arXiv:2603.01905v1 [math.GT] 2 Mar 2026

一个带 puncture 的黎曼曲面上的两个特征

PRADIP KUMAR

Abstract. 我们为带 puncture 的黎曼曲面上亚纯 1-形式的耦合周期实现建立了一个抽象框架。构型数据C 给出组合学信息，并确定一个受限特征标域 $\Delta_C \subset \mathrm{Hom}(\Gamma_{g,\ n},\ \mathbb{C})^2$ 及其尺度固定切片 Δ_C^{sc}。假设满足 Teichm¨uller 正则性、退化检测和可推动性，我们证明存在一个点 Δ_C^{sc}，该点对应于一个承载两个亚纯微分的曲面，它们实现任意给定的受限对。这是对 Weber–Wolf 极值长度极小化方法 [16, 17]的抽象概括。

Contents

1. 引言 1 2. 术语与主要定理陈述 4 3. 受限特征的构形空间 6 4. 主要定理的证明 9 5. 同步方法的模型案例 参考文献

13
20

1. Introduction

固定整数 $g \geq 0$ 和 $n \geq 1$。设 $S_{g,\ n}$ 为一个亏格为 g 且带有 n 个 puncture 的定向拓扑曲面，并令

$$\Gamma_{g,n} := \mathrm{H}_1(S_{g,n}; \mathbb{Z}).$$

当 $n = 0$ 我们记 S_g 和 $\Gamma_g := \mathrm{H}_1(S_g; \mathbb{Z})$。特征是一个群同态 $\chi : \Gamma_{g,\ n} \longrightarrow \mathbb{C}$。

类型为 $(g,\ n)$ 的（带标记的）穿孔黎曼曲面是一个二元组 $(X,\ P)$，由一个亏格为 g 的紧黎曼曲面 X、一个由 $P = \{p_1, \ldots, p_n\} \subset X$ 个互异点组成的有序集合，以及一个标记 $S_{g,\ n} \cong X \setminus P$ 构成。对于相应的带标记的穿孔黎曼曲面的模空间，我们记为 $\mathcal{M}_{g,\ n}$。

对于这样的（$X,\ P$），我们用 $\Omega(X)$ 表示X 上在 $X \setminus P$上全纯的亚纯 1-形式所构成的向量空间。任意 $\omega \in \Omega(X)$ 都有一个周期特征

$$\chi_\omega : \Gamma_{g,n} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma \longmapsto \int_\gamma \omega,$$

2020 数学主题分类。57M50, 30F30, 32G15, 30F60。关键词和短语。亚纯微分、周期映射、带 puncture 的黎曼曲面、极值长度、Teichm¨uller 理论、极小曲面。

其中 γ 通过标记视为定义在 $X \setminus P$ 上。令 $\Omega\mathcal{M}_{g,\,n}$ 表示这类微分在 $\mathcal{M}_{g,\,n}$ 上的丛的全空间；周期映射 为

$$\mathrm{Per} : \Omega\mathcal{M}_{g,n} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Gamma_{g,n}, \mathbb{C}), \qquad (X, \omega) \longmapsto \chi_\omega.$$

1.1. 单个特征的实现。 令 X 为亏格为 $g \geq 1$ 的紧黎曼曲面。任意全纯 1–形式 $\omega \in H^0(X,\ K_X)$ 都确定其在 Γ_g 上的周期特征。我们可以问，哪些特征能够出现为 χ_ω （允许 X 在模空间中变化）。当 $g \geq 2$ 时，答案由 Haupt 发现的两个内在障碍决定。为陈述这两个障碍，取 Γ_g 的一组辛基 $\{\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g\}$，并定义

$$\mathrm{vol}(\chi) \ := \ \sum_{i=1}^{g} \mathrm{Im}\big(\chi(\alpha_i)\ \overline{\chi(\beta_i)}\big), \qquad \chi \in \mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathbb{C}).$$

定理1.1 (Haupt [9])**.** 假设 $g \geq 2$。特征 $\chi \in \mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathbb{C})$ 属于周期映射的像

$$\mathrm{Per} : \ \Omega\mathcal{M}_g \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathbb{C})$$

当且仅当

(i) $\mathrm{vol}(\chi) > 0$，且(ii) 若 $\chi(\Gamma_g)$ $= \Lambda \subset \mathbb{C}$ 是一个格，则

$$\mathrm{vol}(\chi) \ \geq \ 2\ \mathrm{Area}(\mathbb{C}/\Lambda).$$

对于 $g = 1$，特征 $\chi \in \mathrm{Hom}(\Gamma_1, \mathbb{C})$ 来自一个全纯阿贝尔微分，当且仅当 $\chi(\Gamma_1)$ 是秩为 2 的格，且$\mathrm{vol}(\chi) \ > 0$。

对于带 puncture 的曲面 $X \setminus P$，相关对象是在 $X \setminus P$ 上全纯的亚纯微分。在这种非紧情形下，允许曲面在 $\mathcal{M}_{g,n}$ 中变化后，可获得相当大的灵活性:

定理 1.2（Chenakkod–Faraco–Gupta [3, 定理 A]）。若 $n \geq 1$，则周期映射

$$\mathrm{Per} : \ \Omega\mathcal{M}_{g,n} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Gamma_{g,n}, \mathbb{C})$$

是满射。等价地，每个 $\chi \in \mathrm{Hom}(\Gamma_{g,n}, \mathbb{C})$ 都是某个带 *puncture* 的黎曼曲面 $X \in \mathcal{M}_{g,n}$ 上亚纯微分的周期特征。

1.2. 耦合的受限周期数据与 Weber–Wolf 机制。 在几何构造中，主要遇到一对相容特征。周期数据受到组合学和对称性的约束：预先指定有限多个周期，并施加线性的“闭合”关系，以及射线/正性条件。例如，在构造极小曲面所用的正交圆盘/魏尔斯特拉斯方法中，首先在带 puncture 的曲面上取魏尔斯特拉斯数据 $(G,\, dh)$，并考虑两个亚纯微分

$$\omega_{\mathrm{I}} := G\, dh, \qquad \omega_{\mathrm{II}} := G^{-1}\, dh.$$

浸入的全局周期条件迫使 ω_{I} 和 ω_{II} 的周期满足严格的关系。因此，我们面临一个受限对周期特征的同时实现问题。

问题。 给定一对受限特征 $(\chi_{\mathrm{I}},\ \chi_{\mathrm{II}})$，能否找到一个带 punctures 的黎曼曲面 X 以及两个亚纯 1-形式 $\omega_{\mathrm{I}},\ \omega_{\mathrm{II}} \in \Omega(X)$，使得 $\chi_{\omega_{\mathrm{I}}} = \chi_{\mathrm{I}}$ 和 $\chi_{\omega_{\mathrm{II}}} = \chi_{\mathrm{II}}$?

难点不在于分别实现每个特征（定理 1.2 给出了逐点存在性），而在于零点或极点阶数受限时的耦合：在具体模型中，每个特征通常决定其自身的共形结构，因此必须设法使两个共形结构一致。

Weber 和 Wolf 在其极小曲面的正交圆盘方法中，引入了一种基于 Teichm¨uller 理论的极小化策略，以求解这类耦合周期问题 [16, 17]。从一对 1–形式 $\omega_{\mathrm{I}} = G\,dh$ 和 $\omega_{\mathrm{II}} = G^{-1}dh$出发，他们构造了两个平坦结构（或平面区域），其共形类型必须一致，Weierstrass 数据才能存在于同一个黎曼曲面上。核心思路是比较两侧适当配对的曲线族的极值长度，并将由此产生的差异汇总为一个非负的高度函数。高度函数的全局极小值点不可能是正的局部极小值，因为可以通过“推动”构形来降低高度。因此，在全局极小值点处，高度必须为零，这迫使两个共形结构重合，从而得到一个同时实现两个微分的带 puncture 曲面。

此后，这种基于极值长度的极小化思想也出现在其他 Weierstrass 型构造中，例如极大曲面 [2] 的研究，以及最近高亏格天使曲面 [1]的构造。受这一论证似乎具有可移植性的启发，本文对 Weber– Wolf 机制进行抽象：我们提炼出一系列解析条件——完全以参数空间上的极值长度来表述——在这些条件下，相应的高度函数必为零。这一抽象有两个目的。首先，它将本质上属于 Teichm¨uller 理论的论证与产生给定参数空间的几何分离开来。其次，它以一种形式将该方法封装起来，使其能够原样应用于其他耦合周期问题。

1.3. 启发性单参数模型。 我们简要展示一个简单单参数族中的机制。固定亏格为 2 且有两个 puncture 的定向曲面 $S_{2,2}$，并记作 $\Gamma_{2,2} = \mathrm{H}_1(S_{2,2};\mathbb{Z})$。为亏格二部分选取一组辛基 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$，并令 δ_1, δ_2 为围绕 puncture 的小正向环路（因此 $\delta_1 + \delta_2 = 0$ 在同调中）。

考虑特征对 $(\chi_{\mathrm{I}}, \chi_{\mathrm{II}}) \in \mathrm{Hom}(\Gamma_{2,2}, \mathbb{C})^2$，并满足三类限制：

(i) 共同 puncture 周期 $\chi_{\mathrm{I}}(\delta_1) = \chi_{\mathrm{II}}(\delta_1) = 2\pi i\, r$ 满足 $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$；(ii) 射线条件要求指定周期位于 $\mathbb{R}_{>0}$ 和 $i\mathbb{R}_{>0}$上，并在 χ_{I} 与 χ_{II}之间交换“实部/虚部”方向；(iii) 线性闭合关系 $\chi_{\mathrm{I}}(\alpha_1) = \chi_{\mathrm{I}}(\alpha_2)$ 和 $\chi_{\mathrm{II}}(\beta_1) = \chi_{\mathrm{II}}(\beta_2)$。

