arXiv:2603.01887v1 [math.DG] 2 Mar 2026

# 谱意义或积分意义下具有非负里奇曲率的开三维流形

GILLES CARRON

摘要。我们证明，若一个完备的黎曼 3–流形具有 $L^{\frac{3}{2}}-$ 可积里奇曲率，满足索博列夫不等式，且在谱意义下具有非负里奇曲率，那么它与 $\mathbb{R}^3$微分同胚。

## 1. 引言

根据 Cohn-Vossen 和 Huber 的结果，若一个完备黎曼曲面（$M^2, g$）具有可积高斯曲率，并且满足

$$\int_M K_g \, dA_g > -2\pi$$

则它共形等价于 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{C}^\star$。Castillon[Cas06]得到了一个非常优美的谱对应结果：若（$M^2, g$）是一个完备黎曼曲面，且存在某个 $\lambda > 1/4$，使得薛定谔算子 $\Delta_g + \lambda K_g$ 非负：

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(M): \int_M |d\varphi|^2 \, dA_g \geq \lambda \int_M \lambda K_g \, \varphi^2 \, dA_g$$

则 $(M^2, g)$ 共形等价于 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{C}^\star$。已有若干尝试将第一个结果推广到更高维数（例如参见 [CQY00, CH02]）。本文中，我们基于谱钳制假设得到一个三维拓扑刚性。

我们引入如下记号：若 $(M, g)$ 是黎曼流形且 $x \in M$，我们令 $\mathrm{Ric}(x)$ 为里奇张量在 $x$ 处的最小特征值，从而在二次型意义下有里奇$_x \geq \mathrm{Ric}(x)\, g_x$，并令 $\mathrm{Ric}_-(x)$ 为 $\mathrm{Ric}(x)$ 的负部，即当 $\mathrm{Ric}(x) \geq 0$ 时 $\mathrm{Ric}_-(x) = 0$，否则 $\mathrm{Ric}_-(x) = -\mathrm{Ric}(x)$。从而在二次型意义下有里奇$_x \geq -\mathrm{Ric}_-(x)\, g_x$。

我们对完备黎曼流形 $(M^3, g)$ 的基本假设是

- 对某个正的常数 $\gamma$，它满足索博列夫不等式：

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(M): \gamma \left( \int_M \varphi^6 \, d\nu_g \right)^{\frac{1}{3}} \leq \int_M |d\varphi|^2 \, d\nu_g, \qquad (\mathrm{Sob}_\gamma)$$

- 以及里奇曲率负部的 $L^{\frac{3}{2}}$ 可积性。

我们的第一个结果如下：

定理 A. 设 $(M^3, g)$ 是满足索博列夫不等式 $(\mathrm{Sob}_\gamma)$ 且满足 $\mathrm{Ric}_- \in L^{3/2}$ 的完备黎曼流形。若对某个 $\lambda > 2$，薛定谔算子 $\Delta - \lambda \mathrm{Ric}_-$ 非负，则$M^3$ 与 $\mathbb{R}^3$微分同胚。

利用Hölder不等式，容易验证：当 $\lambda \leq \gamma \left( \int_M (\mathrm{Ric}_-)^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}\nu_g \right)^{-\frac{1}{3}}$时，薛定谔算子 $\Delta - \lambda \mathrm{Ric}_-$ 是非负的，从而我们得到如下推论：

推论 B. 若$(M^3, g)$是满足索博列夫不等式(Sob$\gamma$)的完备黎曼流形，并且使得

$$\left(\int_M (Ric_-)^{\frac{3}{2}}\, d\nu_g\right)^{\frac{1}{3}} < \gamma/2$$

那么 $M^3$ 与 $\mathbb{R}^3$微分同胚。

里奇流和极小曲面技术使人们能够完整理解带有非负里奇曲率或标量曲率黎曼度量的闭三维流形的拓扑。此外，满足薛定谔算子 $\Delta_g + \frac{1}{2}$Ric 非负条件的闭黎曼流形（$M^3$， $g$）已被 [BC17]进行了拓扑分类。

对于开完备黎曼三维流形，已有关于以下对象的拓扑分类：

- 具有非负里奇曲率的流形，所使用的是极小曲面技术 [SY82、AR89、Liu12],
- 具有有界几何和一致正标量曲率的流形，所使用的是里奇流技术[BBM11], 最近，利用 $\mu-$气泡技术，J. Wang 去除了对几何有界性的假设 [Wan25]。

此外，已知具有正标量曲率，或具有非负标量曲率和有界几何的可缩完备黎曼 3–流形与 $\mathbb{R}^3$ 微分同胚。为此，人们使用了若干工具：针对狄拉克算子的精细指标理论 [CWY09], 极小曲面 [Wan23、Wan24] ，或者最近使用逆平均曲率流 [OLX]。

近期一系列有趣的研究运用里奇流技术，给出了这样的条件：满足索博列夫不等式，且黎曼张量的 $L^{n/2}$ 足够小的完备黎曼 $n$流形，微分同胚于 $\mathbb{R}^n$ [CCL22, CHL24, CL24, CMa, Mar, CL25, Mar25, LL]。这一方向上最新的发展如下 [LL]：对于每个 $\gamma, v_0 > 0$，存在一个足够小的正常数$\varepsilon(n, \gamma, v_0)$，使得若$(M^n, g)$是满足索博列夫不等式的完备黎曼流形

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(M)\colon \gamma \left(\int_M \varphi^{\frac{2n}{n-2}}\, d\nu_g\right)^{1-\frac{2}{n}} \leq \int_M |d\varphi|^2\, d\nu_g, \qquad (\mathrm{Sob}_\gamma)$$

体积上界：

$$\forall x \in M, \forall r > 0\colon\ \nu_g(B(x,t)) \leq v_0 r^n$$

以及积分曲率集中条件：

$$\int_M \|\mathrm{Rm}\|^{\frac{n}{2}}\, d\nu_g < \varepsilon(n, \gamma, v_0),$$

那么 $M$ 微分同胚于 $\mathbb{R}^n$。

根据 [CMa], , 也可以去掉体积上界这一假设，转而假设对于某个 $p < n/2$ ，有 Rm $\in L^p \cap L^\infty$。我们的结果可视为这些结果的一种（在维数 3 中的）精化，其中关于体积增长以及里奇张量正部控制的假设均被去除。

通过对完整的里奇张量增加 $L^{\frac{3}{2}}$ 可积性，可以改进定理 A 中的阈值 $\lambda = 2$：

定理 C. 设 $(M^3, g)$ 是满足索博列夫不等式 (Sob$\gamma$) 且满足 Ricci $\in L^{3/2}$ 的完备黎曼流形。若对某个 $\lambda > 1$，薛定谔算子 $\Delta - \lambda$Ric$_-$ 非负，则$M^3$ 与 $\mathbb{R}^3$微分同胚。

及其推论：

**C**推论 D. 若 $(M^3, g)$ 是满足索博列夫不等式 (Sob$\gamma$ )
*an*d，使得

$$\left(\int_M \|Ricci\|^{\frac{3}{2}}\, d\nu_g\right)^{\frac{1}{3}} < \gamma$$

那么 $M^3$ 与 $\mathbb{R}^3$微分同胚。

其中上述范数 ||里奇|| 是里奇张量的算子范数，即:

$$-\|\text{Ricci}\|\, g \leq \text{Ricci} \leq \|\text{Ricci}\|\, g \text{ in the sense of quadratic forms.}$$

我们结果证明中的一个关键要素是：当存在某个 $\lambda > 1$ 使得薛定谔算子 $\Delta_g - \lambda\text{Ric}_-$ 非负时，就可以找到一个正函数 $u \in \mathscr{C}^2(M)$，使得$\Delta_g u - \lambda\text{Ric}_- u = 0$。此时，共形度量 $\mathsf{g} = u^{\frac{2}{\lambda}} g$ 是完备的，而加权黎曼流形 $\left(M^3, \mathsf{g}\ d\mu = u^{\frac{2}{\lambda}} \mathrm{d}\nu_g\right)$ 具有非负的 $(\lambda-1)-1$-Bakry-Emery里奇张量，也就是说，这个加权黎曼流形满足 Bakry-Emery BE(0, $N$) 曲率条件，其中 $N = 3+\frac{1}{\lambda-1}$[CMR24, CMT25]。在扩散过程理论中，变换 $(g, \mathrm{d}\nu_g) \mapsto \left(u^{\frac{2}{\lambda}} g, u^{\frac{2}{\lambda}} \mathrm{d}\nu_g\right)$ 称为时间变换。它有一个显著性质：保持调和函数和格林函数。在证明过程中，我们必须在度量 $g$ 和 $\mathsf{g}$、它们各自对应的黎曼测度 $\mathrm{d}\nu_g$ 和 $\mathrm{d}\nu_{\tilde{g}}$ 以及测度 $u^{\frac{2}{\lambda}} \mathrm{d}\nu_g$之间来回切换。–

我们的证明遵循舍恩和丘成桐 [SY82]提出的一般方案:

i) 第一阶段是证明 $M$ 的万有覆盖是可缩的。这是因为定理 C 的谱假设意味着 $M$ 及其任意覆盖都只有一个端。值得注意的是，验证这一步所需的假设可以大幅改进；事实上，近期已有一个最优的谱分裂定理（更早的结果见 [APK, CMMR] 和 [LW06]）：对于某个$\lambda > (n-1)/4$ 使薛定谔 $\Delta_g - \lambda\text{Ric}$曲率非负的完备黎曼流形 $(M^n, g)$，它必定只有一个端，或者分裂为一个黎曼乘积。

ii) 第二阶段是证明 $M$ 是单连通的。定理 A 和定理 C 的证明差异就在这一阶段。在定理 A 的证明中，我们在加权黎曼流形 $\left(M^3, \mathsf{g}\ u^{\frac{2}{\lambda}} \mathrm{d}\nu_g\right)$ 上采用了 Anderson [And90] 按 Milnor 思路发展出的体积论证；在定理 C 的证明中，我们证明了 $(M, \mathsf{g})$ 的狄拉克算子的某个 Callias指标消失。这一结果是对 [Car02] 的略微改进。

iii）最后一步是证明 $M$ 在无穷远处是单连通的。文献中有几种工具可用于证明这一结果：狄拉克算子的指标定理 [CWY09], 极小曲面 [Wan23, Wan24] ，或逆平均曲率流 [OLX] 。我们尚未能在当前情形下令人满意地运用这些技术中的任何一种。我们的证明依赖于与调和函数或格林核的水平集相关的单调量。Colding 首先在具有非负里奇曲率的流形上引入了这类单调量 [Col12] ，随后这些单调量被推广到具有非负标量曲率的黎曼三维流形上（例如参见[Ste22, AMO24, MW24, MW26, CMb]）。我们将证明，格林函数的上水平集给出了一个由有界开子集构成的穷竭，其边界均为球面。

本文结构如下。第2节中，我们介绍时间变换后的几何的一些性质，以及索博列夫不等式的影响。第3节中，我们给出一个消失性结果：对于满足某种索博列夫不等式且标量曲率非负的完备黎曼流形，其边界的α-属为零。第4节中，我们说明如何利用与格林函数水平集相关的面积型泛函。最后一节中，我们汇集上述结果，以证明定理 A 和定理 C。在一个简短的附录中，我们汇集了若干分析方面的事实，这些事实对多个证明至关重要。

## 2. 时间变换后的几何

在本节中，我们考虑一个维数为 $n \geq 3$ su 的完备黎曼流形 $(M^n, g)$
使得
对某个 $\lambda > n-2$，薛定谔算子 $\Delta_g - \lambda \mathrm{Ric}_-$ 非负：

