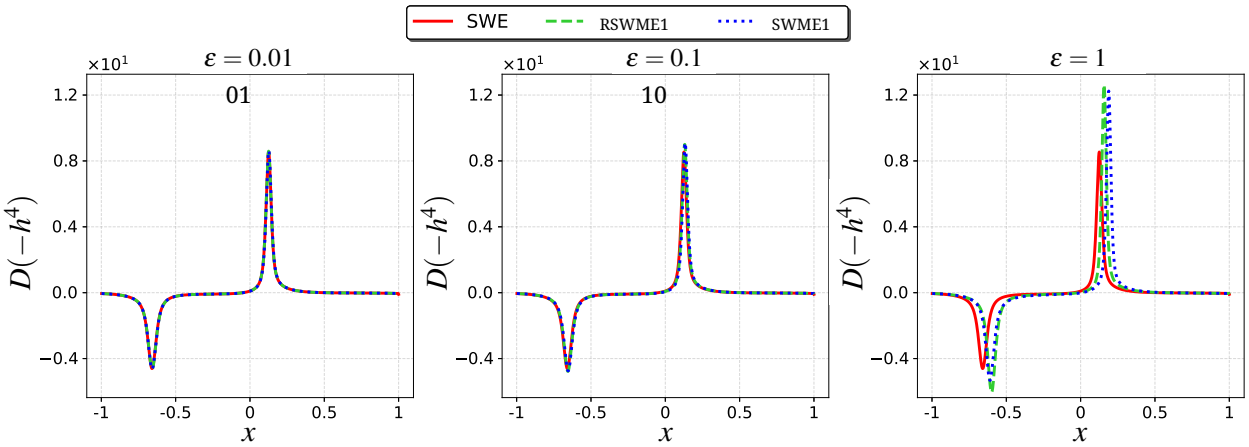


图3：在$t = 2.0$时比较浅水方程（红色实线）、RSWME1（绿色虚线）和SWME1（蓝色点线）模型的尖锐梯度波测试。采用Godunov重构计算的后处理$\partial_x(h^4)$值展示了ε取三个值时的结果：$\varepsilon = 0.01$（左）、$\varepsilon = 0.1$（中）和$\varepsilon = 1$（右）。

表2：陡梯度波的相对L_1误差（$t = 2.0$，$N = 1$）。

	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 1$
SWE, in h	1.4600e-04	1.2321e-03	1.0933e-02
RSWME1 , in h	1.1144e-04	2.5440e-04	2.9279e-03
SWE, in u	7.3797e-03	5.6935e-02	3.7623e-01
RSWME1 , in u	2.7112e-03	1.0151e-02	6.4229e-02

4.3 测试 II：平滑正弦波

为探究选择梯度更光滑的初始条件是否能通过闭合关系得到更精确的矩解，我们在表3中给出一个光滑正弦波测试情形。

针对光滑正弦波情形，在ε取相同数值的条件下进行了数值测试，模拟时长为两秒。模拟重点考察$N = 1$的情况，采用浅水方程、RSWME1 和 SWME1。图4展示了平均速度u_m和水深h的数值解。对于$\varepsilon = 0.01$和$\varepsilon = 0.1$，浅水方程、RSWME1 和 SWME1 得到的水深h数值解非常相似。对于$\varepsilon = 1$，与浅水方程相比，RSWME1 对水深给出的数值解更接近 SWME1

表3：光滑正弦波模拟的数值设置。

运动黏度	$\nu \in \{100, 10, 1\}$
滑移长度	$\lambda \in \{100, 10, 1\}$
时间域	$t \in [0, 2]$
空间域	周期性 $x \in [-1, 1]$
空间分辨率	$n_x = 1000$
初始高度	$h(x, 0) = 1 - 0.1$ 正弦 $(\frac{\pi x}{2})^2$
初始速度剖面	$u(x0, \xi) = 0.5\xi$
CFL 条件	0.7
数值格式	PRICE [4, 5]

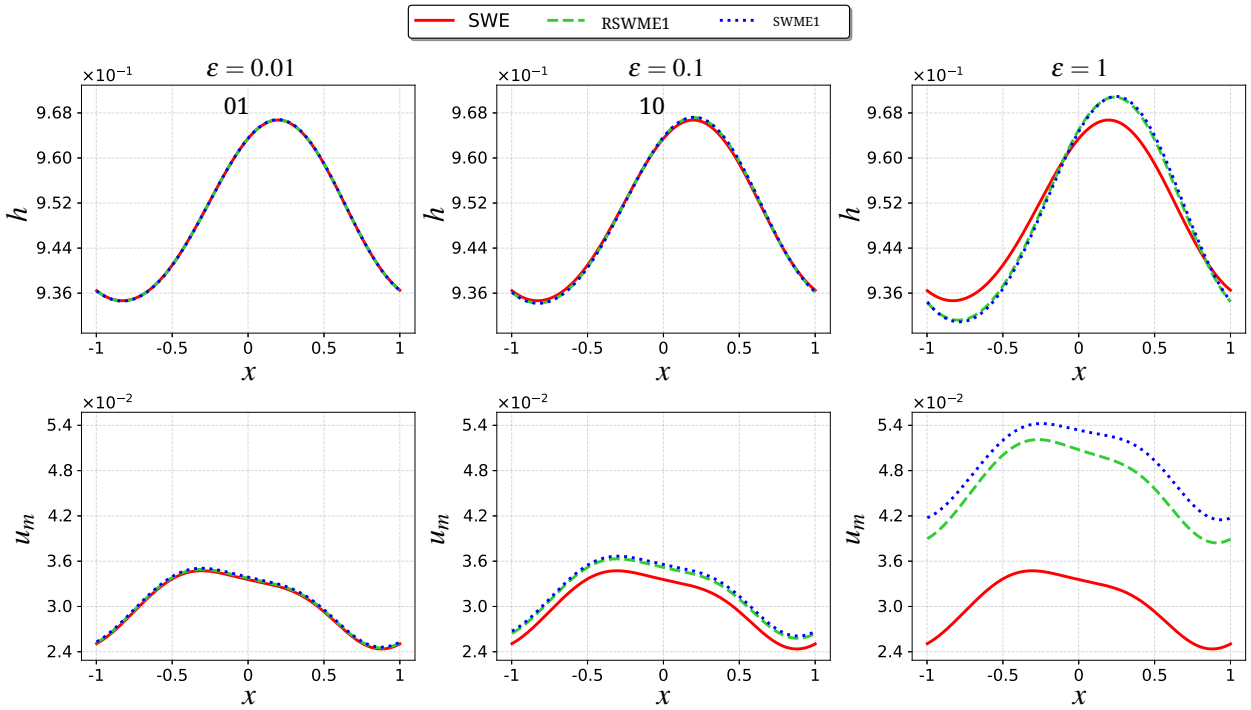


图 4：在 $t = 2.0$ 时，对比浅水方程（红色实线）、RSWME1（绿色虚线）和 SWME1（蓝色点线）模型的光滑正弦波测试。结果展示了三个 ε 值下，变量水深 h （上排）和平均速度 u_m （下排）的情况： $\varepsilon = 0.01$ （左）、$\varepsilon = 0.1$ （中）和 $\varepsilon = 1$ （右）。

h 和平均速度u_m。因此，RSWME1 比浅水方程更准确。

表 4 展示了 RSWME1 和浅水方程解相对于 SWME1 参考解的相对 L_1 误差。结果表明，与浅水方程相比，RSWME1 对 SWME1 的近似更为准确。比较相对误差时，RSWME1 相较于浅水方程的最小相对改进为 64%，出现在变量 u_m （$\varepsilon = 0.01$）中。最大相对改进为 88%，出现在变量 h （$\varepsilon = 0.1$）中。

