arXiv:2603.01917v1 [math.AP] 2 Mar 2026

二维和三维对流型 Brinkman–Forchheimer 扩展 Darcy 方程时间周期解的存在性与唯一性

MANIL T. MOHAN[1*]

Abstract. 在本工作中，我们研究定义在有界光滑区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2,3\}$ 上的如下二维和三维对流型布林克曼–福希海默扩展达西方程解的存在性与唯一性,

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \mu\Delta\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \alpha\boldsymbol{v} + \beta|\boldsymbol{v}|^{r-1}\boldsymbol{v} + \gamma|\boldsymbol{v}|^{q-1}\boldsymbol{v} + \nabla p = \boldsymbol{g},\ \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0,$$

其中 $\mu,\alpha,\beta > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $r,q \in [1,\infty)$, 且 $r > q \geq 1$, $\boldsymbol{g}$为外部强迫项。对于$r \geq 1$，在周期强迫下，我们通过运用 *Faedo-Galerkin approximations*，并结合 *Banach-Alaoglutheorem*、*Aubin-Lions-Simon compactness lemma*以及 *Lions-Magenes lemma*，建立了该系统的 *existence of time-periodic global weak solutions*。Faedo-Galerkin 逼近问题的 *existence of periodic solutions* 经由 *Brouwer's fixedpoint theorem*得到。在 *supercritical* 情形（$r > 3$）和 *critical* 情形（$r = 3$）中，我们在不对外部强迫施加任何小性条件的情况下证明了 *uniqueness of the global weak solution* 。与具有周期输入的经典二维 Navier–Stokes 方程相比，这构成了一项新结果；对于后者， *uniqueness of strong solutions* 通常要求外力满足 *smallness assumptions* 。

1. 引言

流体动力学的数学建模与分析具有根本意义，既有助于理解与流体相关的现象，也具有实际应用价值。尤其是，多孔介质中的热流与流体流动研究，在众多科学与工程学科中发挥着关键作用。许多描述多孔介质中流动的模型都基于达西定律，这是一种经验关系，提出流量与压力梯度之间呈线性关系：

$$\boldsymbol{v}_d = -\frac{k}{\nu}\nabla p,$$

其中， $\boldsymbol{v}_d$ 为达西速度， k 表示渗透率， $\nu > 0$ 为动力黏度，p 为流体压力（参见[29]）。然而，大量研究表明，在较高流量下，达西定律所预测的线性关系不再成立。例如，在石油储层和径向流动模式等应用中，流动表现出非线性行为。为此，*Forchheimer* 对达西定律引入了二次修正，由此得到了达西-福希海默定律：

$$\nabla p = -\frac{\nu}{k}\boldsymbol{v}_f - \gamma\rho_f|\boldsymbol{v}_f|\boldsymbol{v}_f,$$

其中，$\boldsymbol{v}_f$ 为 Forchheimer 速度， $\gamma > 0$ 为 Forchheimer 系数，ρ_f 为流体密度（参见 [29]）。在达西-福希海默定律的基础上，对流 ***Brinkman-Forchheimer***

[1]数学系，印度理工学院鲁尔基分校，鲁尔基-印度理工学院鲁尔基分校，哈里德瓦尔公路，鲁尔基，北阿坎德邦 247667，印度。*e-mail:* manilfma@iitr.ac.in, maniltmohan@gmail.com。*通讯作者。*Key words:* 对流 Brinkman–Forchheimer 方程，全局弱解，时间周期解，布劳威尔不动点定理。数学主题分类（2010）：76D03, 35Q30，35B10。

扩展达西模型 是为描述多孔介质中具有热弥散的流体流动而推导出的。这一公式自然源自体积平均法，该方法考虑了孔隙空间内速度和温度的偏差：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{v}_f}{\partial t} - \mu\Delta \boldsymbol{v}_f + (\boldsymbol{v}_f \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_f + a_0\boldsymbol{v}_f + a_1|\boldsymbol{v}_f|\boldsymbol{v}_f + \nabla p = \boldsymbol{g}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{v}_f = 0. \end{cases}$$

从数学角度来看，福希海默方程中的二次非线性还可以进一步推广，以包含高阶非线性项。特别是在多孔介质中的高流量条件下，最具相关性和实用性的情形由线性-三次达西–福希海默定律（参见 [29]）刻画：

$$\nabla p = -\frac{\nu}{k}\boldsymbol{v}_f - \gamma\rho_f|\boldsymbol{v}_f|^2\boldsymbol{v}_f.$$

将这些对达西定律的非线性修正纳入后，所得的对流布林克曼-福希海默扩展达西模型可写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{v}_f}{\partial t} - \mu\Delta \boldsymbol{v}_f + (\boldsymbol{v}_f \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_f + a_0\boldsymbol{v}_f + a_1|\boldsymbol{v}_f|\boldsymbol{v}_f + a_2|\boldsymbol{v}_f|^2\boldsymbol{v}_f + \nabla p = \boldsymbol{g}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{v}_f = 0. \end{cases}$$

在本文中，我们通过引入一个抽运项，研究对流布林克曼-福希海默扩展达西方程的进一步推广；该项具有类似的非线性结构，但符号相反。

1.1. 模型。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2,3\}$ 为具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，且$T > 0$ 为固定值。对流布林克曼-福希海默扩展达西（CBFeD）方程描述了饱和多孔介质中不可压缩流体流动的运动，其表达式如下：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \mu\Delta \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + \alpha\boldsymbol{v} + \beta|\boldsymbol{v}|^{r-1}\boldsymbol{v} + \gamma|\boldsymbol{v}|^{q-1}\boldsymbol{v} + \nabla p = \boldsymbol{g}, \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \\ \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \quad \text{in} \quad \Omega \times [0,T], \\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \quad \text{in} \quad \partial\Omega \times [0,T], \\ \boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0 \quad \text{in} \quad \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，$\boldsymbol{v}(x,t) : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$表示时间 t、位置 x处的速度场，$p(x,t) : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$表示压力，$\boldsymbol{g}(x,t) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$是外部强迫项，满足$\boldsymbol{g}(x,t+T) = \boldsymbol{g}(x,t)$，对所有 $t \in \mathbb{R}$均成立。常数 $\mu > 0$表示布林克曼系数（有效黏度），而常数 α 和 β 源于达西-福希海默定律，分别称为达西系数（与多孔介质的渗透率有关）和 Forchheimer 系数（与材料的孔隙率成正比）。(1.1) 中的非线性项 $\gamma|\boldsymbol{v}|^{q-1}\boldsymbol{v}$在 $\gamma > 0$ 时起阻尼作用，在 $\gamma < 0$时起抽运作用。参数 $r \in [1,\infty)$称为吸收指数，其中 $r = 3$ 对应临界指数。当 $\gamma = 0$时，该系统化为对流布林克曼-福希海默（CBF）方程（[17]）。临界齐次 CBF 方程（即满足 $r = 3$ 和 $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$ 的 (1.1)）仅在 $\alpha = 0$ （[17]）时才与纳维–斯托克斯方程（NSE）具有相同的尺度。$r < 3$ 的情形称为亚临界，而 $r > 3$ 则对应超临界或快速增长的非线性项。当流速过大、达西定律不再适用，且孔隙率不太小时（[29]），该模型尤为适用。令 $\alpha = \beta = \gamma = 0$时，系统化为经典纳维-斯托克斯方程；若$\alpha$、$\beta$、$\gamma > 0$，则可将其解释为阻尼纳维-斯托克斯方程。

1.2. 文献综述。(1.1) 中描述的问题引起了广泛关注，这不仅因为它具有重要的物理意义，也因为它在数学上颇具研究价值。根据 Leray 和 Hopf 的经典结果，三维纳维–斯托克斯方程（NSE）至少存在一个满足能量不等式的弱解。然而，此类弱解的唯一性以及强解的整体存在性仍是数学流体力学中的核心未解问题之一。为克服这些困难，许多研究者提出了对三维纳维–斯托克斯方程的各种修正形式（例如参见 [3, 20, 41]）。特别是， [1, 2] 的作者引入了纳维–斯托克斯方程的一种修正形式，其中包含形如 $\beta|\boldsymbol{v}|^{r-1}\boldsymbol{v}$ 的吸收项，且 $r \geq 1$，并证明了该方程在任意空间维数 $d \geq 2$下弱解的存在性，以及二维情形下的唯一性结果。更一般地，通过加入形如 $\alpha\boldsymbol{v} + \beta|\boldsymbol{v}|^{r-1}\boldsymbol{v}$ 的阻尼项来扩展经典纳维–斯托克斯方程的方程，通常称为对流布林克曼-福希海默（CBF）方程（参见 [17]）。此外，在 [29], 中，作者研究了三维纳维–斯托克斯方程的一种变体，其中包含阻尼项 $\beta|\boldsymbol{v}|^{r-1}\boldsymbol{v}$ 和抽运项 $\gamma|\boldsymbol{v}|^{q-1}\boldsymbol{v}$ （不包括线性阻尼 $\alpha\boldsymbol{v}$），并证明了 $r > q$ 时弱解的存在性以及 $r > 3$时的唯一性。与经典三维纳维–斯托克斯方程类似，当 $r \in [1, 3)$时（三维情形下，对任意 β、 $\mu > 0$），以及当 $2\beta\mu < 1$时 $r = 3$，三维 CBFeD 方程强解的整体存在性仍是一个未解问题。

本文 [29]引入并分析了用于三维布林克曼-福希海默扩展达西（3D BFeD）模型的连续数据同化算法，确立了解的存在性与唯一性，并证明了所提出的基于反馈的同化方案具有收敛性。文献 [20], 研究了具有快速增长非线性项的布林克曼-福希海默方程，证明了系统（1.1）在 $\gamma = 0$ 三维空间中当 $r > 3$时存在正则耗散解和全局吸引子。这一结果保证了三维对流布林克曼-福希海默（CBF）方程存在满足能量等式的全局弱解，且该解满足 Leray–Hopf 意义。临界情形（$r = 3$）的相应结果见文献 [8], ，其中证明了在 $4\beta\mu \geq 1$有界区域 $\mathbb{R}^3$上建立的、满足 [15], 条件的临界 CBF 方程的所有弱解都满足能量等式。文献 $r \geq 3$ 分析了线性算子和非线性算子的单调性与半连续性，并运用经典的 Minty–Browder 技巧，证明了三维 CBF 方程存在唯一的全局弱解；该解同样满足 Leray–Hopf 意义和能量等式，且 $2\beta\mu \geq 1$ 在 $r = 3$时）。此外，文献 [16] 研究了受控 CBFeD 系统在一个d维环面上的指数稳定化，采用了基于 m-增生算子理论和控制设计原理的有限维与无限维反馈控制器。