这些条件确定了一个受限域 $\Delta \subset \mathrm{Hom}(\Gamma_{2,\,2},\ \mathbb{C})^2$。固定 $a,\ b > 0$，并令 $t > 0$,

$$\chi_{\mathrm{I}}(t)(\alpha_1) = \chi_{\mathrm{I}}(t)(\alpha_2) = a, \qquad \chi_{\mathrm{I}}(t)(\beta_1) = \chi_{\mathrm{I}}(t)(\beta_2) = i\,t, \qquad \chi_{\mathrm{I}}(t)(\delta_1) = 2\pi i\, r,$$

and

$$\chi_{\mathrm{II}}(t)(\alpha_1) = \chi_{\mathrm{II}}(t)(\alpha_2) = i\,t, \qquad \chi_{\mathrm{II}}(t)(\beta_1) = \chi_{\mathrm{II}}(t)(\beta_2) = b, \qquad \chi_{\mathrm{II}}(t)(\delta_1) = 2\pi i\, r.$$

那么 $t \longmapsto (\chi_{\mathrm{I}}(t)\ \chi_{\mathrm{II}}(t))$ 参数化了一个尺度固定切片 $\Delta^{\mathrm{sc}} \subset \Delta$。

在应用中，给定（或构造）彼此独立的实现族 $t \longmapsto (X_{\mathrm{I},\ \mathrm{II}}(t)\omega_{\mathrm{I},\ \mathrm{II}}(t))$，其中 $\chi_{\omega_{\mathrm{I},\ \mathrm{II}}(t)} = \chi_{\mathrm{I},\ \mathrm{II}}(t)$。上述限制条件以典范方式配对曲线类 $\alpha_i \leftrightarrow \beta_i$。沿着这一配对比较极值长度，定义

失配函数

$$m_i(t) := \log \frac{\mathrm{Ext}_{X_{\mathrm{I}}(t)}(\alpha_i)}{\mathrm{Ext}_{X_{\mathrm{II}}(t)}(\beta_i)}, \qquad i = 1, 2,$$

以及一个高度

$$H(t) := m_1(t)^2 + m_2(t)^2 \geq 0.$$

退化通常会迫使 $H(t) \longrightarrow \infty$ 趋于 $t \longrightarrow 0$ 或 $t \longrightarrow \infty$，因此 H 可取得最小值。Weber–Wolf 论证的关键在于，任何正的局部极小值都可以通过受控变形（“可推动性”）降低；因此，全局极小值点必须满足 $H(t_0) = 0$。一旦拥有足够多的配对曲线族来分离 Teichm¨uller 空间，条件 $H(t_0) = 0$ 就会迫使 $X_{\mathrm{I}}(t_0) \cong X_{\mathrm{II}}(t_0)$，从而得到一个同时承载两个微分的带 puncture 曲面。

本文在一般的抽象框架下阐释了这一机制，旨在使其能够直接应用于其他耦合周期问题。

论文结构。第 2 节建立抽象术语体系并陈述主要结果。第3节定义受限特征标域，并引入极值长度数据和相关假设。在这些公理下，第 4 节证明自反点的存在性（定理 2.4），并推出同时实现结论（定理 2.5）。最后，第 5 节给出示例，说明这些假设成立与不成立的情形。

2. Terminology and statement of the main theorem

在本文所涉及的几何问题中，周期数据并非任意。通常需要指定两个周期特征（分别对应两种几何实现，记为 I 和 II），但这必须以施加有限组约束，并制定一条将 I 侧标签与 II 侧标签配对的规则为前提。这些要求是几何本身固有的，因此，一旦坚持采用预期的几何实现，它们便是自然而非人为的限制。

我们引入构型数据的概念来编码这些组合约束及配对规则，随后将由这些约束刻画出的 $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C})^2$ 子集定义为相应的受限特征标域 Δ_C。

定义 2.1（构型数据）。A构型数据是一个 5 元组

$$C = (E, \iota, R, \tau, \sigma)$$

由以下部分组成：

(1) 一个有限集合 E（即边标签的集合）；(2) 一个映射 $\iota : E \longrightarrow \Gamma$，使得由 $\iota(E)$ 生成的子群 $\langle \iota(E) \rangle \subset \Gamma$ 等于 Γ；(3) 一个子群 $R = \ker(\iota_* : \mathbb{Z}^E \longrightarrow \Gamma)$，它由有限多个元素 $r^{(1)}, \ldots\ldots, r^{(m)} \in \mathbb{Z}^E$ 生成（即闭合关系）；(4) 一个映射 $\tau : E \longrightarrow \{h, v\}$（即类型映射），解释为“水平”（$h$）或“垂直”（$v$）；(5) 一个双射 $\sigma : E \longrightarrow E$（即边对应），使得

$$\tau \circ \sigma = \tau.$$

与离散构型数据 C 相关联，我们定义一类可容许周期赋值。数据 C 纯属组合性质；由此我们得到一个子集

$$\Delta_C \subset \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C})^2$$

通过对 $(\chi^{\mathrm{I}},\ \chi^{\mathrm{II}})$ 施加条件：即 $(\chi^{\mathrm{I}},\ \chi^{\mathrm{II}}) \in \Delta_C$ 当且仅当

(1) χ^{I} 和 χ^{II} 在带标记的圈上的取值满足R中的所有线性关系；(2) 指定的取值落在 τ所规定的射线／半平面内；(3) 每当 σ配对两个标记时，χ^{I} 和χ^{II} 对应的周期满足 C规定的匹配规则。

换句话说，Δ_C 是通过将 C 中的每一项离散几何数据转化为关于这两个特征的明确代数约束或不等式约束而得到的。由于在我们关注的几何模型中，对周期数据进行整体缩放不会改变共形类型，我们还固定尺度，并在切片上工作（定义 3.4）

$$\Delta_C^{\mathrm{sc}} \subset \Delta_C.$$

定义 2.2（可容许曲线集）。对于 C，可容许曲线集 是由有限个 $\mathcal{A}_C$ 同伦类构成的集合，这些同伦类对应于$S_{g,\ n}$上的本质简单闭曲线和适当嵌入的本质弧，并配有指定的对合

$$\sigma_* : \mathcal{A}_C \longrightarrow \mathcal{A}_C, \qquad \gamma \longmapsto \gamma^{\sigma},$$

编码 II 侧上的哪个曲线族与 I 侧上的给定曲线族配对。

对于本文的解析部分，我们固定一个可容许曲线集 $\mathcal{A}_C$，并按照定义3.6，选取连续的极值长度赋值 $\mathrm{Ext_I}$，$\mathrm{Ext_{II}}$。具体而言，对每个曲线族 $\gamma \in \mathcal{A}_C$，我们给定两个正函数

$$u \longmapsto \mathrm{Ext_I}(u;\gamma), \qquad u \longmapsto \mathrm{Ext_{II}}(u;\gamma)$$

在 Δ_C^{sc} 上。对于 $\gamma \in \mathcal{A}_C$ 和 $u \in \Delta_C^{\mathrm{sc}}$，定义失配量

$$m_\gamma(u) \ := \ \log \frac{\mathrm{Ext_I}(u;\gamma)}{\mathrm{Ext_{II}}(u;\gamma^\sigma)},$$

以及高度

$$H(u) \ := \ \sum_{\gamma \in \mathcal{A}_C} m_\gamma(u)^2. \tag{1}$$

若 $u \in \Delta_C^{\mathrm{sc}}$ 是自反的，则 $H(u) = 0$；等价地，若

$$\mathrm{Ext_I}(u;\gamma) = \mathrm{Ext_{II}}(u;\gamma^\sigma) \qquad \text{for all } \gamma \in \mathcal{A}_C.$$

假设 2.3。我们称 $(C,\ \mathcal{A}_C,\ \mathrm{Ext_I},\ \mathrm{Ext_{II}})$ 满足这些假设，如果：
（H1）它符合定义 3.7 所述的 Teichm¨uller 正则性；（H2）它符合定义 3.8 所述的退化检测性质；（H3）它符合定义 3.9 所述的可推动性。

现在可以陈述第一个结果：在假设 2.3 下，函数 H 取值为 0。

定理 2.4 (自反点的存在性**)**。 设 C 为一个构型数据， Δ_C 为与之关联的受限特征标域，其尺度固定切片为 Δ_C^{sc}。固定一个可容许曲线集 $\mathcal{A}_C$ 以及连续的极值长度赋值 $\mathrm{Ext}_{\mathrm{I}}$、$\mathrm{Ext}_{\mathrm{II}}$，并按 (1) 定义 H 。若假设 *2.3* 成立，则 Δ_C^{sc} 包含一个自反点。

前述定理完全以函数 $\mathbf{Ext}_{\mathrm{I}}$，$\mathbf{Ext}_{\mathrm{II}}$在 Δ_C^{sc} 上的形式表述。在几何应用中，此外还给定一对结构化的独立实现族

$$u \longmapsto (X^{\mathrm{I}}(u), \omega_{\mathrm{I}}(u)), \qquad u \longmapsto (X^{\mathrm{II}}(u), \omega_{\mathrm{II}}(u)),$$