图 5 展示了矩变量 α_1 的数值解。在此图中，图 $\varepsilon = 1$ 中陡梯度情形下出现的错误峰值并不存在。由此可见，对于 梯度较小的测试情形，矩变量的闭合关系在更大的 h^4 值范围内仍然准确 ε。

对于$N = 2$，我们将（52）中的 RSWME2 方程组与浅水方程和 SWME2 进行比较。再次针对 ε 的不同取值，进行了持续两秒的光滑正弦波案例数值测试。图 6展示了平均速度 u_m 和水深h 的数值解。图 6 可以看出，与浅水方程相比，RSWME2 得到的解更接近 SWME2。在表 5 中，给出了 RSWME2 和浅水方程解相对于作为参考解的 SWME2 的相对$L1$ 误差。表 4 和表 5 中的误差量级相近。这表明，对于这两种

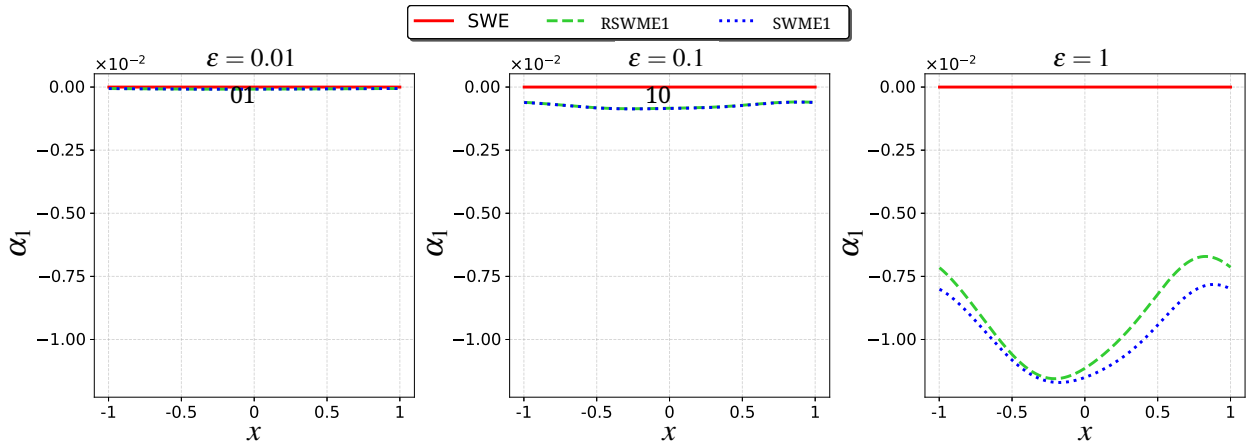


图5：光滑正弦波测试中，比较浅水方程（红色实线）、RSWME1（绿色虚线）和 SWME1（蓝色点线）模型在$t = 2.0$时的结果。结果展示了矩系数 α_1 在 ε的三个取值下的表现： $\varepsilon = 0.01$ （左）、 $\varepsilon = 0.1$ （中）和 $\varepsilon = 1$ （右）。

$N = 1$ 和$N = 2$，与浅水方程相比，RSWME 得到的近似解更接近 SWME2。选择 RSWME2 而非浅水方程所带来的最小相对改进为 57%，出现在变量u_m中，此时 $\varepsilon = 0.01$。最大相对改进发生在 $\varepsilon = 1$ 时，为 86%，并体现在h中。

将 u_m 和 h 的数值解代入闭合关系 (50) 和 (51)，即可重构 RSWME2 方程组中的矩变量 α_1 和 α_2。(50)–(51) 中的 $\partial_x(h^4)$ 项采用 Godunov 有限体积法格式进行数值计算。图7展示了RSWME2框架中的矩变量，并将其与数值计算得到的 SWME2 矩变量并列呈现。对于 $\varepsilon = 0.01$, RSWME2 和 SWME2 框架中的α_1 和 α_2 均为零，且保持接近于零。对于 $\varepsilon = 0.1$，与较小的 ε 值相比， α_1 和 α_2 的值偏离零更远。值得注意的是，对于 $\varepsilon = 0.1$，RSWME2 和 SWME2 对 α_1 和 α_2 的解相吻合。对于 $\varepsilon = 1$，RSWME2 对α_1 和 α_2 的近似值介于 SWME2 的取值与浅水方程的零矩值之间。此外，对于 $\varepsilon = 0.1$和 $\varepsilon = 1$，SWME2 和 RSWME2 对 α_2 的解始终小于对 α_1的解。

RSWME2与HRSWME2的比较 采用表3中的配置，我们对$N = 2$ 进行数值测试，比较定理2 中的RSWME2和HRSWME2，考察以下 ε =0.1,1,10这些不同取值。表6给出了数值测试实验的误差，其中SWME2作为参考解。

当 $\varepsilon = 0.1,1$时，我们可以观察到，RSWME2与HRSWME2的误差差异并不显著。这有两个原因。首先，RSWME2模型是稳定的，因为 ε 不会太大，因此条件（58）成立。其次，由于图$h < 1$ 中成立6，双曲性条件 $0 < h < 1 < \frac{\sqrt[3]{5}}{\varepsilon}$, 对 $\varepsilon = 0.1,1$成立。

在定理 2 中，所添加的双曲正则化项的阶为 $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$。对于 $\varepsilon = 0.1$，由于量级很小，此项可忽略不计。此外，摩擦项按因子 $\frac{4}{6\cdot 180^2} \approx 2\times 10^{-5}$ 缩放，这意味着其贡献极小。因此，即使对于 $\varepsilon = 1$, 附加项仍然很小。

表 4：光滑正弦波测试的相对L_1-误差（$t = 2.0$ 和$N = 1$）。

	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 1$
SWE, in h	4.6365e-5	3.6815e-4	3.2456e-3
RSWME1 , in h	1.7695e-5	5.4793e-5	4.3920e-4
SWE, in u_m	9.4071e-3	5.8338e-2	3.8118e-1
RSWME1 , in u_m	4.0201e-3	1.0659e-2	5.6338e-2

