arXiv:2603.01909v1 [math.PR] 2 Mar 2026

部分和的正态近似：一般凸成本

J´erˆome Dedecker*、Florence Merlev`ede†和 Emmanuel Rio ‡

摘要

本文给出了独立同分布、平方可积且中心化的随机变量的部分和分布与均值为零且方差相同的正态分布之间凸传输成本的非渐近界和渐近极限。证明的思路是利用适当的理想距离控制传输成本，并结合对 Lindeberg方法的改进。文中给出了明确的数值常数和渐近常数。

数学主题分类。（2020）— 60 F 05、60 E 15。关键词：输运成本、正态近似。

1 引言

设 ψ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的非负偶凸函数。于是，定义 $\mathbb{R}$ 上两个概率分布 μ 和 ν 之间的如下传输代价:

$$\kappa_\psi(\mu,\nu)=\inf\{\mathbb{E}(\psi(X-Y))\,:\,X\sim\mu,Y\sim\nu\}$$

根据 Major [13], 中的定理（8.1）

$$\kappa_\psi(\mu,\nu)=\int_0^1\psi\big(F^{-1}(u)-G^{-1}(u)\big)du\,. \tag{1.1}$$

*J´erˆome Dedecker，巴黎西岱大学，MAP5，法国国家科学研究中心 UMR 8145，45 rue des Saints-P`eres，法国 F-75006 Paris。

†Florence Merlev`ede，LAMA，古斯塔夫·埃菲尔大学、巴黎东克雷泰伊大学，法国国家科学研究中心 UMR 8050，法国 F-77454 Marne-La-Vall´ee。

‡Emmanuel Rio，凡尔赛大学，LMV，法国国家科学研究中心 UMR 8100，45 avenue des Etats-Unis，法国 F-78035 Versailles。

其中， F 和 G 分别是 μ 和 ν 的分布函数， F^{-1} 和G^{-1} 是它们的广义逆。本文关注的是：从一组具有有限方差、均值为零且独立同分布的实值随机变量之和的分布，到均值为零且具有相同方差的高斯分布之间的传输代价。更确切地说，我们旨在找出一些条件，使得这两个分布之间的传输代价 κ_ψ 在 n趋于 ∞时仍保持有界。

现在我们回顾这一领域已知的结果。为简化记号，在 $\psi(x) = |x|^p$ 的情形下（此处 $p \geq 1$），我们用 κ_p 表示传输代价，并用 $W_p = \kappa_p^{1/p}$ 表示相应的 Wasserstein 距离。在 $p = 1$ 的情形下，（1.1）意味着

$$\kappa_1(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}} |F(x) - G(x)| dx \,.$$

因此，Esseen [8] 关于分布函数之差的 $\mathbb{L}^1$-范数的结果适用于 κ_1 （另见 Ibragimov-Linnik [12], 第 5.3 节）。由 Esseen 的结果可知，只要随机变量的三阶绝对矩有限，部分和的分布与相应高斯分布之间的代价 κ_1 就保持有界。更准确地说，设 $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是实数集 $\mathbb{L}^3$ 上一列独立同分布的实值中心化随机变量，且方差为正 σ^2。令 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$，并设 $G_{n\sigma^2}$ 表示一个均值为 0、方差为 $n\sigma^2$ 的高斯随机变量。对于随机变量 X，用 P_X 表示其分布。Esseen [8] 证明了

$$\sup_{n>0} \kappa_1(P_{S_n}, P_{G_{n\sigma^2}}) \leq c_1 \sigma^{-2} \mathbb{E}(|X_1|^3) \tag{1.2}$$

其中 c_1 是某个正的通用常数。根据 Goldstein [9], $c_1 \leq 1$。此外，Esseen 证明上述代价会收敛到某个渐近常数（该常数取决于 X_1 的分布），当 n 趋于 ∞ 时（参见 Esseen [8], 定理 4.2）。

现在讨论 $p > 1$ 的情形。在这种情况下，无法根据分布函数之差的 $\mathbb{L}^p$-范数的结果，推导出中心极限定理中代价 κ_p 的渐近结果。B´artfai [1]证明，如果 X_1 的分布在 0 的某个邻域内具有有限的拉普拉斯变换，那么对于任意正的 ε,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\varepsilon} \kappa_2(P_{S_n}, P_{G_{n\sigma^2}}) = 0.$$

后来，Rio [20] 将 (1.2) 推广到 $]1, 2]$ 中 p 的代价 κ_p： 他证明，对 $]1, 2]$, 中的任意p ，存在仅依赖于 p 的正数 c_p，使得

$$\sup_{n>0} \kappa_p(P_{S_n}, P_{G_{n\sigma^2}}) \leq c_p \sigma^{-2} \mathbb{E}(|X_1|^{2+p}). \tag{1.3}$$

接着，Bobkov [3] 证明 (1.3) 对 $p > 2$ 同样成立。另一方面，Rio[21] 在矩条件 $\mathbb{E}(|X_1|^{2+p}) < \infty$ 下（不对 X_1 的分布光滑性附加条件），就 $]1, 2]$ 中的情形 p 得到了代价 κ_p 的渐近常数。对于 $p > 2$，Bobkov [3] 在 Cr´amer 条件下，对满足 $\mathbb{E}(|X_1|^{2+p}) < \infty$ 的随机变量得到了代价 κ_p 的渐近展开。

本文旨在为与一般偶凸函数 ψ 相关的代价给出上界，其中 $x^{-2}\psi(x) \to 0$，且 $x \to \infty$（代价类的精确定义见定义 2.1）。特别地，该函数类包括函数 $x \mapsto h(|x|)$，其中 $h(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - x$。我们的目标是给出充分条件，以确保代价 $\kappa_\psi(P_{S_n}, P_{G_{n\sigma^2}})$ 一致有界。正如我们将在定理 2.2 中看到的，只要$\mathbb{E}(X_1^2\psi(|X_1|)) < \infty$，这一点便成立。此外，借助所引入的技术，我们还能够得到一般凸代价的渐近常数（见推论 2.1），并为 $|S_n - G_{n\sigma^2}|$ 提供尾部不等式，其中 $G_{n\sigma^2}$ 由 S_n 通过分位数变换定义，只要底层随机变量具有阶数为 $2 + p$ 的弱矩，且 $p \in]1, 2[$（见定理 2.3）。我们还将为部分和 S_n 相关的条件风险价值给出上界（见推论 2.3 和注 2.6）。有关理论结果的更多细节，请参见第 2 节，该节专门介绍我们的主要结果。

现在，我们针对 $\sigma = 1$ 的情形，对第 3 节给出的主要结果的证明作一些说明。证明的主要工具是命题 2.1，以及结合收敛加速技术的一个适当版本的林德伯格方法。与 Rio [20], if $\beta_3 := \mathbb{E}(X_1^3) \neq 0$ 中一样，我们逐步用具有有限拉普拉斯变换的独立同分布随机变量 Y_k 替换初始随机变量 X_k，使得 $\mathbb{E}(Y_1^3) = \beta_3$。更准确地说，若 $\Pi(\lambda)$ 表示一个参数为 λ 的泊松分布随机变量，

$$Y_1 = B_1 + N_1, \tag{1.4}$$

其中 B_1 和 N_1 相互独立，N_1 服从均值为 0、方差为 $1/2$ 的正态分布，并且

$$B_1 = 2\beta_3\Big(\Pi(1/(8\beta_3)^2) - 1/(8\beta_3^2)\Big). \tag{1.5}$$

我们的方法使我们能够为这第一步得到一些数值常数。为了得到带有数值常数的一般结果，接下来需要用一个合适的数值常数，给出参数为 λ 的泊松分布与均值为 λ、方差为 λ 的正态分布之间二次输运代价的估计。尽管早已知道，当 λ 趋于

∞ 时，泊松分布正态近似的输运代价 [15]，保持有界，但据我们所知，除了 $p = 1$ 这种情形外，目前还没有数值上界。在 $p = 1$ 这种情形下，Peccati 等人（ [15]，例 3.5）的一般结果给出了上界

$$W_1(\mu_\lambda, \nu_\lambda) \leq 1 \text{ for any } \lambda > 0, \tag{1.6}$$

其中 μ_λ 表示 $\Pi(\lambda) - \lambda$ 的分布，而 ν_λ 表示均值为0、方差为 λ的正态分布。在第3节的命题3.1中，我们给出更为有效的上界

$$W_2(\mu_\lambda, \nu_\lambda) \leq \sqrt{0.937} \leq 0.968 \text{ for any } \lambda > 0, \tag{1.7}$$

由此可得 $W_1(\mu_\lambda, \nu_\lambda) \leq 0.968$，因为 $W_1(\mu, \nu) \leq W_2(\mu, \nu)$。该结果的证明在第4节给出，它基于Massart [14]中所证明的Tusn´ady型引理，并结合泊松随机变量的二进分解。注意，渐近常数要好得多：事实上，由Esseen [8] 在情形 $p = 1$ 下的结果以及Rio [21] 关于 $]1, 2]$,中 p 的结果

$$\lim_{n\to\infty} W_p(\mu_n, \nu_n) = \|(G^2 - 1)/6 + U\|_p,$$

其中 G服从标准正态分布， U 是在 $[-1/2, 1/2]$上服从均匀分布且与 G独立的随机变量。在情形 $p = 2$下，上述极限等于$\sqrt{5}/6 = 0.37267...$ （见Rio [21]中的推论1.3）。

对于任意分布，除了 $p = 1$ 这种情形外，(1.3) 中的数值常数尚未得到研究。本文作为更一般结果的推论，得到了上界 $W_2(P_{S_n}, G_{n\sigma^2}) \leq 6.825\,\sigma^{-1}\sqrt{\mathbb{E}(X_1^4)}$（更多细节见 *see*注 2.1）。可以猜想，(1.3) 中的常数小于 1；要证明这一猜想，很可能需要采用更精巧的方法，例如 Bonis [4]，中给出的算子方法。我们的证明技巧则更为初等，因此可以将本文结果推广到 Dedecker 等人 [6] 所考虑的弱依赖序列类。

2 主要结果

本文中，$(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是一列独立同分布实值随机变量， X 表示一个与 X_1 同分布的实值随机变量，而 Φ 表示标准正态分布的累积分布函数。

2.1 凸代价的正态近似

为了处理本文所考虑的一般凸代价，我们首先引入以下凸函数 ψ_x，它们生成了

下文定义 2.1 中所定义类别 Ψ 的所有凸函数（见注 2.2）。附录中陈述并证明了一些补充结果。

对于 $x>0$，定义凸偶函数 ψ_x 如下：

$$\psi_x(t)=\begin{cases}t^2/4 & \text{if } |t|\le 2x,\\ |tx|-x^2 & \text{if } |t|>2x.\end{cases} \tag{2.1}$$

下一个命题可以将与 ψ_x 相关的凸代价与适当的理想度量进行比较。

命题 2.1. 设 $\mathcal{F}_x:=\{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon \ \|f'\|_\infty\le x,\ \ f'$是 1-利普希茨$\}$。那么

$$\kappa_{\psi_x}(\mu,\nu)\le \sup\bigl\{\mu(f)-\nu(f)\ :\ f\in\mathcal{F}_x\bigr\}.$$

命题 2.1和林德伯格型方法导出了以下定理。

定理 2.1. 设 $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是一个独立同分布实值随机变量序列，其均值为零且取值于 $\mathbb{L}^3$，方差为正，记为 σ^2。设 $\mu_3=\mathbb{E}(X^3)$且 $\lambda_3=\mathbb{E}(|X|^3)$。那么存在正的普适常数 γ_0、γ_1、γ_2 和 γ_3，使得令$C_0(X)=\gamma_1\sigma^2+\sigma^{-4}(\gamma_0\lambda_3^2+\gamma_3\mu_3^2)$后，对任意 $n\ge 1$ 和任意 $x>0$,

$$\sqrt{\kappa_{\psi_x}(P_{S_n},P_{G_{n\sigma^2}})}\le\sqrt{C_0(X)+\gamma_2\sigma^{-2}\mathbb{E}\bigl(|X|^3\min(|X|,8x)\bigr)}+0.968\sigma^{-2}|\mu_3|\,,$$

其中 $G_{n\sigma^2}\sim\mathcal{N}(0,n\sigma^2)$。常数 γ_0、γ_1、γ_2 和 γ_3 可如下选取：$\gamma_0=3/5$、$\gamma_1=3.0376$、$\gamma_2=0.64584$ 和 $\gamma_3=1.6917$。

注 k 2.1。当这些变量取值于 $\mathbb{L}^4$ 时，令 x 趋于 ∞，可得 s

$$W_2(P_{S_n},P_{G_{n\sigma^2}})\le 2\sqrt{C_0(X)+\gamma_2\sigma^{-2}\mu_4}+1.936\sigma^{-2}|\mu_3|$$

对于任意 $n\ge 1$，其中 $\mu_4=\mathbb{E}(X^4)$。特别地，由于 $\sigma^4\le\mu_4$ 和 $\mu_3^2\le\lambda_3^2\le\sigma^2\mu_4$,

$$W_2(P_{S_n},P_{G_{n\sigma^2}})\le 2\sqrt{4.2835\sigma^{-2}\mu_4+1.6917\sigma^{-4}\mu_3^2}+1.936\sigma^{-2}|\mu_3|\le 6.825\sigma^{-1}\sqrt{\mu_4}\,.$$

在 $\mathbb{E}(X^3)=0$ 的情形下，上述上界给出

$$W_2(P_{S_n},P_{G_{n\sigma^2}})\le 4.140\sigma^{-1}\sqrt{\mu_4}\,.$$

反过来，对于参数为 $1/2$ 的 Rademacher随机变量（此时 $\mu_3=0$ 和 $\sigma^{-1}\sqrt{\mu_4}=1$），(4.14) 给出

$$\sup_{n\ge1}W_2(P_{S_n},P_{G_{n\sigma^2}})\ge\sqrt{2(1-\sqrt{2/\pi}\,)}\ge 0.63579\,.$$

现在我们将给出定理 2.1 在一类凸代价上的应用，该类代价的定义如下。

定义 2.1. 令 Ψ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数类 φ，这些函数为偶函数、凸函数， $\mathcal{C}^1$ 且满足 $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$， φ' 为凹函数， φ' 在 0 处可导， $\varphi''(0) = 1$ 且 $\lim_{x\to\infty} x^{-1}\varphi'(x) = 0$。

注意，类 Ψ 包含函数 $x \mapsto (|x|+1)\ln(|x|+1) - |x|$。接下来，对于 $p \in [1,2[$，令 g_p 为定义在 $\mathbb{R}^+$ 上的偶函数，其定义为

$$g_p(x) = \begin{cases} x^2/2 & \text{if } x \in [0,1] \\ x^p/p + 1/2 - 1/p & \text{if } x > 1. \end{cases} \tag{2.2}$$

容易证明， g_p 属于类 Ψ，并且对于任意 $x \in \mathbb{R}^+$,

$$x^p \le p g_p(x) + 1 - p/2\,. \tag{2.3}$$

注 2.2。注意，若 φ 属于 Ψ，则存在定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的概率测度 ν，使得

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+} \psi_t(2z)d\nu(t) = 2\int_{\mathbb{R}_+} \psi_{t/2}(z)d\nu(t)$$