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(M): \int_M |d\varphi|_g^2 \, d\nu_g \geq \lambda \int_M \mathrm{Ric}_- \, \varphi^2 \, d\nu_g \, .$$

根据命题 A.1，我们可以找到一个正函数 $u \in \mathscr{C}^2(M)$，使得

$$\Delta_g u - \lambda \mathrm{Ric}_- u = 0.$$

那么，共形度量

$\overline{g} = u^{\frac{2}{\lambda}} g$ 是完备的 [CMR24，引理 2.2]，并且加权黎曼流形 $\left(M, \mathsf{g} \; d\mu = u^{\frac{2}{\lambda}} \mathrm{d}\nu_g\right)$ 满足 Bakry-Emery BE(0, $N$) 曲率条件，其中 $N = n + \frac{(n-2)^2}{\lambda - n - 2}$ [CMR24, CMT25]。

本节介绍了关于 g $\mu$ 和规范 $u$的一些新旧几何与解析性质。

### 2.1. 关于度量 g。

2.1.1. 首先，Bakry-Emery BE(0, $N$) 曲率条件蕴含了关于 g –测地球 [的 Bishop-Gromov 体积比较定理 Qia97，推论 2]:

$$\forall x \in M, \forall r, R \in (0, +\infty) \text{ with } r < R: \frac{\mu\left(B_{\overline{g}}(x, R)\right)}{\mu\left(B_{\overline{g}}(x, r)\right)} \leq \left(\frac{R}{r}\right)^N . \tag{1}$$

2.1.2. 该曲率条件还蕴含了关于加权黎曼流形 $(M, \mathsf{g} \; d\mu)$ 热核的一些 Li-Yau 估计 [Qia95，定理 3.2]。令 $L = u^{-\frac{2}{\lambda}} \Delta_g$ 为该加权黎曼流形的拉普拉斯算子，则

$$\forall \phi, \psi \in \mathscr{C}_c^\infty(M): \int_M \langle d\phi, d\psi \rangle_{\overline{g}} d\mu = \int_M L\phi \, \psi d\mu.$$

令 $\{H(t,x,y)\}_{t>0, \;\; x, \; y \in M}$ 为自伴算子 $e^{-tL}$ 的 Schwartz 核:

$$\forall \phi, \psi \in \mathscr{C}_c^\infty(M): \int_M e^{-tL}\phi \, \psi d\mu = \int_{M \times M} H(t,x,y)\phi(y)\psi(y) d\mu(x) d\mu(y).$$

Th于是存在一个常数 $\gamma > 0$（仅依赖于 $n$ 和 $\lambda$），使得对于任意 $t > 0$ 和任意 $x, y \in M$:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{e^{-\gamma \frac{d_{\overline{g}}^2(x,y)}{t}}}{\mu\left(B_{\overline{g}}(x, \sqrt{t})\right)} \leq H(t,x,y) \leq \gamma \frac{e^{-\frac{d_{\overline{g}}^2(x,y)}{\gamma t}}}{\mu\left(B_{\overline{g}}(x, \sqrt{t})\right)}. \tag{2}$$

这些高斯估计蕴含刘维尔性质（例如参见 [SC92，定理 4.6]）：

推论 2.1. 在 $(M, \mathsf{g} \; d\mu)$ 上的非负调和函数是常数。

2.1.3. 此外，$(M, \mathsf{g} \; d\mu)$ 与 $(M, g, \mathrm{d}\nu_g)$ 的狄利克雷能量相同

$$\forall \phi, \psi \in \mathscr{C}_c^\infty(M): \int_M \langle d\phi, d\psi \rangle_{\overline{g}} d\mu = \int_M \langle d\phi, d\psi \rangle_g \, d\nu_g \, .$$

因此，$(M, g, \mathrm{d}\nu_g)$ 是非抛物型，当且仅当 $(M, g, \mathrm{d}\nu_g)$ 是非抛物型。注意，如果 $g$ 的里奇曲率并非处处非负（也就是说，如果 $\mathrm{Ric}_-$ 不恒为零），那么 $(M, g, \mathrm{d}\nu_g)$ 是非抛物型。

此外，当 $(M, g, \mathrm{d}\nu_g)$ 是非抛物型时，两个相关的最小正格林核相同。事实上，如果 $\phi$ 是 $L\phi = f$ 的最小解（其中 $f \geq 0$ 具有紧支撑），那么 $\Delta\phi = u^{\frac{2}{\lambda}} f$；而如果 $G$ 是 $(M, g, \mathrm{d}\nu_g)$ 的最小 Green 核，那么

$$\phi(x) = \int_M G(x,y) u^{\frac{2}{\lambda}}(y) f(y)\, d\nu_g(y) = \int_M G(x,y) f(y) d\mu(y).$$

2.1.4. 度量 $\mathsf{g}$ 的标量曲率。

引理 2.2. 在本节所作的假设下，共形度量 $\mathsf{g} = u^{\frac{2}{\lambda}} g$ 的标量曲率非负：

$$\mathrm{Scal}_{\overline{g}} \geq 0.$$

证明. 若令 $v = u^{\frac{n-2}{2\lambda}}$ 则

$$\mathrm{Scal}_{\overline{g}}\, v^{\frac{n+2}{n-2}} = \frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_g v + \mathrm{Scal}_g v.$$

But

$$\Delta_g v = \left( \frac{n-2}{2\lambda} u \Delta_g u - \frac{n-2}{2\lambda} \left( \frac{n-2}{2\lambda} - 1 \right) |du|_g^2 \right) u^{\frac{n-2}{2\lambda} - 2},$$

因此

$$\mathrm{Scal}_{\overline{g}}\, v^{\frac{n+2}{n-2}} = \left( 2(n-1)\mathrm{Ric}_- + \mathrm{Scal}_g + \frac{2(n-1)}{\lambda} \left( 1 - \frac{n-2}{2\lambda} \right) \frac{|du|_g^2}{u^2} \right) v,$$

or

$$\mathrm{Scal}_{\overline{g}}\, u^{\frac{2}{\lambda}} = 2(n-1)\mathrm{Ric}_- + \mathrm{Scal}_g + \frac{2(n-1)}{\lambda} \left( 1 - \frac{n-2}{2\lambda} \right) \frac{|du|_g^2}{u^2}. \tag{3}$$

有 $\frac{n-2}{2\lambda} \leq 1$ 且 $\mathrm{Scal}_g \geq -n\mathrm{Ric}_-$ 因此

$$\mathrm{Scal}_{\overline{g}}\, u^{\frac{2}{\lambda}} \geq 2(n-1)\mathrm{Ric}_- + \mathrm{Scal}_g \geq (n-2)\mathrm{Ric}_- v \geq 0.$$

□

2.2. 规范的性质。下一个命题将在后文起关键作用：

命题 2.3. 在本节所作假设下，对于任意 $\alpha \in [0,1], u^\alpha$，加权黎曼流形 $(M, \mathsf{g}\ d\mu)$ 上的 $A_1$-加权存在一个常数 $C$，它仅取决于 $\lambda, n$ 和 $\alpha$，使得对于任意 $x \in M$ 和 $R > 0$：

$$⨍_{B_{\overline{g}}(x,R)} u^\alpha d\mu \leq C \inf_{B_{\overline{g}}(x,R)} u^\alpha.$$

证明。若 $\mathrm{Ric}_- = 0$，则 $u$ 是一个具有非负里奇曲率的完备黎曼流形上的正调和函数，因此刘维尔性质（推论 2.1）意味着 $u$ 是常数，结论成立。假设 $\mathrm{Ric}_-$ 不恒为零，则 $(M, g, \mathrm{d}\nu_g)$ 是非抛物型的。现在固定一点 $o \in M$。对于任意 $R > 0$，令 $u_R$ 为方程 $\Delta u_R = \lambda \mathrm{Ric}_- u\, \mathbf{1}_{B(o,R)}$ 的最小正解。也就是说

$$u_R(x) = \int_{B(o,R)} G(x,y) \lambda \mathrm{Ric}_-(y) u(y)\, d\nu_g(y)$$

其中 $G$ 是 $(M, g\, \mathrm{d}\nu_g)$ 的最小 Green 核。函数 $u_R$ 也是狄利克雷边值问题解在 $\rho \to +\infty$ 趋于极限时的单调极限

$$\begin{cases} \Delta u_{R,\rho} = \lambda \mathrm{Ric}_-\, u\, \mathbf{1}_{B(o,R)} & \text{on } B(o,\rho) \\ u_{R,\rho} = 0 & \text{on } \partial B(o,\rho). \end{cases}$$

由最大值原理可知，对任意 $\rho$，我们有 $u \geq u_{R,\rho}$ 在 $B(o,\rho)$ 上成立，因此我们始终有 $u \geq u_R$，故 $\underline{u} = \sup_R u_R$ 满足：

$$u \geq \underline{u} \text{ and } \forall x \in M\colon \underline{u}(x) = \int_M G(x,y)\lambda \mathrm{Ric}_-(y)u(y)\, d\nu_g(y).$$

因此，$u-\underline{u}$ 是 $(M, g, \mathrm{d}\nu_g)$ 上的非负调和函数。因此，$u-\underline{u}$ 是 $(M, \mathrm{g}\ d\mu)$ 上的非负调和函数。但 $(M, \mathrm{g}\ d\mu)$ 具有非负的 Bakry-Emery Ricci 曲率，因此根据推论 2.1，这样的非负调和函数必为常数。并且存在一个常数 $c \geq 0$，使得

$$\forall x \in M\colon u(x) = c + \int_M G(x,y)\lambda \mathrm{Ric}_-(y)u(y)\, d\nu_g(y).$$

利用

$$G(x,y) = \int_0^{+\infty} H(t,x,y)dt$$

以及 $\int_M H(t,x,y)d\mu(y) = 1$，我们很容易推得

$$\forall t > 0\colon u \geq e^{-tL}u.$$

因此，对于任意 $z \in B_{\overline{g}}(x,R)$：

$$\begin{aligned}
u(z) &\geq \int_M H(R^2,z,y)u(y)d\mu(y) \\
&\geq \int_{B_{\overline{g}}(x,R)} H(R^2,z,y)u(y)d\mu(y) \\
&\geq \frac{1}{\gamma}\frac{e^{-4\gamma}}{\mu\left(B_{\overline{g}}(z,R)\right)}\int_{B_{\overline{g}}(x,R)} u(y)d\mu(y) \text{ using the Li-Yaus'estimate (2)} \\
&\geq \frac{e^{-4\gamma}}{\gamma}\frac{\mu\left(B_{\overline{g}}(x,R)\right)}{\mu\left(B_{\overline{g}}(z,R)\right)} \fint_{B_{\overline{g}}(x,R)} u(y)d\mu(y) \\
&\geq \frac{e^{-4\gamma}}{\gamma}2^{-N}\frac{\mu\left(B_{\overline{g}}(x,2R)\right)}{\mu\left(B_{\overline{g}}(z,R)\right)} \fint_{B_{\overline{g}}(x,R)} u d\mu \text{ using the the volume comparison (1)} \\
&\geq \frac{e^{-4\gamma}}{\gamma}2^{-N} \fint_{B_{\overline{g}}(x,R)} u d\mu.
\end{aligned}$$

□

注 2.4. 利用 [CL，命题 4.4]，，我们知道，事实上，对于任意 $\alpha \in (0, N/(N-2))$，$u^\alpha$ 是一个 $A_1$-加权的。

2.3. 满足索博列夫不等式的情形。现在我们还假设 $(M^n, g)$ 满足索博列夫不等式 $(\mathrm{Sob}_\gamma)$。这样的索博列夫不等式意味着 $(M^n, g)$ 是非抛物型的，并且根据 [Car96，命题 1.14]，，其最小 Green 核 $G$ 满足以下条件，其中 $C(n,\gamma)$ 是一个常数：

$$\forall x \in M, \forall t > 0\colon\ \nu_g\left\{y \in\colon G(x,y) > t\right\} \leq C(n,\gamma)\, t^{\frac{n}{n-2}}. \tag{4}$$