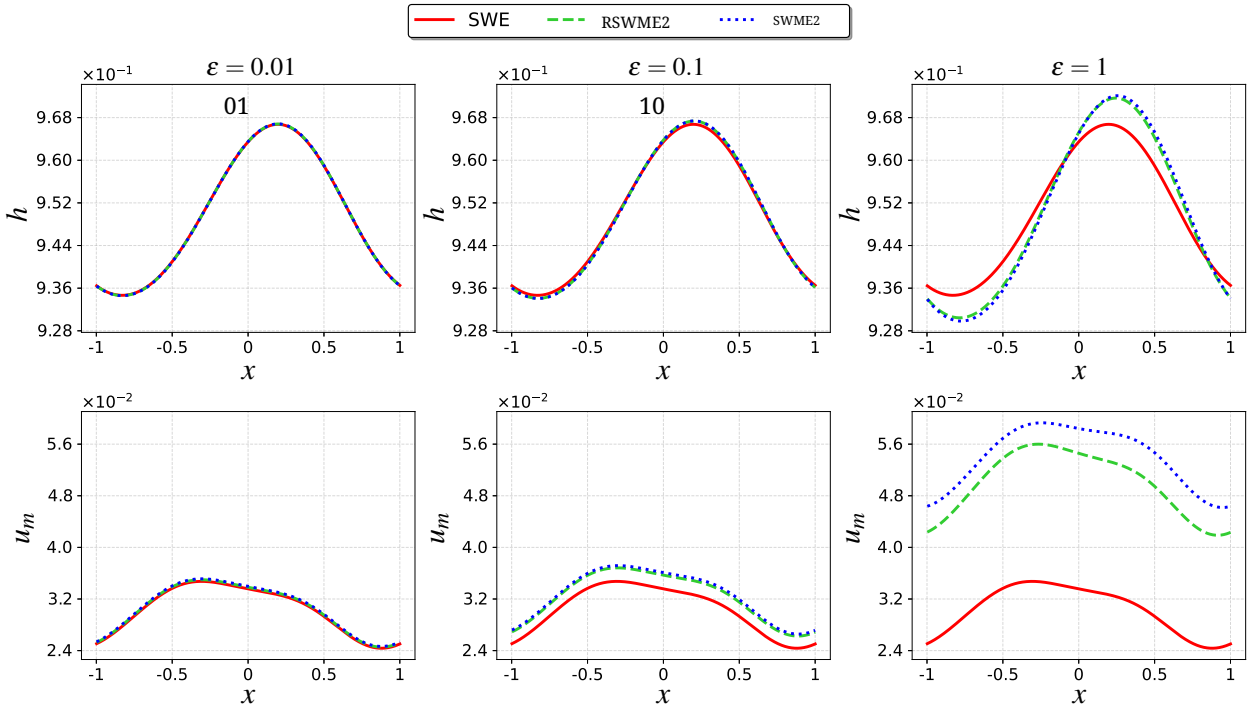


图6：光滑正弦波测试比较了浅水方程（红色，实线）、RSWME2（绿色，虚线）和SWME2（蓝色，点线）模型在$t = 2.0$时的结果。结果针对变量水深h和平均速度u_m给出，涵盖ε的三个取值：$\varepsilon = 0.01$（左）、$\varepsilon = 0.1$（中）和$\varepsilon = 1$（右）。

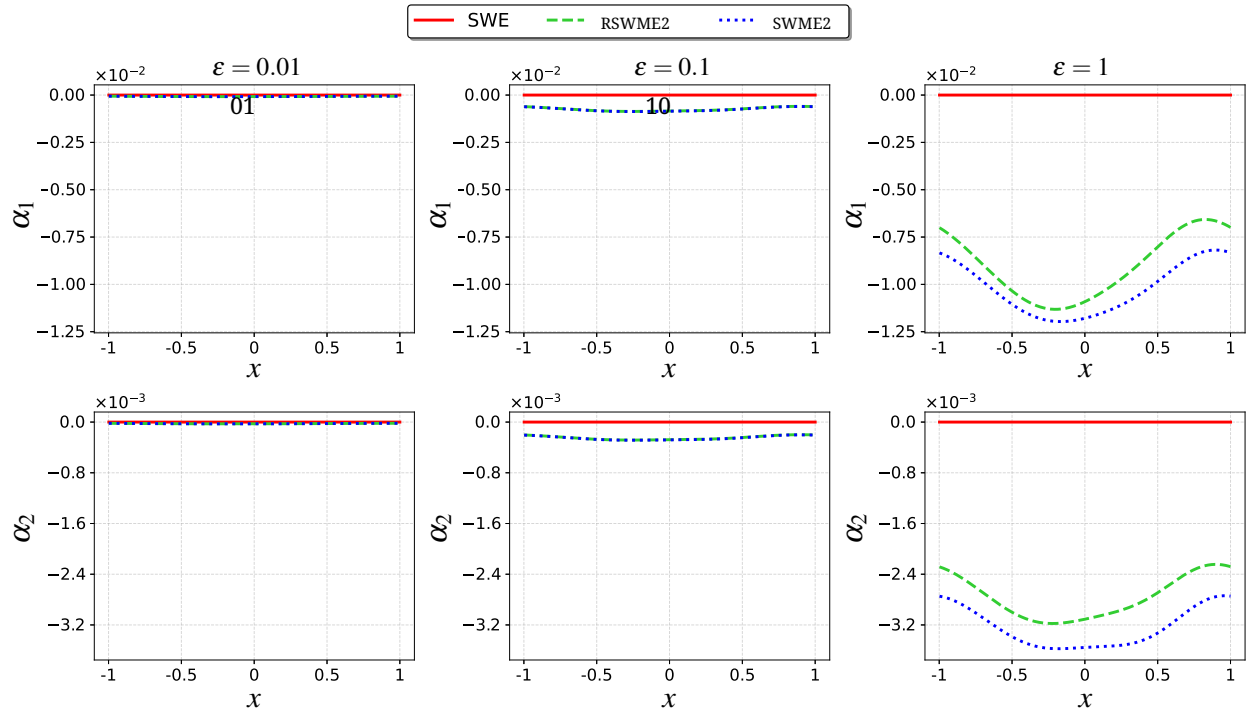


图7：光滑波测试比较了浅水方程（红色，实线）、RSWME2（绿色，虚线）和SWME2（蓝色，点线）模型在$t = 2.0$时的结果。结果针对矩系数α_1和α_2给出，涵盖ε的三个取值：$\varepsilon = 0.01$（左）、$\varepsilon = 0.1$（中）和$\varepsilon = 1$（右）。

鉴于所添加的正则化项对 $\varepsilon = 0.1$ 和 $\varepsilon = 1$ 均可忽略，RSWME2 与 HRSWME2 的解之间的差异预计并不显著。

对于 larg 在数值测试中，$\varepsilon = 10$ 的估计值显示，HRSWME2 的误差小于

表5：光滑正弦波测试的相对L_1误差（$t = 2.0$，$N = 2$）。

	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 1$
SWE, in h	5.6009e-5	4.7676e-4	4.1328e-3
RSWME2 , in h	1.6798e-5	5.5410e-5	6.1433e-4
SWE, in u_m	1.1182e-2	7.2932e-2	4.3821e-1
RSWME2 , in u_m	4.0137e-3	1.0549e-2	7.4865e-2