其中 ψ_t 定义于式 (2.1)。这一事实将在第 3.3 节中证明。

令 $\mathcal{P}_\varphi(\mathbb{R})$ 表示满足 $\mu(\varphi) < \infty$ 的实数轴上的概率分布 μ 的集合。对于 $\mathcal{P}_\varphi(\mathbb{R})$ 中的两个概率分布 μ 和 ν，现在定义

$$W_\varphi(\mu,\nu) = \big(\kappa_\varphi(\mu,\nu)\big)^{1/2}.$$

W_φ 是 $\mathcal{P}_\varphi(\mathbb{R})$ 上概率分布之间的距离（引理 3.2）。

定理 2.2. 设 $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是一个由独立同分布实值随机变量组成的序列，这些随机变量均值为零且属于 $\mathbb{L}^3$，并具有正方差 σ^2。设 φ 是 Ψ 中的一个函数，且$G_{n\sigma^2}$ 是方差为 $n\sigma^2$的中心正态随机变量。那么，采用与定理 2.1 相同的记号和常数，对于任意 $n \ge 1$,

$$W_\varphi(P_{S_n}, P_{G_{n\sigma^2}}) \le \sqrt{2C_0(X) + 8\gamma_2\sigma^{-2}\mathbb{E}\big(|X|^3\varphi'(|X|/4)\big)} + 1.369\sigma^{-2}|\mu_3|.\,,$$

注 2.3. 正如我们将在第 3.5 节中证明的,

$$\mathbb{E}\big(|X|^3\varphi'(|X|/4)\big) \le 8\mathbb{E}\big(|X|^2\varphi(|X|/4)\big)\,.$$

由此可知，若满足以下条件，则 $W_\varphi(P_{S_n}, P_{G_{n\sigma^2}})$ 在 n 中一致有界:

$$\mathbb{E}\big(|X|^2\varphi(|X|)\big) < \infty. \tag{2.4}$$

关于阶数为 p 的 Wasserstein 距离，我们得到下式 (1.3) 中的常数。

命题 2.2. 设 $p \in]1、2[$ 和 $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是一个独立同分布实值随机变量序列，其均值为零且属于 $\mathbb{L}^{2+p}$。那么，对任意 $n \geq 1$,

$$W_p(P_{S_n}, P_{G_{n\sigma^2}}) \leq 2\big((C_0(X))^{p/2} + p2^{5-3p}\gamma_2\sigma^{-2}\mathbb{E}(|X|^{p+2})\big)^{1/p} + 1.936\sigma^{-2}|\mu_3|.$$

从定理 2.2 出发并利用 Cornish-Fisher 展开，可以得到 Rio [21] 关于一般凸成本的渐近常数结果的以下推广。

推论 2.1. 设 $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是一个独立同分布实值随机变量序列，其均值为 0 且属于 $\mathbb{L}^3$, 方差为 1。设 G_n 为方差为 n 的中心正态随机变量， G 为服从标准正态分布的随机变量。设 φ 为 Ψ 中的任意函数，使得 $\mathbb{E}\big(|X|^2\varphi(|X|\big) < \infty$。

（a）如果 X 的分布不是格点分布，那么

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_\varphi(P_{S_n}, P_{G_n}) = \mathbb{E}\big(\varphi\big(\mathbb{E}(X^3)(G^2-1)/6\big)\big).$$

（b）如果 X 的取值属于等差数列 $\{a+kh:\ k\in\mathbb{Z}\}$ （h 为最大值），且 V 是在 $[-1/2, 1/2]$ 上服从均匀分布、并与 $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 独立的随机变量，那么

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_\varphi(P_{S_n+hV}, P_{G_n}) = \mathbb{E}\big(\varphi\big(\mathbb{E}(X^3)(G^2-1)/6\big)\big).$$

注 2.4. 注意到，当且仅当 $\mathbb{E}(X^3) = 0$ 时，上述极限等于 0。此外，与 Rio [21], 中一样，还可以证明：如果 X 的取值属于等差数列 $\{a+kh:\ k\in\mathbb{Z}\}$ （h 为最大值），且 U 是在 $[0,1]$, 上服从均匀分布并且与 G 独立的随机变量，那么

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_\varphi(P_{S_n}, P_{G_n}) = \mathbb{E}\big(\varphi\big(\mathbb{E}(X^3)(G^2-1)/6 + h(U-1/2)\big)\big).$$

令 U 表示在 $[0,1]$ 上服从均匀分布的随机变量。由 (1.1) 可得,

$$\kappa_\varphi(P_{S_n}, P_{G_n}) = \mathbb{E}(\varphi(Z_n)), \text{ with } Z_n = |F_{S_n}^{-1}(U) - \sqrt{n}\Phi^{-1}(U)|. \tag{2.5}$$

推论 2.1 的证明基于序列 $(\varphi(Z_n))_{n\geq 1}$ 的一致可积性，该性质已在引理 3.3 中证明。利用这一引理，也可以得到下文定义的加权代价的渐近常数。令 $g:\ [0,1]\mapsto\mathbb{R}$ 为一个正的可测函数。定义加权代价 $\kappa_{1,\ g}$ 为

$$\kappa_{1,g}(P_X, P_Y) = \mathbb{E}\big(g(U)|F_X^{-1}(U) - F_Y^{-1}(U)|\big). \tag{2.6}$$

对于 $\varphi \in \Psi$， φ 的杨对偶 φ^* 定义为 $\varphi^*(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}}(xt - \varphi(t))$。我们将满足如下条件的实值随机变量 X 所构成的空间记为 L_{φ^*}：对于某个正的 a，有 $\mathbb{E}(\varphi^*(aX)) < \infty$。下面的推论给出了代价 $\kappa_{1,\,g}$ 的渐近常数，其中 X 满足推论 2.1 的可积性条件，且 $g(U)$ 属于空间 L_{φ^*}。

推论 2.2. 设 $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是一列独立同分布实值随机变量，它们均值为零且属于 $\mathbb{L}^3$，方差为 1。设 G_n 是方差为 n 的中心正态随机变量， G 是服从标准正态分布的随机变量，且 $U = \Phi(G)$。设 φ 是 Ψ 中的任意函数，满足 $\mathbb{E}\big(|X|^2\varphi(|X|)\big) < \infty$，并且 $g:]0,1[\mapsto\mathbb{R}$ 是一个正的可测函数，使得 $g(U)$ 属于 L_{φ^*}。

(a) 若 X 的分布不是格点分布，则

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_{1,g}(P_{S_n}, P_{G_n}) = |\mathbb{E}(X^3)|\,\mathbb{E}\big(g(\Phi(G))|G^2-1|/6\big).$$

(b) 若 X 的取值属于等差数列 $\{a + kh : k \in \mathbb{Z}\}$（$h$ 为最大值），且 V 是在 $[-1/2, 1/2]$ 上服从均匀分布、并与 $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 独立的随机变量，则

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_{1,g}(P_{S_n+hV}, P_{G_n}) = |\mathbb{E}(X^3)|\,\mathbb{E}\big(g(\Phi(G))|G^2-1|/6\big).$$

下面举例说明当 φ 由 $\varphi(x) = (1+x)\log(1+x) - x$（$x \geq 0$）定义时，推论 2.2 的应用。由于 $\varphi^*(x) = e^x - 1 - x$（$x \geq 0$），随机变量 $(\Phi^{-1}(U))^2$ 属于 L_{φ^*}。因此，在非格点情形下，若 $\mathbb{E}(|X|^3\log(1+|X|)) < \infty$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (\Phi^{-1}(u))^2|F_{S_n}^{-1}(u) - \sqrt{n}\Phi^{-1}(u)|du = |\mathbb{E}(X^3)|\,\mathbb{E}\big(G^2|G^2-1|/6\big).$$

此外 $\mathbb{E}\big(G^2|G^2-1|/6\big) = 2(2\pi e)^{-1/2} + 1 - (4/3)\Phi(1) \simeq 0.3622$。

注2.5. 运用相同的证明思路，可以轻松将推论 2.2 的结果推广到有符号泛函，具体如下。设 ℓ: $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 是一个利普希茨函数，且 $g:]0,1[\mapsto\mathbb{R}$ 是一个可测函数，使得 $g(U)$ 属于 L_{φ^*}。那么，在非格点情形下

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g(u)\ell\big(F_{S_n}^{-1}(u) - \sqrt{n}\Phi^{-1}(u)\big)du = \mathbb{E}\big(g(\Phi(G))\ell\big(\mathbb{E}(X^3)(G^2-1)/6\big)\big) \quad (2.7)$$

在格点情形下，左侧用 $F_{S_n+hV}^{-1}(u)$ 替代 $F_{S_n}^{-1}(u)$，结论仍然成立。将 (2.7) 应用于 $\ell(x) = x$ 和 $g = (\Phi^{-1})^2$,，可得在非格点情形下，若 $\mathbb{E}(|X|^3\log(1+|X|)) < \infty$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (\Phi^{-1}(u))^2(F_{S_n}^{-1}(u) - \sqrt{n}\Phi^{-1}(u))du = \mathbb{E}(X^3)\,\mathbb{E}\big(G^2(G^2-1)/6\big) = \mathbb{E}(X^3)/3.$$

2.2 耦合不等式

如有必要，扩充概率空间。回想一下，对于任意 $n \geq 1$,

$$\kappa_p(P_{S_n}, P_{G_{n\sigma^2}}) = \mathbb{E}\big(\big|S_n - G_{n\sigma^2}\big|^p\big)$$

其中，随机变量 $G_{n\sigma^2}$ 是一个方差为 $n\sigma^2$ 的中心正态随机变量（r.v.），由 S_n 通过如下分位数变换定义：

$$G_{n\sigma^2} = \sigma\sqrt{n}\Phi^{-1}\big(F_n(S_n - 0) + \delta(F_n(S_n) - F_n(S_n - 0))\big), \tag{2.8}$$

其中， F_n 是 S_n 的累积分布函数， δ 是一个在 $[0,1]$ 上服从均匀分布的随机变量，且与 $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 独立； $F_n(x-0)$ 表示 F_n 在 x 处的左极限。

回顾一下，不等式（1.3）保证：如果随机变量具有阶数为 $2+p$ 的强矩，且 $p \in]1$，那么 $2]$， $\kappa_p(P_{S_n}, P_{G_{n\sigma^2}})$ 关于 n 一致有界。现在，从上述结果证明中引入的工具出发，我们给出由下式定义的随机变量Z_n 的 p 阶弱范数上界：

$$Z_n = |S_n - G_{n\sigma^2}|\,, \tag{2.9}$$

其中， $G_{n\sigma^2}$ 由（2.8）定义，并且随机变量 X_k 的尾部满足适当条件。为了获得更一般的结果，我们将引入实值随机变量的条件风险价值及其广义逆。对于实值随机变量 Z ，我们将其条件风险价值定义为：对任意$u \in]0,\ 1[$

$$\mathrm{CVar}(Z)(u) = \inf\big\{t + u^{-1}\mathbb{E}((Z-t)_+) : t > 0\big\}\,. \tag{2.10}$$

根据 Pinelis 中的命题 5.4 [17],

$$\mathrm{CVar}(Z)(u) = \tilde{Q}_Z(u) = \frac{1}{u}\int_0^u Q_Z(v)dv\,,$$

其中， Q_Z是 Z的尾部分位数函数，即 $Q_Z(v) = F_Z^{-1}(1-v)$。注意， $\tilde{Q}_Z$由 Hardy 和 Littlewood [11]引入。我们还将 H_Z 定义为

$$\tilde{H}_Z(x) = \inf\{(x-t)^{-1}\mathbb{E}((Z-t)_+) : t < x\}$$

也将尾函数 H_Z 定义为 $H_Z(x) = \mathbb{P}(Z > x)$。由马尔可夫不等式

$\tilde{H}_Z \geq H_Z$。根据变分公式 (2.10)， $\tilde{H}_Z$是 Q_Z的广义逆。事实上，对于任意 u 属于 $]0,1]$,

$$\tilde{H}_Z(x) < u \text{ if and only if } x > \tilde{Q}_Z(u). \tag{2.11}$$

由此可知， $\tilde{H}_Z$ 是 Q_Z 的尾函数。因此， $\tilde{H}_Z$ 的一个上界可立即给出 Q_Z的一个上界。下面我们给出 H_{Z_n} 的一个上界，这将使我们能够将 (1.3) 推广到弱矩。

定理 2.3。在定理 2.1 的条件下，并沿用相同的记号，对任意正的 t,

$$t^2 \tilde{H}_{Z_n}(t) \leq 42.943\, \sigma^{-4}\lambda_3^2 + 5.2041\, \sigma^{-2}\mathbb{E}\big(|X|^3 \min(|X|, 2.8183t)\big).$$

由定理 2.3，我们现在推导在 $p \in]1,2[$ 条件下， Z_n 的尾部在阶数为 $2+p$ 的弱矩条件下的上界。对于任意 $q \geq 1$ 和实值随机变量 Z，定义 Z 的以下阶数为 q 的弱矩：

$$\Lambda_q(Z) = \sup_{x>0} x^q H_{|Z|}(x) \quad \text{and} \quad \tilde{\Lambda}_q(Z) = \sup_{x>0} x^q \tilde{H}_{|Z|}(x)\,. \tag{2.12}$$

˜显然， $\Lambda_q(Z) \leq \Lambda_q(Z)$。从定理 2.3 出发，我们得到 Z_n 的弱矩上界如下。

推论 2.3。设 $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是一个由中心化的独立同分布实值随机变量组成的序列，其方差为 σ^2，且满足 $\Lambda_{p+2}(X) < \infty$，其中某个 $p \in]1,2[$。假设概率空间足够大，并且对于任意 $n \geq 1$，按 (2.8) 定义 $G_{n\sigma^2}$，并令 $Z_n = |S_n - G_{n\sigma^2}|$。那么

$$\tilde{\Lambda}_p(Z_n) \leq (a_1\, \sigma^{-2}\lambda_3)^p + a_2\big((p-1)(2-p)\big)^{-1}(p+2)\sigma^{-2}\Lambda_{p+2}(X),$$

其中 $\lambda_3 = \mathbb{E}(|X|^3)$, $a_1 = 6.5531$ 且 $a_2 = 5.2041(2.8183)^{2-p}$。此外，若$\mathbb{E}(|X|^{p+2}) < \infty$,

$$\tilde{\Lambda}_p(Z_n) \leq (a_1\, \sigma^{-2}\lambda_3)^p + a_2\sigma^{-2}\mathbb{E}(|X|^{p+2}).$$

现在，将随机变量 Z 的 p 阶 Calderón 弱范数（见 DeVore 和 Lorentz [7],第26页）定义为

$$\|Z\|_{w,p} = \sup_{u\in]0,1]} u^{1/p}\tilde{Q}_{|Z|}(u).$$

由 (2.11) 可以很容易地推出

$$\tilde{\Lambda}_p(Z_n) = \|Z_n\|_{w,p}^p.$$

因此，推论 2.3 立即给出如下上界：

$$\|Z_n\|_{w,p} \leq \tilde{\kappa}_p^{1/p} \quad \text{with} \quad \tilde{\kappa}_p = (a_1\sigma^{-2}\lambda_3)^p + a_2\big((p-1)(2-p)\big)^{-1}(p+2)\sigma^{-2}\Lambda_{p+2}(X).$$

注 2.6. 根据条件风险价值的次可加性和单调性（参见 [17] 中的定理 3.4），对于实值随机变量 X 和 Y，可得

$$\big|\tilde{Q}_X(u) - \tilde{Q}_Y(u)\big| \leq \tilde{Q}_{|X-Y|}(u)\,.$$

因此，在推论 2.3 的条件下，对于任意 $n \geq 1$ 和任意 $u \in]0、1[$，

$$\left|\tilde{Q}_{S_n}(u) - \tilde{Q}_{G_{n\sigma^2}}(u)\right| \leq \left(\tilde{\kappa}_p/u\right)^{1/p}. \tag{2.13}$$

因此

$$\tilde{Q}_{S_n}(u) \leq \left(\frac{\tilde{\kappa}_p}{u}\right)^{1/p} + \frac{\sigma\sqrt{n}}{u\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\Phi^{-1}(u))^2}{2}\right).$$