关于受时间周期性外部输入作用的纳维–斯托克斯方程，文献从多个互补角度进行了研究：对于中等强度的外力，可以构造时间周期弱解和强解（并在小性条件下证明其唯一性）；对于更一般的外力，研究重点则转向长期统计行为、吸引子以及解集的正则性。特别是，经典的泛函分析方法表明，在周期性体力满足小性条件或适当衰减假设，以及区域／外部区域流动几何满足相应条件时，时间周期解存在（存在性／唯一性结果， [13, 21, 24, 25, 31, 32, 33, 19, 34, 35]; 外部区域周期解的构造， [12, 14, 28, 36]）。经典方法采用 Galerkin近似、定点定理（例如通过 Poincar´e 映射或 Rothe方法），证明存在一个时间周期的弱解或强解，且其周期与外力周期相同。例如，Lauerov´a [25]采用 Rothe方法和 Galerkin方法，证明了纳维–斯托克斯方程变分形式的周期解存在。Kato [21] 证明，在周期性外力满足适当的小性和正则性条件时，纳维–斯托克斯方程存在时间周期解。Morimoto [31]研究了具有非齐次边界条件的纳维–斯托克斯方程的时间周期解，并采用 Galerkin近似法，在适当假设下建立了存在性结果。Kyed [24]证明，在全空间情形下，对于小的时间周期性数据，存在强时间周期解，且该解在一大类弱解中唯一，并具有正则性

性质。同样，在外部区域（绕物体流动）情形下，Galdi 和 Silvestre[12] 证明，当物体进行刚性周期运动且存在周期相匹配的时间周期性体力时，流体存在时间周期运动。在具有科里奥利力的旋转纳维–斯托克斯问题中，Kozono 等人 [23] 证明，在外力较小时，时间周期解存在且唯一，并且具有渐近稳定性。据我们所知，现有文献尚未研究 CBF 和 CBFeD 方程的时间周期问题。

1.3. **本文的创新之处**。 本文研究具有周期输入的 *CBFED*方程 的整体可解性。对于 $r \geq 1$ 和 $\boldsymbol{f} \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{V}')$，我们证明了 全局弱解的存在性 (定义3.1)

$$\boldsymbol{v} \in \mathrm{C}_w([0,T];\mathbb{H}) \cap \mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{V}) \cap \mathrm{L}^{r+1}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}),$$

with

$$\partial_t \boldsymbol{v} \in \mathrm{L}^p(0,T;\mathbb{V}') + \mathrm{L}^{\frac{r+1}{r}}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{r+1}{r}}), \quad p = \begin{cases} \frac{d}{4}, & r \in [1,3), \\ 2, & r \in [3,\infty), \end{cases}$$

满足能量不等式 （见（3.4））。证明基于 *Faedo-Galerkin* 逼近、巴拿赫–阿劳格鲁定理、*Aubin-Lions-Simon*紧性引理以及*Lions-Magenes* 引理 （参见定理3.4）。对于 Fae do-Galerkin 近似问题（3.13），利用 布劳威尔不动点定理，证明了其周期解的存在性。

对于 $r \in [1,\infty)$ 当 $d = 2$ 以及对于 $r \in [3,\infty)$ 当 $d = 3$时，我们证明了 $\boldsymbol{v} \in \mathrm{C}([0,T];\mathbb{H})$ 且能量等式 （见（3.6））成立。此外，对于 $r \in (3,\infty)$，在满足以下任一条件时，可得弱解的唯一性：

$$\mu\lambda_1 + 2\alpha > \zeta, \quad \text{or} \quad \left(\mu - \frac{1}{\beta}\right)\lambda_1 + \alpha > \eta, \quad \beta\mu > 1,$$

其中 λ_1 是斯托克斯算子的第一个特征值（见小节 2.2），而 ζ 和 η 分别定义于（3.7）和（3.8）中。对于临界情形 $r = 3$，当 $\beta\mu > 1$ 时，唯一性成立，且

$$\alpha + \left(\mu - \frac{1}{\beta}\right)\lambda_1 > \kappa, \quad \kappa = \left(|\gamma| q 2^{q-2}\right)^{\frac{2}{3-q}} \left(\frac{3-q}{2}\right)\left(\frac{q-1}{\beta}\right)^{\frac{q-1}{2}} \left[1 + 2^{\frac{q-1}{2}}\right].$$

值得注意的是，证明弱解的唯一性无需对外力项 作任何小性假设，这标志着相较于纳维–斯托克斯方程的经典结果有了显著改进；在纳维–斯托克斯方程的经典结果中，唯一性通常依赖于对外力的小性假设（参见 [31, 定理 5。1],[21,定理 1。2]）。

二维和三维 CBF 方程全局弱解的存在性已在 [2,定理 41]中得到证明。对于超临界情形，弱解的存在性与唯一性以及能量等式的成立已在 [20, 定理 33] 和 [15, 定理 35] 中得到证明（另见 [8,定理 54] ，其中讨论了有界区域内临界三维 CBF 方程的能量等式，以及[17, 定理 14]，其中讨论了空间周期情形）。此外， [29, 定理 1.1、12]探讨了具有空间周期边界条件的三维 CBFeD 系统在超临界和次临界情形下弱解的存在性，以及超临界情形下弱解的唯一性和强解的存在性。值得注意的是，以上所有研究均针对标准初值问题，关注的是正则（非时间周期）解。与之不同， [29], 本文旨在研究有界区域上二维和三维 CBFeD 方程（1.1）的时间周期解。我们的主要目标是确立时间周期弱解的存在性，并在超临界情形下证明此类弱解的唯一性。

1.4. **论文结构**。 本文其余部分安排如下。下一节将介绍为确立系统（1.1）弱解存在性所需的函数框架。在第3节中，我们讨论周期问题（$d = 2$，3 和 $r \in [1,\infty)$）弱解的整体存在性（$d = 2$、3 和 $r \in (3, \infty)$）及唯一性（1.1）（定理3.4）。对于 $d = 2$，3 和 $r \in [1,3]$，在对数据作适当小性假设并应用巴拿赫不动点定理后，可在附录A中得到强解的唯一性。

2. Mathematical Formulation

本节介绍基本的函数空间，并总结相关线性算子和非线性算子的关键性质，以建立系统 (1.1) 的整体可解性。此处采用的函数框架主要沿用 [15, 30]。

2.1. **函数空间**。 设 $C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)$ 表示所有取值于 $\mathbb{R}^d$、在区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 上具有紧支撑的无穷次可微函数所构成的空间。定义

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &:= \{\boldsymbol{u} \in C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}^d) : \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0\},\\
\mathbb{H} &:= \text{the closure of } \mathcal{V} \text{ in the Lebesgue space } \mathbb{L}^2(\Omega) = L^2(\Omega;\mathbb{R}^d),\\
\mathbb{V} &:= \text{the closure of } \mathcal{V} \text{ in the Sobolev space } \mathbb{H}_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^d),\\
\widetilde{\mathbb{L}}^p &:= \text{the closure of } \mathcal{V} \text{ in the Lebesgue space } \mathbb{L}^p(\Omega) = L^p(\Omega;\mathbb{R}^d),
\end{aligned}$$

对于 $p \in (2,\infty)$。那么，在边界满足某些光滑性假设的条件下，我们将空间 $\mathbb{H}$、$\mathbb{V}$ 和 $\mathbb{L}^p$ 刻画为

$$\mathbb{H} = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\big|_{\partial\Omega} = 0\},$$

范数为 $\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}}^2 := \int_\Omega |\boldsymbol{u}(x)|^2 \mathrm{d}x$，其中 $\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的外法向量，而 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}$ 按迹的意义理解（[40,第 1.3 节，第 1] 章），

$$\mathbb{V} = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) : \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0\},$$

范数为 $\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{V}}^2 := \int_\Omega |\nabla\boldsymbol{u}(x)|^2 \mathrm{d}x$，（由于庞加莱不等式见（2.1））且

$$\widetilde{\mathbb{L}}^p = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{L}^p(\Omega) : \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\big|_{\partial\Omega} = 0\},$$

范数分别为 $\|\boldsymbol{u}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^p}^p = \int_\Omega |\boldsymbol{u}(x)|^p \mathrm{d}x$。令 $(\cdot,\cdot)$ 表示希尔伯特空间 $\mathbb{H}$ 中的内积，令 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示空间 $\mathbb{V}$ 及其对偶空间 $\mathbb{V}'$ 之间，以及 $\widetilde{\mathbb{L}}^p$ 及其对偶空间 $\widetilde{\mathbb{L}}^{p'}$之间所诱导的对偶性，其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$。注意，$\mathbb{H}$ 可与其对偶空间 $\mathbb{H}'$等同。从 [7,第 1], 小节 2. 可知，和空间 $\mathbb{V}' + \widetilde{\mathbb{L}}^{p'}$ 定义良好，并且关于范数

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{V}'+\widetilde{\mathbb{L}}^{p'}} &:= \inf\{\|\boldsymbol{u}_1\|_{\mathbb{V}'} + \|\boldsymbol{u}_2\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{p'}} : \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{y}_1 \in \mathbb{V}' \text{ and } \boldsymbol{y}_2 \in \widetilde{\mathbb{L}}^{p'}\}\\
&= \sup\left\{\frac{|\langle \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{f}\rangle|}{\|\boldsymbol{f}\|_{\mathbb{V}\cap\widetilde{\mathbb{L}}^p}} : \boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{f} \in \mathbb{V}\cap\widetilde{\mathbb{L}}^p\right\},
\end{aligned}$$

其中 $\|\cdot\|_{\mathbb{V}\cap\widetilde{\mathbb{L}}^p} := \max\{\|\cdot\|_{\mathbb{V}}, \|\cdot\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^p}\}$ 是巴拿赫空间 $\mathbb{V}\cap\mathbb{L}^p$上的范数。此外，范数 $\max\{\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{V}}, \|\boldsymbol{u}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^p}\}$ 与空间 $\mathbb{V}\cap\mathbb{L}^p$上的范数 $\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{V}} + \|\boldsymbol{u}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^p}$ 和 $\sqrt{\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{V}}^2 + \|\boldsymbol{u}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^p}^2}$ 等价。此外，我们有连续嵌入

$$\mathbb{V}\cap\widetilde{\mathbb{L}}^p \hookrightarrow \mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{H} \cong \mathbb{H}' \hookrightarrow \mathbb{V}' \hookrightarrow \mathbb{V}' + \widetilde{\mathbb{L}}^{p'},$$