分别实现这两个特征，并通过 $\mathbf{Ext}_\star(u;\gamma) = \mathbf{Ext}_{X^\star(u)}(\gamma)$ 诱导极值长度赋值。下一个陈述给出最终所需的几何结论：在自反参数处，两个独立实现来自同一个带 puncture 的黎曼曲面，因此两个特征都由该曲面上的两个亚纯 1-形式同时实现。

定理 2.5 （同一个带 puncture 曲面上的两个亚纯 1-形式）。 假设定理 *2.4* 的条件成立。此外，假设极值长度赋值$\mathrm{Ext}_{\mathrm{I}}$、$\mathrm{Ext}_{\mathrm{II}}$ 由连续映射诱导

$$u \longmapsto X^{\mathrm{I}}(u),\ X^{\mathrm{II}}(u) \in \mathcal{T}_{g,n},$$

并且对于每个 $u = (\chi_{\mathrm{I}},\ \chi_{\mathrm{II}}) \in \Delta_C^{\mathrm{sc}}$，都存在亚纯 1-形式

$$\omega_{\mathrm{I}}(u) \in \Omega(X^{\mathrm{I}}(u)), \qquad \omega_{\mathrm{II}}(u) \in \Omega(X^{\mathrm{II}}(u)),$$

在带 *puncture* 曲面上全纯，且

$$\chi_{\omega_{\mathrm{I}}(u)} = \chi_{\mathrm{I}}, \qquad \chi_{\omega_{\mathrm{II}}(u)} = \chi_{\mathrm{II}}.$$

令 $u = (\chi_{\mathrm{I}}, \chi_{\mathrm{II}}) \in \Delta_C^{\mathrm{sc}}$ 为一个自反点。

进一步假设，有限曲线系 $\mathcal{A}_C$ 对该族的像是 *Teichm ¨uller* 分离的，即在该像中，若两个标记穿孔曲面 Y, Z 满足

$$\mathrm{Ext}_Y(\gamma) = \mathrm{Ext}_Z(\gamma^\sigma) \qquad \textit{for all } \gamma \in \mathcal{A}_C,$$

那么存在一个保穿孔双全纯映射

$$\Phi : Y \longrightarrow Z$$

与标记相容，并且存在一个标记穿孔黎曼曲面 $X \in \mathcal{M}_{g,\ n}$ 以及两个亚纯1形式 η_{I}, $\eta_{\mathrm{II}} \in \Omega(X)$，它们在带 *puncture* 曲面上全纯，使得

$$\chi_{\eta_{\mathrm{I}}} = \chi_{\mathrm{I}}, \qquad \chi_{\eta_{\mathrm{II}}} = \chi_{\mathrm{II}}.$$

3. Configuration space of restricted characters

写作 $\Gamma = \Gamma_{g,\ n}$。在本节中，我们始终固定一个构型数据

$$C = (E, \iota, R, \tau, \sigma)$$

其含义见定义 2.1。目标有两个：

- 定义受限特征标域 Δ_C 及其尺度固定切片 $\Delta_{\mathrm{sc}C}$；
- 给出辅助共形数据（容许曲线、假设 2.3 中出现的极值长度赋值）。

3.1. 受限特征标域 Δ_C。 给定一个特征 $\chi \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C})$，我们用坐标向量 $\iota(e) \in \Gamma$ 来编码它在指定类上的取值

$$p_\chi := \big(\chi(\iota(e))\big)_{e\in E} \in \mathbb{C}^E.$$

由于 $\iota(E)$生成 Γ （定义 2.1），向量 p_χ 确定 χ，仅受 $R = \ker(\iota_* : \mathbb{Z}^E \to \Gamma)$所编码的关系约束。我们记

$$\mathcal{R}_h := \mathbb{R}_{>0}, \qquad \mathcal{R}_v := i\mathbb{R}_{>0}, \qquad \overline{\mathcal{R}_h} = \mathcal{R}_h, \qquad \overline{\mathcal{R}_v} = -i\mathbb{R}_{>0}.$$

因此 $\mathcal{R}_h$ （相应地， $\mathcal{R}_v$）是正实（相应地，正虚）射线，而复共轭保持水平方向不变，同时反转垂直方向的定向。

定义 3.1 （C–可容许对）**.** 一对特征 $(\chi_{\mathrm{I}}, \chi_{\mathrm{II}}) \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}) \times \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C})$是 C–可容许，如果存在单位复数 $\zeta, \kappa \in S^1$ 使得：**(C1)** 对每个 $e \in E$,

$$\zeta^{-1}\chi_{\mathrm{I}}(\iota(e)) \in \mathcal{R}_{\tau(e)}, \qquad \zeta\,\kappa^{-1}\chi_{\mathrm{II}}(\iota(\sigma(e))) \in \overline{\mathcal{R}_{\tau(e)}}.$$

(C2) 对每个关系 $(r_e)_{e\in E} \in R$,

$$\sum_{e\in E} r_e\,\chi_{\mathrm{I}}(\iota(e)) = 0, \qquad \sum_{e\in E} r_e\,\chi_{\mathrm{II}}(\iota(\sigma(e))) = 0.$$

(C3) 对每个 $e \in E$,

$$\chi_{\mathrm{II}}(\iota(\sigma(e))) = \kappa\,\overline{\chi_{\mathrm{I}}(\iota(e))}.$$

记住以下对应关系会很有帮助。条件 **(C1)** 强制满足 τ 规定的水平/垂直组合结构（允许整体旋转 ζ）；**(C2)** 编码由 R 导出的多边形闭合方程（即每一侧的“周期闭合”）；**(C3)** 表示 II–周期是由 I–周期经过共轭并乘以单位因子 κ 得到的（即反射轴的选择）。

定义 3.2 （域 Δ_C）。 与C 关联的受限特征标域 为

$$\Delta_C := \Big\{(\chi_{\mathrm{I}}, \chi_{\mathrm{II}}) \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C})^2 : \ (\chi_{\mathrm{I}}, \chi_{\mathrm{II}}) \text{ is } C\text{–admissible}\Big\}.$$

选取一条指定边 $e_0 \in E$，使得 $\tau(e_0) = h$。对于任意 $(\chi_{\mathrm{I}}, \chi_{\mathrm{II}}) \in \Delta_C$，射线条件意味着 $\chi_{\mathrm{I}}(\iota(e_0)) \neq 0$ 位于一条射线上。使用定义 3.1 中的参数 (ζ, κ)，我们通过施加以下条件，消除无关紧要的旋转和反射选择:

$$\chi_{\mathrm{I}}(\iota(e_0)) \in \mathbb{R}_{>0}, \qquad \chi_{\mathrm{II}}(\iota(\sigma(e))) = \overline{\chi_{\mathrm{I}}(\iota(e))} \ \ \forall e \in E.$$

这导出归一化子域

$$\Delta_C^{\mathrm{norm}} := \Big\{(\chi_{\mathrm{I}}, \chi_{\mathrm{II}}) \in \Delta_C : \chi_{\mathrm{I}}(\iota(e_0)) \in \mathbb{R}_{>0} \text{ and } \chi_{\mathrm{II}}(\iota(\sigma(e))) = \overline{\chi_{\mathrm{I}}(\iota(e))} \ \ \forall e \in E\Big\}.$$

在 Δ_C^{norm}上，方向约束采取更简单的形式

$$\chi_{\mathrm{I}}(\iota(e)) \in \mathcal{R}_{\tau(e)}, \qquad \chi_{\mathrm{II}}(\iota(\sigma(e))) \in \overline{\mathcal{R}_{\tau(e)}}, \qquad \forall e \in E.$$

引理 3.3。 集合 Δ_C^{norm}是有限维实向量空间中的一个开锥。

证明。 将 $e \in E$ 写作 $x_e := \chi_{\mathrm{I}}(\iota(e))$。射线约束迫使

$$x_e \in \mathbb{R}_{>0} \ \text{ if } \tau(e) = h, \qquad x_e \in i\mathbb{R}_{>0} \ \text{ if } \tau(e) = v.$$

因此，$(x_e)_{e\in E}$ 位于实子空间中的一个开正交象限内

$$V_C := \Big\{(z_e)_{e\in E} \in \mathbb{C}^E : z_e \in \mathbb{R} \text{ if } \tau(e) = h,\ z_e \in i\mathbb{R} \text{ if } \tau(e) = v,\ \sum_{e\in E} r_e z_e = 0 \ \forall (r_e) \in R\Big\}.$$

归一化条件 $\chi_{\mathrm{II}}(\iota(\sigma(e))) = x_e$ 从 $(x_e)_{e\in\overline{E}}$ 唯一确定 χ_{II}，因此 Δ_C^{norm} 可识别为 V_C 中的一个开正交象限。对所有 x_e 进行正实数缩放不会改变定义条件，从而得到锥结构。□

在 Δ_C^{norm} 上，唯一剩下的自由度是对两个特征同时进行正实数缩放。因此，我们转而考察尺度固定切片。

De定义 3.4。 Δ_C 的尺度固定切片是余维为一的子流形

$$\Delta_C^{\mathrm{sc}} := \Big\{(\chi_{\mathrm{I}}, \chi_{\mathrm{II}}) \in \Delta_C^{\mathrm{norm}} :\ \chi_{\mathrm{I}}(\iota(e_0)) = 1\Big\}.$$