注意，如果这些随机变量对于 $p \in]1$具有 $p+2$ 阶强矩，$2]$，则上界 (2.13) 可以得到改进。事实上，Rio [22] 中的推论 3.1 断言，在这种情况下，存在一个正数 C_p，使得对于任意 u 属于 $]0、1/2]$，

$$\left|\tilde{Q}_{S_n}(u) - \tilde{Q}_{G_{n\sigma^2}}(u)\right| \leq C_p(u|\ln(u)|)^{-1/p}.$$

˜现在，在关于 $|X|$ 尾部的一个附加条件下，我们给出 $\Lambda_p(Z_n)$ 和 $\Lambda_p(Z_n)$ 的渐近常数。

推论 2.4。设 $p \in [1, 2[$ 和 $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathbb{L}^3$ 中以 0 为中心、方差为 1 的独立同分布实值随机变量序列。如果 $p > 1$，进一步假设

$$\lim_{t\to+\infty} t^{p+2}\mathbb{P}(|X| > t) = 0. \tag{2.14}$$

(a) 假设 X 的分布不是格点分布。则

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_p^{1/p}(Z_n) = \frac{|\mathbb{E}(X^3)|}{6}\Lambda_p^{1/p}(G^2-1) \text{ and } \lim_{n\to\infty} \tilde{\Lambda}_p^{1/p}(Z_n) = \frac{|\mathbb{E}(X^3)|}{6}\tilde{\Lambda}_p^{1/p}(G^2-1).$$

(b) 假设 X 的取值属于等差数列 $\{a + kh : k \in \mathbb{Z}\}$（其中 h 为最大值）。设 V 是在 $[-1/2, 1/2]$ 上服从均匀分布、与 $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 和 $\bar{S}_n = S_n + hV$ 独立的随机变量。定义 $\bar{G}_n = \sqrt{n}\Phi^{-1}(F_{\bar{S}_n}(\bar{S}_n))$ 以及 $\bar{Z}_n = |S_n - G_n|$。则

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_p^{1/p}(\bar{Z}_n) = \frac{|\mathbb{E}(X^3)|}{6}\Lambda_p^{1/p}(G^2-1) \text{ and } \lim_{n\to\infty} \tilde{\Lambda}_p^{1/p}(\bar{Z}_n) = \frac{|\mathbb{E}(X^3)|}{6}\tilde{\Lambda}_p^{1/p}(G^2-1).$$

Re标记 2.7。当 $\mathbb{E}(X^3) = 0$ 时，渐近常数等于零。

3 证明

3.1 预备考察

我们从一条平滑引理开始，它是 [5]中引理 6.1的推论。下面$\mathcal{F}_x$ 是命题 2.1中定义的函数类。

引理 3.1. 设 f 属于 $\mathcal{F}_x$， N 为标准正态分布，且 B 为与 N独立的可积实值随机变量。设 $c_j = \|\phi^{(j)}\|_1$ ，其中 ϕ 表示 N的密度。则对任意整数 $i \geq 3$ 及任意 $t > 0$,

$$\Big|\frac{d^i}{du^i}\mathbb{E}f(u + tN + B)\Big| \leq \min\Big(c_{i-1}\, x t^{1-i}, c_{i-2}\, t^{2-i}\Big).$$

初等计算可得

$$c_1 = \sqrt{2/\pi}\,,\; c_2 = \sqrt{8/(\pi \mathrm{e})} \leq 0.9679\,,\; c_3 = \sqrt{2/\pi}\big(1 + 4\mathrm{e}^{-3/2}\big)\,.$$

此外

$$c_4 = 4\sqrt{3/(\pi \mathrm{e}^3)}\big((3-\sqrt{6})^{1/2}\mathrm{e}^{\sqrt{3/2}} + (3+\sqrt{6})^{1/2}\mathrm{e}^{-\sqrt{3/2}}\big)\,,$$

$$c_5 = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{3}{2} + 4(2+\sqrt{10})\mathrm{e}^{-(5+\sqrt{10})/2} + 4(\sqrt{10}-2)\mathrm{e}^{-(5-\sqrt{10})/2}\Big) \leq 5.9101\,.$$

回顾一下，类 Ψ 已在定义 2.1 中定义。

引理 3.2. 设 φ 属于 Ψ。则 W_φ 是实数轴上满足 $\mu(\varphi) < \infty$ 的概率分布 μ 所构成的集合 $\mathcal{P}_\varphi(\mathbb{R})$ 上的一个距离。

引理 3.2 的证明。设 μ_1、 μ_2 和 μ_3 属于 $\mathcal{P}_\varphi(\mathbb{R})$，其相应的分布函数分别为 F_1、 F_2 和 F_3。

显然， $W_\varphi(\mu_1, \mu_2) \geq 0$ 且 $W_\varphi(\mu_1, \mu_2) = 0$ 当且仅当 $\mu_1 = \mu_2$。我们现在证明三角不等式。设 $U \sim \mathcal{U}([0,1])$。令 $A = F_1^{-1}(U) - F_2^{-1}(U)$ 以及 $B = F_2^{-1}(U) - F_3^{-1}(U)$。采用这些记号，我们有

$$\kappa_\varphi(\mu_1, \mu_3) = \mathbb{E}\big(\varphi(A+B)\big)\,,\; \kappa_\varphi(\mu_1, \mu_2) = \mathbb{E}\big(\varphi(A)\big)\,,\; \kappa_\varphi(\mu_2, \mu_3) = \mathbb{E}\big(\varphi(B)\big)\,.$$

因此，证明三角不等式等价于证明

$$\sqrt{\mathbb{E}\big(\varphi(A+B)\big)} \leq \sqrt{\mathbb{E}\big(\varphi(A)\big)} + \sqrt{\mathbb{E}\big(\varphi(B)\big)}\,. \tag{3.1}$$

为证明 (3.1)，我们首先注意到 $\sqrt{\varphi}$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上是次可加的。事实上，由于 φ' 是凹函数且 $\varphi'(0) = 0$， $x \mapsto \frac{\varphi'(x)}{x}$ 在 $]0$ 上是非增的，而 $x \mapsto \frac{\varphi(x)}{x^2}$ 也具有这一性质；此外，由于 $\varphi(0) = 0$，根据单调性洛必达法则（参见 Pinelis [16] 中的推论 1.3 和注 1.2），因此，对于任意正实数 a 和 b，由于 $x \mapsto x^{-1}\sqrt{\varphi(x)}$ 在 $]0$ 上是非增的， $\infty[$,

$$\frac{\sqrt{\varphi(a+b)}}{a+b} \leq \min\Big(\frac{\sqrt{\varphi(a)}}{a}, \frac{\sqrt{\varphi(b)}}{b}\Big) \leq \frac{a}{a+b}\frac{\sqrt{\varphi(a)}}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{\sqrt{\varphi(b)}}{b}\,.$$

这意味着，对于任意正实数 a和 b,

$$\sqrt{\varphi(a+b)} \leq \sqrt{\varphi(a)} + \sqrt{\varphi(b)}\,. \tag{3.2}$$

回到 (3.1) 的证明。利用 (3.2)，我们得到

$$\mathbb{E}\big(\varphi(A+B)\big) \le \mathbb{E}\big(\big(\sqrt{\varphi(A)}+\sqrt{\varphi(B)}\big)^2\big)\,.$$

因此，根据施瓦茨不等式，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(\varphi(A+B)\big) &\le \mathbb{E}\big(\varphi(A)\big)+\mathbb{E}\big(\varphi(B)\big)+2\mathbb{E}\big(\sqrt{\varphi(A)}\sqrt{\varphi(B)}\,\big)\\ &\le \Big(\sqrt{\mathbb{E}\big(\varphi(A)\big)}+\sqrt{\mathbb{E}\big(\varphi(B)\big)}\Big)^2,\end{aligned}$$

至此，(3.1) 的证明完成。 □

下一个结果给出了泊松分布与具有相同均值和方差的正态分布之间二阶瓦瑟斯坦距离的定量上界。证明见附录。

命题 3.1. 设 $(\Pi(t))_{t\ge 0}$ 为参数为 1 的泊松过程。对任意$m>0$ 和任意 $\alpha\neq 0$，记 $\mu_{m,\,\alpha}$ 为 $\alpha(\Pi(\alpha^{-2}m)-\alpha^{-2}m)$ 的分布，ν_m 为$\mathcal{N}(0,m)$ 分布。则 $W_2^2\big(\mu_{m,\,\alpha},\ \nu_m\big)\le 0.937\,\alpha^2$。

3.2 定理2.1的证明

设 $\sigma^2=\mathbb{E}(X^2)>0$。注意，对任意正的 a，

$$\psi_{ax}(az)=a^2\psi_x(z)\,. \tag{3.3}$$

由此可得

$$\kappa_{\psi_x}(P_A,P_B)=a^2\kappa_{\psi_{x/a}}(P_{a^{-1}A},P_{a^{-1}B})\,. \tag{3.4}$$

因此，我们将证明 $\sigma^2=1$ 情形下的结果，并利用上述等式以及$A=S_n$、$B=G_{n\sigma^2}$ 和 $a=\sigma$ 得到一般情形。因此，从现在起，我们假设$\sigma^2=1$。

设 $\beta_3=\mathbb{E}(X^3)$。首先假设 $\beta_3\neq 0$。

设$(N_k)_{k\ge1}$ 为独立同分布高斯随机变量，它们与$(X_k)_{k\ge1}$独立，中心化且方差为 $1/2$。设$(B_k)_{k\ge1}$ 为独立同分布随机变量序列，与$(N_k,X_k)_{k\ge1}$ 独立，并且具有与

$$B=2\beta_3\big(\Pi\big(1/(8\beta_3^2)\big)-1/(8\beta_3^2)\big)\,,$$

其中 $\Pi(\lambda)$ 是参数为 λ 的泊松分布随机变量。对任意 $k\ge1$，令$Y_k=B_k+N_k$。随机变量 Y_k 独立同分布，且它们的一阶矩满足

$$\mathbb{E}(Y_1)=0,\mathbb{E}(Y_1^2)=1,\mathbb{E}(Y_1^3)=\beta_3 \text{ and } \mathbb{E}(Y_1^4)=3+2\beta_3^2. \tag{3.5}$$

现在我们定义集合 $T_n = \sum_{k=1}^n Y_k$。注意此时 $2\psi_x$ 属于 Ψ。因此，由引理 3.2，$\sqrt{\kappa_{\psi_x}}$ 是概率律之间的距离，由此

$$\sqrt{\kappa_{\psi_x}(P_{S_n}, P_{G_n})} \le \sqrt{\kappa_{\psi_x}(P_{S_n}, P_{T_n})} + \sqrt{\kappa_{\psi_x}(P_{T_n}, P_{G_n})}\,. \tag{3.6}$$

接下来，利用 $\psi_x(t) \le t^2/4$ 这一事实，并在 $\alpha = 2\beta_3$ 和$m = n/2$的情形下应用命题 3.1，可得

$$\kappa_{\psi_x}(P_{T_n}, P_{G_n}) \le \frac{1}{4} W_2^2(P_{T_n}, P_{G_n}) \le \frac{1}{4} W_2^2(\mu_{n/2,2\beta_3}, P_{G_{n/2}}) \le 0.937\beta_3^2\,. \tag{3.7}$$

上述不等式结合命题 2.1 可推出

$$\sqrt{\kappa_{\psi_x}(P_{S_n}, P_{G_n})} \le \sqrt{\sup\big\{\mathbb{E}(f(S_n) - f(T_n)) \,:\, f \in \mathcal{F}_x\big\}} + 0.968|\beta_3|. \tag{3.8}$$

剩下的工作是给出当 f属于 $\mathcal{F}_x$时， $\mathbb{E}(f(S_n) - f(T_n))$的一个上界。令 $v^2 > 1/2$为稍后选定的量，并令 Z为服从正态分布 $\mathcal{N}(0, v^2)$的随机变量，使得 Z 与$(X_k, Y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$相互独立。我们首先写出

$$\mathbb{E}(f(S_n)) - f(T_n)) = \mathbb{E}(f(S_n + Z)) - f(T_n + Z)) + R_{n,2} - R_{n,1}, \tag{3.9}$$

其中$R_{n,1} = \mathbb{E}(f(S_n + Z) - f(S_n))$，且$R_{n,2} = \mathbb{E}(f(T_n + Z) - f(T_n))$。现在，由于$Z$与$(S_n, T_n)$相互独立， $\mathbb{E}(f'(S_n)Z) = \mathbb{E}(f'(T_n)Z) = 0$。因此， $R_{n,1} = \mathbb{E}(f(S_n + Z) - f(S_n) - f'(S_n)Z)$。结合 f'是1-利普希茨这一事实，可得$|R_{n,1}| \le \mathbb{E}(Z^2/2) = v^2/2$。类似地，$|R_{n,2}| \le v^2/2$，于是

$$|R_{n,2} - R_{n,1}| \le v^2\,. \tag{3.10}$$

从现在起，令 $\Delta_{n,v}(f) = \mathbb{E}(f(S_n + Z)) - f(T_n + Z))$. 设

$$f_{n-k}(x) = \mathbb{E}\Big(f\big(x + \sum_{u=k+1}^n Y_u + Z\big)\Big)\,,$$

并考虑到这些序列之间的独立性，我们得到

$$\begin{aligned}
\Delta_{n,v}(f) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(f(S_{k-1} + X_k + T_n - T_k + Z)) - f(S_{k-1} + Y_k + T_n - T_k + Z)) \\
&= \sum_{k=1}^n \Big(\mathbb{E}(f'_{n-k}(S_{k-1})(X_k - Y_k)) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(f''_{n-k}(S_{k-1})(X_k^2 - Y_k^2))\Big) \\
&\quad + \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} \sum_{k=1}^n \big\{\mathbb{E}(f^{(3)}_{n-k}(S_{k-1} + sX_k)X_k^3) - \mathbb{E}(f^{(3)}_{n-k}(S_{k-1} + sY_k)Y_k^3)\big\} ds\,.
\end{aligned}$$

由独立性，且由于 $\mathbb{E}(X_k) = \mathbb{E}(Y_k)$ 和 $\mathbb{E}(X_k^2) = \mathbb{E}(Y_k^2)$，可得

$$\Delta_{n,v}(f) = \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \mathbb{E}(f_{n-k}^{(3)}(S_{k-1} + sX_k)X_k^3) - \mathbb{E}(f_{n-k}^{(3)}(S_{k-1} + sY_k)Y_k^3) \right\} ds \,. \tag{3.11}$$

我们先处理这一量

$$A(n) := \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \mathbb{E}(f_{n-k}^{(3)}(T_{k-1} + sX_k)X_k^3) - \mathbb{E}(f_{n-k}^{(3)}(T_{k-1} + sY_k)Y_k^3) \right\} ds \,.$$

由独立性以及 $\mathbb{E}(X_k^3) = \mathbb{E}(Y_k^3) = \beta_3$ 这一事实，可得

$$\mathbb{E}(f_{n-k}^{(3)}(T_{k-1})X_k^3) = \mathbb{E}(f_{n-k}^{(3)}(T_{k-1}))\beta_3 = \mathbb{E}(f_{n-k}^{(3)}(T_{k-1})Y_k^3) \,.$$

由此可得 $A(n) = A_1(n) - A_2(n)$，其中

$$A_1(n) := \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \mathbb{E}(f_{n-k}^{(3)}(T_{k-1} + sX_k)X_k^3) - \mathbb{E}(f_{n-k}^{(3)}(T_{k-1})X_k^3) \right\} ds$$

$$A_2(n) := \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \mathbb{E}(f_{n-k}^{(3)}(T_{k-1} + sY_k)Y_k^3) - \mathbb{E}(f_{n-k}^{(3)}(T_{k-1})Y_k^3) \right\} ds.$$

令 $u_n := (n-1)/2 + v^2$。由于 $v^2 \geq 1/2$，我们有 $u_n \geq n/2$。对于任意 $s \in [0,1]$，考虑到引理 3.1，