表6：正弦波测试的相对L_1误差（$t = 2.0$，$N = 2$）。

	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 10$
SWE, in h	4.7676e-4	4.1328e-3	1.6712e-2
RSWME2 , in h	5.5410e-5	6.1433e-4	3.5656e-1
HRSWME2 , in h	5.5410e-5	6.1407e-4	3.6133e-2
SWE, in u_m	7.2932e-2	4.3821e-1	8.2080e-1
RSWME2 , in u_m	1.0549e-2	7.4865e-2	1.5482e-0
HRSWME2 , in u_m	1.0549e-2	7.4790e-2	1.0000e-1

RSWME2。值得注意的是，在 $\varepsilon = 10$处，式（58）中的条件不再成立。RSWME2 的双曲性可能因此遭到破坏，进而引发不稳定性并导致错误的解。因此，HRSWME2 中加入双曲性项有助于减轻这些不稳定性，这也解释了其精度为何有所提高。

另一方面，对于 $\varepsilon = 10$ ，浅水方程的误差小于 HRSWME2 和 RSWME2。这可以解释为：一个核心模型假设不再成立，该假设指出ε 很小。因此，尽管与 RSWME2 相比 HRSWME2 是双曲的，但对于$\varepsilon = 10$它们不再有效。

在后续测试中，我们将不再继续使用 HRSWME2 模型，因为对于 ε 的有效取值，我们看不到精度或稳定性有所改善。虽然在 ε 取值较大时可以观察到精度提升，但 RSWME2 模型的基本假设此时不再成立。在这种情况下，与浅水方程模型相比，HRSWME2 的误差也更大。因此，为 HRSWME2 引入双曲正则化项并不能改善数值解。

4.4 测试III：平方根速度剖面

为了研究增加矩的数量是否能得到更精确的近似，我们从以下形式中选取一个初始速度剖面： [10] 其平方根为 $u(x\ \zeta,\ t) = \frac{2}{3}\sqrt{\zeta}$。平均速度和一阶矩系数的初始条件为

$$u_m(x,0) = 1, \quad \alpha_1(x,0) = -\frac{3}{5}, \quad \alpha_2(x,0) = -\frac{1}{7},$$
$$\alpha_3(x,0) = -\frac{1}{15}, \quad \alpha_4(x,0) = -\frac{3}{77}, \quad \alpha_5(x,0) = -\frac{3}{35}, \quad \alpha_6(x,0) = \frac{1}{55}.$$

表 7 显示了数值测试的配置。

表 7：平方根速度试验的数值设置。

运动黏度	$\nu = 2$
滑移长度	$\lambda = 2$
时间域	$t \in [0,2]$
空间域	周期性 $x \in [-1,1]$
空间分辨率	$n_x = 1000$
初始高度	$h(x,0) = 1 - 0.1$ 正弦 $(\frac{\pi x}{2})^2$
初始速度剖面	$u(x0,\zeta) = \frac{3}{2}\sqrt{\zeta}$
CFL 条件	0.7
数值格式	PRICE [4, 5]

我们进行了各种数值测试，以$N = 2$、4、6，比较 SWME、RSWME 和 SWE 数值解的精度。需要注意的是，根据定理3，RSWME2、RSWME4 和 RSWME6 完全相同。图8展示了平均速度u_m和水深h的数值解。对于每种$N = 2$、4、6，RSWME 模型对h和u_m的结果都比 SWE 模型更接近 SWME 模型。

将u_m和h的数值解代入闭合关系（75），即可重构 RSWME 方程组中的矩变量$\alpha_{N、i}$、$i = 1, \ldots\ldots, N$。（$\partial_x(h^4)$项在（75）中仍通过 Godunov 有限体积法格式进行数值计算。

图9展示了正则化浅水矩方程框架中的矩变量，以及通过数值计算得到的浅水矩方程矩变量。我们观察到，随着矩的阶数增加，$\alpha_{N、i}$、$i = 1, \ldots\ldots, N$的量值严格递减。这是合理的，因为对于$i = 1, \ldots\ldots, N$，$\alpha_{N、i}$是收敛展开的展开系数。

对 α_5 和 α_6 的计算表明，正则化浅水矩方程的系数已经为零，这与浅水矩方程的趋势一致；对于浅水矩方程，仍有大小为 $\mathcal{O}(10^{-7})$-$\mathcal{O}(10^{-8})$ 的微小贡献。此外可以观察到，对于 $N = 2,4,6$，正则化浅水矩方程的矩闭合关系可为 $\alpha_{N,i}$（其中 $i \leq 4$）提供解；与浅水方程框架中 $\alpha_{N,i} = 0$、$i = 1,\ldots,N$的情况相比，这些解对浅水矩方程的解给出了更准确的近似。

利用数值计算得到的 u_m 和矩变量解，可根据关系式（$x\ = x_0 = 0.5$ ）对 3中的垂向速度剖面进行可视化。在图 10中，我们比较了 $N = 2,4,6$ 时浅水方程、浅水矩方程和正则化浅水矩方程的速度剖面，其中固定常数为 $\varepsilon = 0.5$。正则化浅水矩方程预测的垂向速度剖面比浅水方程得到的剖面更接近浅水矩方程的结果。对于 $N = 2,4,6$ 的每种取值，与浅水方程相比，正则化浅水矩方程对浅水矩方程的近似效果更好。

在表8中，给出了各种模型的计算运行时间。浅水方程与正则化浅水矩方程之间的运行时间差异相对可以忽略。然而，我们可以观察到，对于$N = 2$、4、6，浅水矩方程的运行时间始终显著大于浅水方程和正则化浅水矩方程。这可以解释为：浅水方程和正则化浅水矩方程仅求解包含2个变量的方程组，而浅水矩方程求解包含$N + 2$ 个变量的方程组。