因此，对于任意 $p > n/(n-1)$ 和任意 $x \in M$：

$$\int_{M\setminus B(x,1)} G^p(x,y)\, d\nu_g(y) < +\infty.$$

同样的证明也给出了关于紧集的平衡势的相同结果。回想一下，如果$K \subset M$是紧集，那么它的平衡势 $h_K\colon\ M \setminus K \to (0,1]$ 是

Dirichlet 边值问题的解的单调极限

$$\begin{cases}\Delta h_R = 0 & \text{on } B(o,R)\setminus K\\ h_R = 1 & \text{on } K\\ h_R = 0 & \text{on } B(o,R).\end{cases}$$

Then

$$\forall p > n/(n-1), h_K \in L^p. \tag{5}$$

事实上，若在函数上检验索博列夫不等式

$$\phi_\tau(x) = \begin{cases}\tau & \text{if } h_K(x) > \tau\\ h & \text{if } h_K(x) \le \tau.\end{cases}$$

由格林公式可得

$$\int_M |d\phi_\tau|_g^2 \, d\nu_g = \tau \int_{h_K=\tau} \frac{\partial h_K}{\partial \vec{n}} d\mathcal{H}_g^{n-1} = \tau \int_{\partial h_K=1} \frac{h_K}{\partial \vec{n}} d\mathcal{H}_g^{n-1} = \tau \int_M |dh_K|_g^2 \, d\nu_g \,.$$

因此

$$\gamma\tau^2 \left(\nu_g\{h_K > \tau\}\right)^{1-\frac{2}{n}} \le \tau \int_M |dh_K|_g^2 \, d\nu_g \,.$$

2.3.1. Green 核梯度的积分界。

命题 2.5. 设 $(M^n, g)$ 是一个完备黎曼流形， $n \ge 3$ 满足本节所作的假设，并假设 $(M^n, g)$ 是非抛物型的。令 $G(o,\cdot)$ 为其在 $o \in M$ 处具有极点的最小 Green 核，并引入到 $o$ 的伪距离 [1]

$$G(o,x) = \frac{c_n}{b^{n-2}(x)}.$$

那么，存在一个常数 $C$，使得对任意 $r \ge 1$:

$$\int_{b=r} \frac{|db|_g^2}{r^{n-1}} d\mathcal{H}_g^{n-1} \le C r^{1-\frac{1}{N-2}}.$$

因此

$$\int_{\{b\ge 1\}} \frac{|db|_g^3}{b^{n+1}} \, d\nu_g = \int_1^{+\infty} \left( \int_{b=r} \frac{|db|_g^2}{r^{n+1}} d\mathcal{H}_g^{n-1} \right) dr < +\infty.$$

证明。我们引入加权黎曼流形 $\left(M, \mathrm{g}\ d\mu = u^{\frac{2}{\lambda}} \mathrm{d}\nu_g\right)$。它满足 Bakry- Emery BE(0, $N$) 曲率条件。我们已经注意到，$(M, g, \mathrm{d}\nu_g)$ 的格林核与 $\left(M, \mathrm{g}\ d\mu = u^{\frac{2}{\lambda}} \mathrm{d}\nu_g\right)$ 的格林核相同。因此，根据 [SWW14，命题 1.1],，我们知道存在一个常数 $C$，使得当 $b \ge 1$ 时，

$$|db|_{\overline{g}} \le C b^{1-\frac{1}{N-2}};$$

因此，当 $r \ge 1$ 时:

$$\int_{b=r} \frac{|db|_g^2}{r^{n-1}} d\mathcal{H}_g^{n-1} = \int_{b=r} \frac{|db|_g \, |db|_{\overline{g}} u^{\frac{1}{\lambda}}}{r^{n-1}} d\mathcal{H}_g^{n-1} \le C r^{1-\frac{1}{N-2}} \int_{b=r} \frac{|db|_g \, u^{\frac{1}{\lambda}}}{r^{n-1}} d\mathcal{H}_g^{n-1}.$$

但函数 $u^{\frac{1}{\lambda}}$ 是超调和的，因此由格林公式可知，该函数

$$r \mapsto \int_{b=r} \frac{|db|_g \, u^{\frac{1}{\lambda}}}{r^{n-1}} d\mathcal{H}_g^{n-1}$$

[1] 其中 $(n-2)|\mathbb{S}^{n-1}| = 1/c_n$。

是非增的 [Col12]。因此，对于任意 $r>0$:

$$\int_{b=r}\frac{|db|_g\,u^{\frac{1}{\lambda}}}{r^{n-1}}d\mathcal{H}_g^{n-1}\le|\mathbb{S}^{n-1}|\,u^{\frac{1}{\lambda}}(o).$$

由此我们得到了如下估计:

$$\forall r>1\colon\int_{b=r}\frac{|db|_g^2}{r^{n-1}}d\mathcal{H}_g^{n-1}\le C|\mathbb{S}^{n-1}|\,u^{\frac{1}{\lambda}}(o)\,r^{1-\frac{1}{N-2}}.$$

□

2.3.2. $\mu$体积的 g 测地球。

命题 2.6. 设 $(M^n,g)$ 是一个完备黎曼流形， $n\ge3$ 满足本节中的假设，并进一步假设其满足索博列夫不等式 (Sob$\gamma$)。存在一个常数 $\sigma$，仅依赖于 $n$ 和 $\lambda$，使得若考虑加权黎曼流形$\Big(M,\mathsf{g}=u^{\frac{2}{\lambda}}g,d\mu\Big)$，则对任意 $x\in M$和任意 $R>0$:

$$\sigma\gamma^{\frac{n}{2}}u^{-\frac{n-2}{\lambda}}(x)R^n\le\mu\left(B_{\overline{g}}(x,R)\right).$$

证明. 索博列夫不等式意味着

$$\forall\varphi\in\mathscr{C}_c^\infty(M)\colon\gamma\left(\int_M\varphi^{\frac{2n}{n-2}}u^{-\frac{2}{\lambda}}d\mu\right)^{1-\frac{2}{n}}\le\int_M|d\varphi|_{\overline{g}}^2d\mu.$$

将该不等式应用于 $\varphi(y)=(R-d_{\overline{g}}(x,y))_+$，可得

$$\gamma\frac{R^2}{4}\left(\mu\left(B_{\overline{g}}(x,R/2)\right)\right)^{1-\frac{2}{n}}\left(\fint_{B_{\overline{g}}(x,R/2)}u^{-\frac{2}{\lambda}}d\mu\right)^{1-\frac{2}{n}}\le\mu\left(B_{\overline{g}}(x,R)\right).$$

由 Hölder不等式可知，对任意 $p>1$：

$$1\le\left(\fint_{B_{\overline{g}}(x,R/2)}u^{-\frac{2}{\lambda}}d\mu\right)\left(\fint_{B_{\overline{g}}(x,R/2)}u^{\frac{2}{(p-1)\lambda}}d\mu\right)^{p-1}.$$

利用 $p=1+2/\lambda$ 以及 $u$ 的 $A_1$-性质（命题 2.3），可得

$$1\le\left(\fint_{B_{\overline{g}}(x,R/2)}u^{-\frac{2}{\lambda}}d\mu\right)C\min_{B_{\overline{g}}(x,R/2)}u^{\frac{2}{\lambda}}\le\left(\fint_{B_{\overline{g}}(x,R/2)}u^{-\frac{2}{\lambda}}d\mu\right)Cu^{\frac{2}{\lambda}}(x).$$

从而

$$\gamma\frac{R^2}{4C^{\frac{n-2}{n}}}u^{-\frac{2(n-2)}{n\lambda}}(x)\left(\mu\left(B_{\overline{g}}(x,R/2)\right)\right)^{1-\frac{2}{n}}\le\mu\left(B_{\overline{g}}(x,R)\right).$$

若定义

$$\Theta=\gamma^{\frac{n}{2}}2^{\frac{n^2-4n}{2}}C^{\frac{n-2}{2}}u^{-\frac{n-2}{\lambda}}(x),$$

则有

$$\left(\frac{\mu\left(B_{\overline{g}}(x,R/2)\right)}{\Theta(R/2)^n}\right)^{1-\frac{2}{n}}\le\frac{\mu\left(B_{\overline{g}}(x,R)\right)}{\Theta R^n}.$$

现在很容易对这个不等式反复迭代，得到

$$\Theta R^n\le\mu\left(B_{\overline{g}}(x,R)\right).$$

□

2.3.3. $\mathsf{g}$ 的 Sobolev 不等式。

命题 2.7. 设 $(M^n, g)$ 是一个完备黎曼流形，满足本节提出的假设，并进一步假设索博列夫不等式 (Sob$_\gamma$) 成立，且里奇 $\in L^{\frac{n}{2}}$，那么存在一个正常数 $\upsilon$，使得共形度量 $\mathsf{g} = u^{\frac{2}{\lambda}} g$ 满足索博列夫不等式:

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(M): \upsilon \left( \int_M \varphi^{\frac{2n}{n-2}} \, d\nu_{\mathsf{g}} \right)^{1-\frac{2}{n}} \leq \int_M |d\varphi|_{\mathsf{g}}^2 \, d\nu_{\mathsf{g}} .$$

证明。设 $K \subset M$ 是一个紧集，使得

$$\frac{n-2}{4(n-1)} \left( \int_{M \setminus K} (\mathrm{Scal}_g)_-^{\frac{n}{2}} \, d\nu_g \right)^{\frac{2}{n}} \leq \frac{\gamma}{2}$$

于是，利用 Hölder不等式可得

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(M \setminus K):$$

$$\frac{\gamma}{2} \left( \int_{M \setminus K} \varphi^{\frac{2n}{n-2}} \, d\nu_g \right)^{1-\frac{2}{n}} \leq \int_{M \setminus K} \left[ |d\varphi|_g^2 + \frac{n-2}{4(n-1)} \mathrm{Scal}_g \varphi^2 \right] \, d\nu_g .$$

也就是说，$(M \setminus K, g)$ 的 Yamabe常数为正；由 Yamabe常数的共形不变性可得

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(M \setminus K):$$

$$\frac{\gamma}{2} \left( \int_{M \setminus K} \varphi^{\frac{2n}{n-2}} \, d\nu_{\mathsf{g}} \right)^{1-\frac{2}{n}} \leq \int_{M \setminus K} \left[ |d\varphi|_{\mathsf{g}}^2 + \frac{n-2}{4(n-1)} \mathrm{Scal}_{\mathsf{g}} \varphi^2 \right] \, d\nu_{\mathsf{g}} .$$

回顾公式 (3):

$$\mathrm{Scal}_{\mathsf{g}} u^{\frac{2}{\lambda}} = \mathrm{Scal}_g + 2(n-1)\mathrm{Ric}_- + 2(n-1) \left( 1 - \frac{n-1}{2\lambda} \right) \frac{|du|_g^2}{u^2}.$$

注意到

$$((\mathrm{Scal}_g)_+ + 2(n-1)\mathrm{Ric}_-)^{\frac{n}{2}} \, u^{-\frac{n}{\lambda}} \, d\nu_{\mathsf{g}} = ((\mathrm{Scal}_g)_+ + 2(n-1)\mathrm{Ric}_-)^{\frac{n}{2}} \, d\nu_g .$$