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\Big(\big| \big(f_{n-k}^{(3)}(T_{k-1} + sX_k) - f_{n-k}^{(3)}(T_{k-1}) \big) X_k^3 \big| \Big) \\
&\quad \leq n\mathbb{E}\Big(|X|^3 \min\Big(2\|f_n^{(3)}\|_\infty, s|X|\|f_n^{(4)}\|_\infty \Big) \Big) \leq nc_2\mathbb{E}\Big(|X|^3 \min\Big\{ \frac{2x}{u_n}, |X|\frac{s}{u_n} \Big\} \Big) \,.
\end{aligned}$$

另一方面，由于 $(n/u_n) \leq 2$，可得

$$|A_1(n)| \leq \frac{c_2}{12}\mathbb{E}(|X|^3(|X| \wedge 8x)) \,. \tag{3.12}$$

另一方面，对于任意 s 属于 $[0,1]$, ，考虑到引理 3.1，

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\Big(\big| \big(f_{n-k}^{(3)}(T_{k-1} + sY_k) - f_{n-k}^{(3)}(T_{k-1}) \big) Y_k^3 \big| \Big) \leq ns\|f_n^{(4)}\|_\infty \mathbb{E}(Y^4) \leq c_2 \frac{ns}{u_n}(3 + 2\beta_3^2) \,.$$

因此

$$|A_2(n)| \leq \frac{c_2}{12} \times (3 + 2\beta_3^2) \,. \tag{3.13}$$

综合考虑 (3.12) 和 (3.13)，最终得到

$$|A(n)| \leq \frac{c_2}{12}\Big(3 + 2\beta_3^2 + \mathbb{E}(|X|^3(|X| \wedge 8x)) \Big) \,. \tag{3.14}$$

接下来，我们写出

$$\Delta_{n,v}(f) - A(n) =: B_1(n) - B_2(n)\,, \tag{3.15}$$

其中

$$B_1(n) := \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} \sum_{k=1}^{n} \big\{ \mathbb{E}(f_{n-k}^{(3)}(S_{k-1} + sX_k)X_k^3) - \mathbb{E}(f_{n-k}^{(3)}(T_{k-1} + sX_k)X_k^3) \big\} ds$$

$$B_2(n) := \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} \sum_{k=1}^{n} \big\{ \mathbb{E}(f_{n-k}^{(3)}(S_{k-1} + sY_k)Y_k^3) - \mathbb{E}(f_{n-k}^{(3)}(T_{k-1} + sY_k)Y_k^3) \big\} ds\,.$$

我们首先处理 $B_1(n)$。对于任意整数 $k \in [1,n]$ 以及任意 $s \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(X_k^3 \Big\{ f_{n-k}^{(3)}(S_{k-1} + sX_k) - (f_{n-k}^{(3)}(T_{k-1} + sX_k) \Big\} \Big) \\
&= \sum_{\ell=1}^{k-1} \mathbb{E}\Big(X_k^3 \Big\{ f_{n-k}^{(3)}(S_{\ell-1} + X_\ell + T_{k-1} - T_\ell + sX_k) - f_{n-k}^{(3)}(S_{\ell-1} + Y_\ell + T_{k-1} - T_\ell + sX_k) \Big\} \Big) \\
&\qquad = \sum_{\ell=1}^{k-1} \mathbb{E}\Big(X_k^3 \Big\{ f_{n-\ell-1}^{(3)}(S_{\ell-1} + X_\ell + sX_k) - f_{n-\ell-1}^{(3)}(S_{\ell-1} + Y_\ell + sX_k) \Big\} \Big)\,.
\end{aligned}$$

由独立性可知，由于对于任意 $\ell \le k-1$，$\mathbb{E}(X_\ell) = \mathbb{E}(Y_\ell)$ 且 $\mathbb{E}(X_\ell^2) = \mathbb{E}(Y_\ell^2)$,

$$\mathbb{E}\big(X_k^3 (X_\ell - Y_\ell) f_{n-\ell-1}^{(4)}(S_{\ell-1} + sX_k) \big) = 0\,,\ \mathbb{E}\big(X_k^3 (X_\ell^2 - Y_\ell^2) f_{n-\ell-1}^{(5)}(S_{\ell-1} + sX_k) \big) = 0\,.$$

因此，由泰勒积分公式可得,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(X_k^3 \Big\{ f_{n-k}^{(3)}(S_{k-1} + sX_k) - (f_{n-k}^{(3)}(T_{k-1} + sX_k) \Big\} \Big) \\
&= \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} \sum_{\ell=1}^{k-1} \mathbb{E}\Big(X_k^3 \Big\{ X_\ell^3 f_{n-\ell-1}^{(6)}(S_{\ell-1} + tX_\ell + sX_k) - Y_\ell^3 f_{n-\ell-1}^{(6)}(S_{\ell-1} + tY_\ell + sX_k) \Big\} \Big) dt\,.
\end{aligned}$$

由于 $\mathbb{E}(X_\ell^3) = \mathbb{E}(Y_\ell^3)$，因此可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(X_k^3 \Big\{ f_{n-k}^{(3)}(S_{k-1} + sX_k) - (f_{n-k}^{(3)}(T_{k-1} + sX_k) \Big\} \Big) \\
&\qquad = \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} \sum_{\ell=1}^{k-1} (C_{n,k,\ell}^X(s,t) - D_{n,k,\ell}^X(s,t)) dt\,, \quad (3.16)
\end{aligned}$$

其中

$$C_{n,k,\ell}^X(s,t) = \mathbb{E}\Big(X_k^3 X_\ell^3 \Big\{ f_{n-\ell-1}^{(6)}(S_{\ell-1} + tX_\ell + sX_k) - f_{n-\ell-1}^{(6)}(S_{\ell-1} + sX_k) \Big\} \Big),$$

$$D_{n,k,\ell}^X(s,t) = \mathbb{E}\Big(X_k^3 Y_\ell^3 \Big\{ f_{n-\ell-1}^{(6)}(S_{\ell-1} + tY_\ell + sX_k) - f_{n-\ell-1}^{(6)}(S_{\ell-1} + sX_k) \Big\} \Big)\,.$$

对于 $\ell < k$，我们有

$$\begin{aligned}\left|C^X_{n,k,\ell}(s,t)\right| &\le \mathbb{E}\Big(|X_k^3 X_\ell^3| \min\left(2\|f^{(6)}_{n-\ell-1}\|_\infty, t|X_\ell|\|f^{(7)}_{n-\ell-1}\|_\infty\right)\Big) \\ &\le \mathbb{E}(|X|^3)\mathbb{E}\Big(|X|^3 \min\left(2\|f^{(6)}_{n-\ell-1}\|_\infty, t|X|\|f^{(7)}_{n-\ell-1}\|_\infty\right)\Big)\,.\end{aligned}$$

采用记号

$$u_{n,\ell} = (n-\ell-1)/2 + v^2 \tag{3.17}$$

并利用引理 3.1，我们推导得出

$$\begin{aligned}&\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2}\frac{(1-t)^2}{2}\sum_{k=2}^{n}\sum_{\ell=1}^{k-1}\left|C^X_{n,k,\ell}(s,t)\right|dsdt \\ &\quad\le \mathbb{E}(|X|^3)\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2}\frac{(1-t)^2}{2}\sum_{k=2}^{n}\sum_{\ell=1}^{k-1}\mathbb{E}\Big(|X|^3\min\Big(\frac{2c_5 x}{u_{n,\ell}^{5/2}}, \frac{c_5 t|X|}{u_{n,\ell}^{5/2}}\Big)\Big)dsdt \\ &\quad\le \frac{c_5}{144}\mathbb{E}(|X|^3)\mathbb{E}(|X|^3(|X|\wedge 8x))\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{\ell=k}^{n-2}\frac{2^{5/2}}{(\ell+2v^2)^{5/2}}\,.\end{aligned}$$

接下来注意到，由于凸性，对于任意 $a \ge 1/2$、任意 $m \in \mathbb{N}$ 和任意 $p > 1$，以下上界成立：

$$\sum_{k\ge m}(k+a)^{-p} \le \int_{m+a-1/2}^{+\infty} x^{-p}dx.$$

将上述不等式应用两次，可得

$$\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{\ell=k}^{n-2}\frac{1}{(\ell+2v^2)^{5/2}} \le \frac{2}{3}\int_{2v^2-1}^{+\infty}\frac{1}{x^{3/2}}dx = \frac{4}{3}(2v^2-1)^{-1/2}\,. \tag{3.18}$$

由上述讨论可知

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2}\frac{(1-t)^2}{2}\sum_{k=2}^{n}\sum_{\ell=1}^{k-1}\left|C^X_{n,k,\ell}(s,t)\right|dsdt \le \frac{\sqrt{2}c_5\mathbb{E}(|X^3|)}{27\sqrt{2v^2-1}}\mathbb{E}(|X|^3(|X|\wedge 8x))\,. \tag{3.19}$$

另一方面，结合引理 3.1 和记号 (3.17)，我们推导得出

$$\left|D^X_{n,k,\ell}(s,t)\right| \le t c_5\mathbb{E}(|X|^3)\mathbb{E}(Y^4)u_{n,\ell}^{-5/2}\,.$$

因此，考虑到上界（3.18），我们得到

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2}\frac{(1-t)^2}{2}\sum_{k=2}^{n}\sum_{\ell=1}^{k-1}\left|D^X_{n,k,\ell}(s,t)\right|dsdt \le \frac{\sqrt{2}c_5\mathbb{E}(|X^3|)}{27\sqrt{2v^2-1}}(3+2\beta_3^2)\,. \tag{3.20}$$

从（3.16）出发，并结合（3.19）和（3.20），我们推导得出

$$\big|B_1(n)\big| \le \frac{\sqrt{2}c_5\mathbb{E}(|X^3|)}{27\sqrt{2v^2-1}}\Big(3+2\beta_3^2+\mathbb{E}(|X|^3(|X|\wedge 8x))\Big)\,. \tag{3.21}$$

为处理量 $B_2(n)$，我们按上述方法进行。首先写出

$$B_2(n)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{k-1}\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2}\frac{(1-t)^2}{2}(C^Y_{n,k,\ell}(s,t)-D^Y_{n,k,\ell}(s,t))dsdt\,,$$

其中

$$C^Y_{n,k,\ell}(s,t)=\mathbb{E}\Big(Y_k^3X_\ell^3\Big\{f^{(6)}_{n-\ell-1}(S_{\ell-1}+tX_\ell+sY_k)-f^{(6)}_{n-\ell-1}(S_{\ell-1}+sY_k)\Big\}\Big),$$

$$D^Y_{n,k,\ell}(s,t)=\mathbb{E}\Big(Y_k^3Y_\ell^3\Big\{f^{(6)}_{n-\ell-1}(S_{\ell-1}+tY_\ell+sY_k)-f^{(6)}_{n-\ell-1}(S_{\ell-1}+sY_k)\Big\}\Big)\,.$$

结合前面的计算，我们推得

$$\big|C^Y_{n,k,\ell}(s,t)\big|\le \mathbb{E}(|Y|^3)\mathbb{E}\Big(|X|^3\min\big(2\|f^{(6)}_{n-\ell-1}\|_\infty, t|X|\|f^{(7)}_{n-\ell-1}\|_\infty\big)\Big)\,.$$

因此

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2}\frac{(1-t)^2}{2}\sum_{k=2}^{n}\sum_{\ell=1}^{k-1}\big|C^Y_{n,k,\ell}(s,t)\big|dsdt\le \frac{\sqrt{2}c_5\mathbb{E}(|Y|^3)}{27\sqrt{2v^2-1}}\mathbb{E}(|X|^3(|X|\wedge 8x))\,.$$

另一方面

$$\big|D^Y_{n,k,\ell}(s,t)\big|\le tc_5\mathbb{E}(|Y|^3)\mathbb{E}(Y^4)u_{n,\ell}^{-5/2}\,,$$

这意味着

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2}\frac{(1-t)^2}{2}\sum_{k=2}^{n}\sum_{\ell=1}^{k-1}\big|D^Y_{n,k,\ell}(s,t)\big|dsdt\le \frac{\sqrt{2}c_5\mathbb{E}(|Y|^3)}{27\sqrt{2v^2-1}}(3+2\beta_3^2)\,.$$

因此，总而言之，

$$\big|B_2(n)\big| \le \frac{\sqrt{2}c_5\mathbb{E}(|Y|^3)}{27\sqrt{2v^2-1}}\Big(3+2\beta_3^2+\mathbb{E}(|X|^3(|X|\wedge 8x))\Big)\,. \tag{3.22}$$

从（3.15）出发，并结合上界（3.14）、（3.21）和（3.22），可得

$$|\Delta_{n,v}(f)|\le\Big(\frac{\sqrt{2}c_5\mathbb{E}(|X|^3+|Y|^3)}{27\sqrt{2v^2-1}}+\frac{c_2}{12}\Big)\Big(3+2\beta_3^2+\mathbb{E}(|X|^3(|X|\wedge 8x))\Big)\,. \tag{3.23}$$

为了尽可能减小数值常数，我们现在令

$$v^2=0.50+0.15\big(\mathbb{E}(|X|^3)+\mathbb{E}(|Y|^3)\big)^2. \tag{3.24}$$

结合（3.9）、（3.10）和（3.23），这一选择导出了以下命题：

命题 3.2. 设

$$B(n,x) := 0.50 + 0.15\big(\mathbb{E}(|X|^3) + \mathbb{E}(|Y|^3)\big)^2 + \alpha_1\big(3 + 2\beta_3^2 + \mathbb{E}(|X|^3(|X| \wedge 8x))\big)\,,$$

其中 $\alpha_1 = \sqrt{20/3}(c_5/27) + (c_2/12) \le \gamma_2 := 0.64584$。于是

$$\sup_{f\in\mathcal{F}_x} \big|\mathbb{E}(f(S_n)) - f(T_n))\big| \le B(n,x)\,.$$

为了完成定理 2.1 的证明，我们现在给出 $B(n,x)$ 的一个上界，它更明确地取决于 X 的分布。首先

$$\big(\mathbb{E}(|X|^3) + \mathbb{E}(|Y|^3)\big)^2 \le 4(\mathbb{E}(|X|^3))^2 + (4/3)(\mathbb{E}(|Y|^3))^2,$$

其次，由于 $\mathbb{E}(Y^2) = 1$，$(\mathbb{E}(|Y|^3))^2 \le \mathbb{E}(Y^4) = 3 + 2\beta_3^2$。因此

$$B(n,x) \le 1.1 + 0.6(\mathbb{E}(|X|^3))^2 + 0.4\beta_3^2 + \alpha_1\big(3 + 2\beta_3^2 + \mathbb{E}(|X|^3(|X| \wedge 8x))\big)\,. \quad (3.25)$$

当 $\sigma^2 = 1$ 和 $\beta_3 \neq 0$ 时，结合 (3.6)、命题 3.2、(3.25) 和不等式 (3.8)，即可得到定理 2.1。

现在假设 $\beta_3 = 0$。在这种情况下，我们先加上一个独立的高斯随机变量 Z，其均值为零、方差为 v^2；然后取 $(Y_k)_{k\ge1}$ 个独立同分布的标准高斯随机变量，它们与 $(X_k)_{k\ge1}$ 相互独立。我们按照情形 $\beta_3 \neq 0$ 的证明进行，但使用 $u_n = n - 1 + v^2$ 和 $u_{n,\ell} = n - \ell - 1 + v^2$。因此，总而言之，当 $\sigma^2 = 1$ 和 $\beta_3 = 0$ 时，我们可以推得

$$\kappa_{\psi_x}(P_{S_n}, P_{G_n}) \le \tilde{\gamma}_1 + 0.6(\mathbb{E}(|X^3|))^2 + \tilde{\gamma}_2\mathbb{E}(|X|^3(|X| \wedge 8x))\,,$$