RSWME 与 SWE 的运行时间相差不大，这是因为 RSWME 需要额外执行一个后处理步骤：计算矩变量的闭合关系（75）。在数值

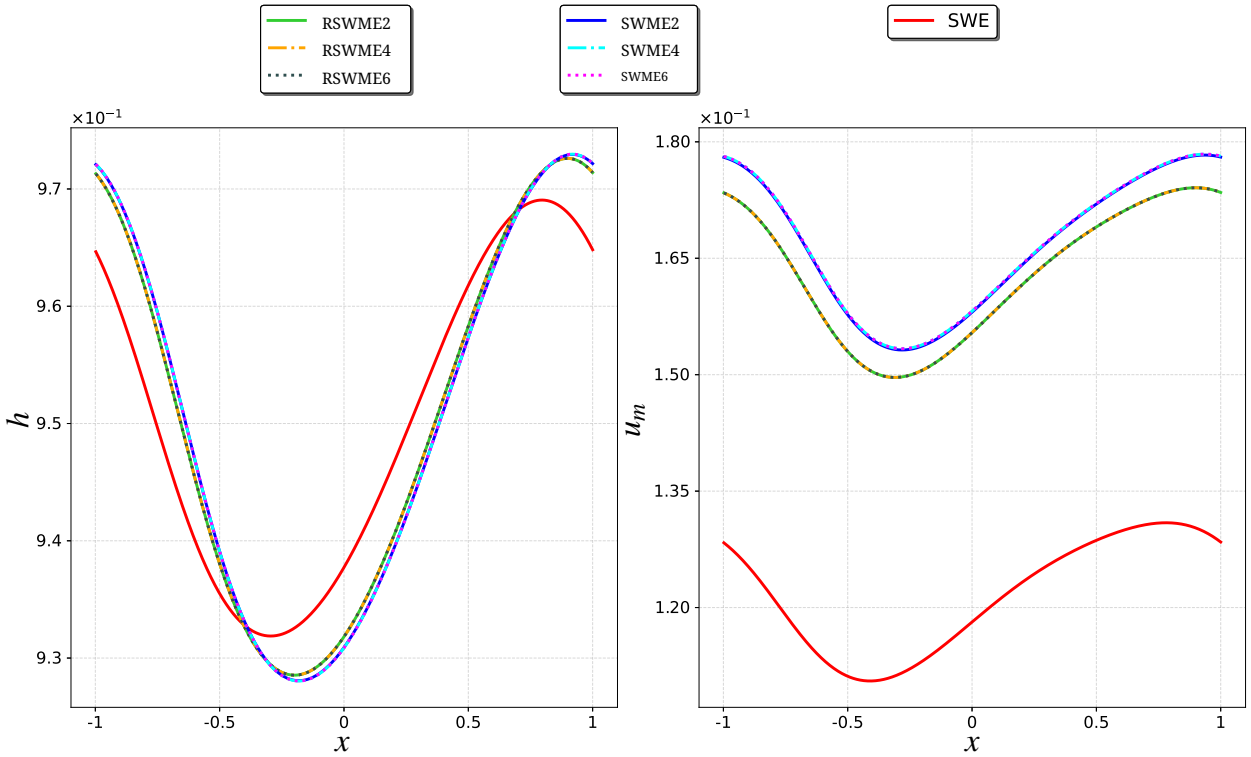


图 8：平方根速度剖面测试，对比浅水方程、RSWME 和 SWME 模型在$N = 2$（实线）、$N = 4$（虚线）和$N = 6$（点线）时$t = 2.0$的结果。结果展示了水深h（左）和平均速度u_m（右）等变量，以及$\varepsilon = 0.5$。

表 8：在 AMD EPYC 7763 64 核处理器上模拟平方根速度剖面测试情形至 $t = 2$ 的 CPU 运行时间比较。

N	浅水方程（s）	浅水矩方程（s）	正则化浅水矩方程（s）
0	132.6	-	-
2	-	170.0	138.7
4	-	307.4	138.6
6	-	606.8	138.9

测试中，结果计算至$t = 2$，并且矩变量的闭合关系仅在最后一个时间步计算一次。

表 8 中的实验结果表明，RSWME 模型比 SWME 快 18%（当 $N = 2$时）至 77%（当 $N = 6$时）。RSWME2 的模拟时间仅比浅水方程的运行时间多 5%，这点额外开销微不足道。此外，结果表明，增加矩的数量会显著延长 SWME 模型的模拟时间，而 RSWME 的模拟时间则保持不变。

为简洁起见，本文未列出陡波和光滑正弦波测试情形的运行时间。在实验过程中，我们观察到与表 8 中相似的加速比。

5 结论

本文介绍了约化浅水矩方程（RSWME），它是在高黏度和大滑移长度条件下对浅水矩方程（SWME）的一种准确且更高效的近似。与 SWME 相比，RSWME 所需的变量更少，同时能够模拟与均匀速度剖面略有偏差的垂向速度剖面。