因此，若考虑一个满足 $K_0$ 且包含 $K$ 的紧集

$$\frac{n-2}{4(n-1)} \left( \int_{M \setminus K_0} ((\mathrm{Scal}_g)_+ + 2(n-1)\mathrm{Ric}_-)^{\frac{n}{2}} \, d\nu_g \right)^{\frac{2}{n}} \leq \frac{1}{4}\gamma$$

则可得

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(M \setminus K_0):$$

$$\frac{\gamma}{4} \left( \int_{M \setminus K_0} \varphi^{\frac{2n}{n-2}} \, d\nu_{\mathsf{g}} \right)^{1-\frac{2}{n}} \leq \int_{M \setminus K_0} \left[ |d\varphi|_{\mathsf{g}}^2 + b \frac{u^{-\frac{2}{\lambda}} |du|_g^2}{u^2} \varphi^2 \right] \, d\nu_{\mathsf{g}} .$$

其中 $b = \frac{n-2}{2} \left(1 - \frac{n-1}{2\lambda}\right)$。

$\mathsf{g}$ 的拉普拉斯算子公式为

$$\Delta_{\mathsf{g}} \Psi = u^{-\frac{2}{\lambda}} \left( \Delta_g \Psi - \frac{n-2}{\lambda} \langle \log u, \Psi \rangle_g \right)$$

因此，对于 $\Psi = u^\beta$，可得

$$\Delta_{\mathsf{g}} u^\beta = u^{-\frac{2}{\lambda}} \left( \beta\lambda \mathrm{Ric}_- u^\beta + \beta(1-\beta)|du|^2 u^{\beta-2} - \beta \frac{n-2}{\lambda} du|^2 u^{\beta-2} \right)$$

选取 $\beta = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n-1}{\lambda}\right)$，可得

$$\Delta_{\overline{g}} u^{\beta} \geq \beta^2 \frac{u^{-\frac{2}{\lambda}} |du|_g^2}{u^2} \, u^{\beta},$$

由此可得（见命题 A.1）：

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^{\infty}(M) \colon \beta^2 \int_M \frac{u^{-\frac{2}{\lambda}} |du|_g^2}{u^2} \varphi^2 \, d\nu_{\overline{g}} \leq \int_M |d\varphi|_{\overline{g}}^2 \, d\nu_{\overline{g}} \, .$$

令 $a = 1 + b\beta^{-2}$，则对任意 $\varphi \in \mathscr{C}_c^{\infty}(M \setminus K)$，有：

$$\frac{\gamma}{4a} \left( \int_{M \setminus K} \varphi^{\frac{2n}{n-2}} \, d\nu_g \right)^{1 - \frac{2}{n}} \leq \int_M |d\varphi|_{\overline{g}}^2 \, d\nu_{\overline{g}} \, .$$

由此可知，索博列夫不等式在 $(M, \mathrm{g})$ 上全局成立（见 [Car98，命题 2.5]）。 □

## 3. A Vanishing result for the $\alpha$-genus

3.1. 本节旨在证明对 [Car02] 的如下改进：

**T定理 3.1.** 设 $(M^n, g)$ 是一个完备黎曼旋量流形 $(M^n, g)$，其边界为闭边界 $\partial M$ sat满足索博列夫不等式（Sob$_\gamma$），且标量曲率非负

$$\mathrm{Scal}_g \geq 0$$

那么，如果 $\varsigma$ 是 $\partial M$ 上的诱导自旋结构：

$$\alpha(M, \varsigma) = 0.$$

注记 3.2. i) 这里说明一下，我们所说的 $(M, g)$ 是具有闭边界的完备黎曼流形，具体含义如下：引入测地距离 $d_g$，完备是指 $M$ 连通，且对于所有 $R \geq 0$，集合

$$M_R = \{x \in M \cup \partial M, d_g(x, \partial M) \leq R\}$$

是紧的；等价地，测地距离在 $\overline{M} = M \cup \partial M$ 上是完备的。这也等价于存在一个完备黎曼流形 $(N, g_N)$ 和一个紧集 $K$，使得 $(M, g)$ 与 $(N \setminus K, g_N)$ 的某个连通分支等距。

ii) 空间 $\mathscr{C}_c^{\infty}(M)$ 是由满足以下条件的函数 $\phi \in \mathscr{C}^{\infty}(\overline{M})$ 构成的函数空间：存在 $R > r > 0$ 使得 supp $\phi \subset M_R \setminus M_r$。$\mathscr{C}_c^{\infty}(M)$ 中的元素在 $\partial M$ 上消失。我们还可以引入 $\mathscr{C}_c^{\infty}(\overline{M})$，它是由满足以下条件的光滑函数 $\phi \in \mathscr{C}_c^{\infty}(\overline{M})$ 构成的函数空间：存在某个 $R > 0$ 使得 supp $\phi \subset M_R$。根据 [Car98, Proposition 2.5], , 下面两个 Sobolev 不等式等价

$$\exists \gamma > 0 \colon \forall \varphi \in \mathscr{C}_c^{\infty}(M) \colon \gamma \left( \int_M \varphi^{\frac{2n}{n-2}} \, d\nu_g \right)^{1 - \frac{2}{n}} \leq \int_M |d\varphi|^2 \, d\nu_g$$

$$\exists \gamma' > 0 \colon \forall \varphi \in \mathscr{C}_c^{\infty}(\overline{M}) \colon \gamma' \left( \int_M \varphi^{\frac{2n}{n-2}} \, d\nu_g \right)^{1 - \frac{2}{n}} \leq \int_M |d\varphi|^2 \, d\nu_g \, .$$

iii) 回顾一下，如果（$N$、$g$、$\varsigma$）是一个闭的 Spin 黎曼流形，并且 $\partial\!\!\!/ \colon \mathscr{C}^{\infty}(N, \Sigma\!\!\!/) \to \mathscr{C}^{\infty}(N, \Sigma\!\!\!/)$ 是其狄拉克算子，那么根据 LM89，定理 7.10]:

$$\alpha(M, \varsigma) = \begin{cases} \operatorname{ind} \partial\!\!\!/^{+} & \text{if } n = 8k \\ \frac{1}{2} \operatorname{ind} \partial\!\!\!/^{+} & \text{if } n = 8k + 4 \\ \dim \ker \partial\!\!\!/^{+} \pmod 2 & \text{if } n = 8k + 2 \\ \dim \ker \partial\!\!\!/ \pmod 2 & \text{if } n = 8k + 1. \end{cases}$$

由此得到以下有趣的拓扑推论：

推论 3.3. 设 $(M^3, g)$ 是一个完备黎曼旋量流形，其边界 $\partial M$ 闭且连通，并满足索博列夫不等式（Sob$_\gamma$），且标量曲率非负。若 $H^1(M, \mathbb{Z}_2) \to H^1(\partial M, \mathbb{Z}_2) \to \{0\}$，则 $\partial M$ 与 $\mathbb{S}^2$ 微分同胚。

推论 3.4. 设 $(M^3, g)$ 是一个无边界的完备黎曼旋量流形 $(M^n, g)$，满足索博列夫不等式 (Sob$_\gamma$)，且具有非负标量曲率。如果 $\pi_2(M) = \{0\}$ 那么 $M$ 是单连通的。

3.2. 推论的证明。在开始证明定理 3.1 之前，让我们先说明它如何推出这两个推论：

推论 3.3 的证明。假设 $\partial M$ 不与 $\mathbb{S}^2$ 微分同胚。根据 Atiyah [Ati71], then$\partial M$ 具有一个自旋结构 $\varsigma$，满足 $\alpha(\partial M, \varsigma) = 1$（模 2）。此外，$H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ 在 $M$ 的自旋结构集合上具有传递作用，而 $H^1(\partial M, \mathbb{Z}_2)$ 在 $\partial M$ 的自旋结构集合上具有传递作用。因此，映射 $H^1(M, \mathbb{Z}_2) \to H^1(\partial M, \mathbb{Z}_2)$ 的满射性意味着，在 $M$ 上存在一个自旋结构，使得诱导自旋结构在 $\partial M$ 上为 $\varsigma$。回忆 $\alpha(\partial M, \varsigma) = 1$（模 2），我们看到定理 3.1 蕴含：要么索博列夫不等式 (Sob$_\gamma$) 不成立，要么 $g$ 的标量曲率在某处为负。□

推论 3.4 的证明。我们假设 $(M^3, g)$ 是一个满足索博列夫不等式 (Sob$_\gamma$)、具有非负标量曲率且无边界的完备黎曼自旋流形 $(M^n, g)$，并且 $\pi_2(M) = \{0\}$。$M$ 的万有覆盖是可缩的。此外，我们知道 $\pi_1(M)$ 中每个非平凡元素都具有无限阶（参见 [SY82，证明引理 3]）。反设我们可以找到一个非平凡的 $\gamma \in \pi_1(M)$。令 $\Gamma$ 为由 $\gamma$ 生成的无限循环群，并令 $\widehat{M} = \widetilde{M}/\Gamma$ 配备由 $g$ 诱导的黎曼度量 $\widehat{g}$；$\widehat{g}$ 的标量曲率非负，且根据命题 A.3，$(\widehat{M}, \widehat{g})$ 满足索博列夫不等式 (Sob$_\gamma$)。

我们知道 $\widehat{M}$ 是一个 K($\mathbb{Z}$, 1)，因此 $H^2(\widehat{M}, \mathbb{Z}_2) = \{0\}$。令 $c \subset \widehat{M}$ 为生成 $\pi_1(\widehat{M}) = \mathbb{Z}$ 的一个环路，并令 $\mathcal{U} \subset M$ 为 $c$ 的一个管状邻域。因此 $\mathcal{U} \simeq \mathbb{D} \times \mathbb{S}^1$ 且 $\partial U \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$。根据构造，映射 $H^1(\widehat{M}, \mathbb{Z}_2) \to H^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2)$ 是一个同构，因此得到 Mayer–Vietoris 正合序列

$$H^1(\widehat{M}, \mathbb{Z}_2) \to H^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2) \oplus H^1(\widehat{M} \setminus \mathcal{U}, \mathbb{Z}_2) \to H^1(\partial \mathcal{U}, \mathbb{Z}_2) \to H^2(\widehat{M}, \mathbb{Z}_2) = \{0\}.$$

意味着

$$H^1(\widehat{M} \setminus \mathcal{U}, \mathbb{Z}_2) \to H^1(\partial \mathcal{U}, \mathbb{Z}_2) \to \{0\}$$

这与推论 3.3 矛盾。□

3.3. 定理 3.1 的证明。这里我们假设 $(M^n, g)$ 是一个完备黎曼自旋流形 $(M^n, g)$，其闭边界为 $\partial M$，满足索博列夫不等式 (Sob$_\gamma$)，且具有非负标量曲率。

3.3.1. 狄利克雷到诺伊曼映射的构造。我们首先回顾 Car01] 在我们这一情形下的主要构造。设 S $\to M$ 是 $M$ 上的自旋丛，并且

$$\not{D} : \mathscr{C}^\infty(M, \mathbf{S}) \to \mathscr{C}^\infty(M, \mathbf{S})$$

为相应的狄拉克算子。令 $\nabla$ 为列维-奇维塔联络，或 S 上诱导的联络。由于 $g$ 的标量曲率非负，狄拉克算子 $\not{D}$ 在无穷远处是非抛物型的。若取一个包含 $\partial M$ 且内部非空的紧集 $K \subset \overline{M}$，我们定义 $\mathscr{W}(M, \mathbf{S})$，它是空间 $\mathscr{C}_c^\infty(\overline{M}, \mathbf{S})$ 关于范数的完备化

$$\sigma \mapsto \sqrt{\|\not{D}\sigma\|_{L^2}^2 + \|\sigma\|_{L^2(K)}^2}.$$

该空间不依赖于 $K$ 的选取，并且存在一个自然的连续映射

$$\mathscr{W}(M, \mathbf{S}) \to \mathscr{W}_{loc}^{1,2}(\overline{M}, \mathbf{S}).$$