其中 $\tilde{\gamma}_1 \le \gamma_1$ 和 $\tilde{\gamma}_2 \le \gamma_2$。至此，定理的证明结束。 □

3.3 注 2.2 的证明

由于 φ' 是凹函数，因而绝对连续，因此存在定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的正测度ν，使得几乎处处有 $\varphi''(0) - \varphi''(z) = \nu(]0,z[)$。由于 $\varphi''(0) = 1$ 且$\varphi'(0) = 0$，$x - \varphi'(x) = \int_0^x \nu(]0,t[)dt$。由此可得

$$1 - \lim_{x\to\infty} x^{-1}\varphi'(x) = \lim_{x\to\infty} x^{-1}\int_0^x \nu(]0,t[)dt\,.$$

Since $\lim_{x\to\infty} x^{-1}\varphi'(x) = 0$，由此可知 ν 是一个概率测度。因此

$$\varphi'(x) = \int_0^x \nu([y,+\infty[)dy = \int_0^\infty (x \wedge y)d\nu(y) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \psi'_y(2x)d\nu(y)\,, \quad (3.26)$$

其中 ψ_y 在 (2.1) 中定义。由于 $\varphi'(0) = 0$，可知

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+} \psi_t(2z)d\nu(t) = 2\int_{\mathbb{R}_+} \psi_{t/2}(z)d\nu(t)\,,$$

其中第二个等式由式（3.3）得出。 □

3.4 定理 2.2 的证明

由引理 3.2,

$$W_\varphi(P_{S_n}, P_{G_{n\sigma^2}}) \le W_\varphi(P_{S_n}, P_{\sigma T_n}) + W_\varphi(P_{\sigma T_n}, P_{G_{n\sigma^2}})\,, \tag{3.27}$$

其中 T_n 的定义与定理 2.1 的证明中相同，但在 (3.5) 中将 $\beta_3 = \mathbb{E}(X^3)/\sigma^3$。

由于 φ 属于 Ψ，$\varphi(x) \le x^2/2$。因此，考虑到 (3.7),

$$W_\varphi^2(P_{\sigma T_n}, P_{G_{n\sigma^2}}) \le \frac{\sigma^2}{2} W_2^2(P_{T_n}, P_{G_n}) \le 1.874\,\frac{\mu_3^2}{\sigma^4} \le \bigl(1.369\sigma^{-2}\mu_3\bigr)^2\,. \tag{3.28}$$

现在我们处理量 $W_\varphi(P_{S_n}, P_{\sigma T_n})$。考虑到注 2.2,

$$\kappa_\varphi(P_{S_n}, P_{\sigma T_n}) = 2\int_{\mathbb{R}_+} \kappa_{\psi_{t/2}}\bigl(P_{S_n}, P_{\sigma T_n}\bigr) d\nu(t)\,.$$

将不等式 (3.4) 应用于 $a = \sigma$，可得

$$\kappa_{\psi_{t/2}}(P_{S_n}, P_{\sigma T_n}) = \sigma^2 \kappa_{\psi_{t/(2\sigma)}}(P_{\sigma^{-1}S_n}, P_{T_n})\,.$$

因此

$$\kappa_\varphi(P_{\sigma^{-1}S_n}, P_{\sigma T_n}) = 2\sigma^2 \int_{\mathbb{R}_+} \kappa_{\psi_{t/(2\sigma)}}\bigl(P_{\sigma^{-1}S_n}, P_{T_n}\bigr) d\nu(t)\,.$$

现在，利用命题 3.2 和 (3.25),

$$\kappa_\varphi(P_{S_n}, P_{\sigma T_n}) \le 2C_0(X) + 8\gamma_2\sigma^{-2} \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{E}\bigl(|X|^3 \min(|X|/4, t)\bigr) d\nu(t)\,. \tag{3.29}$$

回忆一下，$\varphi'(|z|) = \int_{\mathbb{R}_+} (|z| \wedge t) d\nu(t)$（见 (3.26)）。因此

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{E}\bigl(|X|^3 \min(|X|/4, t)\bigr) d\nu(t) \le \mathbb{E}\bigl(|X|^3 \varphi'(|X|/4)\bigr)\,. \tag{3.30}$$

从 (3.27) 出发，结合 (3.28)、(3.29) 和 (3.30)，即可得到定理。

□

3.5 注 2.3 的证明

如引理 3.2 的证明中所引述的，$x \mapsto x^{-2}\varphi(x)$ 在 $]0, +\infty[$ 上单调不增。因此，$x \mapsto x^{-2}\varphi(x)$ 的导数非正，这保证了 $\varphi'(x) \le 2x^{-1}\varphi(x)$。由此

$$\mathbb{E}\bigl(|X|^3 \varphi'(|X|/4)\bigr) \le 8\mathbb{E}\bigl(|X|^2 \varphi(|X|/4)\bigr)\,. \qquad \square$$

3.6 命题 2.2 的证明

我们首先注意到

$$W_p(P_{S_n}, P_{G_{n\sigma^2}}) = \sigma W_p(P_{S_n/\sigma}, P_{G_n}) \le \sigma W_p(P_{S_n/\sigma}, P_{T_n}) + \sigma W_p(P_{T_n}, P_{G_n}), \quad (3.31)$$

其中 T_n 已在定理 2.1 的证明中定义。利用 $p \in]1, 2[$以及上界 (3.7)，可得

$$\sigma W_p(P_{T_n}, P_{G_n}) \le \sigma W_2(P_{T_n}, P_{G_n}) \le 1.936\sigma^{-2}|\mu_3|. \quad (3.32)$$

为了给 (3.31) 右侧的第一项取上界，我们根据 (2.2) 中定义的函数 g_p 定义重缩放函数 $g_{p,a}$ ： $g_{p,a}(x) = a^2 g_p(x/a)$，对任意$a > 0$均成立。注意，函数 $g_{p,a}$ 属于类 Ψ。此外，利用不等式 (2.3)，可得

$$x^p \le a^{p-2} p g_{p,a}(x) + a^p(1 - p/2). \quad (3.33)$$

结合上界 (3.29) 和 (3.30)，可得

$$\kappa_p(P_{S_n/\sigma}, P_{T_n}) \le (1-p/2)a^p + 2pa^{p-2}C_0\Big(\frac{X}{\sigma}\Big) + 8\gamma_2 pa^{p-2}\mathbb{E}\Big(\Big|\frac{X}{\sigma}\Big|^3 g'_{p,a}\Big(\frac{|X|}{4\sigma}\Big)\Big). \quad (3.34)$$

接下来，由于对任意 $z \ge 0$， $g'_p(z) = \min(z, z^{p-1}) \le z^{p-1}$，因此有

$$g'_{p,a}(z) = a g'_p(z/a) \le a^{2-p} z^{p-1}$$

对任意 $z \ge 0$均成立。因此

$$\kappa_p(P_{S_n/\sigma}, P_{T_n}) \le (1 - p/2)a^p + 2pa^{p-2}C_0(X/\sigma) + 8p4^{1-p}\gamma_2\mathbb{E}\big(|X/\sigma|^{2+p}\big). \quad (3.35)$$

为了使上述上界最小化，我们随后选择 $a = \sqrt{4C_0(X/\sigma)}$，从而得到

$$\kappa_p(P_{S_n/\sigma}, P_{T_n}) \le 2^p(C_0(X/\sigma))^{p/2} + p2^{5-2p}\gamma_2\mathbb{E}\big(|X/\sigma|^{2+p}\big). \quad (3.36)$$

从 (3.31) 出发，并考虑上界 (3.32) 和 (3.36)，注意到 $\sigma^2 C_0(X/\sigma) = C_0(X)$，即可得到该命题。 □

3.7 推论 2.1 和推论 2.2 的证明

在本小节中，我们证明推论 2.1 以及推论 2.2 的 (a) 项。推论 2.2 的 (b) 项的证明与此类似，故略去。我们首先证明下面的引理。

引理 3.3. 设 $(Z_n)_{n\ge1}$ 由 (2.9) 定义。在推论 2.1 的条件下，$(\varphi(Z_n))_{n\ge1}$ 是一致可积的。

引理 3.3 的证明。我们需要证明

$$\lim_{M\to\infty}\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}(\varphi(Z_n)\mathbf{1}_{Z_n\geq M})=0\,. \tag{3.37}$$

令 $M>0$，并根据以下条件在 $\mathbb{R}$ 上定义函数 ψ_M： ψ_M 为偶函数，$\psi_M(0)=0$，且其在 $\mathbb{R}_+$ 上的导数定义为

$$\psi'_M(x)=\begin{cases} x & \text{if } x\leq M,\\ \dfrac{M}{\varphi'(M)}\varphi'(x) & \text{if } x\geq M.\end{cases}$$

显然，ψ_M 属于类 Ψ。现在将定理 2.2 应用于函数 ψ_M，可知存在一个通用常数 C，使得对于任意 $n\geq 1$,

$$\mathbb{E}(\psi_M(Z_n))\leq C\Big(\mathbb{E}(|X|^3)+\mathbb{E}\big(|X|^3\psi'_M(|X|)\big)\Big)\,. \tag{3.38}$$

另一方面，由于 φ 是凸的且 $\varphi(0)=0$，对于 $x\geq 0$，有 $\varphi(x)\leq x\varphi'(x)$。这意味着

$$\mathbb{E}(\varphi(Z_n)\mathbf{1}_{Z_n\geq M})\leq\mathbb{E}(Z_n\varphi'(Z_n)\mathbf{1}_{Z_n\geq M})\leq\frac{\varphi'(M)}{M}\mathbb{E}(Z_n\psi'_M(Z_n))\,.$$

现在，如第 3.5 节所述，由于 ψ_M 属于类 Ψ，$x\psi'_M(x)\leq 2\psi_M(x)$。因此

$$\mathbb{E}(\varphi(Z_n)\mathbf{1}_{Z_n\geq M})\leq 2\frac{\varphi'(M)}{M}\mathbb{E}(\psi_M(Z_n))\,. \tag{3.39}$$

结合 (3.38) 和 (3.39)，可得

$$\mathbb{E}(\varphi(Z_n)\mathbf{1}_{Z_n\geq M})\leq 2C\Big(\frac{\varphi'(M)}{M}\mathbb{E}(|X|^3)+\frac{\varphi'(M)}{M}\mathbb{E}\big(|X|^3\psi'_M(|X|)\big)\Big)\,. \tag{3.40}$$

注意

$$\frac{\varphi'(M)}{M}|X|^3\psi'_M(|X|)=\frac{\varphi'(M)}{M}|X|^4\mathbf{1}_{|X|\leq M}+|X|^3\varphi'(|X|)\mathbf{1}_{|X|>M}\,.$$

现在，由于 $x\mapsto x^{-1}\varphi'(x)$ 是非增的，

$$\frac{\varphi'(M)}{M}|X|^4\mathbf{1}_{|X|\leq M}+|X|^3\varphi'(|X|)\mathbf{1}_{|X|>M}\leq|X|^3\varphi'(|X|)\,.$$

接下来，由于 $\lim_{M\to+\infty}M^{-1}\varphi'(M)=0$，上述不等式左端的项在 $M\to+\infty$ 时趋于 0。因此，由于 $\mathbb{E}\big(|X|^3\varphi'(|X|)\big)<\infty$，根据控制收敛定理，我们得到

$$\lim_{M\to+\infty}\frac{\varphi'(M)}{M}\mathbb{E}\big(|X|^3\psi'_M(|X|)\big)=0\,. \tag{3.41}$$

从（3.40）出发并结合（3.41），即可得到收敛关系（3.37）。 □

推论 2.1 的第 (a) 项的证明。令 $G = n^{-1/2}G_n$，其中 $U = \Phi(G)$，且 Φ 是标准正态分布的累积分布函数。则 U 在 $[0,1]$ 上服从均匀分布，并且

$$Z_n = |F_n^{-1}(U) - \sqrt{n}\Phi^{-1}(U)|\,.$$

Set

$$Z = \left|\frac{\mu_3}{6}((\Phi^{-1}(U))^2 - 1)\right|. \tag{3.42}$$

根据 Cornish-Fisher 展开（例如，参见 Rio[21] 的引理 2.1 (a) 或 [10, 定理 2.4] 以及第 2 章末尾的评论），我们得到

$$Z_n \to^{\mathcal{L}} Z, \text{ as } n \to \infty\,,$$

其中 $\to^{\mathcal{L}}$ 表示依分布收敛。由于 φ 是连续函数，根据连续映射定理，我们还有 $\varphi(Z_n) \to^{\mathcal{L}} \varphi(Z)$，当 $n \to \infty$ 时成立。结合引理 3.3 和矩收敛定理（参见 [2] 中的定理 3.5），这一依分布收敛意味着 $\mathbb{E}(\varphi(Z_n)) \to \mathbb{E}(\varphi(Z))$，当$n \to \infty$ 时成立。至此，推论 2.1 的 (a) 项证明完毕。

推论 2.1 的 (b) 项证明。设

$$\bar{Z}_n = |\bar{F}_n^{-1}(U) - \sqrt{n}\Phi^{-1}(U)|$$

其中 $\bar{F}_n$ 是 $\bar{S}_n = S_n + hV$ 的累积分布函数。回顾记号 (3.42)，我们有 $\bar{Z}_n \to^{\mathcal{L}} Z$，当 $n \to \infty$ 时成立（例如，参见 Rio [21] 中的引理 2.1 (b)）。因此，按照 (a) 项证明的思路，只需证明 $(\varphi(Z_n))_{n\geq 1}$ 一致可积。为此，我们首先注意到，对于任意 $n \geq 1$,

$$\bar{Z}_n \leq Z_n + |\bar{F}_n^{-1}(U) - F_n^{-1}(U)|\,.$$

接下来，由于 V 是在 $[-1/2, 1/2]$ 上服从均匀分布的随机变量，且 $\bar{S}_n = S_n + hV$,

$$S_n - h/2 \leq \bar{S}_n \leq S_n + h/2 \text{ almost surely,}$$

这意味着，对于任意 u 属于 $]0,1[$，$F_n^{-1}(u) - (h/2) \leq \bar{F}_n^{-1}(u) \leq F_n^{-1}(u) + (h/2)$。因此，$|\bar{F}_n^{-1}(U) - F_n^{-1}(U)| \leq h/2$ 几乎必然成立，从而保证了

$$\bar{Z}_n \leq Z_n + h/2 \text{ almost surely.} \tag{3.43}$$

现在，结合上述不等式和 (3.2)，$\varphi(Z_n) \leq 2\varphi(Z_n) + 2\varphi(h/2)$ 几乎必然成立。由于 $(\varphi(Z_n))_{n\geq 1}$ 一致可积，这证明了 $(\varphi(Z_n))_{n\geq 1}$ 的一致可积性，并结束了推论 2.1 的 (b) 项证明。

推论 2.2 (a) 的证明。根据 Rio 中的引理 2.1(a)，[21], 对于任意正的 ε，函数序列 $(F_n^{-1} - \sqrt{n}\Phi^{-1})_{n\geq 1}$ 一致收敛到

$\mu_3((\Phi^{-1})^2-1)/6$，在 $[\varepsilon,1-\varepsilon]$ 上。这意味着上述函数序列在 $[\varepsilon,1-\varepsilon]$ 上一致有界。接下来，$g(U)$ 属于 L^*_φ 和 $L_{\varphi^*}\subset L^1$，这保证了 g 在 $[0,1]$ 上可积。因此，根据控制收敛定理，

$$\lim_{n\to\infty}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} g(u)|F_n^{-1}(u)-\sqrt{n}\Phi^{-1}(u)|du=\frac{|\mu_3|}{6}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} g(u)|(\Phi^{-1}(u))^2-1|du. \quad (3.44)$$

剩下需要证明的是

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\sup_{n\geq 1}\int_{]0,1[\setminus[\varepsilon,1-\varepsilon]} g(u)|F_n^{-1}(u)-\sqrt{n}\Phi^{-1}(u)|du=0. \quad (3.45)$$