其中嵌入 $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{H}$ 是紧的。

2.2. 线性算子。众所周知（例如，参见 [9, 18, 22]），每个向量场 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{L}^p(\Omega)$，若满足 $1 < p < \infty$，都存在唯一的亥姆霍兹分解，其形式为 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \nabla q$。其中，$\boldsymbol{v} \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ 满足 $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ 在 Ω 中的分布意义下成立，且在 $\partial\Omega$ 上有 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$（迹的意义下）；而 $q \in \mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$。对于光滑向量场，该分解在$\mathbb{L}^2(\Omega)$ 中是正交的。由于分解 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \nabla q$ 对所有 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ 都成立，我们可以定义亥姆霍兹投影算子 $\mathcal{P}_p : \mathbb{L}^p(\Omega) \to \mathbb{L}^p(\Omega)$ $\mathcal{P}_p \boldsymbol{u} := \boldsymbol{v}$，它将向量场投影到其无散分量上。我们再引入空间 $\mathcal{G}_p(\Omega) := \{\nabla q : q \in \mathsf{W}^{1,p}(\Omega)\}$，并赋予其范数 $\|\nabla q\|_{\mathbb{L}^p}$。于是，由上述分解可得直和 $\mathbb{L}^p(\Omega) = \mathbb{L}^p(\Omega) \oplus \mathcal{G}_p(\Omega)$，其中 $\mathbb{L}^p(\Omega)$ 表示 $\mathbb{L}^p(\Omega)$ 中无散向量场的子空间。由 [37, 定理 1.4], 可推得

$$\|\nabla q\|_{\mathbb{L}^p} \leq C\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{L}^p}, \ \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{L}^q} \leq (C+1)\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{L}^p} \ \text{ and } \ \|\nabla q\|_{\mathbb{L}^p} + \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{L}^q} \leq (2C+1)\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{L}^p},$$

其中 $C = C(\Omega\ p) > 0$ 是一个常数，使得

$$\|\nabla q\|_{\mathbb{L}^p} \leq C \sup_{0 \neq \nabla\varphi \in \mathcal{G}_{p'}(\Omega)} \frac{|\langle \nabla q, \nabla\varphi \rangle|}{\|\nabla\varphi\|_{\mathbb{L}^{p'}}}, \ \text{ for all } \ \nabla q \in \mathcal{G}_p(\Omega),$$

且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$。令 $\mathcal{P}_p \boldsymbol{u} := \boldsymbol{v}$，我们得到一个有界线性算子 $\mathcal{P}_p : \mathbb{L}^p(\Omega) \to \widetilde{\mathbb{L}}^p(\Omega)$，使得 $\mathcal{P}_p^2 = \mathcal{P}_p$ (投影)。对于 $p = 2$, $\mathcal{P} := \mathcal{P}_2 : \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{H}$ 是一个正交投影。由于 Ω 属于 C^2, 类，根据第 1 章第 1.6 条备注，页码 [40, ，我们还可推知 $\mathcal{P}$ 将 $\mathbb{H}^1(\Omega)$ 映射到自身，并且在 $\mathbb{H}^1(\Omega)$的范数下连续。

我们将斯托克斯算子 A 定义为

$$\mathrm{A}\boldsymbol{u} := -\mathcal{P}\Delta\boldsymbol{u}, \ \boldsymbol{u} \in \mathrm{D}(\mathrm{A}) = \mathbb{V} \cap \mathbb{H}^2(\Omega),$$

其中 $\mathcal{P}$ 表示亥姆霍兹–勒雷投影。众所周知，A 是作用于 $\mathbb{H}$ 上的非负自伴算子，满足 $\mathrm{D}(\mathrm{A}^{1/2}) = \mathbb{V}$, 并且

$$\langle \mathrm{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{V}}^2, \ \text{for all } \boldsymbol{u} \in \mathbb{V},$$

这尤其意味着 $\|\mathrm{A}\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{V}'} \leq \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{V}}$。当$\Omega$有界时，算子A是可逆的，且其逆$\mathrm{A}^{-1}$ 在 $\mathbb{H}$中是有界、自伴且紧 的。因此，由谱定理，A的谱由一列正特征值 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$, $\lambda_k \to \infty$ 当 $k \to \infty$, 组成，相应的特征函数 $\{\boldsymbol{w}_k\}_{k=1}^{\infty}$ 构成 $\mathbb{H}$的完备正交基，使得对所有 $k \in \mathbb{N}$. 有A $\boldsymbol{w}_k = \lambda_k \boldsymbol{w}_k$, 于是每个 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{H}$ 均可展开为 $\boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{\infty} (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_k)\boldsymbol{w}_k$, 从而$\mathrm{A}\boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_k)\boldsymbol{w}_k$. 因此，我们得到庞加莱 ´不等式:

$$\|\nabla \boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}}^2 = \langle \mathrm{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_k)|^2 \geq \lambda_1 \sum_{k=1}^{\infty} |(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_k)|^2 = \lambda_1 \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}}^2. \tag{2.1}$$

2.3。**双线性算子**。 我们定义三线性型 $b(\cdot, \cdot, \cdot)$: $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ b y

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \int_{\Omega} (\boldsymbol{u}(x) \cdot \nabla)\boldsymbol{v}(x) \cdot \boldsymbol{w}(x) \mathrm{d}x = \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega} u_i(x) \frac{\partial v_j(x)}{\partial x_i} w_j(x) \mathrm{d}x.$$

若 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 满足线性映射 $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \cdot)$ 在 $\mathbb{V}$ 上连续，则其在 $\mathbb{V}'$ 中的对应元素记为 $\mathrm{B}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$。我们还将 $\mathrm{B}(\boldsymbol{u}) = \mathrm{B}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \mathcal{P}[(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}]$ 记作。分部积分可得

$$\begin{cases} b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0, \ \text{ for all } \ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}, \\ b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = -b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}), \ \text{ for all } \ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{V}. \end{cases}$$

利用 H¨older 不等式，我们推导出以下不等式:

$$|b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| = |b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})| \leq \|\boldsymbol{u}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^4} \|\nabla \boldsymbol{w}\|_{\mathbb{H}} \|\boldsymbol{v}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^4}, \ \text{ for all } \ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{V},$$

因此，利用 Ladyzhenskaya不等式，我们得到

$$\|\mathrm{B}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\|_{\mathbb{V}'} \le \|\boldsymbol{u}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^4}\|\boldsymbol{v}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^4} \le \sqrt{2}\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}}^{1/2}\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{V}}^{1/2}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}}^{1/2}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{V}}^{1/2}, \quad \text{for all } \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{V}.$$

此外　此外，对 $\boldsymbol{u}$、$\widetilde{\boldsymbol{u}}$、$\boldsymbol{v}\in\mathbb{V}$，利用庞加莱不等式（见（2.1））可得　　s

$$|\langle \mathrm{B}(\boldsymbol{u})-\mathrm{B}(\widetilde{\boldsymbol{u}}),\boldsymbol{v}\rangle| \le \sqrt{\frac{2}{\lambda_1}}(\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{V}}+\|\widetilde{\boldsymbol{u}}\|_{\mathbb{V}})\|\boldsymbol{u}-\widetilde{\boldsymbol{u}}\|_{\mathbb{V}}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{V}}. \tag{2.2}$$

因此，映射 $\mathrm{B}:\mathbb{V}\to\mathbb{V}'$ 是局部利普希茨连续的。利用插值不等式，可以证明 B 将 $\mathbb{V}\cap\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}$ 映射到 $\mathbb{V}'+\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{r+1}{r}}$，因为

$$|\langle \mathrm{B}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}),\boldsymbol{v}\rangle| = |b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})| \le \|\boldsymbol{u}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}\|\boldsymbol{u}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{2(r+1)}{r-1}}}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{V}} \le \|\boldsymbol{u}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^{\frac{r+1}{r-1}}\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}}^{\frac{r-3}{r-1}}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{V}},$$

对所有 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{V}\cap\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}$均成立。因此，我们推得

$$\|\mathrm{B}(\boldsymbol{u})\|_{\mathbb{V}'+\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{r+1}{r}}} \le \|\boldsymbol{u}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^{\frac{r+1}{r-1}}\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}}^{\frac{r-3}{r-1}}. \tag{2.3}$$

2.4. **非线性算子**。现在考虑算子 $\mathcal{C}(\boldsymbol{u}):=\mathcal{P}(|\boldsymbol{u}|^{r-1}\boldsymbol{u})$，其中 $\boldsymbol{u}\in\mathbb{V}\cap\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}$。显然，$\langle\mathcal{C}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}\rangle=\|\boldsymbol{u}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^{r+1}$。根据泰勒公式，我们有（参见 [15]）

$$|\langle\mathcal{C}(\boldsymbol{u})-\mathcal{C}(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{w}\rangle| \le r\big(\|\boldsymbol{u}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}+\|\boldsymbol{v}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}\big)^{r-1}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}\|\boldsymbol{w}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}, \tag{2.4}$$

对于所有的 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}\in\mathbb{V}\cap\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}$。因此，算子 $\mathcal{C}(\cdot):\mathbb{V}\cap\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}\to\mathbb{V}'+\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{r+1}{r}}$ 是局部 Lipschitz 连续的。此外，对于任意 $r\in[1,\infty)$，可以证明（参见 [15]）

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{C}(\boldsymbol{u})-\mathcal{C}(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\rangle &\ge \frac{1}{2}\||\boldsymbol{u}|^{\frac{r-1}{2}}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\|_{\mathbb{H}}^2+\frac{1}{2}\||\boldsymbol{v}|^{\frac{r-1}{2}}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\|_{\mathbb{H}}^2\\ &\ge \frac{1}{2^{r-1}}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^{r+1}\ge 0,\end{aligned} \tag{2.5}$$

对于 $r\ge 1$（将 2^{r-2} 替换为 1，对于 $1\le r\le 2$）。对于 $\boldsymbol{u}\in\mathbb{V}\cap\widetilde{\mathbb{L}}^{q+1}$，$\mathcal{C}(\boldsymbol{u}):=\mathcal{P}(|\boldsymbol{u}|^{q-1}\boldsymbol{u})$ 也具有类似性质。

以下结果是著名的 Lions-Magenes引理 [27], 的推广，稍后将用于证明能量等式。我们用 $\mathcal{D}'(0,T;\mathbb{X})$ 表示取值于巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 的 $(0,T)$ 上的分布空间。

定理 2.1 ([4, 定理 1.8]). 设 $\mathbb{H}$ 为希尔伯特空间，且 $\mathbb{V}$、$\mathbb{E}$、$\mathbb{X}$ 为巴拿赫空间，并满足以下嵌入关系

$$\mathbb{V}\hookrightarrow\mathbb{H}\hookrightarrow\mathbb{V}'\hookrightarrow\mathbb{X} \quad \textit{and} \quad \mathbb{E}\hookrightarrow\mathbb{H}\hookrightarrow\mathbb{E}'\hookrightarrow\mathbb{X},$$