引理3.5。 Δ_C^{sc} 的尺度固定切片是 Δ_C^{norm} 中光滑的余维为一子流形。特别地， Δ_C^{sc} 是一个（有限维） C^∞ 流形。

证明。 根据引理 3.3， Δ_C^{norm}是有限维实向量空间 V_C的开子集。将 $x_e := \chi_{\mathrm{I}}(\iota(e))$ 记作 $e \in E$。由于 $\tau(e_0) = h$，坐标 x_{e_0}在 V_C上为实数，因此定义了一个光滑（实际上是线性的）映射

$$F : \Delta_C^{\mathrm{norm}} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad F\big((\chi_{\mathrm{I}}, \chi_{\mathrm{II}})\big) := \chi_{\mathrm{I}}(\iota(e_0)) = x_{e_0}.$$

微分 $dF_u : T_u\Delta_C^{\mathrm{norm}} \to \mathbb{R}$是非零线性泛函$V_C \to \mathbb{R}$, $(z_e)_{e\in E} \mapsto z_{e_0}$的限制，因此对于每个 $u \in \Delta_C^{\mathrm{norm}}$， dF_u 都是满射。于是 $1 \in \mathbb{R}$ 是 F的正则值。根据正则值定理，

$$\Delta_C^{\mathrm{sc}} = \big\{u \in \Delta_C^{\mathrm{norm}} : \chi_{\mathrm{I}}(\iota(e_0)) = 1\big\} = F^{-1}(1)$$

是 Δ_C^{norm}的余维为一的光滑子流形。 □

3.2. 容许曲线与极值长度赋值。 为比较两边，我们在 $S_{g,n}$上固定有限个测试曲线族，并为 I 类与 II 类曲线族规定一种配对，同时将它们的极值长度指定为参数 $u \in \Delta_C^{\mathrm{sc}}$的函数（或构造这些函数）。

固定一个符合定义 2.2 意义下的 $\mathcal{A}_C$ 关于 C 的可容许曲线集，并记$\gamma^\sigma := \sigma_*(\gamma)$ 为配对曲线族。

定义3.6 (极值长度赋值)。 一个极值长度赋值 对于C 由两个映射组成

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{I}} : \Delta_C^{\mathrm{sc}} \times \mathcal{A}_C \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}, \qquad \mathrm{Ext}_{\mathrm{II}} : \Delta_C^{\mathrm{sc}} \times \mathcal{A}_C \longrightarrow \mathbb{R}_{>0},$$

使得对于每个固定的 $\gamma \in \mathcal{A}_C$，函数

$$u \longmapsto \mathrm{Ext}_\star(u; \gamma), \qquad \star \in \{\mathrm{I}, \mathrm{II}\},$$

在 Δ_C^{sc}上连续。

给定 $\mathcal{A}_C$ 和一个极值长度赋值，我们按照第 2 节中的定义，定义失配函数和高度。具体而言，对 $\gamma \in \mathcal{A}_C$，令

$$m_\gamma(u) := \log \frac{\mathrm{Ext}_{\mathrm{I}}(u; \gamma)}{\mathrm{Ext}_{\mathrm{II}}(u; \gamma^\sigma)}, \qquad u \in \Delta_C^{\mathrm{sc}},$$

并定义

$$H(u) \;:=\; \sum_{\gamma\in\mathcal{A}_C} m_\gamma(u)^2 \;\geq 0.$$

3.3. 关于极值长度数据的解析假设。 主要结果中使用的抽象解析要求见假设 2.3。为便于第 4 节中的论证，宜给出映射$u \mapsto \mathrm{Ext}_{\mathrm{I}}(u;\gamma)$与 $u \mapsto \mathrm{Ext}_{\mathrm{II}}(u;\gamma)$的三个具体性质。

定义 3.7（泰希米¨勒正则性）。 我们称 C 关于所选曲线集与极值长度赋值是泰希米¨勒正则的，如果：

(R1) 对每个 $\gamma \in \mathcal{A}_C$，函数 $u \longmapsto \mathrm{Ext}_\star(u;\,\gamma)$在$\Delta_C^{\mathrm{sc}}$上对于 $\star \in \{\mathrm{I},\ \mathrm{II}\}$是 C^1；(R2) 对数–极值长度映射

$$\mathbf{E}_\star : \Delta_C^{\mathrm{sc}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{A}_C}, \qquad \mathbf{E}_\star(u) := \big(\log \mathrm{Ext}_\star(u;\gamma)\big)_{\gamma\in\mathcal{A}_C},$$

对于 $\star \in \{\mathrm{I},\ \mathrm{II}\}$是局部浸入。

对于固定的曲线族 γ，Teichm¨uller 空间上的函数 $X \mapsto \mathrm{Ext}_X(\gamma)$ 是实解析的，并满足 Gardiner 变分公式；参见 [13, 8, 11] 和 [7,第 6–7]章。因此，只要参数映射到 Teichm¨uller 空间中且是 C^1，(R1) 就自动成立。此外，(R2) 等价于以下陈述：在每个 u 处，余向量 $\{d\log \mathrm{Ext}_\star(u;\,\gamma)\}_{\gamma\in\mathcal{A}_C}$张成 $T_u^*(\Delta_C^{\mathrm{sc}})$。

定义 3.8（退化检测）。 如果对于离开 Δ_C^{sc} 的每个紧子集的任意序列 $u_k \in \Delta_C^{\mathrm{sc}}$，都存在一条曲线 $\gamma \in \mathcal{A}_C$ 使得，我们称 $(C, \mathcal{A}_C)$ 是退化检测的

$$|m_\gamma(u_k)| \longrightarrow \infty.$$

定义 3.9（可推动性）。 如果对于每个 $\gamma \in \mathcal{A}_C$ 都存在以下对象，我们称 $(C, \mathcal{A}_C)$ 是可推动的：

- 一个 C^1 向量场 V_γ 定义在 $\Delta_{\mathrm{sc}C}$上，并且
- 一个有限的关联集 $I(\gamma) \subset \mathcal{A}_C$ 满足 $\gamma \in I(\gamma)$,

使得对于每个 $u \in \Delta_C^{\mathrm{sc}}$，以下条件成立。(P1) 如果 $m_\gamma(u) \neq 0$，则 $\mathrm{sign}\big(m_\gamma(u)\big)\cdot(dm_\gamma)_u(V_\gamma) < 0$.(P2) 如果 $\delta \notin I(\gamma)$，则 $(dm_\delta)_u(V_\gamma) = 0$。对于 $\delta \in I(\gamma)$，导数$(dm_\delta)_u(V_\gamma)$在 u中一致有界。(P3) 如果 $m_\gamma(u) \neq 0$，则 $|m_\gamma(u)|\cdot\big|(dm_\gamma)_u(V_\gamma)\big| > \sum_{\delta\in I(\gamma)\setminus\{\gamma\}} |m_\delta(u)|\cdot\big|(dm_\delta)_u(V_\gamma)\big|$.

4. Proof of main theorems

在本节中，固定一个构型数据 C、一个可容许曲线集 $\mathcal{A}_C$ 以及一个极值长度赋值 $\mathrm{Ext}_{\mathrm{I}}$，$\mathrm{Ext}_{\mathrm{II}}$，如第3节所述。我们将证明第 2 节中陈述的定理 2.4 和定理 2.5。

我们首先给出一个关于非负函数的标准结果。

命题 4.1。 设Ω 为光滑流形，且 $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为连续函数。假设 f 在Ω上是适当的，并且 f 的每个局部极小点都位于零点集 $f^{-1}(0)$中。那么 f 在Ω上取得最小值，且该最小值等于0。

证明。令 $m := \inf_\Omega f \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，并选取极小化序列 $(x_k)_{k\geq 1} \subset \Omega$，使得 $f(x_k) \longrightarrow m$。

任取 $A > m$。由于 $f(x_k) \longrightarrow m$，存在 k_0使得对于所有$k \geq k_0$，$f(x_k) \leq A$，因此 $\{x_k\colon\ k \geq k_0\} \subset K_A := f^{-1}([0, A])$。$f$的逆紧性意味着$K_A$ 是紧的。因此，$(x_k)_{k\geq k_0}$ 有一个收敛子列；重新编号，使得$x_k \longrightarrow x_\infty \in K_A \subset \Omega$。

由 f 的连续性可得

$$f(x_\infty) = \lim_{k\longrightarrow\infty} f(x_k) = m,$$

因此，x_∞ 是 f的全局极小值点。特别地，x_∞ 是局部极小点，故由假设可得 $x_\infty \in f^{-1}(0)$。于是 $m = f(x_\infty) = 0$，且 f在 Ω 上取得其最小值 0。□

W现在我们验证高度函数 H 在退化检测下的逆紧性 on.