设 a 为一个正实数，使得 $\mathbb{E}\big(\varphi^*(ag(U))\big)<\infty$。由杨氏不等式$xy\leq\varphi^*(x)+\varphi(y)$，应用于 $x=ag(U)$ 和 $y=|F_n^{-1}(u)-\sqrt{n}\Phi^{-1}(u)|$，

$$a\int_{]0,1[\setminus[\varepsilon,1-\varepsilon]} g(u)|F_n^{-1}(u)-\sqrt{n}\Phi^{-1}(u)|du\leq I(\varepsilon)+J_n(\varepsilon),$$

with

$$I(\varepsilon)=\int_{]0,1[\setminus[\varepsilon,1-\varepsilon]}\varphi^*(ag(u))du \quad\text{and}\quad J_n(\varepsilon)=\int_{]0,1[\setminus[\varepsilon,1-\varepsilon]}\varphi(F_n^{-1}(u)-\sqrt{n}\Phi^{-1}(u))du.$$

现在，引理 3.3 保证 $\limsup_{\varepsilon\to 0}\sup_{n\geq 1} J_n(\varepsilon)=0$。接下来，由于 $u\mapsto\varphi^*(ag(u))$ 在 $]0,1[$ 上可积，$\lim_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon)=0$，从而完成了 (3.45) 的证明。现在，(3.44) 和 (3.45) 推出推论 2.2 的条目 (a)。 □

3.8 定理 2.3 的证明

我们先给出以下引理，该引理本身也很有意义。此引理的证明推迟到附录。

引理 3.4. 设 A 和 B 是两个实值随机变量。那么，对于任意实数 x 和 t，$\tilde{H}_{A+B}(x)\leq\max\big(\tilde{H}_A(t)\ \tilde{H}_B(x-t)\big)$。

注 3.1. 根据 Pinelis [18]中的命题 1，通常尾函数所满足的经典不等式 $\mathbb{P}(A+B\geq x)\leq\mathbb{P}(A\geq t)+\mathbb{P}(B>x-t)$ 无法改进。˜上述引理证明，对于随机变量之和，H 的表现优于尾函数。

我们回到定理 2.3 的证明。首先注意到

$$\tilde{H}_{Z_n}(t)=\tilde{H}_{Z_n/\sigma}(t/\sigma)\,.$$

我们将对 $A=|\sigma^{-1}S_n-T_n|$ 和 $B=|T_n-G_n|$ 应用引理 3.4，其中 T_n 是定理 2.1 的证明中所定义的随机变量。于是，对任意 $\alpha\in]0、\ 1[$ 以及任意正的 t，我们得到

$$\tilde{H}_{Z_n}(t)\leq\max\big(\tilde{H}_X(|\sigma^{-1}S_n-T_n|)(\alpha t/\sigma),\tilde{H}_{|T_n-G_n|}((1-\alpha)t/\sigma)\big)\,. \quad (3.46)$$

接下来，对任意 $s>0$，注意到$(x-s)_+ \le s^{-1}\psi_s(x)$，其中 ψ_s 由(2.1)定义。因此，对任意实值随机变量 Z 以及任意正实数 u，

$$\tilde{H}_{|Z|}(u) \le \inf_{s<u} \frac{1}{(u-s)s}\mathbb{E}(\psi_s(|Z|)) \le \frac{4}{u^2}\mathbb{E}(\psi_{u/2}(|Z|))\,. \tag{3.47}$$

另一方面，结合（3.47）和（3.7），我们得到

$$\tilde{H}_{|T_n-G_n|}\Big(\frac{(1-\alpha)t}{\sigma}\Big) \le \frac{4\sigma^2}{(1-\alpha)^2t^2}\kappa_{\psi_{u/2}}(P_{T_n},P_{G_n}) \le \frac{4\times 0.937}{(1-\alpha)^2t^2}\frac{\lambda_3^2}{\sigma^4}\,. \tag{3.48}$$

另一方面，结合（3.47）、命题（3.2）、上界（3.25）以及 $|\mathbb{E}(X^3)| \le \lambda_3$ and $\sigma^3 \le \lambda_3$ 这一事实，我们推得

$$\tilde{H}_{|\sigma^{-1}S_n-T_n|}\Big(\frac{\alpha t}{\sigma}\Big) \le \frac{4}{\alpha^2t^2}\Big((\gamma_1+\frac{3}{5}+\gamma_3)\frac{\lambda_3^2}{\sigma^4}+\frac{\gamma_2}{\sigma^2}\mathbb{E}(|X|^3(|X|\wedge 4\alpha t))\Big)\,. \tag{3.49}$$

上述不等式中的常数 γ_1、 γ_2 和 γ_3 是定理 2.1 的陈述中涉及的常数。特别地，常数 $a := \gamma_1+3/5+\gamma_3$ 可以取为 5.3294。现在我们选择 $\alpha=\tilde{\alpha}$ 使得

$$\frac{a}{\tilde{\alpha}^2t^2} \ge \frac{0.937}{(1-\tilde{\alpha})^2t^2}\,. \tag{3.50}$$

数值计算表明，$\tilde{\alpha}=0.7045699$ 满足（3.50）。然后，从（3.46）出发，并结合（3.48）和（3.49），我们推导出，对于任意正实数 t，

$$\tilde{H}_{Z_n}(t) \le \frac{4a}{\tilde{\alpha}^2t^2}\frac{\lambda_3^2}{\sigma^4}+\frac{4\gamma_2}{\tilde{\alpha}^2\sigma^2}\mathbb{E}(|X|^3(|X|\wedge 4\tilde{\alpha}t))\,.$$

结合 a、 $\tilde{\alpha}$ 和 γ_2 的取值，证明至此完成。 □

3.9 推论 2.3的证明

˜根据定理 2.3以及 $H_{Z_n}(t) \le 1$这一事实，我们有

$t^p\tilde{H}_{Z_n}(t) \le t^p \min(1, 42.943\,\sigma^{-4}\lambda_3^2t^{-2}) + 5.2041t^{p-2}\sigma^{-2}\mathbb{E}\big(|X|^3\min(|X|,$ $2.8183t)\big)$，因为对任意非负实数 a和 b，$\min(a+b,1) \le \min(a,1)+b$。接下来，对于$p\in]1,\ 2[$，，注意

$$\mathbb{E}\big(|X|^3\min(|X|,u)\big) \le (p+2)\big((2-p)(p-1)\big)^{-1}\Lambda_{p+2}(X)u^{2-p}\,. \tag{3.51}$$

由此

$$t^p\tilde{H}_{Z_n}(t) \le t^p\min(1,42.943\,\sigma^{-4}\lambda_3^2t^{-2}) + a_2(p+2)\big((2-p)(p-1)\big)^{-1}\sigma^{-2}\Lambda_{p+2}(X).$$

在 $t>0$ 上的上确界在满足 $1=42.943\,\sigma^{-4}\lambda_3^2t_0^{-2}$的 t_0 处达到。数值计算表明 $t_0 \le 6.5531\,\sigma^{-2}\lambda_3$。这证明了该推论的第一部分。当随机变量具有 $p+2$阶强矩时，我们利用如下事实

$$\mathbb{E}\big(|X|^3\min(|X|,2.8183t)\big) \le (2.8183t)^{2-p}\mathbb{E}(|X|^{p+2}),$$

以及与之前相同的论证。 □

3.10 推论 2.4 的证明

证明基于以下引理。

引理 3.5. 在推论 2.4 的条件下，且如果 X 的分布不是格点分布，则：

(a) 对任意 $\varepsilon > 0$，函数序列 $(Q_{Z_n})_{n\geq 1}$ 在 $[\varepsilon, 1]$ 上一致收敛于 $Q_{|G^2-1|} \times \frac{|\mathbb{E}(X^3)|}{6}$。

(b) $\lim_{u\to 0} \sup_{n\geq 1} u^{1/p} \tilde{Q}_{Z_n}(u) = 0$。

引理 3.5 的证明。我们从证明条目 (a) 开始。由 Cornish-Fisher 展开，回顾可知，$Z_n \to^{\mathcal{L}} Z$ 当 $n \to \infty$ 时成立，其中 $Z = |G^2 - 1| \times \frac{|\mathbb{E}(X^3)|}{6}$。由于 ~~$Z$ 是连续随机变量~~，因此，对任意 $u \in]0, 1]$, $Q_{Z_n}(u) \to Q_Z(u) = Q_{|G^2-1|}(u) \times \frac{|\mathbb{E}(X^3)|}{6}$，当 $n \to \infty$ ~~时成立~~（例如参见 [24] 中的引理 21.2）。注意到，对于任意正整数 n, $u \mapsto Q_{Z_n}(u)$ 是非增的。因此，根据第二 Dini 定理，在任意 $\varepsilon > 0$ 下，收敛对于所有形如 $[\varepsilon, 1]$ 的区间也是一致的，条目 (a) 得证。

现在转向条目 (b)。我们先证明

$$\lim_{t\to\infty} t^p \sup_{n\geq 1} \tilde{H}_{Z_n}(t) = 0\,. \tag{3.52}$$

根据定理 2.3，存在一个正数 C，使得对任意正数 t,

$$t^2 \sup_{n\geq 1} \tilde{H}_{Z_n}(t) \leq C\Big(1 + \mathbb{E}\big(|X|^3 \min(|X|, t)\big)\Big).$$

Next

$$\lim_{t\to\infty} t^{p-2}\mathbb{E}\big(|X|^3 \min(|X|, t)\big) = 0\,.$$

对于 $p \in]1, 2[$, ，这由以下事实可得： $H_{|X|}(x) = o(x^{-p-2})$；对于 $p = 1$，这由控制收敛定理以及以下事实可得： $\mathbb{E}(|X|^3) < \infty$。现在，上述收敛意味着 (3.52)。接下来，对于所有 $\eta > 0$，存在 $A > 0$，使得对于任意 $n \geq 1$ 以及任意 $x \geq A$, $H_{Z_n}(x) < \eta^p x^{-p}$。因此，根据不等式 (2.11)，对于任意 $x \geq A$, $\tilde{Q}_{Z_n}(\eta^p x^{-p}) < x$。这意味着对于任意 $x \geq A$, $\eta x^{-1} \tilde{Q}_{Z_n}(\eta^p x^{-p}) < \eta$。由此，对于任意 $u < \eta^p A^{-p}$, $u^{1/p}\tilde{Q}_{Z_n}(u) < \eta$，对于任意 $n \geq 1$。引理 3.5 的条目 (b) 证明完毕。

□

现在我们回到推论 2.4 的证明。先从 (a) 项开始。根据 (2.12) 以及 $H_Z(x) < u$ 当且仅当 $x > Q_Z(u)$ 这一事实，我们有 $\Lambda_p(Z_n) = \text{上确界}_{u\in]0,\ 1]}\, u Q^p_{Z_n}(u)$。根据引理 3.5 的 (a) 项，对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{u\in[\varepsilon,1]} u^{1/p} Q_{Z_n}(u) = \frac{|\mathbb{E}(X^3)|}{6} \sup_{u\in[\varepsilon,1]} u^{1/p} Q_{|G^2-1|}(u).$$

此外，根据引理 3.5 的 (b) 项，

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\sup_{n\geq 1}\sup_{u\in[0,\varepsilon]} u^{1/p}Q_{Z_n}(u)=0 \quad\text{and}\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{u\in[0,\varepsilon]} u^{1/p}Q_{|G^2-1|}(u)=0.$$

至此，推论 2.4 的第 (a) 项第一部分的证明结束。

现在我们来证明推论 2.4 的第 (a) 项第二部分。为此，我们先证明：将 Q_{Z_n} ~ ~替换为 Q_{Z_n}，并将 $Q_{|G^2-1|}$ 替换为 $Q_{|G^2-1|}$后，引理 3.5 的第 (a) 项仍然成立。首先，引理 3.5 的第 (a) 项意味着 Q_{Z_n} 在 $]0,1]$上逐点收敛到 $Q_{|G^2-1|}\times{}^{|\mathbb{E}}{}_{(X^3)_6}{}^{|}$。其次，根据~~引理 3.5~~ 的第 (a) 项和第 (b) 项，存在一个正数 C，使得对于任意的 $u\in]0$、$1]$，$\sup_{n\geq 1}Q_{Z_n}(u)\leq Cu^{-1/p}$。因此，根据控制收敛定理，对于任意$u\in[0,1]$,

$$\lim_{n\to\infty}u\tilde{Q}_{Z_n}(u)=\lim_{n\to\infty}\int_0^u Q_{Z_n}(v)dv=u\tilde{Q}_{|G^2-1|}(u)\times\frac{|\mathbb{E}(X^3)|}{6}.$$

~由于对任意 n，$u\to uQ_{Z_n}(u)$ 是非递减的，根据第二 Dini 定理，~上述收敛在 $[0,1]$ 上是一致的。因此，对任意 $\varepsilon>0$，Q_{Z_n} 在 $[\varepsilon,1]$ 上一致收敛到 $\tilde{Q}_{|G^2-1|}\times{}^{|\mathbb{E}}{}_{(X^3)_6}{}^{|}$，这意味着 ——

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{u\in[\varepsilon,1]}u^{1/p}\tilde{Q}_{Z_n}(u)=\frac{|\mathbb{E}(X^3)|}{6}\sup_{u\in[\varepsilon,1]}u^{1/p}\tilde{Q}_{|G^2-1|}(u).$$

最后

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\sup_{n\geq 1}\sup_{u\in[0,\varepsilon]} u^{1/p}\tilde{Q}_{Z_n}(u)=0 \quad\text{and}\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{u\in[0,\varepsilon]} u^{1/p}\tilde{Q}_{|G^2-1|}(u)=0.$$

至此，推论 2.4 的第 (a) 项第二部分的证明完成。

推论 2.4 的第 (b) 项的证明与第 (a) 项的证明步骤相同。利用 $\bar{Z}_n\to^{\mathcal{L}}Z$，以及 $n\to\infty$ （例如参见 Rio[21] 中的引理 2.1 (b)），可得引理 3.5 的第 (a) 项对序列 $(Q_{\bar{Z}_n})_{n\geq 1}$ 也成立。~ ~接下来，由不等式 (3.43)，$Q_{\bar{Z}_n}\leq Q_{Z_n}+(h/2)$, 这保证引理 3.5 的第 (b) 项对序列 $(Q_{\bar{Z}_n})_{n\geq 1}$ 也成立。现在，推论 2.4 的第 (b) 项证明的结尾与第 (a) 项完全相同。

□

4 附录

4.1 命题 3.1 的证明

由齐次性，只需证明 $\alpha=1$ 的情形。对于任意 $m>0$，注意到

$$\Pi(m)-m=\sum_{\ell\geq 0}\big(2\Pi(2^\ell m)-\Pi(2^{\ell+1}m)\big)2^{-\ell-1}\text{ in }\mathbb{L}^2. \tag{4.1}$$

事实上，对于任意正整数 N，

$$\sum_{\ell=0}^{N}\big(2\Pi(2^{\ell}m)-\Pi(2^{\ell+1}m)\big)2^{-\ell-1}=\Pi(m)-2^{-N-1}\Pi(2^{N+1}m)$$

以及 $\|2^{-N-1}\Pi(2^{N+1}m)-m\|_2^2=2^{-N-1}m$，它在 $N\to\infty$ 时收敛于零。

设 $\tilde{U}_{\ell+1,m}:=2\Pi(2^{\ell}m)-\Pi(2^{\ell+1}m)$ 且 $U_{\ell+1,m}:=\Pi(2^{\ell+1}m)$。设 Φ 为标准实值高斯随机变量的分布函数，并且对