浅水矩方程的一个显著代价在于，它需要包含更多数量的变量，相较于

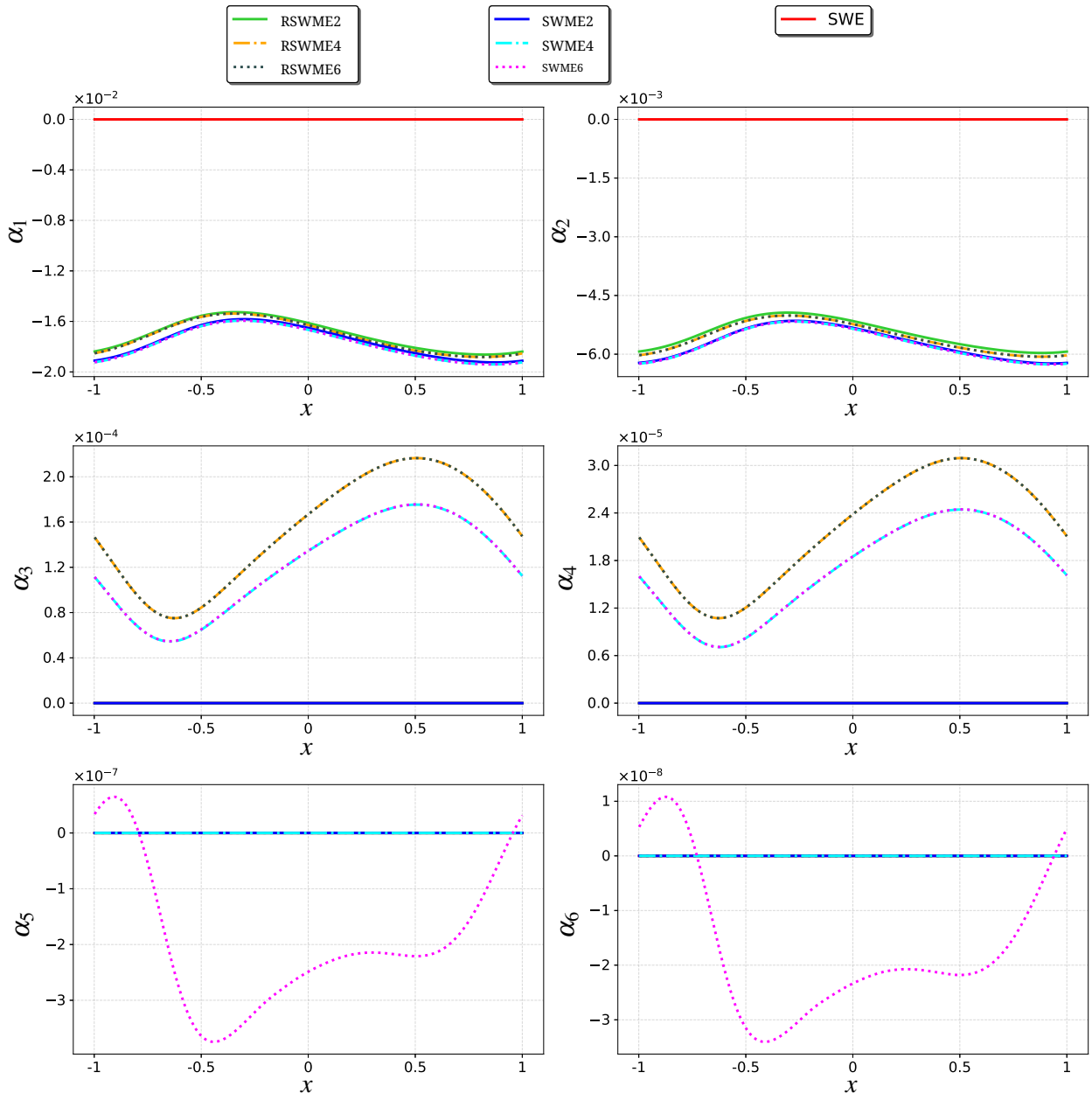


图 9：比较浅水方程、正则化浅水矩方程和浅水矩方程模型的平方根速度剖面测试，其中在$N = 2$（实线）、$N = 4$（虚线）和$N = 6$（点线）时，$t = 2.0$。结果展示了矩系数$\alpha_{N,i}$、$i = 1, \ldots\ldots, 6$ 以及 $\varepsilon = 0.5$。

浅水方程（SWE）相比，浅水矩方程（SWME）的一项显著代价是需要包含更多变量，即便其平衡态可以用更少的变量表示。为简化黏度和滑移长度较大的平衡态附近的浅水矩方程，我们采用渐近展开来分析该平衡态附近的小偏离。

对浅水矩方程进行了大黏度和大滑移尺度分析。对该浅水矩方程模型进行渐近分析，得到了小量参数二阶精度以内的矩变量显式闭合关系。将这些闭合关系代入原始浅水矩方程模型，得到正则化浅水矩方程。由于正则化浅水矩方程是降维模型且变量较少，因此其计算成本较低。此外，我们证明，对于较多矩的情形，闭合的正则化浅水矩方程组是相同的。

这种简洁的闭合形式使得我们能够深入分析这些方程，例如研究其双曲性。与相关的浅水矩方程模型类似，我们进行了双曲正则化。

准确性　cy以及正则化浅水矩方程的计算效率通过数值测试在　-

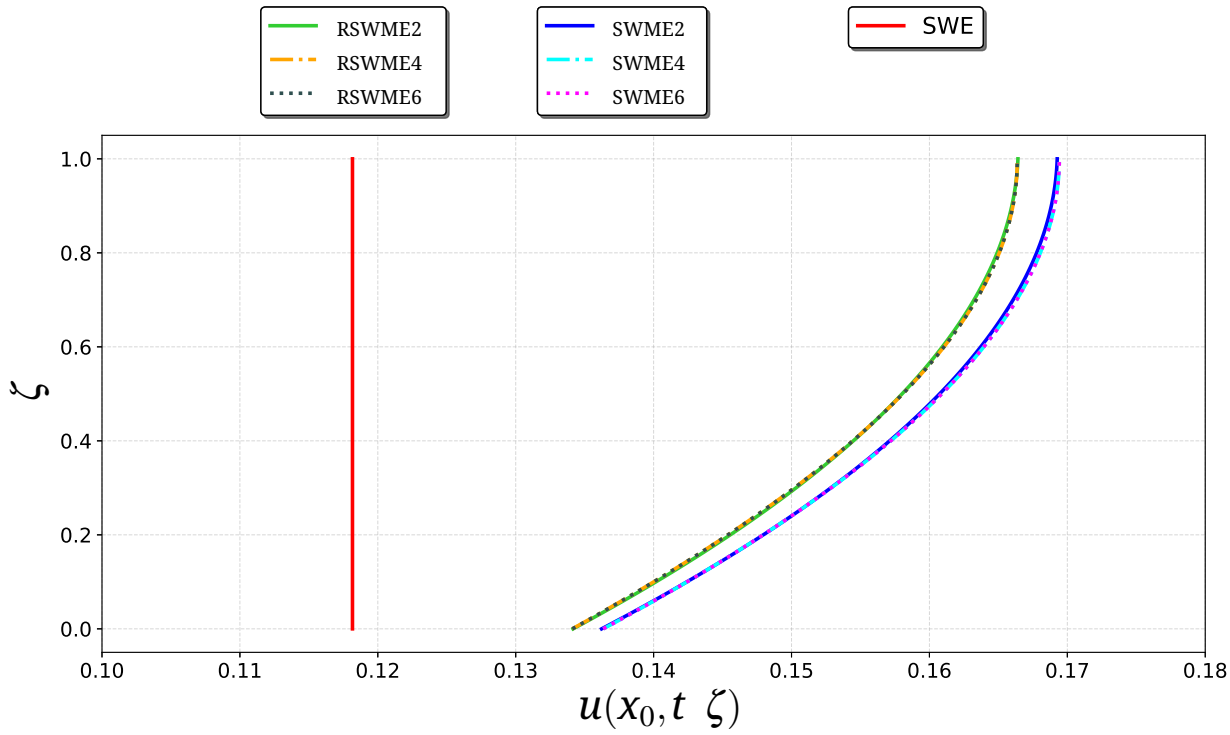


图 10：平方根速度剖面测试，对比浅水方程、正则化浅水矩方程和浅水矩方程模型在$N = 2$（实线）、$N = 4$（虚线）和$N = 6$（点线）时，$t = 2.0$的结果。图中展示了 $\varepsilon = 0.5$和$x_0 = 0.0$处的垂向速度剖面$u(x_0,t\ \zeta)$。

volving一个具有陡峭水深梯度的波、一个光滑正弦波测试情形，以及一个平方根初始速度分布。尽管在水深和平均速度方面表现出显著精度，但具有波和陡峭水深梯度的测试在大幅偏离平衡态时，会在矩变量上给出不正确的解。对于光滑正弦波，获得了准确的正则化浅水矩方程解；与浅水方程相比，这些解在小幅和大幅偏离平衡态时都能更准确地逼近浅水矩方程。在光滑正弦波测试中，正则化浅水矩方程的相对误差相对于浅水方程最多相对改善了88%。平方根速度剖面测试表明，正则化浅水矩方程比浅水方程给出更准确的速度剖面。对于平方根速度剖面测试，RSWME 模型相对于浅水矩方程展现出最高达77%的运行时间缩减。

这些发现支持两种不同的解读：（1）正则化浅水矩方程的精度与浅水矩方程相当，同时所需计算时间显著更短；（2）正则化浅水矩方程模型的精度优于浅水方程，且计算成本相近。因此，正则化浅水矩方程模型适用于高效数值模拟。

未来的工作可研究将渐近近似应用于采用其他黏度和滑移长度标度的浅水矩方程。此类分析可聚焦于A中详述的平衡态，例如开发以较小滑移长度为特征的降阶模型。

CRediT 作者贡献声明

M. Daemen： 概念化、方法学、软件、形式分析、调查、数据整理、初稿撰写、审阅与编辑、可视化。 **J. Careaga：** 概念化、审阅与编辑、监督、可视化。 **Z.Cai**概念化、资源、审阅与编辑。 **J. Koellermeier：** 概念化、资源、审阅与编辑、监督、经费获取。