命题 4.2 (逆紧性准则)。若$(C, \mathcal{A}_C)$ 按照定义 *3.8* 的意义是退化检测的，则高度函数 H 在 Δ_C^{sc} 上是适当的。

证明。固定 $A \geq 0$，并考虑下水平集

$$K_A := H^{-1}([0, A]) = \{u \in \Delta_C^{\mathrm{sc}} : H(u) \leq A\}.$$

由引理3.5，空间 Δ_C^{sc} 是有限维光滑流形，因而可度量；因此，只需证明 K_A 中的每个序列都有一个收敛子列，且其极限仍属于 K_A。

设(u_k)是 K_A中的一个序列。若(u_k)没有收敛子列，则它会离开 Δ_C^{sc}中的每个紧子集：事实上，若某个紧集 $K \subset \Delta_C^{\mathrm{sc}}$包含该序列的无穷多项，则由 K的紧性，这些项便有一个收敛子列。

因此，反设(u_k)没有收敛子列。退化检测给出 $\gamma \in \mathcal{A}_C$，使得 $|m_\gamma(u_k)| \longrightarrow \infty$。但根据 H的定义，

$$H(u_k) = \sum_{\delta\in\mathcal{A}_C} m_\delta(u_k)^2 \ \geq\ m_\gamma(u_k)^2,$$

所以 $H(u_k) \longrightarrow \infty$，这与一致界 $H(u_k) \leq A$矛盾。因此，(u_k)在 Δ_C^{sc}中有一个收敛子列 $u_{k_j} \longrightarrow u_\infty$。

最后，$\mathcal{A}_C$ 是有限的，并且根据定义 3.6，极值长度赋值是连续的，因此每个失配量 m_δ（从而 m_δ^2）在 Δ_C^{sc}上都是连续的。因此，H 是连续的，并且

$$H(u_\infty) = \lim_{j\longrightarrow\infty} H(u_{k_j}) \leq A,$$

即 $u_\infty \in K_A$。因此，K_A 是紧的，并且 H 是适当的。 □

接下来，我们将在 Teichm¨uller 正则性和可推动性条件下，验证 H 的“无正局部极小值”性质。

命题 4.3。假设 C 是 *Teichm¨uller* 正则的（定义 *3.7*），且（C、$\mathcal{A}_C$）是可推动的（定义 *3.9*）。那么，H 的每个局部极小点都是自反的。

证明：回顾

$$H(u) = \sum_{\delta\in\mathcal{A}_C} m_\delta(u)^2.$$

根据 Teichm¨uller 正则性，每个 m_δ 都是 C^1，因此 H 在 Δ_C^{sc}上是 C^1。

设$u \in \Delta_C^{\mathrm{sc}}$ 为非自反的。则 $H(u) > 0$，故存在 $\gamma \in \mathcal{A}_C$ 使得$m_\gamma(u) \neq 0$。设 V_γ 表示由可推动性所提供的推送向量场。沿方向 V_γ 对 H 求导，得到

$$(dH)_u(V_\gamma) = 2 \sum_{\delta \in \mathcal{A}_C} m_\delta(u) \cdot (dm_\delta)_u(V_\gamma). \tag{2}$$

由(P2)，对 $\delta \notin I(\gamma)$有$(dm_\delta)_u(V_\gamma) = 0$，因此(2)中的求和可限制于$\delta \in I(\gamma)$。

对于 $\delta = \gamma$ 项，(P1)给出

$$\operatorname{sign}(m_\gamma(u)) \cdot (dm_\gamma)_u(V_\gamma) < 0,$$

因此$(dm_\gamma)_u(V_\gamma)$与 $m_\gamma(u)$符号相反，从而

$$m_\gamma(u)\,(dm_\gamma)_u(V_\gamma) = -\,|m_\gamma(u)|\,\big|(dm_\gamma)_u(V_\gamma)\big|.$$

对每个 $\delta \in I(\gamma) \setminus \{\gamma\}$，我们只需使用该估计

$$m_\delta(u)\,(dm_\delta)_u(V_\gamma) \le |m_\delta(u)|\,\big|(dm_\delta)_u(V_\gamma)\big|.$$

将这些不等式代入 (2) 得到

$$(dH)_u(V_\gamma) \le -2\,|m_\gamma(u)|\,\big|(dm_\gamma)_u(V_\gamma)\big| + 2 \sum_{\delta \in I(\gamma)\setminus\{\gamma\}} |m_\delta(u)|\,\big|(dm_\delta)_u(V_\gamma)\big|.$$

根据 (P3)，右端严格为负，因此

$$(dH)_u(V_\gamma) < 0. \tag{3}$$

选择一条光滑曲线 $\varphi : (-\varepsilon,\ \varepsilon) \to \Delta_C^{\mathrm{sc}}$ 使得 $\varphi(0) = u$ 且 $\varphi'(0) = V_\gamma(u)$（例如，取 φ 为局部坐标图中的一条直线）。由链式法则可得

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} H(\varphi(t)) = (dH)_u(V_\gamma) < 0.$$

因此，对于所有充分小的 $t > 0$，$H(\varphi(t)) < H(u)$，这与 u 是 H 的局部极小点这一假设矛盾。因此，H 的每个局部极小点都必须是自反的。□

4.1. **自反点的存在性：定理 2.4 的证明。**

定理 2.4 的证明。 假设 C 满足假设 2.3。特别地，$(C,\ \mathcal{A}_C)$ 具有退化检测性、Teichm¨uller 正则性，并且是可推动的。

由命题 4.2，高度函数 H 在 Δ_C^{sc}上是适当的。由命题 4.3，H 的每个局部极小点都是自反的；等价地，每个局部极小点都属于$H^{-1}(0)$。

将命题 4.1 应用于 $f = H$ 在 $\Omega = \Delta_C^{\mathrm{sc}}$上。我们得出，$H$ 在 Δ_C^{sc}上取得其最小值，且该最小值等于 0。因此存在 $u \in \Delta_C^{\mathrm{sc}}$ 满足$H(u) = 0$，即一个自反点。□

4.2. 一个曲面上的两个相容特征：定理 2.5 的证明。对于$u = (\chi_{\mathrm{I}},\ \chi_{\mathrm{II}}) \in \Delta_C$，我们按照定理 2.5 的陈述假设，$u$ 带有由两个带标记的穿孔黎曼曲面 $X^{\mathrm{I}}(u)$ $X^{\mathrm{II}}(u)$ 及亚纯微分给出的实现

$$\omega_{\mathrm{I}}(u) \in \Omega\big(X^{\mathrm{I}}(u)\big), \qquad \omega_{\mathrm{II}}(u) \in \Omega\big(X^{\mathrm{II}}(u)\big),$$

其周期特征分别为 χ_{I}，χ_{II}。

推论 4.4。 假设 $\mathcal{A}_C$ 对于族而言是 *Teichm¨uller* 分离的

$$u \longmapsto \big(X^{\mathrm{I}}(u), X^{\mathrm{II}}(u)\big) \qquad (u \in \Delta_C)$$

按照定理 *2.5* 的意义。若 $u \in \Delta_C^{\mathrm{sc}}$ 是自反的，则 X^{I}（u）与 X^{II}（u）共形等价。

证明。设 $u \in \Delta_C^{\mathrm{sc}}$ 是自反的。根据自反性的定义，$H(u) = 0$，因此 e

$$m_\gamma(u) = 0 \qquad \text{for every } \gamma \in \mathcal{A}_C.$$

等价地，对于每个 $\gamma \in \mathcal{A}_C$，我们都有极值长度匹配

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{I}}(u;\gamma) = \mathrm{Ext}_{\mathrm{II}}(u;\gamma^\sigma). \tag{4}$$

根据 Teichm¨uller 分离假设，等式 (4) 的集合迫使存在一个保穿孔双全纯映射

$$\Phi : X^{\mathrm{I}}(u) \longrightarrow X^{\mathrm{II}}(u)$$

该映射与所选标记在 σ_*–约定下相容。 □

定理 *2.5* 的证明。令 $u = (\chi_{\mathrm{I}}, \chi_{\mathrm{II}}) \in \Delta_C^{\mathrm{sc}}$ 为自反的，并选择相应的实现

$$\big(X^{\mathrm{I}}(u), \omega_{\mathrm{I}}(u)\big), \qquad \big(X^{\mathrm{II}}(u), \omega_{\mathrm{II}}(u)\big)$$

如陈述中所述。为简便起见，令 $X^{\mathrm{I}} := X^{\mathrm{I}}(u)$ 和 $X^{\mathrm{II}} := X^{\mathrm{II}}(u)$。

根据推论 4.4，存在一个保穿孔双全纯映射

$$\Phi : X^{\mathrm{I}} \longrightarrow X^{\mathrm{II}}$$

该映射与 σ_*–约定下的标记相容。

定义一个单一的带 puncture 曲面及其上的两个亚纯 1-形式

$$X := X^{\mathrm{I}}, \qquad \eta_{\mathrm{I}} := \omega_{\mathrm{I}}(u) \in \Omega(X), \qquad \eta_{\mathrm{II}} := \Phi^*\omega_{\mathrm{II}}(u) \in \Omega(X).$$

于是，η_{I} 和 η_{II} 在 X 上是亚纯的，并且在带 puncture 曲面上是全纯的。

补充说明：标记兼容性。令 $\mu_{\mathrm{I}} : S_{g,\ n} \cong X^{\mathrm{I}} \setminus P^{\mathrm{I}}$ 和 $\mu_{\mathrm{II}} : S_{g,\ n} \cong X^{\mathrm{II}} \setminus P^{\mathrm{II}}$ 表示所选的标记。特别地，这些标记将 $\Gamma_{g,\ n} = H_1(S_{g,\ n};\mathbb{Z})$ 与带 puncture 曲面的同调等同起来。Φ 与这些标记相容（按照 σ_*–约定），意指同调上诱导的映射使下图

$$\begin{array}{ccc} & & H_1\left(X^{\mathrm{I}} \setminus P^{\mathrm{I}};\ \mathbb{Z}\right) \\ & (\mu_{\mathrm{I}})_* \nearrow & \downarrow \Phi_* \\ \Gamma_{g,n} & & \\ & (\mu_{\mathrm{II}})_* \searrow & H_1\left(X^{\mathrm{II}} \setminus P^{\mathrm{II}};\ \mathbb{Z}\right) \end{array}$$