~ ~任意 $\ell\in\mathbb{N}$，设 $F_{\ell+1,m}$ 为给定 $U_{\ell+1,m}$ 时 $U_{\ell+1,m}$ 的条件分布的分布函数。设 $(\delta_\ell)_{\ell\geq0}$ 为在 $[0,1]$, 上服从均匀分布、且与泊松过程 $(\Pi(t))_{t\geq0}$ 独立的独立同分布随机变量序列。对任意 $\ell\geq0$，设

$$\xi_{\ell,m}=\Phi^{-1}\Big(\tilde{F}_{\ell+1,m}(\tilde{U}_{\ell+1,m}-0)+\delta_\ell\big(\tilde{F}_{\ell+1,m}(\tilde{U}_{\ell+1,m})-\tilde{F}_{\ell+1,m}(\tilde{U}_{\ell+1,m}-0)\big)\Big).$$

根据条件分位数变换的性质，$\xi_{\ell,m}$ 与~$U_{\ell+1,m}$独立，是 $\sigma(\delta_\ell,U_{\ell+1,m},U_{\ell+1,m})$ 可测的，并且是 $\mathcal{N}(0,1)$ 分布的（更多细节见 [23] 中的引理 F1）。令 $\mathcal{G}_{\ell+1}=\sigma((U_{\ell+k,m},\ \delta_{\ell+k})\ k\geq1)$，我们注意到 $\xi_{\ell,m}$与 $\mathcal{G}_{\ell+1}$ 独立。由归纳法可知，随机变量 $(\xi_{\ell,m})_{\ell\geq0}$相互独立且为 $\mathcal{N}(0,1)$ 分布。

接下来，令

$$W(m):=\sum_{\ell\geq0}\xi_{\ell,m}\sqrt{2^{\ell+1}m}2^{-\ell-1}.$$

根据上述事实，$W(m)$服从 $\mathcal{N}(0,m)$分布。

接下来，对于任意 $\ell\geq0$，令$V_{\ell,m}=\xi_{\ell,m}\sqrt{2^{l+1}m}-\tilde{U}_{\ell+1,m}$。注意，$\mathcal{L}(\tilde{U}_{\ell+1,\ m}|\mathcal{G}_{\ell+1})$~是$2B-U_{\ell+1,m}$ 的分布，其中 $B\sim\mathcal{B}(U_{\ell+1,m},1/2)$。因此，$\mathbb{E}(U_{\ell+1,m}|\mathcal{G}_{\ell+1})=0$，这意味着随机变量$(V_{\ell,m})_{\ell\geq0}$ 在 $\mathbb{L}^2$中正交。因此可得

$$\|\Pi(m)-m-W(m)\|_2^2=\Big\|\sum_{\ell\geq0}V_{\ell,m}2^{-\ell-1}\Big\|_2^2=\sum_{\ell\geq0}2^{-2(\ell+1)}\|V_{\ell,m}\|_2^2,$$

由此可得

$$\|\Pi(m)-m-W(m)\|_2^2\leq\frac{1}{3}\sup_{\ell\geq0}\|V_{\ell,m}\|_2^2.\tag{4.2}$$

现在我们来处理量$\|V_{\ell,m}\|_2^2$。令$\tilde{W}_{\ell+1,m}=\xi_{\ell,m}\sqrt{2^{l+1}m}$。于是

$$\|V_{\ell,m}\|_2^2=\|\tilde{U}_{\ell+1,m}-\tilde{W}_{\ell+1,m}\|_2^2.$$

令 $\mu_0=4/3$。我们首先考虑 $\mu\leq\mu_0$ 的情形。为简化记号，设 $\mu=2^{\ell+1}m$, $U=U_{\ell+1,\ m}$, $\tilde{U}=\tilde{U}_{\ell+1,\ m}$ 以及 $\tilde{W}=\tilde{W}_{\ell+1,\ m}$。我们先写出

$$\mathbb{E}(\tilde{U}\tilde{W})=\sum_{n>0}\mathbb{P}(U=n)\mathbb{E}(\tilde{U}\tilde{W}\,|\,U=n)\,,\tag{4.3}$$

~ ~，因为当 $U=0$ 时 $U=0$。由于 $\xi_{\ell,\,m}$ 是 U 关于 U 的条件分位数变换，根据 Rio 第 30 页的练习 3)-a)，[23], 对任意 $n>0$,

$$\mathbb{E}(\tilde{U}\xi_{\ell,m}\,|\,U=n)\geq\mathbb{E}(\tilde{U}\,|\,U=n)\mathbb{E}(\xi_{\ell,m}\,|\,U=n)=0\,.$$

~ ~这意味着 $\mathbb{E}(UW)\geq 0$。因此

$$\mathbb{E}\big(\big(\tilde{U}-\tilde{W}\big)^2\big)\leq\mathbb{E}(\tilde{U}^2+\tilde{W}^2)=2\mu\leq 2\mu_0=8/3. \tag{4.4}$$

现在我们转向 $\mu>\mu_0$ 的情形。为了给出 ~ ~ ~ U 与 W 之间的 $\mathbb{L}^2$ 距离上界，我们将给出 $\mathbb{E}(UW)$ 的下界。事实上

$$\|V_{\ell,m}\|_2^2=\mathbb{E}\big((\tilde{U}-\tilde{W})^2\big)=2\mu-2\mathbb{E}(\tilde{U}\tilde{W}), \tag{4.5}$$

因为 $\mathbb{E}\big(\tilde{W}^2\big)=\mu$, $\mathbb{E}(\,\tilde{U}^2\mid\mathcal{G}_{\ell+1})=U_{\ell+1,m}$ 且 $\mathbb{E}(U_{\ell+1,m})=2^{\ell+1}m$。

我们将 (4.3) 改写如下：

$$\mathbb{E}(\tilde{U}\tilde{W})=\sum_{n>0}\mathbb{P}(U=n)\mathbb{E}(n^{-1/2}\tilde{U}\mu^{-1/2}\tilde{W}\mid U=n)\sqrt{n\mu}\,. \tag{4.6}$$

Now

$$\mathbb{E}(n^{-1/2}\tilde{U}\mu^{-1/2}\tilde{W}\,|\,U=n)=1-\tfrac{1}{2}\mathbb{E}\big(\big(n^{-1/2}\tilde{U}-\mu^{-1/2}\tilde{W}\big)^2\mid U=n\big). \tag{4.7}$$

~注意到，$\mathcal{L}(U|U=n)$ 是 $2B-n$ 的分布，其 $B\sim\mathcal{B}(n,1/2)$。因此，$\mathcal{L}(n^{-1/2}\tilde{U}|U=n)$ 是 $n^{-1/2}(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n)$ 的分布，其中 $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq n}$ 是服从分布 $\mathbb{P}(\varepsilon_1=1)=\mathbb{P}(\varepsilon_1=-1)=1/2$ 的独立同分布随机变量。此外，给定 $U=n$ 时，$\mu^{-1/2}\tilde{W}$ 的条件分布为 $\mathcal{N}(0,1)$。因此，由下面的引理 4.1,

$$\mathbb{E}\Big(\big(n^{-1/2}\tilde{U}-\mu^{-1/2}\tilde{W}\big)^2\mid U=n\Big)\leq\min\Big(\frac{33}{16n},2\big(1-\sqrt{2/\pi}\,\big)\Big). \tag{4.8}$$

从（4.6）出发，并结合（4.7）和（4.8），可得

$$\mathbb{E}(\tilde{U}\tilde{W})\geq\sum_{n>0}\mathbb{P}(U=n)\sqrt{n\mu}\Big(1-\min\Big(\frac{33}{32n},1-\sqrt{2/\pi}\,\Big)\Big).$$

最后一个不等式等价于

$$\mu^{-1/2}\mathbb{E}(\tilde{U}\tilde{W})\geq\mathbb{E}\big(\sqrt{U}\big)-\mathbb{E}\Big(\min\Big(\frac{33}{32\sqrt{U}},(1-\sqrt{2/\pi})\sqrt{U}\Big)\Big).$$

我们现在断言

$$\min\Big(\frac{33}{32\sqrt{U}},(1-\sqrt{2/\pi})\sqrt{U}\Big)\leq c_0(U+1)^{-1/2}\text{ with }c_0=1.1139.$$

事实上，对于 $U \le 5$，$(1-\sqrt{2/\pi})\sqrt{U} \le 1.108(U+1)^{-1/2}$，并且对于 $U \ge 6$，

$$\frac{33}{32\sqrt{U}} \le \frac{33}{32\sqrt{U+1}}\sqrt{7/6} \le c_0(U+1)^{-1/2}.$$

因此

$$\mu^{-1/2}\mathbb{E}(\tilde{U}\tilde{W}) \ge \mathbb{E}\big(\sqrt{U}\big) - c_0\,\mathbb{E}\Big((U+1)^{-1/2}\Big).$$

Now，回忆一下，U 服从参数为 μ 的泊松分布。因此

$$\mathbb{E}\big((U+1)^{-1/2}\big) = e^{-\mu}\sum_{n\ge 0}\frac{1}{n!}(n+1)^{-1/2}\mu^n = e^{-\mu}\sum_{n\ge 0}\frac{(n+1)^{1/2}}{(n+1)!}\mu^n = \mu^{-1}\mathbb{E}\big(\sqrt{U}\big).$$

最后两个不等式保证

$$\mathbb{E}(\tilde{U}\tilde{W}) \ge (\mu - c_0)\mathbb{E}\big(\sqrt{\mu^{-1}U}\big). \tag{4.9}$$

现在，我们给出 $\mathbb{E}\big(\sqrt{\mu^{-1}U}\big)$ 的一个下界。令 $Z = \mu^{-1}(U-\mu)$。于是 $\sqrt{\mu^{-1}U} = \sqrt{1+Z}$。现在，根据四阶泰勒积分公式，对任意实数$z \ge -1$,

$$\sqrt{1+z} = 1 + (z/2) - (z^2/8) + (z^3/16) - (5/32)z^4\int_0^1 (1-t)^3(1+tz)^{-7/2}dt.$$

接下来，对于 $z \ge -1$，$(1+tz)^{-7/2} \le (1-t)^{-7/2}$，由此可得

$$-(5/32)z^4\int_0^1 (1-t)^3(1+tz)^{-7/2}dt \ge -(5/32)z^4\int_0^1 (1-t)^{-1/2}dt = -(5/16)z^4.$$

由此可知

$$\sqrt{\mu^{-1}U} \ge 1 + (Z/2) - (Z^2/8) + (Z^3/16) - (5/16)Z^4$$

现在回忆一下，U 服从参数为 μ 的泊松分布。因此，$\mathbb{E}(Z) = 0$，$\mathbb{E}(Z^2) = \mu^{-1}$，$\mathbb{E}(Z^3) = \mu^{-2}$，且 $\mathbb{E}(Z^4) = \mu^{-3} + 3\mu^{-2}$。结合上述不等式，可得

$$\mathbb{E}\big(\sqrt{\mu^{-1}U}\big) \ge 1 - \frac{1}{8\mu} - \frac{7}{8\mu^2} - \frac{5}{16\mu^3}. \tag{4.10}$$

将此下界与 (4.9) 结合，最终得到

$$\mathbb{E}(\tilde{U}\tilde{W}) \ge \mu - 1.2389 - 0.7358\mu^{-1} + 0.6621\mu^{-2} + 0.3480\mu^{-3} \ge \mu - 1.4055$$

对任意 $\mu \ge \mu_0$。上述不等式与 (4.5) 一起表明，对任意 $\mu \ge \mu_0$,

$$\mathbb{E}\big((\tilde{U}-\tilde{W})^2\big) \le 2 \times 1.4055 = 2.8110. \tag{4.11}$$

由 (4.4) 可知，上述不等式对 $\mu \le \mu_0$ 也成立。最后，将此上界与 (4.2) 结合可得

$$\|\Pi(m) - m - W(m)\|_2^2 \le 0.9370. \tag{4.12}$$

由于 $W_2^2(\mu_{m,1}, \nu_m) \le \|\Pi(m) - m - W(m)\|_2^2$，上界 (4.12) 蕴含命题 3.1。为完成该命题的证明，我们陈述并证明引理 4.1。

引理 4.1. 设 $(\varepsilon_i)_{1\le i\le n}$ 是服从分布 $\mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1) = 1/2$ 的独立同分布随机变量，且 ν_n 是 $\mathcal{N}(0, n)$ 概率测度。那么

$$W_2^2\big(P_{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n}, \nu_n\big) \le \min\big(33/16, 2n\big(1 - \sqrt{2/\pi}\,\big)\big).$$

证明. 设 $G_n \sim \mathcal{N}(0, n)$（因此 $P_{G_n} = \nu_n$），且 F_n 是 $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$ 的累积分布函数，Φ 是 $\mathcal{N}(0, 1)$ 的累积分布函数。定义

$$S_n = F_n^{-1}\big(\Phi\big(n^{-1/2}G_n\big)\big).$$

那么 $P_{S_n} = P_{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n}$ 和 $\mathbb{E}\big((S_n - G_n)^2\big) = W_2^2(P_{S_n}, P_{G_n})$。设 $Y = n^{-1/2}G_n$。根据 [14], 中的定理 1.1,

$$\big|S_n - G_n\big| \le (3/2) + Y^2/4.$$

现在，利用初等不等式 $x^2 \le \frac{3}{2}|x| + |x|\max\big(|x| - \frac{3}{2}, 0\big)$，我们可以推出

$$\mathbb{E}\big((S_n - G_n)^2\big) \le \frac{3}{2}\mathbb{E}\big(\big|S_n - G_n\big|\big) + \mathbb{E}\Big(\Big[\frac{3}{2} + \frac{Y^2}{4}\Big]\frac{Y^2}{4}\Big) \le \frac{3}{2}\mathbb{E}\big(\big|S_n - G_n\big|\big) + \frac{9}{16}.$$

接下来 $\mathbb{E}\big(\big|S_n - G_n\big|\big) = W_1(P_{S_n}, P_{G_n})$。由于 $\mathbb{E}(\varepsilon_1^2) = \mathbb{E}(|\varepsilon_1|^3) = 1$，根据 [9], 中的定理 1.1，可得 $\mathbb{E}\big(\big|S_n - G_n\big|\big) \le 1$。因此，总体而言，

$$\mathbb{E}\big((S_n - G_n)^2\big) \le (3/2) + (9/16) = 33/16.$$

尚需证明我们还有

$$W_2^2\big(P_{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n}, \nu_n\big) \le 2n\big(1 - \sqrt{2/\pi}\,\big). \tag{4.13}$$

设 $Y_1, \ldots, Y_n$ 为服从分布 $\mathcal{N}(0, 1)$ 的独立同分布随机变量。定义 η_k，使得对于 $[1, n]$ 中的 k，有 $\eta_k = \mathbf{1}_{Y_k \ge 0} - \mathbf{1}_{Y_k < 0}$。那么 $\eta_1, \ldots, \eta_n$ 是服从分布 $\mathbb{P}(\eta_1 = 1) = \mathbb{P}(\eta_1 = -1) = 1/2$ 的独立同分布随机变量。因此

$$W_2^2\big(P_{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n}, \nu_n\big) \le \mathbb{E}\Big(\Big(\sum_{k=1}^{n}(\eta_k - Y_k)\Big)^2\Big).$$

由于随机变量 $((\eta_k - Y_k)_{1\le k\le n}$ 相互独立同分布,

$$\mathbb{E}\Big(\Big(\sum_{k=1}^{n}(\eta_k - Y_k)\Big)^2\Big) = n\mathbb{E}((\eta_1 - Y_1)^2).$$

Next

$$\mathbb{E}((\eta_1 - Y_1)^2) = \mathbb{E}((|Y_1| - 1)^2) = 2 - 2\mathbb{E}(|Y_1|) = 2\big(1 - \sqrt{2/\pi}\big). \tag{4.14}$$