此外，还存在一个连续迹映射

$$\mathrm{tr}\colon \mathscr{W}(M,\mathbf{S}) \to H^{1/2}(\partial M,\mathbf{S}),$$

从而， $\mathscr{W}(M,\mathrm{S})$ 上的一个等价范数为

$$\sigma \mapsto \sqrt{\|\not{D}\sigma\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{tr}(\sigma)\|_{H^{1/2}}^2} = \|\sigma\|_{\mathscr{W}}.$$

命题 3.5. 若 $\sigma \in H^{1/2}(\partial M,\mathrm{S})$，则存在唯一的 $h(\sigma) \in \mathscr{W}(M,\mathrm{S})$，使得

$$\operatorname{tr}(h(\sigma)) = \sigma \text{ and } \not{D}^2(h(\sigma)) = 0.$$

此外，若 $\sigma \in \mathscr{C}^\infty(\partial M,\mathrm{S})$，则 $h(\sigma) \in \mathscr{C}^\infty(\overline{M},\mathrm{S})$。

定义 3.6. 我们定义映射 $T\colon \mathscr{C}^\infty(\partial M,\mathrm{S}) \to \mathscr{C}^\infty(\partial M,\mathrm{S})$:

$$T(\sigma) = \operatorname{tr}\left(\not{D}h(\sigma)\right).$$

该狄利克雷到诺伊曼映射的主要性质如下:

命题 3.7. i) $T$是一个 1 阶伪微分算子

ii) $T \circ T = 0$,

iii) 我们用 cl 表示 Clifford 乘法，则若 $\vec{n}\colon \partial M \to TM$为单位内法向量场，则 $\mathrm{cl}(\vec{n})T$是自伴的，且 $T^* = \mathrm{cl}(\vec{n})T\mathrm{cl}(\vec{n})$。

iv) 由 $T$定义的上同调具有如下解释:

$$\dim \frac{\ker T}{\operatorname{Im} T} = \dim \ker\left(T + T^*\right) = \dim \frac{\left\{\sigma \in \mathscr{W}(M,\mathbf{S}) \cap \mathscr{C}^\infty(\overline{M},\mathbf{S})\colon \not{D}\sigma = 0\right\}}{\left\{\sigma \in L^2(M,\mathbf{S}) \cap \mathscr{C}^\infty(\overline{M},\mathbf{S})\colon \not{D}\sigma = 0\right\}}.$$

3.3.2. 由狄利克雷到诺伊曼映射定义的上同调的一个消失结果。以下是对 [Car02] 所期望的改进:

命题 3.8. 在定理 3.1 的假设下，我们有 $\ker\left(T + T^*\right) = \{0\}$.

证明。在此回顾 $\sigma \in H^{1/2}(\partial M,\mathrm{S})$ 的调和延拓是如何构造的是有用的。若我们定义 $\mathscr{W}_0(M,\mathrm{S})$ 为迹映射 tr 的核，则 $\mathscr{C}_c^\infty(M,\mathrm{S})$ 在 $\mathscr{W}_0(M,\mathrm{S})$ 中稠密。若$\tilde{\sigma} \in \mathscr{W}(M,\mathrm{S})$ 是 $\sigma$的任一在 $\overline{M}$ 中具有紧支撑的延拓；则 $\tilde{\sigma} - h(\sigma)$ 是 $\tilde{\sigma}$ 在 $\mathscr{W}_0(M,\mathrm{S})$ 上的 $\mathscr{W}$-正交投影。Lichnerowicz 公式是指对于 $\phi \in \mathscr{C}_c^\infty(M,\mathrm{S})$:

$$\int_M |\not{D}\phi|^2 \, d\nu_g = \int_M |\nabla\phi|^2 \, d\nu_g + \frac{1}{4}\int_M \mathrm{Scal}|\phi|^2 \, d\nu_g \geq \int_M |\nabla\phi|^2 \, d\nu_g \,.$$

因此，利用 Kato不等式 $|\nabla\phi| \geq |\nabla|\phi||$ 和索博列夫不等式 $\mathrm{Sob}_\gamma$，可得，对于任意$\phi \in \mathscr{C}_c^\infty(M,\mathrm{S})$:

$$\int_M |\not{D}\phi|^2 \, d\nu_g \geq \gamma \left(\int_M |\phi|^{\frac{2n}{n-2}} \, d\nu_g\right)^{1-\frac{2}{n}}.$$

这意味着，对于任意 $\phi \in \mathscr{W}_0(M,\mathrm{S})$，可得 $\phi \in L^{\frac{n}{n-2}}$. 特别是 $h(\sigma) \in L^{\frac{2n}{n-2}}$. Kato不等式以及以下事实

$$\not{D}^2 h(\sigma) = \nabla^*\nabla h(\sigma) + \frac{1}{4}\mathrm{Scal}_g \, h(\sigma) = 0$$

可得 $u = |h(\sigma)|$ 是次调和的:

$$\Delta_g u \leq 0.$$

索博列夫不等式和经典的 De Giorgi–Nash–Moser迭代法迭代方案表明，对于任意满足 $d(x,\partial M) \geq R$ 的 $x \in M$:

$$u(x) \leq C(n,\gamma)\frac{1}{R^{\frac{n-2}{2}}}\left(\int_{B(x,R)} u^{\frac{2n}{n-2}} \, d\nu_g\right)^{\frac{n-2}{2n}}. \tag{6}$$

为了证明命题 3.8，我们需要证明：若 $\not{D}h(\sigma) = 0$，则 $h(\sigma)$ 属于 $L^2$。

因此，考虑满足 $\not{D}h(\sigma) = 0$ 的 $\sigma \in H^{1/2}(\partial M, \mathrm{S})$。精细 Kato 不等式（[CGH00，定理 4]）推出，对于 $f := |h(\sigma)|^{\frac{n-2}{n-1}}$，可得

$$\Delta f + \frac{n-2}{4(n-1)} \mathrm{Scal}_g \, f \leq 0.$$

因此， $f$ 是次调和的。此外，由 (6) 可知，$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$。现在引入 $M_R = \{x \in \overline{M}, d(x, \partial M) \leq R\}$ 和 $h\colon\ M_1 \to (0,1]$ $M_1$ 的平衡势，即 $h$ 是 Dirichlet 边值问题的单调极限

$$\begin{cases} \Delta h_R = 0 & \text{on } M_1 \setminus M_R \\ h_R = 1 & \text{on } \partial M_1 \\ h_R = 0 & \text{on } \partial M_R. \end{cases}$$

根据 (5)，对于任意 $p > n/(n-2)$，有 $h \in L^p$。由最大值原理可知，若 $L_R = \|h(\sigma)\|_{L^\infty(\partial M_R)}$，则

$$\forall x \in M_R\colon f \leq L_1 h_R + L_R.$$

令 $R \to +\infty$，可得

$$\forall x \in M_R\colon 0 \leq f \leq L_1 h$$

因此，对于任意 $p > n/(n-2)$，都有 $f \in L^p$。最终可得

$$\forall p > n/(n-1)\colon |h(\sigma)| \in L^p(M_1).$$

特别地， $|h(\sigma)| \in L^2$，这就是所需的结论。 □

3.3.3. 通过 Callias 指标公式得出结论。伪微分算子 $T$ 的主符号给出 于

$$\sigma(T)(x,\xi) = -|\xi|\mathrm{cl}(\vec{n}) + i\mathrm{cl}(\xi).$$

因此， $T + T^*$ 的主符号为

$$\sigma(T + T^*)(x,\xi) = 2i\mathrm{cl}(\xi). \tag{7}$$

此外， $T + T^* = T + \mathrm{cl}(\vec{n})T\mathrm{cl}(\vec{n})$与由 $\vec{n}$作 Clifford 乘法的算子反交换：

$$(T + T^*)\,\mathrm{cl}(\vec{n}) = -\mathrm{cl}(\vec{n})\,(T + T^*)\,.$$

为了完成证明，我们需要根据 $M$ 的维数讨论不同的情形，即当 $n = 4k+1, 8k+3, 8k+1$时。这里我们采用 [Bär96 第 2] 节和 [Fri00 第 1.7]小节中的论述

$M$ 的维数为奇数的情形。此时，若赋予 $\partial M$ 由 $M$上的自旋结构所诱导的自旋结构，我们知道， $\not{\Sigma} \to \partial M$ 的自旋丛可与 $\mathrm{S} \to \partial M$等同。此外，其$\mathbb{Z}_2$ 分次由 $\mathrm{cl}(\vec{n})$ 的特征子空间给出，其中 $x \in \partial M$任意：

$$\not{\Sigma}_x^{\pm} = \{\sigma \in \mathbf{S}_x\ ;\ \mathrm{cl}(\vec{n}(x))\sigma = \pm\sigma\}\,.$$

由于 $T + T^*$ 与由 $\vec{n}$作 Clifford 乘法的算子反交换，因此可得

$$(T + T^*)\left(\mathscr{C}^\infty\left(\partial M, \not{\Sigma}^{\pm}\right)\right) \subset \mathscr{C}^\infty\left(\partial M, \not{\Sigma}^{\mp}\right).$$

注意到， $\xi \in T_x\partial M$ 在 $\not{\Sigma}_x$ 上的 Clifford 乘法由下式给出

$$\mathrm{cl}_{\partial M}(\xi) = \mathrm{cl}(\vec{n}(x))\mathrm{cl}(\xi).$$

因此，狄拉克算子 $\not{\partial}^+\colon \mathscr{C}^\infty\left(\partial M, \not{\Sigma}^+\right) \to \mathscr{C}^\infty\left(\partial M, \not{\Sigma}^-\right)$与伪微分算子$T + T^*$: $\mathscr{C}^\infty\left(\partial M, \not{\Sigma}^+\right) \to \mathscr{C}^\infty\left(\partial M, \not{\Sigma}^-\right)$具有成比例的主符号，因而具有相同的

指标，因此 ind $\not{\partial}^{+}=0$，由此完成了 $n=4k+1$时定理的证明。
当 $M$的维数为 $8k+3$时。在这种情况下，S 可以赋予一个平行实端omorphism$J$，它是反-$\mathbb{C}$ 线性的，与 Clifford 乘法对易，并满足 $J^2=$ –Id。因此 $J\not{\Sigma}^{\pm}=\not{\Sigma}^{\mp}$. 此外，由于 $J$是平行的，它与调和延拓 $h(J\sigma)=Jh(\sigma)$ 对易，并与 $T$及 $T+T^{*}$反对易。类似地，算子 $J(T+T^{*})$ $J\not{\partial}$: $\mathscr{C}^{\infty}\left(\partial M,\not{\Sigma}^{+}\right)\to\mathscr{C}^{\infty}\left(\partial M,\not{\Sigma}^{+}\right)$ 是反 -$\mathbb{C}$ 线性的、斜对称且椭圆的，并且它们具有成比例的主符号，因此具有相同的（模 2）指标，而根据命题 3.8，该指标为零。所以

$$\alpha(\partial M,\varsigma)=\dim\ker J\not{\partial}(\mathrm{mod}\,2)=0\ (\mathrm{mod}\ 2).$$