其中，空间 $\mathbb{V}'$ 和 $\mathbb{E}'$ 分别是 $\mathbb{V}$ 和 $\mathbb{E}$的对偶空间。这里将空间 $\mathbb{H}'$ 视为 $\mathbb{H}$。假设 $p>1$和 $\boldsymbol{v}\in L^2(0,T;\mathbb{V})\cap L^p(0,T;\mathbb{E})$、$\boldsymbol{v}'\in\mathcal{D}'(0,T;\mathbb{X})$和 $\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$，其中 $\boldsymbol{v}_1\in L^2(0,T;\mathbb{V}')$和 $\boldsymbol{v}_2\in L^{p'}(0,T;\mathbb{E}')$。那么，

（i）$\boldsymbol{v}\in\mathrm{C}([0,T];\mathbb{H})$，（ii）函数 $[0,T]\ni t\mapsto\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2\in\mathbb{R}$ 在 $[0,T]$ 上绝对连续，且

$$\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2=\big\langle\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{v}'(t)\big\rangle=2\langle\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{v}_1(t)\rangle+2\langle\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{v}_2(t)\rangle,$$

对于几乎处处的 $t\in[0,T]$，也就是说，

$$\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2=\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2+2\int_0^t\big[\langle\boldsymbol{v}(s),\boldsymbol{v}_1(s)\rangle+\langle\boldsymbol{v}(s),\boldsymbol{v}_2(s)\rangle\big]ds,$$

对所有 $t\in[0,T]$。

3. CBFeD Equations with Periodic Inputs

在本节中，我们研究具有周期输入的 CBFeD 方程，并证明全局弱解的存在性与唯一性。通过应用亥姆霍兹正交投影 $\mathcal{P}$ 到系统（1.1），我们得到具有周期输入的 CBFeD 方程的以下投影形式：

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{v}(t) + \mu \mathrm{A}\boldsymbol{v}(t) + \mathrm{B}(\boldsymbol{v}(t)) + \alpha \boldsymbol{v}(t) + \beta \mathcal{C}(\boldsymbol{v}(t)) + \gamma \widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v}(t)) = \boldsymbol{f}(t), \quad \text{in} \quad \mathbb{V}' + \widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{r+1}{r}}, \\ \boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}(T), \end{cases} \tag{3.1}$$

几乎处处 $t \in [0,T]$，其中 $\boldsymbol{f} = \mathcal{P}\boldsymbol{g}$。弱解的以下定义受 [10,定义 2。1] 和 [39, 第五章定义 1.1.1]的启发。

定义 3.1。对于 $r \geq 1$，函数

$$\boldsymbol{v} \in \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}) \cap \mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{V}) \cap \mathrm{L}^{r+1}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1})),$$

满足 $\partial_t \boldsymbol{v} \in \mathrm{L}^p(0,T;\mathbb{V}') + \mathrm{L}^{\frac{r+1}{r}}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{r+1}{r}})$，其中

$$p = \begin{cases} \frac{d}{4} & for \ \ r \in [1,3), \\ 2 & for \ \ 3 \in [3,\infty), \end{cases} \tag{3.2}$$

称为系统（弱解（3.1）的解，若对于 $\boldsymbol{f} \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{V}')$，$\boldsymbol{v}(\cdot)$ 满足：$\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}(T) \in \mathbb{H}$并且对于所有 $t \in (0,T]$

$$\begin{aligned} &-\int_0^t \int_\Omega \boldsymbol{v}(x,s)\partial_t \boldsymbol{\phi}(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s + \mu \int_0^t \int_\Omega \nabla \boldsymbol{v}(x,s) : \nabla \boldsymbol{\phi}(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_0^t \int_\Omega ((\boldsymbol{v}(x,s)\cdot\nabla)\boldsymbol{v}(x,s)) \cdot \boldsymbol{\phi}(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_0^t \int_\Omega \left[\alpha \boldsymbol{v}(x,s) + \beta|\boldsymbol{v}(x,s)|^{r-1}\boldsymbol{v}(x,s) + \gamma|\boldsymbol{v}(x,s)|^{q-1}\boldsymbol{v}(x,s)\right] \cdot \boldsymbol{\phi}(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\ &= \int_\Omega \boldsymbol{v}(x,0)\boldsymbol{\phi}(x,0)\mathrm{d}x - \int_\Omega \boldsymbol{v}(x,t)\boldsymbol{\phi}(x,t)\mathrm{d}x + \int_0^t \langle \boldsymbol{f}(s), \boldsymbol{\phi}(s)\rangle \mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{3.3}$$

对所有时间周期测试函数 $\boldsymbol{\phi} \in C_0^\infty([0,T];\mathcal{V})$。

定义 3.2。问题 Leray-Hopf 弱解 (3.1) 且满足周期条件 $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}(T) \in \mathbb{H}$ 是满足以下强能量不等式的弱解：

$$\begin{aligned} &2\mu \int_0^T \|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{V}}^2 \mathrm{d}t + 2\alpha \int_0^T \|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \mathrm{d}t + 2\beta \int_0^T \|\boldsymbol{v}(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^{r+1} \mathrm{d}t + 2\gamma \int_0^T \|\boldsymbol{v}(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{q+1}}^{q+1} \mathrm{d}t \\ &\leq 2\int_0^T \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}(t)\rangle \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3.4}$$

注 3.3。1. 正则性 $\boldsymbol{v} \in L^\infty(0,T;\mathbb{H}) \cap L^2(0,T;\mathbb{V}) \cap L^{r+1}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}))$ 和 $\partial_t \boldsymbol{v} \in L^p(0,T;\mathbb{V}') + L^{\frac{r+1}{r}}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{r+1}{r}}) \hookrightarrow L^{\min\{p,\frac{r+1}{r}\}}(0,T;\mathbb{V}' + \widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{r+1}{r}}) \hookrightarrow C([0,T];\mathbb{V}' + \widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{r+1}{r}})$（定理 2，第 302] 页）。由于 $\mathbb{H}$ 是自反的，且嵌入 $\mathbb{H} \hookrightarrow \mathbb{V}' + \widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{r+1}{r}}$ 是连续的，因此应用引理 8.1（第 3 章，第 275] 页；另见命题 1.7.1，第 1 章，第 61] 页）可得 $\boldsymbol{v} \in C_w([0,T];\mathbb{H})$，其中 $\boldsymbol{v} \in C_w([0,T];\mathbb{H})$ 表示函数空间 $\boldsymbol{v}: [0,T] \to \mathbb{H}$，其元素均为弱连续函数。也就是说，对所有 $\zeta \in \mathbb{H}$，标量函数 $[0,T] \ni t \mapsto (\boldsymbol{v}(t), \zeta) \in \mathbb{R}$ 在 $[0,T]$ 上连续。因此，(3.3) 右侧的前两项均有定义。

2. 利用 Vitali 的[10]引理2.1和引理2.2] 推断出(3.3) 等价于如下形式：对所有 $t \in (0, T]$

$$\mu \int_0^t (\nabla \boldsymbol{v}(s), \nabla \boldsymbol{\phi})\mathrm{d}s + \int_0^t \langle (\boldsymbol{v}(s)\cdot\nabla)\boldsymbol{v}(s), \boldsymbol{\phi}\rangle \mathrm{d}s$$

$$+\int_0^t \big\langle \big[\alpha \boldsymbol{v}(s)+\beta|\boldsymbol{v}(s)|^{r-1}\boldsymbol{v}(s)+\gamma|\boldsymbol{v}(s)|^{q-1}\boldsymbol{v}(s)\big],\boldsymbol{\phi}\big\rangle \mathrm{d}s$$
$$=(\boldsymbol{v}(0),\boldsymbol{\phi})-(\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{\phi})+\int_0^t \langle \boldsymbol{f}(s),\boldsymbol{\phi}\rangle \mathrm{d}s,$$

对所有 $\boldsymbol{\phi}\in \mathbb{V}\cap \widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}$。

现在陈述并证明关于系统（3.1弱解存在性与唯一性的以下结果。弱解的存在性通过采用 [31] 中提出的方法得以证明。证明弱解的唯一性时，无需对外力项施加任何小性假设；相反，相关条件施加在（3.1）中出现的参数上。

定理3.4。设给定 $\boldsymbol{f}\in L^2(0,T;\mathbb{V}')$。则问题（3.1）存在一个弱解，满足 $\boldsymbol{v}\in C_w([0,T];\mathbb{H})\cap L^2(0,T;\mathbb{V})\cap L^{r+1}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1})$，且 $\partial_t \boldsymbol{v}\in L^p(0,T;\mathbb{V}')+L^{\frac{r+1}{r}}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{r+1}{r}})$，其中 p 由（3.2）给出，能量估计

$$\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2+\mu\int_0^t\|\boldsymbol{v}(s)\|_{\mathbb{V}}^2\mathrm{d}s+2\alpha\int_0^t\|\boldsymbol{v}(s)\|_{\mathbb{H}}^2\mathrm{d}s+2\beta\int_0^t\|\boldsymbol{v}(s)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^{r+1}\mathrm{d}s$$
$$\le\left(\frac{1}{\mu\lambda_1 T}+1\right)\left\{2\left(\frac{r-q}{r+1}\right)\left(\frac{2(q+1)}{\beta(r+1)}\right)^{\frac{r-q}{q+1}}|\Omega|T+\frac{1}{\mu}\int_0^T\|\boldsymbol{f}(t)\|_{\mathbb{V}'}^2\mathrm{d}t\right\},\tag{3.5}$$

对所有 $t\in[0,T]$ 以及能量不等式（3.4）。

此外，对于 $r\in[1,\infty)$，当 $d=2$ 时，以及对于 $r\in[3,\infty)$，当 $d=3$时，$\boldsymbol{v}\in \mathrm{C}([0,T];\mathbb{H})$，并且下列能量等式成立：

$$\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2+2\mu\int_0^t\|\boldsymbol{v}(s)\|_{\mathbb{V}}^2\mathrm{d}s+2\alpha\int_0^t\|\boldsymbol{v}(s)\|_{\mathbb{H}}^2\mathrm{d}s+2\beta\int_0^t\|\boldsymbol{v}(s)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^{r+1}\mathrm{d}s+2\gamma\int_0^t\|\boldsymbol{v}(s)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{q+1}}^{q+1}\mathrm{d}s$$
$$=\|\boldsymbol{v}(0)\|_{\mathbb{H}}^2+\int_0^t\langle \boldsymbol{f}(s),\boldsymbol{v}(s)\rangle\mathrm{d}s,\tag{3.6}$$