可交换（对 σ_* 的依赖体现在定理 2.5 的假设中标记的选取方式上）。

剩下的工作是确定周期特征。固定 $\gamma \in \Gamma_{g,\,n}$ 并用带 puncture 曲面 $X = X^{\mathrm{I}}$上的一个 1–循环 c 表示 $(\mu_{\mathrm{I}})_*(\gamma)$。根据拉回的定义，

$$\int_c \eta_{\mathrm{II}} = \int_c \Phi^* \omega_{\mathrm{II}}(u) = \int_{\Phi_* c} \omega_{\mathrm{II}}(u).$$

由上面的交换图可知，循环 $\Phi_* c$ 在 X^{II}上代表 $(\mu_{\mathrm{II}})_*(\gamma)$，因此

$$\int_{\Phi_* c} \omega_{\mathrm{II}}(u) = \chi_{\mathrm{II}}(\gamma).$$

因此$\chi_{\eta_{\mathrm{II}}} = \chi_{\mathrm{II}}$。类似地，由于 $\eta_{\mathrm{I}} = \omega_{\mathrm{I}}(u)$ 在 X^{I}上，我们有 $\chi_{\eta_{\mathrm{I}}} = \chi_{\mathrm{I}}$。这就证明了定理 2.5。□

上述论证清晰地分为两个环节。首先，自反性给出容许集 $\mathcal{A}_C$上的极值长度等式 (4)。其次，Teichmüller 分离性质断言，这些等式已经足以确定标记穿孔曲面的共形结构（按照 σ_* 标记约定），从而得到双全纯同构 Φ。在具体的极小曲面应用中，低复杂度构形可能恰恰会失败，因为无法选取一个 $\mathcal{A}_C$ 同时满足这两种作用：如果 $\mathcal{A}_C$ 过小，它可能无法检测退化，或无法分离 Teichmüller 空间，进而导致极小化步骤和／或识别步骤失效。

5. Model cases for the synchronization method

假设 2.3 旨在提炼一种分析性的同步机制，而这一机制已经存在于 Weber 和 Wolf 的经典极小曲面构造中。在这些构造中，首先从具有预设组合学结构的成对平面区域（正交圆盘）出发，得到两族先验不同的共形结构；随后比较两侧特定（平行于边的）曲线族的极值长度，并将由对数比值平方和给出的高度函数最小化，从而迫使两种共形结构相等。在 [16, 17], Teichm¨uller 正则性的框架下，通过对这些平行于边的周期进行显式的极值长度估计，可以验证退化检测和可推动性；所得的自反参数正是两侧实现同步的点，并由此得到极小曲面所需的 Weier [16, 17, 1, 2] strass 数据。从这个意义上说， [16, 17, 1, 2] 的结果可以被视为本文所建立框架的直接实例。

本节中的例子与定义 2.1 中的正式构造略有不同。我们不先指定一个离散构形数据 C =(E, ι, τ, R, ...），再提取相应的 C-相容限制特征，而是从具体的曲面族出发，在这些曲面族中，两个限制特征之间的相关相容关系一目了然。我们的目的不是改变相容性的概念，而是强调：只要能在一个尺度固定切片上构造出满足固定相容约束的两个限制特征，高度最小化/同步方法就适用——即使该约束是通过背景中不同的离散数据选择 C 实现的。

我们给出两个互为补充的例子。第一个例子中，我们研究一个完全显式的族，并通过直接计算极值长度验证假设 2.3；随后，定理 2.4 得到一个自反的参数，而推论 4.4 则给出在同一个带 puncture 曲面上的同时实现。第二个例子中，我们证明，在一种自然的构形中，与边平行的可容许类过小，无法产生 Teichm¨uller-正则的极值长度坐标，因此假设 2.3(H1) 不成立，主定理也就无法应用。

5.1. **定理适用的一种构形**。在本文中，双方均从离散构型数据 C出发进行组织；这类数据封装了组合学信息（边集、关联关系、对合/置换、粘合数据等），从而导出一个受限特征标域 Δ_C^{sc} 以及受限特征之间 C相容的一种概念。在下文的第一个例子中，我们有意从相反的方向呈现同一结构：我们从一个非常具体的几何族出发，直接写出两个受限特征（也就是两个带标记曲面）之间所导出的关系，这一关系起到“相容性”的作用。尽管这一关系的表达形式比一般定义更简单，但它并非一种新的框架：它恰好是在相关切片上选取适当离散数据 C 所导出的相容性。换言之，我们并未改变方法，而是选取了一个特别直观的模型，使得导出的C相容性一目了然。

这个例子的目的，是让主定理中抽象的方向变得具体。抽象地说，我们从构型数据 C 出发，得到一个受限特征标域 Δ_C^{sc}，随后寻找一个参数 $u \in \Delta_C^{\mathrm{sc}}$，使得与之关联的两个带标记曲面 $X_{\mathrm{I}}(u)$ 和 $X_{\mathrm{II}}(u)$ 同步 （即在 Teichm¨uller 空间中表示同一点）。在这个例子中，我们保留相同的逻辑顺序，但用一个非常明确的几何模型来描述这些对象，使读者能够立即看出限制特征是什么，以及同步意味着什么。

固定一个亏格为二的曲面 S_2，并选取简单闭曲线 α_1，β_1，α_2，$\beta_2 \in \Gamma := \mathrm{H}_1(S_2;\mathbb{Z})$，使它们具有通常的辛交数模式。令

$$J : \Gamma \longrightarrow \Gamma$$

为由 $J(\alpha_i) = \beta_i$ 和 $J(\beta_i) = -\alpha_i$ 确定的自同构，其中 $i = 1, 2$。直观地说，J 会交换每个环面分支上的“水平”与“垂直”方向。

如果 (X, ω) 是一个带有全纯 1–形式的黎曼曲面，并且 $f\colon S_2 \to X$ 是一个标记，我们将相应的周期特征记为

$$\chi_\omega^f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \chi_\omega^f(\gamma) = \int_{f_*(\gamma)} \omega.$$

将标记预合成 J，即可得到第二个特征

$$\chi_\omega^{f\circ J} = \chi_\omega^f \circ J.$$

因此，这一构形内置的基本“相容性”仅仅是：

$$\chi_{\mathrm{II}} = \chi_{\mathrm{I}} \circ J.$$

等价地，同一个底层对 $(X,\ \omega)$ 给出了两个带标记的曲面

$$X_{\mathrm{I}} := (X, f), \qquad X_{\mathrm{II}} := (X, f \circ J),$$

它们未必表示 Teichm¨uller 空间中的同一个点。这个底层对的同步问题是：

何时存在一个从 X 到其自身的共形映射，使其在 Γ 上的作用为 J?

现在我们构造一个显式族 $X(u)$，使得与之对应的受限对 $(\chi_{\mathrm{I}}(u)\ \chi_{\mathrm{II}}(u))$ 易于写出，然后在 §5.1.2 中计算 $X(u)$ 上能够检测同步的极值长度。

5.1.1. 从曲面到构形空间（尺度固定切片）。固定正实数 a, b, c 以及裂缝长度 ℓ，满足 $0 < \ell < \min\{b, c\}$。令

$$R_1 = [0, a] \times [0, b], \qquad R_2 = [0, a] \times [0, c],$$

其欧几里得坐标为 $z = x + iy$。构造矩形环面

$$T_1 := R_1/\{(0, y) \sim (a, y) \text{ and } (x, 0) \sim (x, b)\},\ T_2 := R_2/\{(0, y) \sim (a, y) \text{ and } (x, 0) \sim (x, c)\}.$$

令 $s_1 \subset T_1$ 和 $s_2 \subset T_2$ 分别为竖直线段的像

$$\{a/2\} \times [0, \ell] \subset R_1, \qquad \{a/2\} \times [0, \ell] \subset R_2.$$

将每个 T_j 沿 s_j切开，再通过平移将两条切口边界交错粘合。由此得到一个连通的亏格 2 平移曲面 $X(a,\ b,\ c)$，其上带有由 dz诱导的全纯 1-形式。

记 α_1（分别为 α_2）为 T_1（分别为 T_2）一侧的水平核心曲线，记β_1（分别为 β_2）为 T_1（分别为 T_2）一侧的垂直核心曲线。选取一个标记 $f : S_2 \to X(a,\ b,\ c)$，将固定的拓扑曲线 $\alpha_i,\ \beta_i \subset S_2$映到这些几何核心曲线上；下文中省略标记 f。

dz在 $X(a,\ b,\ c)$上的周期特征为

$$\chi_{dz}(\alpha_1) = \chi_{dz}(\alpha_2) = a, \qquad \chi_{dz}(\beta_1) = i\,b, \qquad \chi_{dz}(\beta_2) = i\,c.$$

这正是本例中特征域相关切片的定义条件：两个“水平”周期相等。

令 $a = 1$，我们将$(b,\ c)$视为一个尺度固定切片。为使记号简洁，我们省略下标 C，并写作

$$\Delta^{\mathrm{sc}} := \{(b, c) \in \mathbb{R}^2_{>0} :\ \ell < \min\{b, c\}\}, \qquad u = (b, c) \in \Delta^{\mathrm{sc}},$$

并定义

$$X(u) := X(1, b, c), \qquad \omega(u) := dz \text{ on } X(u),$$

以及这两个带标记曲面

$$X_{\mathrm{I}}(u) := (X(u), f), \qquad X_{\mathrm{II}}(u) := (X(u), f \circ J).$$

最后，相应的 C相容特征对为

$$\chi_{\mathrm{I}}(u) := \chi^{f}_{\omega(u)}, \qquad \chi_{\mathrm{II}}(u) := \chi^{f\circ J}_{\omega(u)} = \chi_{\mathrm{I}}(u) \circ J.$$