当 $M$的维数为 $8k+2$时。此时，若赋予 $\partial M$由 $M$的自旋结构诱导的自旋结构，我们知道 $\not{\Sigma}\to\partial M$的自旋丛可以与 $\mathrm{S}^{+}\to\partial M$等同。此外，$\widehat{\ }$S 可以赋予一个平行实端omorphism $J$，它是反-$\mathbb{C}$ 线性的，与 Clifford 乘法反对易，并满足 $\widehat{J}^{2}=$ Id。由于 $\mathrm{S}^{\pm}$ 是 Clifford 乘法作用于体积形式所得的 $\pm i$-特征子空间，我们有 $\widehat{J}\mathrm{S}^{\pm}=\mathrm{S}^{\mp}$. 于是算子

$$\mathrm{cl}(\vec{\nu})\widehat{J}\not{\partial},\ \widehat{J}(T+T^{*})\colon\ \to\mathscr{C}^{\infty}(\partial M,\not{\Sigma})\to\mathscr{C}^{\infty}(\partial M,\not{\Sigma})$$

也具有反-$\mathbb{C}$ 线性、斜对称和椭圆性，且它们的主符号成比例，因此具有相同的（模 2）指标；根据命题 3.8，该指标为零。因此

$$\alpha(\partial M,\varsigma)=\dim\ker\mathrm{cl}(\vec{\nu})\widehat{J}\not{\partial}^{+}\ (\mathrm{mod}\ 2)=0\ (\mathrm{mod}\ 2).$$

4. 格林函数水平集的拓扑

本节将利用与调和函数水平集相关的面积型泛函的变分公式，来获得满足索博列夫不等式且标量曲率负部具有 $L^{3/2}$ 可积性的完备黎曼流形3–manifoldssatsifying 上的某些拓扑约束。

命题 4.1. 设 $(M^3,g)$ 是满足索博列夫不等式（Sob$_\gamma$）的完备黎曼流形，并且

i) 标量曲率的负部满足 $\mathrm{Scal}_{-}\in L^{3/2}$，ii) 对某个 $o\in M$，若 $G_o$ 是极点位于 $o$ 的格林核，则有

$$\int_{M\setminus B(o,1)}\frac{|dG_o|^3}{G_o^2}\,d\nu_g<\infty,$$

iii) $G_o$ 的正则水平集是紧致的，
iv) $G_o$的正则水平集是连通的。
于是存在一个序列 $\epsilon_k\to 0$，使得 $\Omega_k=\{G_o>\epsilon_k\}$ 具有球面边界： $\partial\Omega_k\simeq\mathbb{S}^2$.

注 4.2. 需要注意的是，只要满足以下条件，第四个假设就成立：

$$\mathrm{Im}\left(H_c^1(M,\mathbb{R})\to H^1(M)\right)=\{0\}$$

也就是说，只要 1 次的闭紧支撑形式都是恰当形式即可。事实上，假设存在某个 $t>0$，使得 $\Sigma=\{G_o=t\}$ 光滑且不连通。最大值原理表明， $M\setminus\Sigma$ 唯一的有界连通分支就是包含极点 $o$的分支。这个拓扑假设意味着 $M$只有一个端，因此 $M\setminus\Sigma$ 有两个连通分支，分别为 $\{G_o<t\}$ 和 $\{G_o>t\}$。若考虑定义在 $\{G_o>t-\varepsilon\}$ 上的光滑函数 $v$，使其在 $\{G_o\in[t-\varepsilon,t]\}$ 的一个连通分支上恒等于 1，在其他分支上恒等于 0，那么 $dv$ 具有紧支撑，但不是恰当形式。

注释 4.3. 还应注意，索博列夫不等式（Sob$_\gamma$）意味着格林核在无穷远处趋于零，因此其正水平集是紧的。

证明。命题 4.1 的证明 我们引入函数 $b$，即到 $o$ 的伪距离，定义为 $b(o) = 0$，并且对任意 $x \in M \setminus \{o\}$：

$$G_o(x) = G(o,x) = \frac{1}{4\pi b(x)}.$$

索博列夫不等式意味着伪球 $\mathcal{U}_r = \{b < r\}$ 有界，而估计式 (4) 给出了伪球 $\mathcal{U}_r = \{b < r\}$ 的欧几里得体积上界：

$$\nu_g(\mathcal{U}_r) \leq C(\gamma) r^3. \tag{8}$$

根据萨德定理，我们知道对几乎处处的 $r > 0$，水平集 $\partial\mathcal{U}_r$ 是光滑的，并引入面积型泛函：

$$A(r) = \int_{\partial\mathcal{U}_r} \frac{|db|_2^2}{r^2}\, dA_g = \int_{\partial\mathcal{U}_r} \frac{|db|_2^2}{b^2}\, dA_g\,.$$

该泛函先验地对几乎处处的 $r > 0$ 有定义，但我们知道 $A$ 可连续延拓到 $(0, +\infty)$（相关讨论见 [CMb]）。注意，命题中的第二个假设是

$$\int_1^{+\infty} \frac{A(s)}{s^2} ds < +\infty. \tag{9}$$

该假设表明 $A$ 在无穷远处不会过大。现在说明为什么 $A$ 不能过小；这是索博列夫不等式和格林公式的推论：

$$\int_{\partial\mathcal{U}_r} \frac{|db|_g}{4\pi b^2}\, dA_g = \int_{\partial\mathcal{U}_r} \frac{\partial G}{\partial \vec{\nu}}\, dA_g = \int_{\mathcal{U}_r} \Delta_g G\, d\nu_g = 1$$

根据余面积公式，有：

$$\begin{aligned}
4\pi r &= \int_r^{2r} \left( \int_{\partial\mathcal{U}_s} \frac{|db|_g}{b^2}\, dA_g \right) ds \\
&= \int_{\mathcal{U}_{2r}\setminus\mathcal{U}_r} \frac{|db|_g^2}{b^2}\, d\nu_g \\
&\leq \left( \int_{\mathcal{U}_{2r}\setminus\mathcal{U}_r} \frac{1}{b^2}\, d\nu_g \right)^{\frac{1}{3}} \left( \int_{\mathcal{U}_{2r}\setminus\mathcal{U}_r} \frac{|db|_g^3}{b^2}\, d\nu_g \right)^{\frac{2}{3}} \\
&\leq \frac{(\nu_g(\mathcal{U}_{2r}))^{\frac{1}{3}}}{r^{\frac{2}{3}}} \left( \int_r^{2r} A(s) ds \right)^{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}$$

因此利用（8），我们可以得出存在一个仅依赖于 $\gamma$ 的正常数 $c(\gamma)$，使得对于任意 $r > 0$：

$$c(\gamma) \leq \frac{1}{r} \int_r^{2r} A(s) ds. \tag{10}$$

根据 Colding-Minicozzi [CMb 的公式 1.33 和引理 2.1] 以及余面积公式，对任意$0 < r < R$，可得不等式：

$$\begin{aligned}
A'(R) + \frac{1}{R}A(R) - A'(r) - \frac{1}{r}A(r) \geq \\
\int_{\mathcal{U}_R\setminus\mathcal{U}_r} \mathrm{Scal}_g \frac{|db|_g}{2b^2}\, d\nu_g + \frac{3}{4}\int_r^R \frac{(A'(s))^2}{A(s)} ds - \int_r^R \frac{4\pi\chi(\partial\mathcal{U}_s)}{s^2} ds.
\end{aligned}$$

其中 $\chi(\partial\mathcal{U}_s)$ 是曲面 $\partial\mathcal{U}_s$ 的欧拉示性数。若假设命题 4.1 的结论不成立，则存在某个 $r_0$，使得对任意 $s \geq r_0$：

$$\chi(\partial\mathcal{U}_s) \leq 0.$$

因此可得，对于任意 $r_0 < r < R$:

$$A'(R) + \frac{1}{R}A(R) - A'(r) - \frac{1}{r}A(r) \geq -\frac{1}{2}\int_{\mathcal{U}_R\setminus\mathcal{U}_r} (\mathrm{Scal}_g)_- \frac{|db|_g}{b^2}\, d\nu_g + \frac{3}{4}\int_r^R \frac{\left(A'(s)\right)^2}{A(s)} ds. \tag{11}$$

我们利用 Hölder不等式估计 (11) 左端的第一项，得到对于任意 $\delta > 0$：

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{U}_R\setminus\mathcal{U}_r} \frac{(\mathrm{Scal}_g)_- \, |db|_g}{b^2}\, d\nu_g &\leq \left(\int_{\mathcal{U}_R\setminus\mathcal{U}_r} \frac{(\mathrm{Scal}_g)_-^{\frac{3}{2}}}{b}\, d\nu_g\right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_r^R \frac{A(s)}{s^2} ds\right)^{\frac{1}{3}} \\ &\leq \frac{2}{3\sqrt{\delta}}\int_{\mathcal{U}_R\setminus\mathcal{U}_r} \frac{(\mathrm{Scal}_g)_-^{\frac{3}{2}}}{b}\, d\nu_g + \frac{\delta}{3}\int_r^R \frac{A(s)}{s^2} ds. \end{aligned} \tag{12}$$

为了处理 (11) 左端的第二项，我们使用 Hardy 型不等式：

$$\forall u \in \mathscr{C}^1([a,b]): \int_a^b |u'|^2 ds \geq \frac{1}{4}\int \frac{u^2}{s^2} ds + \frac{u^2(b)}{2b} - \frac{u^2(a)}{2a}.$$

该不等式通过展开 $\int_a^b \left|u' - \frac{1}{2r}u\right|^2 dr$ 并对项进行分部积分得以证明

$$\int_a^b \frac{u(s)u'(s)}{s} ds = \frac{u^2(b)}{2b} - \frac{u^2(a)}{2a} + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{u^2(s)}{s^2} ds.$$

因此可得，对于任意 $\mu \in [0, 3/4]$:

$$\frac{3}{4}\int_r^R \frac{\left(A'(s)\right)^2}{A(s)} ds = 3\int_r^R \left(\sqrt{A(s)}'\right)^2 ds \geq \frac{\mu}{4}\int_r^R \frac{A(s)}{s^2} ds + \frac{\mu}{2}\left(\frac{A(R)}{R} - \frac{A(r)}{r}\right). \tag{13}$$

我们取 $\delta = \frac{3}{2}$ 和 $\mu = 1$，并将 (12) 和 (13) 代入 (11)，可得[2]对于任意 $r_0 < r < R$:

$$A'(R) + \frac{1}{2R}A(R) - A'(r) - \frac{1}{2r}A(r) \geq -\frac{1}{2}\int_{\mathcal{U}_R\setminus\mathcal{U}_r} \frac{(\mathrm{Scal}_g)_-^{\frac{3}{2}}}{b}\, d\nu_g\,.$$

条件 (9) 意味着

$$\liminf_{R\to+\infty} A'(R) + \frac{1}{2R}A(R) \leq 0$$

因此，对于任意 $r \geq r_0$，有:

$$\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{d}{dr}\left(\sqrt{r}A(r)\right) = A'(r) + \frac{1}{2r}A(r) \leq \frac{1}{2}\int_{M\setminus\mathcal{U}_r} \frac{(\mathrm{Scal}_g)_-^{\frac{3}{2}}}{b}\, d\nu_g \leq \frac{1}{2r}\int_{M\setminus\mathcal{U}_r} (\mathrm{Scal}_g)_-^{\frac{3}{2}}\, d\nu_g\,.$$

因此，对于任意 $R > r > r_0$，有:

$$\sqrt{R}A(R) - \sqrt{r}A(r) \leq \left(\sqrt{R} - \sqrt{r}\right)\int_{M\setminus\mathcal{U}_r} (\mathrm{Scal}_g)_-^{\frac{3}{2}}\, d\nu_g\,.$$

因此，对于任意 $r > r_0$，可得:

$$\limsup_{R\to+\infty} A(R) \leq \int_{M\setminus\mathcal{U}_r} (\mathrm{Scal}_g)_-^{\frac{3}{2}}\, d\nu_g$$