至此，式 (4.13) 的证明结束，引理 4.1 的证明也随之完成。 □

4.2 命题 2.1 的证明

将下述一般命题应用于 $\varphi = \psi_x$ 即可立即得到证明，其中 ψ_x 在式 (2.1) 中定义。

命题 4.1. 设 φ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的 $\mathcal{C}^1$、非负、偶且凸的函数，使得 $\varphi(0) = 0$。此外，假设 φ' 是凹函数。设 μ 和 ν 是实数轴上的两个均值为零的概率分布，其累积分布函数分别为 F 和 G。设 $\mathcal{F}_\varphi$ 是连续可微函数 $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 的类，满足 $f(0) = 0$, $\|f'\|_\infty \leq \|\varphi'\|_\infty$，并且

$$|f'(x) - f'(y)| \leq 2\varphi'(|x-y|) \text{ for any } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Then

$$\kappa_\varphi(\mu,\nu) \leq \zeta_\varphi(\mu,\nu) := \sup\big\{\mu(f) - \nu(f) \,:\, f \in \mathcal{F}_\varphi\big\}.$$

注 4.1. 若 $\varphi(x) = |x|^r$ 且 $r \in]1,2]$，则可推出 $\kappa_r(\mu,\nu) \leq 2r\zeta_r(\mu,\nu)$，其中 ζ_r 是 r 阶理想距离（其定义见例如 [19, 式 (9.1.2)]）。在这一特定情形下，我们得到 [20, 定理 3.1]。

命题 4.1 的证明。运用定理 3. 开头证明中所发展的论证，我们首先指出，只需证明概率分布具有严格正且光滑的密度时命题成立即可。事实上，

$$\kappa_\varphi(\mu,\nu) = \lim_{\sigma\to 0} \kappa_\varphi(\mu_\sigma,\nu_\sigma) \text{ and } \zeta_\varphi(\mu,\nu) = \lim_{\sigma\to 0} \zeta_\varphi(\mu_\sigma,\nu_\sigma)\,.$$

其中，具有正态分布的密度。

因此，从现在起，分别表示两个概率分布，其分布函数分别为，并假设它们在到之间连续且严格递增。对于一个在上服从均匀分布的随机变量，随机向量（，）的边缘分布分别为和。因此，要证明该命题，只需证明存在某个属于的函数，使得对任意属于的

$$h(F^{-1}(u)) - h(G^{-1}(u)) \geq \varphi\big(F^{-1}(u) - G^{-1}(u)\big)\,. \tag{4.15}$$

为此，令

$$H = G - F \text{ and } A = H^{-1}(\{0\})\,.$$

由于 H 连续，A 是一个闭集。设 h 是一个从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的可导函数，并且满足

$$h'(t) = \operatorname{sign} H(t)\varphi'(2d(t,A))\,.$$

首先注意， A 不可能等于 $\emptyset$。事实上，若 $A=\emptyset$，则要么 $F>G$，要么 $G>F$，这意味着 μ 和 ν 不可能具有相同的均值。

接下来，若 $[s,t]\cap A=\emptyset$，则

$$|h'(s)-h'(t)|=|\varphi'(2d(s,A))-\varphi'(2d(t,A))|\le\varphi'(2|t-s|)\le 2\varphi'(|t-s|)\,,$$

其中，第一个和第二个不等式源于以下事实： φ' 是凹函数， φ' 是非递减的，且 $\varphi'(0)=0$。

现在假设 $[s,t]\cap A\neq\emptyset$。令 α 和 β 满足 $d(s,A)=|\alpha-s|$ 且 $d(t,A)=|t-\beta|$。显然

$$|h'(s)-h'(t)|=\varphi'(2|t-\beta|)+\varphi'(2|\alpha-s|)|\,.$$

由于 φ' 是凹且非递减的函数，对于任意满足 $x+y\le t-s$ 的 x 和 y，以下不等式成立：

$$\varphi'(x)+\varphi'(y)\le 2\varphi'\big((x+y)/2\big)\le 2\varphi'\big((t-s)/2\big)\,.$$

这意味着

$$|h'(s)-h'(t)|\le 2\varphi'(|t-s|)\,.$$

所有这些推理表明， h 属于 $\mathcal{F}_\varphi$。证明的其余部分将证明 h 满足不等式 (4.15)。

为此，我们首先注意到 $F^{-1}(u)\in A$ 等价于 $G^{-1}(u)=F^{-1}(u)$。事实上， $F^{-1}(u)\in A$ 等价于 $G(F^{-1}(u))=F(F^{-1}(u))=u$，而后者又等价于 $G^{-1}(u)=F^{-1}(u)$。因此，如果 $F^{-1}(u)\in A$，由于 $\varphi(0)=0$，

$$h(F^{-1}(u))-h(G^{-1}(u))=\varphi\big(F^{-1}(u)-G^{-1}(u)\big)=0.$$

从现在起，假设 $F^{-1}(u)\notin A$。存在不同的情形。

情形 1。 $F^{-1}(u)\notin$ [下确界 A，上确界 A[。例如，假设 $F^{-1}(u)>$ 上确界 A，且上确界 $A<+\infty$（ $F^{-1}(u)<$ 下确界 A 的情形可类似处理）。令 $z=$ 上确界 A。由于 A 是闭的， $z\in A$。现在， $F^{-1}(u)>z$ 当且仅当 $u>F(z)$。因此，由于 $z\in A$，

$$G^{-1}(u)>G^{-1}(F(z))=G^{-1}(G(z))=z\,.$$

注意，对于任意 $z\in A$，

$$h(F^{-1}(u))-h(G^{-1}(u))=\int_z^{F^{-1}(u)}h'(t)dt-\int_z^{G^{-1}(u)}h'(t)dt\,.$$

因此，如果 $F^{-1}(u)>G^{-1}(u)$，

$$h(F^{-1}(u))-h(G^{-1}(u))=\int_{G^{-1}(u)}^{F^{-1}(u)}h'(t)dt\,,$$

并且注意到，$G^{-1}(u) < t < F^{-1}(u)$ 当且仅当 $F(t) < u < G(t)$，这意味着 $\mathrm{sign}(H(t)) = 1$。接下来，如果 $F^{-1}(u) < G^{-1}(u)$，

$$h(F^{-1}(u)) - h(G^{-1}(u)) = -\int_{F^{-1}(u)}^{G^{-1}(u)} h'(t)dt\,,$$

且 $\mathrm{sign}(H(t)) = -1$。根据 h 的定义，如果 $t > z$，则 $d(t, A) = t - z$，这意味着 $h'(t) = \mathrm{sign}H(t)\varphi'(2(t-z))$。因此，总而言之，

$$D(u) := h(F^{-1}(u)) - h(G^{-1}(u)) = \int_{\min(F^{-1}(u),G^{-1}(u))}^{\max(F^{-1}(u),G^{-1}(u))} \varphi'(2(t-z))dt\,.$$

现在假设 $F^{-1}(u) > G^{-1}(u)$（情形 $F^{-1}(u) < G^{-1}(u)$ 可用类似方法处理）。那么，由于 φ' 是非递减的，且 $\varphi'(0) = 0$,

$$D(u) = \int_{G^{-1}(u)-z}^{F^{-1}(u)-z} \varphi'(2s)ds \geq \int_{0}^{F^{-1}(u)-G^{-1}(u)} \varphi'(2s)ds \geq \varphi(F^{-1}(u) - G^{-1}(u))\,.$$

现在我们考虑情形 1 的互补情形。

情形 2. $F^{-1}(u) \in]$ 下确界 A，上确界 $A[$。令

$$a = \sup(A \cap]-\infty, F^{-1}(u)]) \quad \text{and} \quad b = \inf(A \cap [F^{-1}(u), +\infty[)\,.$$

因此 $a < F^{-1}(u) < b$，这意味着 $a < G^{-1}(u) < b$。事实上，$a < F^{-1}(u)$ 意味着 $u > F(a)$。因此，由于 $a \in A$,

$$G^{-1}(u) > G^{-1}(F(a)) = G^{-1}(G(a)) = a\,.$$

我们用类似的方法证明 $G^{-1}(u) < b$。于是令

$$I =]F(a), F(b)[=]G(a), G(b)[\,.$$

对于任意 $v \in I$, $F^{-1}(v) \notin A$，由此可得 $F^{-1}(v) \neq G^{-1}(v)$。因此，$F^{-1}(v) - G^{-1}(v)$ 的符号在 I 上为常数。

不失一般性，在下文中我们假设 $F^{-1}(u) > G^{-1}(u)$，并令 $\delta(u) = F^{-1}(u) - G^{-1}(u)$。我们有

$$D(u) = h(F^{-1}(u)) - h(G^{-1}(u)) = \int_{G^{-1}(u)}^{F^{-1}(u)} \varphi'\big(2\big((t-a) \wedge (b-t)\big)\big)dt := f(G^{-1}(u))\,,$$

其中

$$f(y) = \int_{y}^{y+\delta(u)} \varphi'\big(2\big((t-a) \wedge (b-t)\big)\big)dt\,.$$

通过分析 f的导数可以看出， f在 $[a,b]$上的最小值在 $y=a$ 或 $y=b-\delta(u)$ 处取得。因此

$$D(u)\geq\int_0^{\delta(u)}\varphi'\big(2\big(s\wedge(b-a-s)\big)\big)ds\,. \tag{4.16}$$

由于 $\delta(u)\leq b-a$,

$$D(u)\geq\int_0^{\delta(u)/2}\varphi'(2s)ds+\int_{\delta(u)/2}^{\delta(u)}\varphi'\big(2\big(s\wedge(b-a-s)\big)\big)ds\,.$$

现在我们来推导不等式 (4.16)。因此，我们分析由 $g(y)=\int_{(u/2}^{y+\delta}\varphi'\big(2\big(s\wedge(b-a-s)\big)\big)ds$ 定义的函数 g 的导数。可以看出， g 的最小值在 $y=0$ 或 $y=b-a-\delta(u)/2$ 处取得。因此

$$\int_{\delta(u)/2}^{\delta(u)}\varphi'\big(2\big(s\wedge(b-a-s)\big)\big)ds\geq\int_0^{\delta(u)/2}\varphi'(2s)ds\,.$$

因此

$$D(u)\geq 2\int_0^{\delta(u)/2}\varphi'(2s)ds=\varphi(\delta(u))\,.$$

命题的证明到此结束。 □

4.3 引理 3.4 的证明

令 $\tilde{C}=B-x$。显然， $H_{A+B}(x)=H_{A+\tilde{C}}(0)$。因此，只需证明引理在 $x=0$ 的情形下成立。注意

$$\tilde{H}_{A+C}(0)=\inf_{s>0}s^{-1}\mathbb{E}((A+C+s)_+)=\inf_{\substack{v>0\\w>0}}(v+w)^{-1}\mathbb{E}((A+C+v+w)_+).$$

同理

$$\tilde{H}_A(t)=\inf_{v>0}v^{-1}\mathbb{E}((A-t+v)_+)\ \text{ and }\ \tilde{H}_C(-t)=\inf_{w>0}w^{-1}\mathbb{E}((C+t+w)_+).$$

现在，$(A+C+v+w)_+\leq(A-t+v)_++(C+t+w)_+$。因此，对任意 $v,w>0$,

$$\tilde{H}_{A+C}(0)\leq\frac{\mathbb{E}((A-t+v)_+)}{v}\frac{v}{v+w}+\frac{\mathbb{E}((C+t+w)_+)}{w}\frac{w}{v+w}.$$

由此可得

$$\tilde{H}_{A+C}(0)\leq\max\big(v^{-1}\mathbb{E}((A-t+v)_+),w^{-1}\mathbb{E}((C+t+w)_+)\big).$$

令 $\varepsilon>0$ 和 v、 w 按如下方式选取： $v^{-1}\mathbb{E}((A-t+v)_+)\leq\tilde{H}_A(t)+\varepsilon$且 $w^{-1}\mathbb{E}((C+t+w)_+)\leq\tilde{H}_C(-t)+\varepsilon$。则 $\tilde{H}_{A+C}(0)\leq\max(\tilde{H}_A(t)\ \tilde{H}_C(-t))+\varepsilon$。令 ε 趋于 0，即得结论。 □

参考文献

.[1] Bartfai, P. 关于随机游走路径的距离。Studia Sci. Math. Hungar. 5 (1970), 41–49.[2]Billingsley, P. 概率测度的收敛。第二版。Wiley 概率与统计丛书：概率与统计。Wiley-Interscience 出版物。John Wiley & Sons, Inc., 纽约, 1999.[3] Bobkov, S. 中心极限定理中输运距离的 Berry–Esseen 界和 Edgeworth 展开。Probab. Theory Related Fields 170 (2018), no. 1-2, 229–262.[4] Bonis, T. Wasserstein 距离下多元中心极限定理的收敛速率改进。Electron. J. Probab. 29, Paper No. 78, 18 pp. (2024).[5] Dedecker, J.; Merlev`ede, F.; Rio, E. 投影判据下中心极限定理中最小距离的收敛速率。Electron. J. Probab. 14 (2009), no. 35, 978–1011.[6] Dedecker, J.; Merlev` ede, F.; Rio, E. 相依序列条件中心极限定理中的二次输运代价。Ann. Henri Lebesgue 6 (2023), 687–726.[7] DeVore, R.A.; Lorentz, G. G. 构造性逼近。数学科学基础丛书 [数学科学基本原理], 303。施普林格出版社，柏林，1993年。[8] Esseen, C.-G. 关于平均中心极限定理。Kungl. Tekn. H¨ogsk. Handl. 斯德哥尔摩 121 (1958)。30 页。[9] Goldstein, L. 平均中心极限定理中的常数上界。Ann. Probab. 38 (2010), no. 4, 1672–1689。

[10] Hall, P. 自助法与 Edgeworth 展开。Springer 统计学丛书。施普林格出版社，纽约（1992）。

[11] Hardy, G. H.; Littlewood, J. E. 一条具有函数论应用的极大定理。Acta Math. 54（1930），第 1 期，81–116。

[12] Ibragimov, I. A.; Linnik, Yu. V. 独立平稳随机变量序列。附 I. A. Ibragimov 和 V. V. Petrov 撰写的补充章节。

由 J. F. C. Kingman 编辑的俄文译本。Wolters-Noordhoff 出版社，格罗宁根，1971年。[13] Major, P. 关于独立同分布随机变量和的不变性原理。《多元分析杂志》8（1978年），第4期，487–517。[14] Massart, P. Tusnady 引理，24年后。《概率统计学年鉴》38（2002年），第6期，991–1007。´Peccati, G.; Sol´e, J. L.; Taqqu, M. S.; Utzet, F. Stein 方法与泊松泛函的正态近似。《概率论年鉴》38（2010年），第2期，443–478。[16] Pinelis, I. 关于单调性的洛必达型结果及其应用。《不等式与纯粹及应用数学杂志》3（2002年），第1期，文章5，共5页。[17] Pinelis, I. 分位数界的最优三向稳定单调谱：相干金融风险度量与经济不平等的一个谱。《风险》2（2014年），第3期，349–392。[18] Pinelis, I. 关于随机变量和的尾概率的最优上界。《概率论及其应用》64（2019年），第3期，590–598[19] Rachev, S.; R¨uschendorf, L. 质量输运问题。第II卷：应用。施普林格出版社，纽约，1998。[20] Rio, E. 中心极限定理中最小距离的上界。《亨利·庞加莱概率统计学年鉴》45（2009年），第3期，802–817。´Rio, E. 中心极限定理中最小距离的渐近常数。《电子概率通讯》16（2011年），96–103。[21] Rio, E. 关于部分和的条件风险价值。《巴黎科学院数学报告》355（2017年），第11期，1190–1195。[22] Rio, E. 弱相关随机过程的渐近理论。《概率论与随机建模》80。施普林格，柏林，2017年。[23] Van der Vaart, A. W. 渐近统计学。《剑桥统计与概率数学丛书》

，3. 剑桥 g大学 y 出版社，剑桥 ge，1998。