这就是当前例子中具体的“由两个限制特征得到两个曲面”。

5.1.2. 切片计算：极值长度与裂缝长度的作用。 曲面$X(1,b,c)$取决于裂缝长度 ℓ，而且水平叶状结构确实会被横向裂缝在高度为 $0<y<\ell$ 处截断。特别是，我们不应声称整个 T_1 环面侧构成一个单独的水平欧几里得圆柱。实际情况（也是我们下面所用的）是，每个环面侧上的水平与垂直方向仍包含极大欧几里得圆柱，其边界是经过裂缝端点所产生的锥点的鞍连接；这些极大圆柱决定相应的极值长度。

我们回顾关于欧几里得圆柱上极值长度的一个标准事实，后文将反复使用：设 A 是由宽为 $w>0$ 、高为 $h>0$ 的矩形通过粘合竖直边得到的欧几里得圆柱。设 γ为核心曲线（水平圆）的自由同伦类。则

$$\mathrm{Ext}_A(\gamma)=\frac{w}{h}.$$

现在我们计算 $X(1,b,c)$上核心曲线 $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2$ 的极值长度。

命题5.1 （ $X(1,b,c)$上裂缝长度为 ℓ的核心曲线）。 在 $X(1,b,c)$ 上有如下精确等式

$$\mathrm{Ext}_{X(1,b,c)}(\alpha_1)=\frac{1}{b-\ell},\qquad \mathrm{Ext}_{X(1,b,c)}(\beta_1)=b,$$

and

$$\mathrm{Ext}_{X(1,b,c)}(\alpha_2)=\frac{1}{c-\ell},\qquad \mathrm{Ext}_{X(1,b,c)}(\beta_2)=c.$$

证明。 在水平方向上，裂缝恰好影响高度为$0<y<\ell$处的轨迹。因此，支撑在 T_1 侧的闭水平轨迹恰好是嵌入的水平条带中的那些轨迹

$$C_{\alpha_1}\ :=\ \big([0,1]\times(\ell,b)\big)/\{(0,y)\sim(1,y)\}\ \subset\ X(1,b,c),$$

它是周长为1、高度为 $b-\ell$的欧几里得圆柱。其边界由穿过裂缝端点处锥点的（水平）鞍连接组成，因此C_{α_1} 在 α_1的自由同伦类中的嵌入欧几里得圆柱中是极大的。因此 α_1 是一条圆柱曲线，并且对于圆柱 C_{α_1}，我们有$\mathrm{Ext}^{X(1,b,c)}(\alpha_1)\ =\ 1/(b-\ell)$。对 T_2 侧作同样的论证可得$\mathrm{Ext}^{X(1,b,c)}(\alpha_2)\ =1/(c-\ell)$。

垂直裂缝与垂直叶状结构平行。特别地，垂直核心类 β_1 由 T_1 侧的整个垂直欧几里得圆柱实现，其周长为 b ，高度为 1。因此，我们有：$\mathrm{Ext}(\beta_1)\ =b$，类似地，$\mathrm{Ext}(\beta_2)\ =c$。□

容许曲线与两个极值长度赋值。Se t

$$\mathcal{A}:=\{\alpha_1,\alpha_2\},\qquad \sigma_*=\mathrm{id}_{\mathcal{A}}.$$

因此，同一曲线族 $\gamma\in\mathcal{A}$ 在两侧进行比较。根据定义3.6，定义极值长度赋值如下：

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{I}}(u;\gamma):=\mathrm{Ext}_{X_{\mathrm{I}}(u)}(\gamma),\qquad \mathrm{Ext}_{\mathrm{II}}(u;\gamma):=\mathrm{Ext}_{X_{\mathrm{II}}(u)}(\gamma).$$

由于 $X_{\mathrm{II}}(u)$ 由 $f\circ J$ 标记，因此 $\mathrm{Ext}_{X_{\mathrm{II}}(u)}(\alpha_i)\ =\mathrm{Ext}^{X(u)}(J(\alpha_i))\ =\mathrm{Ext}^{X(u)}(\beta_i)$。

命题 5.2。对于 $u = (b,\ c) \in \Delta^{\mathrm{sc}}$ 有

$$m_{\alpha_1}(u) = \log \frac{\mathrm{Ext_I}(u;\alpha_1)}{\mathrm{Ext_{II}}(u;\alpha_1)} = \log \frac{\mathrm{Ext}_{X(u)}(\alpha_1)}{\mathrm{Ext}_{X(u)}(\beta_1)} = \log \frac{(1/(b-\ell))}{b} = -\log\big(b(b-\ell)\big),$$

$$m_{\alpha_2}(u) = \log \frac{\mathrm{Ext_I}(u;\alpha_2)}{\mathrm{Ext_{II}}(u;\alpha_2)} = \log \frac{\mathrm{Ext}_{X(u)}(\alpha_2)}{\mathrm{Ext}_{X(u)}(\beta_2)} = \log \frac{(1/(c-\ell))}{c} = -\log\big(c(c-\ell)\big).$$

因此，

$$H(u) = m_{\alpha_1}(u)^2 + m_{\alpha_2}(u)^2 = \big(\log(b(b-\ell))\big)^2 + \big(\log(c(c-\ell))\big)^2.$$

证明。由命题5.1以及上述观察可立即得出：在极值长度意义下，J–标记的一侧将 α_i 与 β_i 互换。□

5.1.3. 假设的验证。现在我们验证此例满足第 3.3 节中的假设，从而定理 2.4 适用于 Δ^{sc}。

定理 5.3。对于上述 $\mathcal{A}$、$\sigma_* = \mathrm{id}$及极值长度赋值，哑铃域 $\Delta^{\mathrm{sc}} \cong \mathbb{R}^2_{>0}$ 是 *Teichm¨uller* 正则的（定义 *3.7*）、可检测退化的（定义 *3.8*），且可推动（定义 *3.9*）。因此，Δ^{sc} 包含一个自反点。事实上，唯一的自反点是$(b, c) = (b_\ell, b_\ell)$，其中 $b_\ell > \ell$ 是 $b(b-\ell) = 1$的唯一正根，即 $b_\ell = \frac{\ell+\sqrt{\ell^2+4}}{2}$。

证明。首先检查：$\mathcal{A}$的容许性。曲线 α_1，α_2 由平移曲面 $X(1,\ b,\ c)$ 上的简单闭测地线表示，因此在 S_2 上是本质且简单的。取 $\sigma_* = \mathrm{id}$，便得到一个符合定义 2.2 意义下的可容许曲线集。

由命题5.1，

$$\log \mathrm{Ext_I}(u;\alpha_1) = -\log(b-\ell), \qquad \log \mathrm{Ext_I}(u;\alpha_2) = -\log(c-\ell),$$

and

$$\log \mathrm{Ext_{II}}(u;\alpha_1) = \log b, \qquad \log \mathrm{Ext_{II}}(u;\alpha_2) = \log c.$$

因此，极值长度坐标映射

$$E_{\mathrm{I,II}} : \Delta^{\mathrm{sc}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{A}}, \qquad E_{\mathrm{I}}(b,c) = (-\log(b-\ell), -\log(c-\ell)), \quad E_{\mathrm{II}}(b,c) = (\log b, \log c)$$

分别为 C^∞，且其雅可比矩阵为 $\mathrm{diag}(-1/(b-\ell)\ -1/(c-\ell))$ 和 $\mathrm{diag}(1/b,\ 1/c)$，因此它们是局部浸入，从而证明了 Teichm¨uller 正则性。

若 $(b_k,\ c_k)$ 离开 $\Delta^{\mathrm{sc}} = \{(b,\ c)$ 的每个紧子集 $\in \mathbb{R}^2_{>0} : \ \ell < \min\{b,c\}\}$，那么要么 $b_k \longrightarrow \ell^+$，要么 $b_k \longrightarrow \infty$，或者 $c_k \longrightarrow \ell^+$，或者 $c_k \longrightarrow \infty$。由命题 5.2，$|\log(b_k(b_k-\ell))| \longrightarrow \infty$ 或 $|\log(c_k(c_k-\ell))| \longrightarrow \infty$，因此 $H(b_k,\ c_k) \longrightarrow \infty$。因此，高度能够检测退化。

最后要检查的是可推动性。令

$$V_{\alpha_1} := b\,\frac{\partial}{\partial b}, \qquad V_{\alpha_2} := c\,\frac{\partial}{\partial c}.$$

由于 $m_{\alpha_1}(b,\ c) = -\log\big(b(b-\ell)\big) = -\log\ b - \log(b-\ell)$，我们计算得

$$(dm_{\alpha_1})_u(V_{\alpha_1}) = b\,\frac{\partial}{\partial b}\Big(-\log b - \log(b-\ell)\Big) = -\Big(1 + \frac{b}{b-\ell}\Big) \ < \ 0 \quad \text{whenever } m_{\alpha_1}(u) \neq 0,$$

类似地

$$(dm_{\alpha_2})_u(V_{\alpha_2}) = -\Big(1 + \frac{c}{c-\ell}\Big) \;<\; 0 \quad \text{whenever } m_{\alpha_2}(u) \neq 0.$$

此外，混合偏导数均为零。因此，推论条件（定义 3.9）成立，其关联集为 $I(\alpha_1) = \{\alpha_1\}$ 和 $I(\alpha_2) = \{\alpha_2\}$。