对所有 $t\in[0,T]$。

对于 $r\in(3,\infty)$，若 $\mu\lambda_1+2\alpha>\zeta$，其中

$$\zeta=2\left\{\left(\frac{1}{2\mu}\right)^{\frac{r-1}{r-3}}\left(\frac{r-3}{r-1}\right)\left(\frac{8}{\beta(r-1)}\right)^{\frac{2}{r-3}}+\left(|\gamma|q2^{q-2}\right)^{\frac{r-1}{r-q}}\left(\frac{r-q}{r-1}\right)\left(\frac{2(q-1)}{\beta(r-1)}\right)^{\frac{q-1}{r-1}}\left[1+2^{\frac{q-1}{r-1}}\right]\right\}\tag{3.7}$$

或者若 $\left(\mu-\frac{1}{\beta}\right)\lambda_1+\alpha>\eta$ 且 $\beta\mu>1$，其中

$$\eta=\left\{\frac{\beta}{4}+\left(|\gamma|q2^{q-2}\right)^{\frac{r-1}{r-q}}\left(\frac{r-q}{r-1}\right)\left(\frac{2(q-1)}{\beta(r-1)}\right)^{\frac{q-1}{r-1}}\left[1+2^{\frac{q-1}{r-1}}\right]\right\},\tag{3.8}$$

则弱解是唯一的。此外，对于 $r=3$，若 $\beta\mu>1$ 且

$\alpha+\left(\mu-\frac{1}{\beta}\right)\lambda_1>\kappa$, *where* $\kappa=\left(|\gamma|q2^{q-2}\right)^{\frac{2}{3-q}}\left(\frac{3-q}{2}\right)\left(\frac{q-1}{\beta}\right)^{\frac{q-1}{2}}\left[1+2^{\frac{q-1}{2}}\right]$.

证明。**步骤（1）：**弱解的存在性：

（*i*）有限维柯西问题：设 $\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\ldots,\boldsymbol{w}_m,\ldots\}$ 是 $\mathbb{V}$中包含的 $\mathbb{H}$ 完备正交基；例如，可以取斯托克斯算子的特征函数。定义 $\mathbb{H}_m$ 为由 $\{\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_m\}$ 张成的 $\mathbb{H}$ 的 m维子空间。可得 $\mathbb{H}_m\subset\mathbb{H}_{m+1}\subset\mathbb{V}$。记 P_m 为从 $\mathbb{V}'$ 到 $\mathbb{H}_m$ 的正交投影，即 $\mathrm{P}_m\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^m\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{w}_i\rangle\boldsymbol{w}_i$. 由于每个元素 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{H}$ 都通过$\langle \boldsymbol{x}^*,\ \boldsymbol{v}\rangle=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v})$，自然地定义了一个泛函 $\boldsymbol{x}^*\in\mathbb{H}$，对所有 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{V}$，$\mathrm{P}_m$ 在 $\mathbb{H}$ 上的限制与标准正交

投影一致，即将 $\mathbb{H}$ 投影到 $\mathbb{H}_m$ 上，由 $\mathrm{P}_m\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^m(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{w}_i)\boldsymbol{w}_i$. 给出。特别地，$\mathrm{P}_m$ 作为从 $\mathbb{H}$ 到子空间 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_m\}$ 的正交投影。对于 $T\in(0,\ \infty)$ 以及每个 $m\in\mathbb{N}$，我们寻求如下形式的近似解：$\boldsymbol{v}_m(t)=\sum_{k=1}^m g_{km}(t)\boldsymbol{w}_k$，它满足与以下有限维常微分方程组（ODE）对应的初值问题：

$$\begin{cases}(\boldsymbol{v}_m',\boldsymbol{w}_j)+\mu(\nabla\boldsymbol{v}_m,\nabla\boldsymbol{w}_j)+(\mathrm{B}(\boldsymbol{v}_m),\boldsymbol{w}_j)+\alpha(\boldsymbol{v}_m,\boldsymbol{w}_j)+\beta(\mathcal{C}(\boldsymbol{v}_m),\boldsymbol{w}_j)\\ \quad+\gamma(\widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v}_m),\boldsymbol{w}_j)=\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{w}_j\rangle,\\ \boldsymbol{v}_m(0)=\boldsymbol{v}_0\in\mathrm{span}\{\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_m\},\end{cases}\tag{3.9}$$

对于 $1\le j\le m$，其中 $g_{km}\colon[0,T]\to\mathbb{R},\quad k\in\{1,\dots,m\},\quad m\in\mathbb{N}$ 是实值函数。注意到 $\mathrm{P}_m\boldsymbol{v}_m=\boldsymbol{v}_m$，因此，前述常微分方程组等价地可表示为

$$\boldsymbol{v}_m'+\mu\mathrm{A}\boldsymbol{v}_m+\mathrm{P}_m\mathrm{B}(\boldsymbol{v}_m)+\alpha\boldsymbol{v}_m+\beta\mathrm{P}_m\mathcal{C}(\boldsymbol{v}_m)+\beta\mathrm{P}_m\widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v}_m)=\mathrm{P}_m\boldsymbol{f}.$$

由于算子 $\mathrm{B}(\cdot)$ 和 $\mathcal{C}(\cdot)$ 是局部利普希茨连续的（见 (2.2) 和 (2.4)），(3.9) 是关于函数 $g_{km}(\cdot)$ 的非线性局部利普希茨微分方程组。令所有 k 均满足 $(g_{km}(0)\ \boldsymbol{w}_j)=(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{w}_j)$（对于 $1\le j\le m$），即可为该常微分方程组补充初始条件。Carath´eodory 存在定理保证，方程组 (3.9) 在某个区间 $t\in[0,t_m]$ 上存在唯一局部解$\boldsymbol{v}_m(t)$，且 $\boldsymbol{v}_m\in\mathrm{C}([0,t_m];\mathbb{H}_m)$。这证明了函数 $\boldsymbol{v}_m$ 的（局部）存在性。为证明该解实际上存在于整个区间 $[0,T]$ 上，我们对 $\boldsymbol{v}_m$ 推导一个一致能量估计。将方程 (3.9) 乘以$g_{jm}(t)$，并对 $1\le j\le m$ 求和，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\mathbb{H}}^2+\mu\|\nabla\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\mathbb{H}}^2+\alpha\|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\mathbb{H}}^2+\beta\|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^{r+1}\\&=-\kappa\|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{q+1}}^{q+1}+\langle\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}_m(t)\rangle\le|\kappa||\Omega|^{\frac{r-q}{r+1}}\|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^{q+1}+\|\boldsymbol{f}(t)\|_{\mathbb{V}'}\|\nabla\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\mathbb{H}}\\&\le\frac{\beta}{2}\|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^{r+1}+\left(\frac{r-q}{r+1}\right)\left(\frac{2(q+1)}{\beta(r+1)}\right)^{\frac{r-q}{q+1}}|\Omega|+\frac{\mu}{2}\|\nabla\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\mathbb{H}}^2+\frac{1}{2\mu}\|\boldsymbol{f}(t)\|_{\mathbb{V}'}^2,\end{aligned}\tag{3.10}$$

对几乎处处的 $t\in[0,T]$。从 0 积分到 t，得到

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\mathbb{H}}^2+\mu\int_0^t\|\boldsymbol{v}_m(s)\|_{\mathbb{V}}^2\mathrm{d}s+2\alpha\int_0^t\|\boldsymbol{v}_m(s)\|_{\mathbb{H}}^2\mathrm{d}s+\beta\int_0^t\|\boldsymbol{v}_m(s)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^{r+1}\mathrm{d}s\\&\le\|\boldsymbol{v}_0\|_{\mathbb{H}}^2+2\left(\frac{r-q}{r+1}\right)\left(\frac{2(q+1)}{\beta(r+1)}\right)^{\frac{r-q}{q+1}}|\Omega|t+\frac{1}{\mu}\int_0^t\|\boldsymbol{f}(s)\|_{\mathbb{V}'}^2\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{3.11}$$

对所有 $t\in[0,T]$。由于 $\boldsymbol{v}_0$对每个 m而言都是相同的初始向量，因此注意到右端是一个与 m无关的常数。因此，可以延拓存在性的最大区间，从而得出 $t_m=T$。利用（3.10）中的常数变易公式，得到

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\mathbb{H}}^2\le{}&e^{-(\lambda_1\mu+\alpha)t}\|\boldsymbol{v}_0\|_{\mathbb{H}}^2+\frac{2}{(\lambda_1\mu+\alpha)}\left(\frac{r-q}{r+1}\right)\left(\frac{2(q+1)}{\beta(r+1)}\right)^{\frac{r-q}{q+1}}|\Omega|\\&+\frac{1}{\mu}\int_0^t e^{-(\lambda_1\mu+\alpha)(t-s)}\|\boldsymbol{f}(s)\|_{\mathbb{V}'}^2\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{3.12}$$

对所有 $t\in[0,T]$.

第 (*ii*) 部分。有限维周期问题：接下来，我们考虑以下有限维周期问题：

$$\begin{cases}(\boldsymbol{v}_m',\boldsymbol{w}_j)+\mu(\nabla\boldsymbol{v}_m,\nabla\boldsymbol{w}_j)+(\mathrm{B}(\boldsymbol{v}_m),\boldsymbol{w}_j)+\alpha(\boldsymbol{v}_m,\boldsymbol{w}_j)+\beta(\mathcal{C}(\boldsymbol{v}_m),\boldsymbol{w}_j)\\ \quad+\gamma(\widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v}_m),\boldsymbol{w}_j)=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{w}_j),\\ \boldsymbol{v}_m(0)=\boldsymbol{v}_m(T),\end{cases}\tag{3.13}$$

对于 $1 \le j \le m$。由前面的讨论可知，与初始条件相对应的初值问题存在唯一解 $\boldsymbol{v}_m(\cdot)$

$$\boldsymbol{v}_m(0) = \boldsymbol{v}_0 \in \operatorname{span}\{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m\}.$$

现在定义一个映射

$$\mathcal{T}_m : \operatorname{span}\{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m\} \to \operatorname{span}\{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m\} \ \text{ as } \ \mathcal{T}_m(\boldsymbol{v}_0) = \boldsymbol{v}_m(T).$$

显然，映射 $\mathcal{T}_m$ 是从 $\operatorname{span}\{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m\}$ 到 $\operatorname{span}\{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m\}$ 的连续映射。现在定义 $\mathcal{B}_m(R) = \{\boldsymbol{v} \in \operatorname{span}\{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m\} : \ \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}} \le R\}$。我们的下一个目标是证明存在一个正数 R，它与 m 无关，使得 $\mathcal{T}_m(\mathcal{B}_m(R)) \subset \mathcal{B}_m(R)$。令 R 为

$$R^2 = \frac{\frac{1}{\mu}\int_0^T e^{-(\lambda_1\mu+\alpha)(T-t)}\|\boldsymbol{f}(t)\|_{\mathbb{V}'}^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{(\lambda_1\mu+\alpha)}\left(\frac{r-q}{r+1}\right)\left(\frac{2(q+1)}{\beta(r+1)}\right)^{\frac{r-q}{q+1}}|\Omega|}{1 - e^{-(\lambda_1\mu+\alpha)T}}.$$