致谢

本研究得到荷兰研究委员会（NWO）通过 ENW Vidi 项目 HiWAVE 资助，项目编号为 VI.Vidi.233.066。我们感谢 Rik Verbiest 提供浅水矩方程（SWME）的数值模拟代码。

关于在稿件准备过程中使用生成式 AI 和 AI 辅助技术的声明。

在准备这项工作期间，作者使用了 Minstral AI 的 Le Chat 来改善写作风格、优化方程格式并调试软件。使用该工具/服务后，作者根据需要审阅并编辑了内容，并对已发表文章的内容承担全部责任。

A 渐近 摩擦参数不同标度下的近似

对于摩擦参数的不同标度， λ 和 ν，可以推导出各自平衡态附近的近似解。表9 总结了可行情形，表明只有当黏度 ν 为 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ 阶，或滑移长度 λ 为 $\mathcal{O}(\varepsilon)$ 阶时，才能得到此类近似。在该表中，第四列表示渐近解的阶数，第五列列出了平衡态附近降维系统中保留的变量。

一种可能的策略（即情形 II）是通过按 $\lambda = \lambda_0\varepsilon$缩放滑移长度来减少变量数量。在无滑移情形 II 中，当 $\varepsilon \to 0$ 时，方程（7b）和（7c）中的主阶解化简为

$$u_m + \alpha_1 + \ldots + \alpha_N = 0. \tag{85}$$

这个首阶近似（85）与无滑移边界条件 $u|_{\xi=0} = 0$一致。在无滑移情形 II 中，虽然存在渐近近似，但它仅通过将 α_N近似为 h、u_m和 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{N-1}$的函数，将方程组减少一个变量，从而得到阶为 $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$的近似。为了研究一种能实现更大幅度降维并获得更准确渐近近似的情形，我们在本研究中聚焦于黏性滑移情形。

表 9中的情形 III 和 IV 分别采用标度 $\nu = \frac{\lambda_0}{\varepsilon}$和~~$\lambda$~~$\nu = \frac{\lambda_0}{\varepsilon}$， ~~$\lambda$~~$= \lambda_0\varepsilon$。令 $\varepsilon \to 0$ 代入方程（7a）–（7c），得到主阶方程

$$u_m = \alpha_1 = \ldots = \alpha_N = 0, \quad \partial_t h = 0. \tag{86}$$

对于情形 III 和 IV，采用渐近近似最终可将方程组化简为仅含一个变量h。此外，u_m和 $\alpha_j (j = 1,\ldots,N)$ 的近似解的阶为 $\mathcal{O}(\varepsilon)$，这表明这些解已接近平衡态，其中 h 为常数，且 $u = 0$。

表 9：滑移长度 λ 和黏度 ν的可能标度。

Case	λ	ν	解的阶	$\mathscr{E}$ 的变量
I	$\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$	$\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$	$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$	h, u_m
II	$\mathcal{O}(\varepsilon)$	$\mathcal{O}(\varepsilon^0)$	$\mathcal{O}(\varepsilon^0)$	h, hu_m, $h\alpha_1$, …, $h\alpha_{N-1}$
III	$\mathcal{O}(\varepsilon^0)$	$\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$	$\mathcal{O}(\varepsilon^3)$	h
IV	$\mathcal{O}(\varepsilon)$	$\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$	$\mathcal{O}(\varepsilon^3)$	h

B 定理3

在本节中，我们证明定理 3。首先，我们给出引理 1，该引理说明如何求解 $\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{b} = 1$，使其适用于任意 N。利用引理 1，定理 3得以证明。

引理 1。 设 $N \geq 2$ 和 $\boldsymbol{C}_N \in \mathbb{R}^{N\times N}$ 为一个矩阵，其元素由常数 $\boldsymbol{C}_{Nij} = C^{ij}$ （其中 i， $j = 1$，…，N，在 （10）中定义）给出，并设 $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^N$为全 *1* 向量。则以下线性方程组

$$\boldsymbol{C}_N \boldsymbol{b}_N = \mathbf{1}, \tag{87}$$

有唯一解 $\boldsymbol{b}_N = (b_1, b_2, \ldots, b_N)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^N$，其表达式为

$$b_1 = \frac{1}{4}, \quad b_2 = \frac{1}{12}, \quad \textit{and} \quad b_i = 0 \quad \textit{for } i = 3, \ldots, N.$$

证明。 首先注意到，矩阵 $\boldsymbol{C}_N$ 可以按分量计算为

$$\boldsymbol{C}_{Nij} = C_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } i-j \text{ is odd}, \\ 2\min(i,j)(\min(i,j)+1) & \text{if } i-j \text{ is even}, \end{cases} \tag{88}$$

对于 $i,j = 1,\ldots,N$，根据 [8]。由（88）可直接看出，其$\boldsymbol{C}_N$ 的第一列和第二列分别为向量

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}_1 &= (4,0,4,0,4,\ldots)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^N, \\ \boldsymbol{c}_2 &= (0,12,0,12,0,\ldots)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

此外，将矩阵 $\boldsymbol{C}_N$乘以 $\boldsymbol{b}_N = (1/4, 1/12, 0, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^N$可得

$$\boldsymbol{C}_N \boldsymbol{b}_N = \frac{1}{4}\boldsymbol{c}_1 + \frac{1}{12}\boldsymbol{c}_2 = \mathbf{1}.$$

因此， $\boldsymbol{b}_N$ 是方程组（87）的一个解，并且由于 $\boldsymbol{C}_N$ 可逆，该解也是（87）的唯一解。

□

引理1的一个直接推论是等式

$$\widetilde{B}_j^{(N)} = \sum_{k=1}^{N} (\boldsymbol{C}_N^{-1})_{jk} = (\boldsymbol{C}_N^{-1}\mathbf{1})_j = b_j, \quad \text{for } j = 1,\ldots,N, \tag{89}$$

因此 $\widetilde{\ }B^{(N)}{}_j = 0$对于 $j = 3,\ldots,N$，对所有 $N > 2$。此外，我们可以立即证明，向量$\widetilde{\boldsymbol{b}}_N = (\frac{1}{3}b_1, \frac{1}{5}$ $b2, 0, 0, \ldots)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^N$满足

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}_N^{\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{b}}_N = \mathbf{1} \quad \text{equivalently} \quad \widetilde{\boldsymbol{b}}_N = (\widetilde{\boldsymbol{C}}_N^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{1} = (\widetilde{\boldsymbol{C}}_N^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{1}. \tag{90}$$