从而 $\limsup_{R\to+\infty} A(R) = 0$，这与 (10) 矛盾。

□

[2]常数 $1/2$ 并非最优常数，我们选用它只是为了方便。

为了证明定理 A 和定理 C，我们按照舍恩和丘成桐引入的证明方案进行，并依次证明万有覆盖是可缩的，然后说明它为何是单连通的，最后证明该流形在无穷远处是单连通的。

5.1. 万有覆盖是可缩的。第一步依赖于以下结果：

命题 5.1. 设 $(M^n, g)$ 是满足索博列夫不等式 (Sob$_\gamma$) 的完备黎曼流形，且薛定谔算子 $\Delta_g + \mathrm{Ric}$ 非负，则 $M$ 及其任意正规覆盖 $\widehat{M} \to M$ 都只有一个端，因此 $H^{n-1}(\widehat{M}, \mathbb{Z}) = \{0\}$。

证明。设 $\pi\colon M \to M$ 是 $M$ 的正规覆盖。根据命题 A.3，我们知道，若 $\widehat{g} = \pi^* g$，则 $(M, \widehat{g})$ 也满足索博列夫不等式 (Sob$_\gamma$)，且薛定谔算子 $\Delta_{\widehat{g}} + \mathrm{Ric}_{\widehat{g}}$ 也非负。若 $M$ 有两个端，则由索博列夫不等式可知，存在一个非常数有界调和函数 $h\colon M \to \mathbb{R}$，其狄利克雷能量 [有限（Car98，定理 3]，或[CSZ97，引理 2]的证明）：

$$\int_{\widehat{M}} |dh|^2_{\widehat{g}}\, d\nu_{\widehat{g}} < +\infty.$$

设 $\alpha = dh$，利用博赫纳公式并分部积分，我们得到对任意 $\chi \in \mathscr{C}^\infty_c(M)$：

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{M}} \left[\, |\nabla \chi\alpha|^2 + \mathrm{Ricci}(\chi\alpha, \chi\alpha)\right] d\nu_{\widehat{g}} &= \int_{\widehat{M}} |d\chi|^2 |\alpha|^2\, d\nu_{\widehat{g}} \\ &\quad + \int_{\widehat{M}} \chi^2 \left[\, \langle \nabla^*\nabla\alpha + \mathrm{Ricci}(\alpha), \alpha\rangle\right] d\nu_{\widehat{g}} \\ &= \int_{\widehat{M}} |d\chi|^2 |\alpha|^2\, d\nu_{\widehat{g}}\,.\end{aligned}$$

回顾 Yau 的精细 Kato 不等式：

$$|\nabla\alpha|^2 \geq \frac{n}{n-1} |d|\alpha|\,|^2.$$

现在，对每个 $\varepsilon \in (0, 1)$，可得

$$|\nabla\chi\alpha|^2 \geq (1-\varepsilon)\chi^2 |\nabla\alpha|^2 + (1 - 1/\varepsilon)\, |\alpha|^2 |d\chi|^2$$

and

$$\frac{1}{\varepsilon} |\alpha|^2 |d\chi|^2 + \chi^2 |d|\alpha|\,|^2 \geq \frac{1}{1+\varepsilon} |\nabla\chi|\alpha||^2.$$

因此，我们可以找到一个仅依赖于 $n$ 和 $\varepsilon$ 的常数 $C$，使得

$$C|\alpha|^2 |d\chi|^2 + |\nabla\chi\alpha|^2 \geq \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{n}{n-1} |d\chi|\alpha||^2$$

我们选择 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n}$$

并得到

$$\begin{aligned}(C+1) \int_{\widehat{M}} |d\chi|^2 |\alpha|^2\, d\nu_{\widehat{g}} &\geq \int_{\widehat{M}} \left[C|\alpha|^2 |d\chi|^2 + |\nabla\chi\alpha|^2\right] d\nu_{\widehat{g}} + \int_{\widehat{M}} \mathrm{Ric}\chi^2 |\alpha|^2\, d\nu_{\widehat{g}} \\ &\geq \frac{1}{n} \int_{\widehat{M}} |d\chi|\alpha||^2\, d\nu_{\widehat{g}} + \int_{\widehat{M}} \left[|d\chi|\alpha||^2 + \mathrm{Ric}\chi^2 |\alpha|^2\right] d\nu_{\widehat{g}} \\ &\geq \frac{1}{n} \int_{\widehat{M}} |d\chi|\alpha||^2\, d\nu_{\widehat{g}}\,.\end{aligned}$$

现在选择 $\chi = \chi_R$，使其梯度有界于 2，且满足

$$\chi_R(x) = \begin{cases} 0 & \text{on } B(x,R) \\ 1 & \text{outside } B(x,R+1) \end{cases}$$

令 $R \to +\infty$，可得 $\alpha = 0$。因此产生矛盾，故 $M$ 只有一个端。 □

**C推论 5.2**。在定理 A 和定理 C 的假设下，$M$ 的万有覆盖是可缩的 n-tra的。

证明。令 $\pi\colon \tilde{M} \to M$ 是 $M$ 的万有覆盖。根据命题 5.1，$H^2(\tilde{M},\mathbb{Z}) = \{0\}$，且 $\tilde{M}$ 是单连通的，因此可得 $\pi_2(M) = \{0\}$。故 $M$ 是可缩的。□

5.2. 单连通性。

命题 5.3。在定理 A 或定理 C 的假设下，$M$ 是单连通的。

证明。在定理 C 的设定下，我们知道黎曼流形 $(M, g)$ 是完备的，满足索博列夫不等式（命题 2.7），并且具有非负标量曲率（引理 2.2）。因此，该结果由推论 3.4 的应用以及 $M$ 的万有覆盖是可缩的这一事实得出。

在定理 A 的设定下，我们利用加权黎曼流形 $(M, g, \mu)$ 的几何。设 $\pi\colon \tilde{M} \to M$ 为 $M$ 的万有覆盖，我们为其赋予度量 $\tilde{g} = \pi^* g$ 以及测度 $\tilde{\mu} = \pi^*\mu$. 加权黎曼流形 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{\mu})$ 满足 Bakry-Émery 条件 $\mathrm{BE}(0, N)$，并且定理 A 中所作的假设保证

$$N = 3 + \frac{1}{\lambda - 1} < 4.$$

我们知道 $\pi_1(M)$ 中的每一个非平凡元素都具有无限阶。因此，假设 $\pi_1(M)$ 是非平凡的，并设 $\gamma \in \pi_1(M) \setminus \{e\}$。现在固定一点 $\tilde{o} \in M$，并设 $o = \pi(\tilde{o})$。设 $\mathcal{F} \subset M$ 为以 $\tilde{o}$ 为基点的狄利克雷基本域的内部：

$$\mathcal{F} = \{x \in \tilde{M} \colon d_{\tilde{g}}(\tilde{o}, x) < d_{\tilde{g}}(\tau(\tilde{o}), x)\,;\, \forall \tau \in \pi_1(M)\}$$

令 $L = d_{\tilde{g}}(\tilde{o}, \gamma(\tilde{o}))$，使得对每个 $k \in \mathbb{N}$：

$$d_{\tilde{g}}(\tilde{o}, \gamma^k(\tilde{o})) \le kL.$$

因此

$$\bigcup_{\ell=0}^{k} \gamma^\ell \left(\mathcal{F} \cap B_{\tilde{g}}(\tilde{o}, R)\right) \subset B_{\tilde{g}}(\tilde{o}, R + kL).$$

Bishop–Gromov 比较定理推出，若 $R \ge 1$，则

$$\tilde{\mu}\left(B_{\tilde{g}}(\tilde{o}, R+kL)\right) \le \tilde{\mu}\left(B_{\tilde{g}}(\tilde{o}, 1)\right)\ (R+kL)^N. \tag{14}$$

我们还知道，集合 $\gamma^\ell(\mathcal{F} \cap B_{\tilde{g}}(\tilde{o}, R))$ 两两不相交，且具有相同的 $\tilde{\mu}$-体积。根据 Anderson [And90]，我们知道对每个 $R > 0$：

$$\pi\left(\overline{\mathcal{F}} \cap B_{\tilde{g}}(\tilde{o}, R)\right) = B_{\overline{g}}(o, R) \text{ and } \mu\left(\pi\left(\mathcal{F} \cap B_{\tilde{g}}(\tilde{o}, R)\right)\right) = \mu\left(B_{\overline{g}}(o, R)\right).$$

现在利用体积下界估计（命题 2.6），可知存在某个正的常数 $C$，使得

$$\forall R > 0 \colon CR^3 \le \mu\left(B_{\overline{g}}(o, R)\right).$$

最终得到：

$$C(k+1)R^3 \le \mu\left(B_{\tilde{g}}(\tilde{o}, 1)\right)\ (R+kL)^N.$$

若选取 $R = k$，则可见 $N < 4$ 这一事实与 $\gamma$ 具有无限阶这一事实相矛盾。□

5.3. 无穷远单连通。

命题 5.4. 在定理 A 或定理 C 的假设下， $M$ 是无穷远单连通的。

证明。我们首先注意到，定理和命题 2.5 中的假设意味着 $(M,g)$ 满足命题 4.1 的前两个假设。

由于 $M$ 是单连通的，且 $(M,g)$ 满足索博列夫不等式 (Sob$_\gamma$)，我们知道 $(M,g)$ 满足命题 4.1 的后两个假设。因此， $M$ 满足命题 4.1 的结论：存在一个穷竭

$$M = \cup_{\ell\in\mathbb{N}}\Omega_\ell$$

使得 $\partial\Omega_\ell \simeq \mathbb{S}^2$。范坎彭定理表明，每个 $M\setminus\Omega_\ell$ 都是单连通的，因此 $M$ 是无穷远单连通的。□

## Appendix A. Two technical results

这里我们记录本文中反复用到的一些结果。

命题 A.1. 设 $(M^n,g)$ 是一个完备黎曼开流形，并设 $V\in L^\infty_{loc}(M)$，则以下条件等价：

i) Schrödinger 算子 $\Delta_g+V$是非负的：

$$\forall\phi\in\mathscr{C}^\infty_c(M):\ \int_M \left[|d\phi|_g^2+V\phi^2\right]\ d\nu_g\geq 0.$$

ii) 存在一个正函数 $u\in W^{2,\,2n}_{loc}(M)$，使得 $\Delta_g u+Vu=0$。

iii) 存在一个正函数 $u\in W^{2,\,2n}_{loc}(M)$，使得 $\Delta_g u+Vu\geq 0$。

备注 A.2. i) 该结果在 [PRS08, 引理 3 中以稍强的形式陈述。10]ii) 蕴含关系 iii)⇒ i) 称为巴塔技巧。iii) 最困难的蕴含关系是 i)⇒ ii)；这一结果在欧几里得情形下归功于 Moss 和 Piepenbrink[MP78] ，在黎曼情形下归功于 Fischer-Colbrie 和 Schoen [FCS80]。

命题 A.3. 设 $(M^n,g)$ 是一个完备黎曼流形，并设 $\pi\colon\ \widehat{M}\to M$是一个赋予度量 $\widehat{g}=\pi^*g$ 的覆盖。

i) 如果 $W$局部有界，且薛定谔算子 $\Delta_g+W$非负，那么薛定谔算子 $\Delta_{\widehat{g}}-W\circ\pi$ 也非负。

ii) 如果 $n>2$，且 $(M^n,g)$ 满足索博列夫不等式 (Sob$_\gamma$)，那么 $(M,\widehat{g})$ 也满足相同的索博列夫不等式（索伯列夫常数 $\gamma$不变）：

$$\forall\varphi\in\mathscr{C}^\infty_c(\widehat{M}):\gamma\left(\int_{\widehat{M}}\varphi^{\frac{2n}{n-2}}\,d\nu_{\widehat{g}}\right)^{1-\frac{2}{n}}\leq\int_{\widehat{M}}|d\varphi|^2_{\widehat{g}}\,d\nu_{\widehat{g}}\,.$$