注意到 R 与 m无关，且若 $\|\boldsymbol{v}_0\|_{\mathbb{H}} \le R$，由（3.12），可得

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{v}_m(T)\|_{\mathbb{H}}^2 &= \|\boldsymbol{v}_m(0)\|_{\mathbb{H}}^2 = \|\boldsymbol{v}_0\|_{\mathbb{H}}^2 \\
&\le e^{-(\lambda_1\mu+\alpha)T}\|\boldsymbol{v}_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1}{(\lambda_1\mu+\alpha)}\left(\frac{r-q}{r+1}\right)\left(\frac{2(q+1)}{\beta(r+1)}\right)^{\frac{r-q}{q+1}}|\Omega| \\
&\quad + \frac{1}{\mu}\int_0^T e^{-(\lambda_1\mu+\alpha)(T-t)}\|\boldsymbol{f}(t)\|_{\mathbb{V}'}^2 \mathrm{d}t \\
&\le e^{-(\lambda_1\mu+\alpha)T}R^2 + R^2(1 - e^{-(\lambda_1\mu+\alpha)T}) = R^2. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

因此，我们有 $\|\mathcal{T}_m\boldsymbol{v}_0\|_{\mathbb{H}} = \|\boldsymbol{v}_m(T)\|_{\mathbb{H}} \le R$，且 $\mathcal{T}_m(\mathcal{B}_m(R)) \subset \mathcal{B}_m(R)$。应用布劳威尔不动点定理（[6, 定理 3，第 436] 页），存在 $\boldsymbol{v}_0 \in \operatorname{span}\{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m\}$，使得 $\mathcal{T}_m(\boldsymbol{v}_0) = \boldsymbol{v}_0$。令 $\boldsymbol{v}_m(\cdot)$ 为问题（3.9）的解，且 $\boldsymbol{v}_m(0) = \boldsymbol{v}_0$。那么 $\boldsymbol{v}_m(\cdot)$ 是（3.13）的一个周期解。由（3.14），我们推知，对于所有 m，$\|\boldsymbol{v}_m(0)\|_{\mathbb{H}} \le R$。

（*iii*）部分。一致能量估计：采用与（3.11）类似的计算可得

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \mu\int_0^t \|\boldsymbol{v}_m(s)\|_{\mathbb{V}}^2 \mathrm{d}s + 2\alpha\int_0^t \|\boldsymbol{v}_m(s)\|_{\mathbb{H}}^2 \mathrm{d}s + \beta\int_0^t \|\boldsymbol{v}_m(s)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^{r+1} \mathrm{d}s \\
&\le \|\boldsymbol{v}_m(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + 2\left(\frac{r-q}{r+1}\right)\left(\frac{2(q+1)}{\beta(r+1)}\right)^{\frac{r-q}{q+1}}|\Omega|t + \frac{1}{\mu}\int_0^t \|\boldsymbol{f}(s)\|_{\mathbb{V}'}^2 \mathrm{d}s, \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

对所有 $t \in [0, T]$ 均成立。周期性条件 $\boldsymbol{v}_m(0) = \boldsymbol{v}_m(T)$ 意味着

$$\begin{aligned}
&\mu\int_0^T \|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\mathbb{V}}^2 \mathrm{d}t + 2\alpha\int_0^T \|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \mathrm{d}t + \beta\int_0^T \|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^{r+1} \mathrm{d}t \\
&\le 2\left(\frac{r-q}{r+1}\right)\left(\frac{2(q+1)}{\beta(r+1)}\right)^{\frac{r-q}{q+1}}|\Omega|T + \frac{1}{\mu}\int_0^T \|\boldsymbol{f}(t)\|_{\mathbb{V}'}^2 \mathrm{d}t =: \mathcal{K}. \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

将（3.9）与 $tg_{jm}(t)$ 相乘，并对 $1 \le j \le m$ 求和，然后将其从 0 积分到 t，可得

$$\begin{aligned}
&t\|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + 2\mu\int_0^t s\|\boldsymbol{v}_m(s)\|_{\mathbb{V}}^2 \mathrm{d}s + 2\alpha\int_0^t s\|\boldsymbol{v}_m(s)\|_{\mathbb{H}}^2 \mathrm{d}s + 2\beta\int_0^t s\|\boldsymbol{v}_m(s)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^{r+1} \mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \|\boldsymbol{v}_m(s)\|_{\mathbb{H}}^2 \mathrm{d}s + 2\int_0^t s\langle \boldsymbol{f}(s), \boldsymbol{v}_m(s)\rangle \mathrm{d}s - 2\kappa\int_0^t s\|\boldsymbol{v}_m(s)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{q+1}}^{q+1} \mathrm{d}s \\
&\le \frac{1}{\lambda_1}\int_0^T \|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\mathbb{V}}^2 \mathrm{d}t + \mu\int_0^t s\|\boldsymbol{v}_m(s)\|_{\mathbb{V}}^2 \mathrm{d}s + \frac{1}{\mu}\int_0^t s\|\boldsymbol{f}(s)\|_{\mathbb{V}'}^2 \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$+\beta\int_0^t s\|\boldsymbol{v}_m(s)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^{r+1}\mathrm{d}s+\left(\frac{r-q}{r+1}\right)\left(\frac{2(q+1)}{\beta(r+1)}\right)^{\frac{r-q}{q+1}}|\Omega|t^2. \tag{3.17}$$

因此，将（3.16）代入（3.17），我们得到

$$t\|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\mathbb{H}}^2\leq\left(\frac{1}{\mu\lambda_1}+T\right)\mathcal{K}.$$

对所有 $t\in[0,T]$。由于 $\boldsymbol{v}_m(0)=\boldsymbol{v}_m(T)$，由上述估计可得

$$\|\boldsymbol{v}_m(0)\|_{\mathbb{H}}^2=\|\boldsymbol{v}_m(T)\|_{\mathbb{H}}^2\leq\left(\frac{1}{\mu\lambda_1 T}+1\right)\mathcal{K}.$$

由 (3.15) 可直接得到

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\mathbb{H}}^2\leq\left(\frac{1}{\mu\lambda_1 T}+1\right)\mathcal{K}. \tag{3.18}$$

结合估计式 (3.16)，我们推得

$$\{\boldsymbol{v}_m\}_{m\in\mathbb{N}}\ \text{is uniformly bounded in}\ \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{H})\cap\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{V})\cap\mathrm{L}^{r+1}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}). \tag{3.19}$$

我们的下一个目标是对时间导数得到一致估计。注意，对于 $1\leq d\leq 4$，Sobolev嵌入给出 $\mathrm{D(A)}\hookrightarrow\mathbb{V}\cap\mathbb{L}^p$ 对所有 $1\leq p<\infty$成立。任取 $\boldsymbol{\phi}\in\mathrm{D(A)}$，满足$\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{D(A)}}\leq 1$，并记 $\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\phi}^1+\boldsymbol{\phi}^2$，其中 $\boldsymbol{\phi}^1\in$张成$\{\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_m\}$，且 $(\boldsymbol{\phi}^2,\boldsymbol{w}_k)=0$，对 $k=1,2,\ldots,m$均成立。由于 $\{\boldsymbol{w}_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset\mathrm{D(A)}$ 是斯托克斯算子的特征函数，它们在 $\mathbb{H}$ 中正交归一，并且 $\|\boldsymbol{\phi}^1\|_{\mathrm{D(A)}}\leq\|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathrm{D(A)}}\leq 1$。利用柯西-施瓦茨、H¨older、Ladyzhenskaya、Poincar´e 和索博列夫不等式，由 (3.13) 可推得

$$\begin{aligned}
|\langle\boldsymbol{v}_m',\boldsymbol{\phi}\rangle|&=|(\boldsymbol{v}_m',\boldsymbol{\phi})|=|(\boldsymbol{v}_m',\boldsymbol{\phi}^1)|\\
&=|\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{\phi}^1\rangle-[\mu(\nabla\boldsymbol{v}_m,\nabla\boldsymbol{\phi}^1)+(\mathrm{B}(\boldsymbol{v}_m),\boldsymbol{\phi}^1)+\alpha(\boldsymbol{v}_m,\boldsymbol{\phi}^1)+\beta(\mathcal{C}(\boldsymbol{v}_m),\boldsymbol{\phi}^1)\\
&\quad+\gamma(\widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v}_m),\boldsymbol{\phi}^1)]|\\
&\leq\|\boldsymbol{f}\|_{\mathbb{V}'}\|\boldsymbol{\phi}^1\|_{\mathbb{V}}+\mu\|\nabla\boldsymbol{v}_m\|_{\mathbb{H}}\|\nabla\boldsymbol{\phi}^1\|_{\mathbb{H}}+\|\boldsymbol{v}_m\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^4}^2\|\boldsymbol{\phi}^1\|_{\mathbb{V}}+\alpha\|\boldsymbol{v}_m\|_{\mathbb{H}}\|\boldsymbol{\phi}^1\|_{\mathbb{H}}\\
&\quad+\beta\|\boldsymbol{v}_m\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^r\|\boldsymbol{\phi}^1\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}+|\gamma|\|\boldsymbol{v}_m\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{q+1}}^q\|\boldsymbol{\phi}^1\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{q+1}}\\
&\leq\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|\boldsymbol{f}\|_{\mathbb{V}'}+\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_1}}\|\boldsymbol{v}_m\|_{\mathbb{V}}+\frac{\alpha}{\lambda_1}\|\boldsymbol{v}_m\|_{\mathbb{H}}+2^{\frac{d}{2}}\|\boldsymbol{v}_m\|_{\mathbb{H}}^{\frac{4-d}{2}}\|\boldsymbol{v}_m\|_{\mathbb{V}}^{\frac{d}{2}}\right.\\
&\quad\left.+C\beta\|\boldsymbol{v}_m\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^r+C|\gamma||\Omega|^{\frac{r-q}{r+1}}\|\boldsymbol{v}_m\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^q\right)\|\boldsymbol{\phi}^1\|_{\mathrm{D(A)}},
\end{aligned}\tag{3.20}$$