验证了这些假设后，由定理 2.4 可知自反点存在。在当前例子中，我们可以根据命题 5.2 中的公式明确地确定该点：

$$H(b,c) = \big(\log(b(b-\ell))\big)^2 + \big(\log(c(c-\ell))\big)^2.$$

因此，$H(b,\ c) = 0$ 当且仅当 $b(b-\ell) = 1$ 且 $c(c-\ell) = 1$，即 ~~$b = c$~~ $= b_\ell = \frac{\ell+\sqrt{\ell^2+4}}{2}$ 。□

本例中的两个限制特征源自相同的平坦数据（$X(1,\ b,\ c)\ dz$），但采用了两种不同的标记：“II”标记由 J 预复合，而 J 会在每个环面侧交换水平与垂直方向。在自反点 $(b,\ c) = (b_\ell,\ b_\ell)$ 处，极值长度等式表明，带标记曲面 $X_{\mathrm{I}}(b_\ell,\ b_\ell)$ 和 $X_{\mathrm{II}}(b_\ell,\ b_\ell)$ 在 Teichmüller 空间中重合；换言之，J 可由底层曲面的一个共形自同构实现。这正是通过受限对特征恢复同一个底层黎曼曲面的机制（参见推论 4.4）。

5.2. **没有足够丰富的有限边平行容许曲线系的构形。** 现在我们描述一族平移曲面，其中边平行容许曲线无法生成 Teichm¨uller 正则的极值长度坐标，因此定理中的论证无法奏效。

其关键特征是，每条边平行容许曲线都代表同一个自由同伦类。尽管参数域的实维数为 ≥ 2，但每条此类容许曲线的极值长度仅取决于参数的一个标量组合（事实上，固定尺度后它便成为常数）。因此，这些容许曲线的任何有限族都无法满足 Teichm¨uller 正则性所要求的浸入性质（定义 3.7）；高度最小化方案因而在第一步就会失效。

5.2.1. 从曲面族到参数域。 考虑一个平移曲面Y，其水平叶状结构由三个欧几里得圆柱组成

$$A_1,\ A_2,\ A_3$$

垂直堆叠，每个矩形的水平周长为 $w > 0$，高度分别为 h_1、h_2、$h_3 > 0$。具体来说，可以用矩形 $[0,w]\times(y_{i-1}$、$y_i)$（其中 $y_i - y_{i-1} = h_i$）来表示 A_i，并将其竖直边通过平移识别。通过带有扭转参数 $t_1 \in [0,w)$ 的平移，将 A_1的顶边与 A_2 的底边粘合；再通过带有扭转参数 $t_2 \in [0,w)$ 的平移，将 A_2 的顶边与 A_3 的底边粘合。最后，将剩余的边界分支粘合起来，使所得曲面的亏格为 2。

三个圆柱具有相同的核心曲线自由同伦类；将其记为 α。我们通过施加以下条件取一个尺度固定切片

$$w = 1, \qquad h_1 + h_2 + h_3 = 1.$$

于是，(h_1, h_2, t_1, t_2) 在一个实维数至少为 3 的区域内变化（即使除去由全局水平平移给出的显然的剩余对称性之后也是如此）。特别是，参数空间局部并非一维。

5.2.2. 试图选择 $\mathcal{A}_C$：所有与边平行的循环都重合。

引理 5.4. 在上述平行圆柱曲面中，每个与边平行的容许循环都与 α （或 α^{-1}）自由同伦。

证明。 根据定义，任意与边平行的容许循环 γ 都由圆柱 A_i 内部的水平弧与沿其边界接缝的垂直弧首尾连接而成。因此 $\gamma \subset A := A_1 \cup A_2 \cup A_3$。从拓扑上看，$A$ 是一个环带（圆柱），而环带中的任意本质简单闭曲线都与核心曲线自由同伦。由于 γ 是本原且简单的，因此可得 $\gamma \simeq \alpha$ 或 α^{-1}。□

现在我们计算 α 的极值长度，从而得到每个与边平行的容许循环的极值长度。

命题 5.5. 设 γ 是 Y上的任意与边平行的容许循环。那么

$$\mathrm{Ext}_Y(\gamma) = \mathrm{Ext}_Y(\alpha) = \frac{w}{h_1 + h_2 + h_3}.$$

特别地，经过尺度归一化 $w = 1$ 和 $h_1+h_2+h_3 = 1$后，极值长度 $\mathrm{Ext}_Y(\gamma)$ 为常数，且与(h_1, h_2, t_1, t_2)无关。

证明。 由引理 5.4，$\mathrm{Ext}_Y(\gamma) = \mathrm{Ext}_Y(\alpha)$。令 $H := h_1 + h_2 + h_3$ 和 $A :=A_1 \cup A_2 \cup A_3$。作为平坦曲面， A 是一个周长为 w、高度为 H的欧几里得圆柱；扭转参数 t_1, t_2 仅通过平移改变边界识别，不改变其共形模。因此 $\mathrm{mod}(A) = H/w$，于是

$$\mathrm{Ext}_Y(\alpha) = \mathrm{Ext}_A(\alpha) = \frac{1}{\mathrm{mod}(A)} = \frac{w}{H} = \frac{w}{h_1 + h_2 + h_3}.$$

在切片 $w = 1$ 和 $H = 1$ 上，这等于 1，因此为常数。 □

5.2.3. 假设失效：边平行数据无法保证 *Teichm ¨uller* 正则性。

定理 5.6 (边平行容许曲线的 Teichm¨uller 正则性失效)。在上述平行圆柱构形中，不存在有限的边平行容许曲线集 $\mathcal{A}$ ，使极值长度坐标映射

$$\mathbf{E} : \quad (h_1, h_2, t_1, t_2) \longmapsto \big(\log \mathrm{Ext}_Y(\gamma)\big)_{\gamma \in \mathcal{A}}$$

是一个局部浸入。因此，仅使用此类容许曲线无法验证 *Teichm ¨uller* 正则性公理（定义 *3.7*）。

证明。 固定任意有限的边平行可容许集 $\mathcal{A}$。由命题 5.5，对每个$\gamma \in \mathcal{A}$,

$$\log \mathrm{Ext}_Y(\gamma) = \log\Big(\frac{w}{h_1 + h_2 + h_3}\Big).$$

因此 $\mathbf{E}$ 通过单一标量函数 $(h_1, h_2, t_1, t_2) \mapsto w/(h_1 + h_2 + h_3)$ 分解。在尺度固定切片 $w = 1$ 与 $h_1 + h_2 + h_3 = 1$ 上，该标量为常数，故 $\mathbf{E}$ 局部为常数，从而 $d\mathbf{E} \equiv 0$。因此 $\mathbf{E}$ 不可能是局部浸入。□

尤其是，这里的边平行极值长度数据的秩至多为 1，无法检测 Y 的高维 Teichm¨uller 变化；若要获得 Te- ichm¨uller 正则性，就必须将允许的族扩展到边平行类之外。

References

[1]R. Bardhan、I. Biswas、S. Fujimori 和 P. Kumar，《高亏格天使曲面》，arXiv:2509.03925（2025）。[2] R. Bardhan、I. Biswas 和 P. Kumar，《具有恩内珀端的高亏格极大曲面》，《几何分析杂志》34（2024），第 207 号文章。数字对象标识符: 10.1007/s12220-024-01661-2。[3] S. Chenakkod、G. Faraco 和 S. Gupta，《平移曲面与亚纯微分的周期》，《伦敦数学会会刊》（第 3 辑）124（2022），478–557。[4] R. N. D´eev，《Haupt–Kapovich 定理再探》，arXiv:2010.15359。[5] H. M. Farkas 和 I. Kra，《黎曼曲面》，第 2 版，数学研究生教材，第 71 卷，施普林格，纽约，1992。[6] O. Forster，《黎曼曲面讲义》，数学研究生教材，第 81 卷，施普林格，纽约，1981。[7] F. P. Gardiner 和 N. Lakic，《拟共形 Teichm ¨uller 理论》，数学调查与专著，第 76 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2000。[8] F. P. Gardiner，《Teichm ¨uller 理论与二次微分》，Wiley–Interscience，纽约，1987。[9] O. Haupt，《关于第一类阿贝尔积分的一个定理》，《数学杂志》6（1920），第 3–4 期，219–237。[10] J. H. Hubbard，《Teichm ¨uller 理论及其在几何、拓扑学和动力系统中的应用》，第 1 卷：Teichm ¨uller 理论，Matrix Editions，纽约州伊萨卡，2006。[11] J. Hubbard 和 H. Masur，《二次微分与叶状结构》，《数学学报》142（1979），第 3–4 期，221–274。[12] M. Kapovich，《阿贝尔微分的周期与动力系统》，载于《动力学：拓扑与数论》（波恩，2018），《当代数学》744，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2020，297–315。¨S. P. Kerckhoff，《Teichm[13] uller 空间的渐近几何》，《拓扑学》19（1980），第 1 期，23–41。[14] K. Strebel，《二次微分》，《数学及其边界领域成果》（第 3 辑），第 5 卷，施普林格出版社，柏林，1984。[15] M. Traizet，《向黎曼极小曲面添加把手》，《朱西厄数学研究所杂志》1（2002），第 1 期，145–174。[16] M. Weber 和 M. Wolf，《总曲率最小的极小曲面与平面多边形弧的模空间》，《几何与泛函分析》8（1998），1129–1170。数字对象标识符: 10.1007/s000390050125。[17] M. Weber 和 M. Wolf，《极小曲面的 Teichm ¨uller 理论与把手添加》，《数学年刊》（第 2 辑）156（2002），第 3 期，713–795。数字对象标识符: 10.2307/3597281。

Department of Mathematics, Shiv Nadar University, Delhi NCR, India电子邮箱地址：pradip.kumar@snu.edu.in