证明。对于第一点，该假设意味着我们可以找到方程 $\Delta_g u=Vu$ 的一个正解 $u\in W^{2,\,2n}_{loc}(M)$，因此 $v=u\circ\pi$ 也是方程 $\Delta_{\widehat{g}}v=V\circ\pi v$的一个正解。根据命题 A.1，我们知道薛定谔算子 $\Delta_{\widehat{g}}-V\circ\pi$ 非负。

关于第二点，借助 $L^{n/2}-L^{n/(n-2)}$ 对偶论证，很容易证明索博列夫不等式（Sob$_\gamma$）等价于以下事实：对于任意非负的 $V\in\mathscr{C}^0_c(M)$，我们有

$$\forall\varphi\in\mathscr{C}^\infty_c(M):\ \int_M V\varphi^2\,d\nu_g\leq\gamma^{-1}\|V\|_{L^{\frac{n}{2}}(M)}\int_M|d\varphi|^2_g\,d\nu_g\,.$$

现在设 $V \in \mathscr{C}_c^0(\widehat{M})$为非负，并定义 $\widehat{Q}$ 如下

$$\widehat{Q}(x) = \left( \sum_{y \in \pi^{-1}\{\pi(x)\}} V^{\frac{n}{2}}(y) \right)^{\frac{2}{n}}.$$

根据构造，存在 $Q \in \mathscr{C}_c^0(M)$ 使得 $\widehat{Q} = Q \circ \pi$，此外

$$\|Q\|_{L^{\frac{n}{2}}(M)} = \|V\|_{L^{\frac{n}{2}}(\widehat{M})}.$$

$(M, g)$ 上的索博列夫不等式意味着

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(M) \colon \int_M Q\varphi^2 \, d\nu_g \leq \gamma^{-1} \|V\|_{L^{\frac{n}{2}}(\widehat{M})} \int_M |d\varphi|_g^2 \, d\nu_g \,.$$

Let

$$W = \gamma \|V\|^{-1}_{L^{\frac{n}{2}}(\widehat{M})} Q,$$

于是可得薛定谔算子 $\Delta_g - W$ 是非负的。第一步意味着薛定谔算子 $\Delta_{\widehat{g}} - W \circ \pi$ 是非负的，也就是说

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\widehat{M}) \colon \int_M \widehat{Q}\varphi^2 \, d\nu_{\widehat{g}} \leq \gamma^{-1} \|V\|_{L^{\frac{n}{2}}(\widehat{M})} \int_M |d\varphi|_{\widehat{g}}^2 \, d\nu_{\widehat{g}} \,.$$

$\widehat{\ }V \leq Q$ 这一事实随后意味着

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\widehat{M}) \colon \int_M V\varphi^2 \, d\nu_{\widehat{g}} \leq \gamma^{-1} \|V\|_{L^{\frac{n}{2}}(\widehat{M})} \int_M |d\varphi|_{\widehat{g}}^2 \, d\nu_{\widehat{g}} \,.$$

$\widehat{\ }$并且 $(M, \widehat{g})$ 上满足索博列夫不等式，其索伯列夫常数仍为 $\gamma$。

□

参考文献


[AMO24] Virginia Agostiniani、Lorenzo Mazzieri 和 Francesca Oronzio. 正质量定理的格林函数证明. 《数学物理通讯》, 405(2):23, 2024. 编号 54. [And90] M. Anderson. 非负里奇曲率完备流形的拓扑. 《拓扑学》, 29(1):41–55, 1990. [APK] G. Antonelli、M. Pozzetta 和 K.Xu. 精确的谱分裂定理. Arxiv 2412.12707. [AR89] M. Anderson 和 L. Rodriguez. 非负里奇曲率的极小曲面与三维流形. 《数学年刊》, 284(3):461–475, 1989.[Ati71] M. Atiyah. 黎曼曲面与自旋结构. Annales scientifiques de l'École normale supérieure, 4(1):47–62, 1971.[Bär96] C. Bär. 具有调和旋量的度量. Geom. Funct. Anal., 6(6):899–942, 1996.[BBM11] L. Bessières、G. Besson 和 S. Maillot. 开三维流形上的里奇流与正标量曲率. Geometry & Topology, 15(2):927–975, 2011. [BC17] V. Bour 和 G. Carron. 积分意义下钳制曲率三维流形的球面定理. Communi- cations in Analysis and Geometry, 25(1):97–124, 2017. [Car96] G. Carron. Faber-Krahn 等周不等式及其推论. 收录于《Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle》（吕米尼, 1992）, 《Sémin. Congr.》第 1 卷，第 205–232 页. 法国数学会，巴黎，1996. [Car98] G. Carron. $L^2$-上同调中的一个正合列. 《杜克数学杂志》, 95(2):343–372, 1998. [Car01] G. Carron. 非紧致流形上的指标定理. 《纯粹与应用数学杂志》, 2001(541):81–115, 2001.[Car02] G. Carron. 半束缚态存在的一个拓扑判据 . 《伦敦数学会杂志》 , 65(3):757–768, 2002.[Cas06] P. Castillon. 曲面上的逆谱问题. Commentarii Mathematici Helvetici, 81(2):271–286, 2006. [CCL22] P.-Y. Chan、Eric Chen 和 M.-C. Lee. 小曲率集中与里奇流平滑. Journal of Functional Analysis, 282(10):109420, 2022. [CGH00] D. Calderbank、P. Gauduchon 和 M. Herzlich. 黎曼几何中的 Kato 不等式. 收录于《整体分析与调和分析：1999 年 5 月在法国马赛-吕米尼举行的会议论文集》, 第 95–113 页. 巴黎：法国数学会，2000.

[CH02] G. Carron 和 M. Herzlich. 非紧致共形平坦流形上的 Huber定理. Commentarii Mathematici Helvetici, 77(1):192–220, 2002.[CHL24] P.-Y. Chan、S. Huang 和 M.-C. Lee. 具有小曲率集中的流形. Annals of PDE, 10(2), 2024. [CL] G. Carron 和 M. Lansade. 能量空间中薛定谔算子的有界性. Arxiv 2212.06664. [CL24] P.-Y. Chan 和 M.-C. Lee. 具有小曲率集中的流形上的间隙定理. Mathematische Zeitschrift, 308(1), 2024.[CL25] P.-Y. Chan 和 M.-C. Lee. 利用里奇流证明黎曼流形上的间隙定理. Advances in Mathematics, 482:110625, 2025.[CMa] A. Chau 和 A. Martens. 具有钳制尺度不变积分曲率的流形上的里奇流长期存在性与拓扑刚性. Arxiv 2403.02564. [CMb] T. Colding. 标量曲率的梯度估计. Arxiv 2501.17947. [CMMR] G. Catino、L. Mari、P. Mastrolia 和 A. Roncoroni. 临界性、谱里奇曲率界下的分裂定理以及稳定极小超曲面的拓扑. Arxiv 2412.12631. [CMR24] G. Catino、P. Mastrolia 和 A. Roncoroni. 关于稳定极小超曲面的两个刚性结果. Geometric and Func- tional Analysis, 34(1):1–18, 2024. [CMT25] G. Carron、I. Mondello 和 D. Tewodrose. Kato 遇上 Bakry–Émery. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 64(6), 2025.[Col12] T. Colding. 里奇曲率的新单调性公式及其应用（一）. Acta Mathematica, 209 263, 2012 2 229( ): – .[CQY00] S.-A. Chang、J. Qing 和 P. C. Yang. 一类共形平坦四维流形的紧化. Inventiones Mathe- maticae, 142(1):65–93, 2000.[CSZ97] H.-D. Cao、Y. Shen 和 S. Zhu.

$\mathbb{R}^{n+1}$ 4 5 637 644, 中稳定极 1997

小超曲面的结构. Math. Res. Lett., ( ): – .[CWY09] S. Chang、S. Weinberger 和 G. Yu. 利用标量曲率驯服 3 14, 2009 148 1 3 -流形. Geometriae Dedicata, ( ): – .[FCS80] D. Fischer-Colbrie 和 R. Schoen. 非负标量曲率三维流形中完备稳定极小曲面的结构. Communications on Pure and Applied Mathematics, 33(2):199–211, 1980.[Fri00] T. Friedrich. 黎曼几何中的狄拉克算子.《研究生数学丛书》第 25 卷. 普罗维登斯，罗得岛：美国数学会，2000. [Liu12] G. Liu. 具有非负里奇曲率的三维流形. Inventiones mathematicae, 193(2):367–375, 2012.[LL] M.-C. Lee 和 T.-K. Lee. 具有小曲率集中的度量的局部光滑化. Arxiv 2510.12673.[LM89] H-B. Lawson 和 M.-L. Michelsohn. 自旋几何.《普林斯顿数学丛书》第 38 卷. 普林斯顿，新泽西州：普林斯顿大学出版社，1989. [LW06] P. Li 和 Ji. Wang. 加权庞加莱不等式与完备流形的刚性. Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure, 39(6):921–982, 2006. [Mar] A. Martens. 强化间隙定理：非负里奇曲率与小曲率集中. Arxiv 2407.04786. [Mar25] A. Martens. 去除里奇流平滑中的标量曲率假设. Bulletin of the London Mathematical Society, 57(7):1968–1989, 2025. [MP78] W. Moss 和 J. Piepenbrink. 椭圆方程的正解. Pacific Journal of Mathematics, 75 226, 1978 1 219( ): – .[MW24] Ovidiu Munteanu 和 Jiaping Wang. 具有标量曲率下界的三维流形的底谱. J. Funct. Anal., 287(2):42, 2024. 编号 110457.[MW26] Ovidiu Munteanu 和 Jiaping Wang. 正标量曲率三维流形的几何. Am. J. Math., 148(1):131–160, 2026.[OLX] O.Chodosh、Y. Lai 和 K. Xu. 具有正标量曲率与有界几何的三维流形. Arxiv 2502.09727. [PRS08] S. Pigola、M. Rigoli 和 A. Setti.《几何分析中的消失与有限性结果：Bochner技巧的推广》.《数学进展》第 266 卷. Birkhauser，巴塞尔；波士顿，2008. [Qia95] Z. Qian. 梯度估计与热核估计. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Math- ematics, 125(5):975–990, 1995.[Qia97] Z. Qian. 加权体积估计及其应用. Quarterly Journal of Mathematics, 48(2):235–242, 1997. [SC92] L. Saloff-Coste. 关于庞加莱、不等周和 Harnack 不等式的注记. Internat. Math. Res. Notices, (2):27–38, 1992. [Ste22] D. Stern. 标量曲率与映至 $S^1$的调和映射. J. Differ. Geom., 122(2):259–269, 2022. [SWW14] Bi. Song、G. Wei 和 G. Wu. Bakry–Emery里奇曲率的单调性公式. The Journal of Geometric Analysis, 25(4):2716–2735, 2014. [SY82] Richard Schoen 和 Shing-Tung Yau. 正里奇曲率和标量曲率的完备三维流形，第 209–228 页. 普林斯顿大学出版社，1982. [Wan23] J. Wang. 可缩三维流形与正标量曲率（二）. Journal of the European Mathematical Society, 26(2):537–572, 2023.

[Wan24] J. Wang. 可缩三维流形与正标量曲率（I）。《微分几何杂志》，（）：–。[Wan25] J. Wang. 一致正标量曲率完备三维流形的拓扑。美国数学会会刊，页码 8723–8758，2025。G. CARRON，南特大学、法国国家科学研究中心、让·勒雷数学实验室、LMJL、UMR 6629，法国南特 F-44000。电子邮箱：Gilles.Carron@univ-nantes.fr