其中 λ_1 是狄利克雷拉普拉斯算子的第一个特征值。对于 $r\geq 1$，当 $d=2$ 且 $r\geq 3$，当 $d=3$ 时，我们立即得到

$$\begin{aligned}
\int_0^T\|\boldsymbol{v}_m'(t)\|_{(\mathrm{D(A)})'}^{\frac{r+1}{r}}\mathrm{d}t\leq&\left(\frac{T^{\frac{r-1}{2r}}}{\lambda_1^{\frac{r+1}{2r}}}\|\boldsymbol{f}\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{V}')}^{\frac{r+1}{r}}+\frac{\mu T^{\frac{r-1}{2r}}}{\lambda_1^{\frac{r+1}{2r}}}\|\boldsymbol{v}_m\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{V})}^{\frac{r+1}{r}}+\alpha^{\frac{r+1}{r}}T\|\boldsymbol{v}_m\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{H})}^{\frac{r+1}{r}}\right.\\
&+2^{\frac{d(r+1)}{2r}}T^{\frac{(4-d)r-d}{4r}}\|\boldsymbol{v}_m\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{H})}^{\frac{(4-d)(r+1)}{2r}}\|\boldsymbol{v}_m\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{V})}^{\frac{d(r+1)}{2r}}+C\beta^{\frac{r+1}{r}}\|\boldsymbol{v}_m\|_{\mathrm{L}^{r+1}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1})}^{r+1}\\
&\left.+C|\gamma|^{\frac{r+1}{r}}|\Omega|^{\frac{r-q}{r}}T^{\frac{r-q}{r}}\|\boldsymbol{v}_m\|_{\mathrm{L}^{r+1}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1})}^{\frac{(r+1)q}{r}}\right),
\end{aligned}$$

且右端有界且与 m (见式（3.16）和式（3.18）)。对于 $r\in[1,3]$当 $d=3$ 时，我们考虑

$$\int_0^T\|\boldsymbol{v}_m'(t)\|_{(\mathrm{D(A)})'}^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}t\leq\left(\frac{T^{\frac{1}{3}}}{\lambda_1^{\frac{2}{3}}}\|\boldsymbol{f}\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{V}')}^{\frac{4}{3}}+\frac{\mu T^{\frac{1}{3}}}{\lambda_1^{\frac{2}{3}}}\|\boldsymbol{v}_m\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{V})}^{\frac{4}{3}}+\alpha^{\frac{4}{3}}T\|\boldsymbol{v}_m\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{H})}^{\frac{4}{3}}\right.$$

$$+4\|\boldsymbol{v}_m\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{H})}^{\frac{2}{3}}\|\boldsymbol{v}_m\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{V})}+C\beta^{\frac{4}{3}}T^{\frac{3-r}{4r}}\|\boldsymbol{v}_m\|_{\mathrm{L}^{r+1}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1})}^{\frac{4r}{3}}$$
$$+C|\gamma|^{\frac{4}{3}}|\Omega|^{\frac{4(r-q)}{3(r+1)}}T^{\frac{3r+3-4q}{3(r+1)}}\|\boldsymbol{v}_m\|_{\mathrm{L}^{r+1}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1})}^{\frac{4q}{3}}\Big),$$

其中右端也有界且与 m （见式（3.16）和式（3.18））。

根据上述讨论，可以得出

$$\{\boldsymbol{v}_m'\}_{m\in\mathbb{N}}\ \text{ is uniformly bounded in }\ \mathrm{L}^p(0,T;(\mathrm{D}(\mathrm{A}))'),\tag{3.21}$$

其中

$$p=\begin{cases}\frac{r+1}{r}, & \text{for } r\geq 1, \text{ when } d=2 \text{ and } r\geq 3, \text{ when } d=3,\\ \frac{4}{3}, & \text{for } r\in[1,3], \text{ when } d=3.\end{cases}\tag{3.22}$$

第 *(iv)* 部分。收敛性：利用 (3.19)（参见 (3.16) 和 (3.18)）以及 (3.21)，应用巴拿赫–阿劳格鲁定理可得存在一个子序列，仍用同一符号表示，使得

$$\begin{cases}\boldsymbol{v}_m\xrightarrow{w^*}\boldsymbol{v}\ \text{ in }\ \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}),\\ \boldsymbol{v}_m\xrightarrow{w}\boldsymbol{v}\ \text{ in }\ \mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{V})\cap\mathrm{L}^{r+1}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}),\\ \boldsymbol{v}_m'\xrightarrow{w}\partial_t\boldsymbol{v}\ \text{ in }\ \mathrm{L}^p(0,T;(\mathrm{D}(\mathrm{A}))'),\end{cases}\tag{3.23}$$

其中 p 定义见 (3.22)。注意到

$$\int_0^T\|\mathcal{C}(\boldsymbol{v}_m(t))\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{r+1}{r}}}^{\frac{r+1}{r}}\mathrm{d}t\leq C\int_0^T\|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^{r+1}\mathrm{d}t\ \text{ and }\ \int_0^T\|\widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v}_m(t))\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{q+1}{q}}}^{\frac{q+1}{q}}\mathrm{d}t\leq C\int_0^T\|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{q+1}}^{q+1}\mathrm{d}t$$

均有界且不依赖于 m。因此，我们有如下收敛关系：

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{v}_m)\xrightarrow{w}\boldsymbol{\xi}\ \text{ in }\ \mathrm{L}^{\frac{r+1}{r}}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{r+1}{r}}),\quad\widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v}_m)\xrightarrow{w}\widetilde{\boldsymbol{\xi}}\ \text{ in }\ \mathrm{L}^{\frac{q+1}{q}}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{q+1}{q}}).\tag{3.24}$$

由于 $\mathrm{D}(\mathrm{A})\hookrightarrow\mathbb{V}\cap\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}\hookrightarrow\mathbb{H}\equiv\mathbb{H}'\hookrightarrow\mathbb{V}'+\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{r+1}{r}}\hookrightarrow(\mathrm{D}(\mathrm{A}))'$，且 $\mathrm{D}(\mathrm{A})\hookrightarrow\mathbb{H}$ 的嵌入是紧的，Aubin-Lions-Simon紧性定理（参见 [38, 定理 5]）保证存在 $\{\boldsymbol{v}_m\}$ 的一个子序列（仍记为 $\{\boldsymbol{v}_m\}$），使得

$$\boldsymbol{v}_m\to\boldsymbol{v}\ \text{ in }\ \mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H}).\tag{3.25}$$

当 $m\to\infty$ 时。此外，沿着一个更细的子序列（利用黎斯–费歇尔定理），我们有

$$\boldsymbol{v}_m(t,x)\to\boldsymbol{v}(t,x)\ \text{ for a.e. }\ (t,x)\in(0,T)\times\Omega.\tag{3.26}$$

现在取 $\boldsymbol{w}\in\mathrm{C}([0,T];\mathbb{H}_n)$，其中 $n<m$，并考虑

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^T b(\boldsymbol{v}_m(t),\boldsymbol{v}_m(t),\boldsymbol{w}(t))\mathrm{d}t-\int_0^T b(\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{w}(t))\mathrm{d}t\right|\\&\leq\left|\int_0^T b(\boldsymbol{v}_m(t)-\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{v}_m(t),\boldsymbol{w}(t))\mathrm{d}t\right|+\left|\int_0^T b(\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{v}_m(t)-\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{w}(t))\mathrm{d}t\right|\\&:=I_1+I_2.\end{aligned}$$

收敛性（3.23）意味着 $I_2\to 0$ 当 $m\to\infty$ 对所有 $n\in\mathbb{N}$。利用 H¨older 不等式、Ladyzh- neskaya 不等式和 Young 不等式，以及一致有界性（3.19）（见（3.16）和（3.18）），以及 $\boldsymbol{v}_m\to\boldsymbol{v}$ 在 $\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})$中的收敛性，可得

$$\begin{aligned}I_1&=\left|\int_0^T b(\boldsymbol{v}_m(t)-\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{v}_m(t),\boldsymbol{w}(t))\mathrm{d}t\right|\\&\leq\int_0^T\|\boldsymbol{v}_m(t)-\boldsymbol{v}(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^4}\|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\mathbb{V}}\|\boldsymbol{w}(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^4}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\leq 2^{\frac{d}{2}} \sup_{t\in[0,T]} \|\boldsymbol{w}(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^4} \int_0^T \|\boldsymbol{v}_m(t)-\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^{1-\frac{d}{4}} \|\boldsymbol{v}_m(t)-\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{V}}^{\frac{d}{4}} \|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\mathbb{V}} \mathrm{d}t$$
$$\leq C \sup_{t\in[0,T]} \|\boldsymbol{w}(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^4} \left(\int_0^T \|\boldsymbol{v}_m(t)-\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{d-4}{8}} \left(\int_0^T \left(\|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\mathbb{V}}^2+\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{V}}^2\right)\mathrm{d}t\right)^{\frac{4+d}{8}}$$
$$\to 0 \quad \text{as} \quad m\to\infty,$$

对所有 $n\in\mathbb{N}$。由于 $\boldsymbol{v}_m \xrightarrow{w} \boldsymbol{v}$ 属于 $\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{V})$，容易得到

$$I_1 = \left|\int_0^T b(\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{v}_m(t)-\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{w}(t))\mathrm{d}t\right| \to 0 \quad \text{as } m\to\infty,$$

由于 $\boldsymbol{v}\in \mathrm{L}^{\frac{8}{d}}(0,\ T;\widetilde{\mathbb{L}}^4)$，且对所有 $n\in\mathbb{N}$ 均成立。由于上述收敛与 n 无关，且 $\mathrm{C}([0,T];\mathbb{H}_n)\subset \mathrm{L}^2(0,\ T;\mathbb{V})$ 的嵌入是稠密的，因此通过稠密性论证可得收敛

$$\int_0^T b(\boldsymbol{v}_m(t),\boldsymbol{v}_m(t),\boldsymbol{\varphi}(t))\mathrm{d}t \to \int_0^T b(\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{\varphi}(t))\mathrm{d}t,$$

对所有 $\boldsymbol{\varphi}\in \mathrm{L}^2(0,\ T;\mathbb{V})$。由界（3.16）、收敛（3.26）和（[26, 引理 1。3]），我们得到

$$|\boldsymbol{v}_m|^{r-1}\boldsymbol{v}_m \xrightarrow{w} |\boldsymbol{v}|^{r-1}\boldsymbol{v} \quad \text{in} \quad \mathrm{L}^{\frac{r+1}{r}}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{r+1}{r}}). \tag{3.27}$$