借助引理 1 我们现在证明定理3。

定理 3 （相同的封闭正则化浅水矩方程组）。 对于 $N \geq 2$，所有 *RSWME* 系统都是相同的。

证明。为了确立来自 (76) 的 RSWME 系统对所有 N ≥ 2 都相同，只需证明来自 (77) 的系统矩阵 A^N 与来自 (79) 的源项 S^N 满足：$A^N(U) = A^2(U)$ 且 $S^N(U) = S^2(U)$ 对所有 N ≥ 2 成立。此外，根据它们的定义，这些等式成立当且仅当以下等式成立：

$$\Gamma^N = \Gamma^2, \quad \Phi^N = \Phi^2, \quad \Omega^N = \Omega^2, \quad \Lambda^N = \Lambda^2, \quad \text{for } N \geq 2,$$

其中， Γ^N、 Φ^N、 Ω^N 和 Λ^N 定义见（78）和（80）。利用（89）以及对所有$j \geq 3$和任意$N > 2$，$\widetilde{\ }B^{(N)}{}_j = 0$ 这一事实，我们可以直接得出

$$\Gamma^N = \sum_{j=1}^{N} \frac{\left(\widetilde{B}_j^{(N)}\right)^2}{2j+1} = \frac{\left(\widetilde{B}_1^{(N)}\right)^2}{3} + \frac{\left(\widetilde{B}_2^{(N)}\right)^2}{5} = \frac{\left(\widetilde{B}_1^{(2)}\right)^2}{3} + \frac{\left(\widetilde{B}_2^{(2)}\right)^2}{5} = \Gamma^2,$$

and

$$\Omega^N = \sum_{j=1}^{N} \widetilde{B}_j^{(N)} = \widetilde{B}_1^{(N)} + \widetilde{B}_2^{(N)} = \widetilde{B}_1^{(2)} + \widetilde{B}_2^{(2)} = \Omega^2.$$

另一方面，我们定义矩阵 $\boldsymbol{P}_N = \widetilde{\boldsymbol{C}}_N^{-1}\boldsymbol{C}_N^{-1}$其中每个元素记为$(\boldsymbol{P}_N)^{ij} = P^{Nij}$对所有$i$、$j = 1$、.....、$N$。随后，根据引理1和方程（90），可得

$$\begin{aligned}
\Phi^N &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} P_{Nij} = \mathbf{1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_N\mathbf{1}) = \mathbf{1}^{\mathrm{T}}(\widetilde{\boldsymbol{C}}_N^{-1}(\boldsymbol{C}_N^{-1}\mathbf{1}) \\
&= \mathbf{1}^{\mathrm{T}}(\widetilde{\boldsymbol{C}}_N^{-1}\boldsymbol{b}_N) = \left((\widetilde{\boldsymbol{C}}_N^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{1}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_N = (\widetilde{\boldsymbol{b}}_N)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_N = \frac{1}{3}b_1^2 + \frac{1}{5}b_2^2 \\
&= \mathbf{1}^{\mathrm{T}}(\widetilde{\boldsymbol{C}}_2^{-1}\boldsymbol{C}_2^{-1}\mathbf{1}) = \Phi^2.
\end{aligned}$$

最后，将 Λ^N 用 Φ^N 和 Ω^N 表示，可得

$$\Lambda^N = -\Phi^N + (\Omega^N)^2 = -\Phi^2 + (\Omega^2)^2 = \Lambda^2,$$

从而完成证明。 □

参考文献

[1] D. Arcas 与 Y. Wei。千岛群岛2006年海啸事件在夏威夷檀香山情形下非线性浅水方程中速度相关近似的评估。《地球物理研究快报》，38(12)，2011年。[2] M. Bauerle、A. J. Christlieb、M. Ding 与 J. Huang。二维浅水矩方程的旋转不变性与双曲性。《*SIAM*数学分析杂志》，57(1):1039–1085，2025年。[3] A. V. Bobylev。Chapman-Enskog展开中的不稳定性与双曲Burnett方程。《统计物理学杂志》，124(2–4):371–399，2005年12月。[4] A. Canestrelli、A. Siviglia、M. Dumbser 与 E.F. Toro。非守恒双曲系统的平衡良好的高阶中心格式。应用于固定床与移动床浅水方程。《水资源进展》，32(6):834–844，2009年6月。[5] M. J. Castro D´ıaz 与 E. Fern´andez-Nieto。一类计算快速的一阶有限体积求解器：PVM方法。《*SIAM*科学计算杂志》，34(4):A2173–A2196，2012年1月。[6] S. Chapman 与 T.G. Cowling。《非均匀气体的数学理论》。剑桥大学出版社，剑桥，第3版，1990年。[7] J. Garres-D´ıaz、M.J. Castro D´ıaz、J. Koellermeier 与 T. Morales de Luna。推移质输运问题的浅水矩模型。《计算物理通讯》，30(3):903–941，2021年。[8] Q. Huang、J. Koellermeier 与 W.-A. Yong。双曲浅水矩方程的平衡稳定性分析。《应用科学数学方法》，45(10):6459–6480，2022年。[9] J. Koellermeier。浅水线性化矩方程的新的能量方程推导。比利时根特，2025年9月。根特大学。即将发表于第九届工程与应用数学高级计算方法国际会议摘要集（*ACOMEN2025*）。

[10] J. Koellermeier 与 E. Pimentel-Garc´ıa。含地形浅水矩方程的稳态与良平衡格式。《应用数学与计算》，427:127166，2022年。[11] J. Koellermeier 与 M. Rominger。双曲浅水矩方程的分析与数值模拟。《计算物理通讯》，28(3):1038–1084，2020年。[12] J. Kowalski 与 M. Torrilhon。浅流的矩近似与模型级联。《计算物理通讯》，25(3):669–702，2019年。[13] G. M. Kremer。Chapman-Enskog方法与Grad方法及其应用。技术报告 RTO-EN-AVT-194，北约研究与技术组织，2006年。[14] D. Liang。溃坝流中浅水假设的评估。《土木工程师学会会刊——水管理》，163(5):227–237，2010年。[15] J. A. Liggett。临界水深、速度剖面与平均化。《灌溉与排水工程杂志》，119(2):416–422，1993年。[16] R. N. Miller。《海洋环流数值建模》，第35–86页。剑桥大学出版社，2007年。[17] M. Sanz-Ramos、E. Blad´e、P. Oller 与 G. Furdada。基于二维浅水方程的良平衡格式对密实雪崩的数值模拟。《冰川学杂志》，69(278):1646–1662，2023年。[18] U. Scholz、J. Kowalski 与 M. Torrilhon。浅矩方程中的色散。《应用数学与计算通讯》，6(4):2155–2195，2023年12月。[19] H. Struchtrup。稀薄气体流的宏观输运方程。施普林格出版社柏林海德堡分社，2005年。[20] R. Verbiest 与 J. Koellermeier。利用双曲浅水矩方程捕捉径向对称流中的垂向信息。《计算物理通讯》，37(3):810–848，2025年6月。[21] C.B. Vreugdenhil。方程。载于《浅水流数值方法》，第15–46页。施普林格荷兰，多德雷赫特，1994年。[22] D. Wang。浅水方程的扩展与数值模拟。硕士论文，新加坡国立大学，新加坡，2023年。