我们需要证明 $\boldsymbol{\xi}=\mathcal{P}(|\boldsymbol{v}|^{r-1}\boldsymbol{v})=\mathcal{C}(\boldsymbol{v})$。对于所有 $\boldsymbol{\varphi}\in \mathrm{L}^{r+1}(0,\ T;\mathbb{H}_n)$，其中 $n<m$，我们考虑

$$\left|\int_0^T \langle \mathcal{C}(\boldsymbol{v}_m(t))-\mathcal{C}(\boldsymbol{v}(t)),\boldsymbol{\varphi}(t)\rangle \mathrm{d}t\right|$$
$$= \left|\int_0^T \langle |\boldsymbol{v}_m(t)|^{r-1}\boldsymbol{v}_m(t)-|\boldsymbol{v}(t)|^{r-1}\boldsymbol{v}(t),\mathcal{P}\boldsymbol{\varphi}(t)\rangle \mathrm{d}t\right| \to 0 \quad \text{as} \quad m\to\infty,$$

利用（3.27）中给出的收敛性，且对所有 $n\in\mathbb{N}$ 均成立。由于 $\mathrm{C}([0,T];\mathbb{H}_n)\subset \mathrm{L}^2(0,\ T;\mathrm{D(A)})$ 的嵌入是稠密的，因此通过稠密性论证可得收敛

$$\int_0^T \langle \mathcal{C}(\boldsymbol{v}_m(t)),\boldsymbol{\varphi}(t)\rangle \mathrm{d}t \to \int_0^T \langle \mathcal{C}(\boldsymbol{v}(t)),\boldsymbol{\varphi}(t)\rangle \mathrm{d}t \quad \text{as} \quad m\to\infty,$$

对所有 $\boldsymbol{\varphi}\in \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{D(A)})$。由于 $\mathrm{D(A)}\hookrightarrow \widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}$ 稠密，同样的结论对所有 $\boldsymbol{\varphi}\in \mathrm{L}^{r+1}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1})$ 也成立。根据弱极限的唯一性（见 (3.24)），我们得到 $\mathcal{C}(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{\xi}$。现在我们来证明

$$\widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v}_m)\to\widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v}) \quad \text{in} \quad \mathrm{L}^{\frac{q+1}{q}}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{q+1}{q}}) \quad \text{as} \quad m\to\infty. \tag{3.28}$$

为了确立上述收敛性，只需证明

$$|\boldsymbol{v}_m|^{q-1}\boldsymbol{v}_m \to |\boldsymbol{v}|^{q-1}\boldsymbol{v} \quad \text{in} \quad \mathrm{L}^{\frac{q+1}{q}}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{q+1}{q}}). \tag{3.29}$$

我们考虑

$$\int_0^T \||\boldsymbol{v}_m(t)|^{q-1}\boldsymbol{v}_m(t)-|\boldsymbol{v}(t)|^{q-1}\boldsymbol{v}(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{q+1}{q}}}^{\frac{q+1}{q}} \mathrm{d}t$$
$$\leq C\int_0^T \||\boldsymbol{v}_m(t)|^{q-1}(\boldsymbol{v}_m(t)-\boldsymbol{v}(t))\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{q+1}{q}}}^{\frac{q+1}{q}} \mathrm{d}t + C\int_0^T \|\left(|\boldsymbol{v}_m(t)|^{q-1}-|\boldsymbol{v}(t)|^{q-1}\right)\boldsymbol{v}(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{q+1}{q}}}^{\frac{q+1}{q}} \mathrm{d}t$$
$$:= C(I_3+I_4).$$

利用一致估计（3.19）（见（3.16）和（3.18））、H¨older 不等式和插值不等式，以及强收敛（3.25），我们得到

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^T \||\boldsymbol{v}_m(t)|^{q-1}(\boldsymbol{v}_m(t)-\boldsymbol{v}(t))\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{q+1}{q}}}^{\frac{q+1}{q}}\mathrm{d}t \\
&\le C\int_0^T \|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{q+1}}^{\frac{(q-1)(q+1)}{q}}\|\boldsymbol{v}_m(t)-\boldsymbol{v}(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{q+1}}^{\frac{q+1}{q}}\mathrm{d}t \\
&\le C\int_0^T \|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{q+1}}^{\frac{(q-1)(q+1)}{q}}\|\boldsymbol{v}_m(t)-\boldsymbol{v}(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^{\frac{(q-1)(r+1)}{q(r-1)}}\|\boldsymbol{v}_m(t)-\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^{\frac{2(r-q)}{q(r-1)}}\mathrm{d}t \\
&\le C\bigg(\int_0^T \|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{q+1}}^{q+1}\mathrm{d}t\bigg)^{\frac{q-1}{q}}\bigg(\int_0^T \|\boldsymbol{v}_m(t)-\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2\mathrm{d}t\bigg)^{\frac{r-q}{q(r-1)}} \\
&\quad\times\bigg(\int_0^T\Big(\|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^{r+1}+\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^{r+1}\Big)\mathrm{d}t\bigg)^{\frac{q-1}{q(r-1)}} \\
&\to 0 \quad \text{as} \quad m\to\infty.
\end{aligned}
$$

与上述类似的论证可得

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \int_0^T \|\big(|\boldsymbol{v}_m(t)|^{q-1}-|\boldsymbol{v}(t)|^{q-1}\big)\boldsymbol{v}(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{q+1}{q}}}^{\frac{q+1}{q}}\mathrm{d}t \\
&\le \int_0^T\bigg\|\int_0^1\frac{d}{d\theta}|\theta\boldsymbol{v}_m(t)+(1-\theta)\boldsymbol{v}(t)|^{q-1}\mathrm{d}\theta\bigg\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{q+1}{q-1}}}^{\frac{q+1}{q}}\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{q+1}}^{\frac{q+1}{q}}\mathrm{d}t \\
&\le (q-1)\int_0^T\bigg\|\int_0^1|\theta\boldsymbol{v}_m(t)+(1-\theta)\boldsymbol{v}(t)|^{q-2}|\boldsymbol{v}_m(t)-\boldsymbol{v}(t)|\mathrm{d}\theta\bigg\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{q+1}{q-1}}}^{\frac{q+1}{q}}\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{q+1}}^{\frac{q+1}{q}}\mathrm{d}t \\
&\le C\int_0^T\big(\|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{q+1}}+\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{q+1}}\big)^{\frac{(q-2)(q+1)}{q}}\|\boldsymbol{v}_m(t)-\boldsymbol{v}(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{q+1}}^{\frac{q+1}{q}}\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{q+1}}^{\frac{q+1}{q}}\mathrm{d}t \\
&\to 0 \quad \text{as} \quad m\to\infty.
\end{aligned}
$$

因此，收敛性（3.29）成立。又由于 $\mathcal{P}:\ \widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{q+1}{q}}\to\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{q+1}{q}}$是一个有界线性算子，~ ~我们立即得到（3.28）。根据弱极限的唯一性，我们也有 $\boldsymbol{\xi}=\mathcal{C}(\boldsymbol{v})$。由于强收敛蕴含范数收敛，由（3.29）可推出

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\mathbb{L}^{q+1}}^{q+1}\mathrm{d}t &= \||\boldsymbol{v}_m(t)|^{q-1}\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\mathrm{L}^{\frac{q+1}{q}}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{q+1}{q}})}^{\frac{q+1}{q}} \\
&\to \||\boldsymbol{v}(t)|^{q-1}\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathrm{L}^{\frac{q+1}{q}}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{q+1}{q}})}^{\frac{q+1}{q}}=\int_0^T\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{q+1}}^{q+1}\mathrm{d}t \quad \text{as} \quad m\to\infty. \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

（v）弱解与能量不等式：在 (3.13) 中取极限 $m\to\infty$ 可保证 $\{\boldsymbol{v}_m\}$收敛到周期问题 (3.1) 的一个弱解 $\boldsymbol{v}$，即满足 (3.3)。现在我们来确定时间导数 $\partial_t\boldsymbol{v}$的正则性。对于 $r\in[3,\infty)$，我们考虑 $\boldsymbol{\phi}\in\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{V})\cap\mathrm{L}^{r+1}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1})$，并采用与 (3.20) 类似的计算（但三线性项除外，见 (2.3)），可得

$$
\begin{aligned}
|\langle\partial_t\boldsymbol{v},\boldsymbol{\phi}\rangle| &\le \|\boldsymbol{f}\|_{\mathbb{V}'}\|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathbb{V}}+\mu\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}}\|\nabla\boldsymbol{\phi}^1\|_{\mathbb{H}}+\|\boldsymbol{v}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}\|\boldsymbol{v}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{2(r+1)}{r-1}}}\|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathbb{V}}+\alpha\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}}\|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathbb{H}} \\
&\quad+\beta\|\boldsymbol{v}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^{r}\|\boldsymbol{\phi}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}+|\gamma|\|\boldsymbol{v}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{q+1}}^{q}\|\boldsymbol{\phi}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{q+1}} \\
&\le\bigg(\|\boldsymbol{f}\|_{\mathbb{V}'}+\mu\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{V}}+\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda_1}}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}}+\|\boldsymbol{v}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^{\frac{r+1}{r-1}}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}}^{\frac{r-3}{r-1}}\bigg)\|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathbb{V}} \\
&\quad+\Big(\beta\|\boldsymbol{v}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^{r}+|\gamma||\Omega|^{\frac{r-q}{r+1}}\|\boldsymbol{v}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^{q}\Big)\|\boldsymbol{\phi}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}.
\end{aligned}
$$

因此，我们推得

$$\begin{aligned}&\int_0^T |\langle \partial_t \boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{\phi}(t)\rangle| \mathrm{d}t\\ &\leq \left(\|\boldsymbol{f}\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{V}')} + \mu \|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{V})} + \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda_1}} \|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{H})} + T^{\frac{r-3}{2(r-1)}} \|\boldsymbol{v}\|^{\frac{r-3}{r-1}}_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{H})} \|\boldsymbol{v}\|^{\frac{r+1}{r-1}}_{\mathrm{L}^{r+1}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1})} \right)\\ &\quad \times \|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{V})} + \left(\beta \|\boldsymbol{v}\|^r_{\mathrm{L}^{r+1}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1})} + |\gamma| |\Omega|^{\frac{r-q}{r+1}} T^{\frac{r-q}{r+1}} \|\boldsymbol{v}\|^q_{\mathrm{L}^{r+1}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1})} \right) \|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathrm{L}^{r+1}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1})},\end{aligned}$$

对于所有 $\boldsymbol{\phi} \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{V}) \cap \mathrm{L}^{r+1}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1})$，因此，我们得到 $\partial_t \boldsymbol{v} \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{V}') + \mathrm{L}^{\frac{r+1}{r}}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{r+1}{r}})$。对于 $r \in [1,3)$，我们考虑 $\boldsymbol{\phi} \in \mathrm{L}^{\frac{4}{4-d}}(0,T;\mathbb{V}) \cap \mathrm{L}^{r+1}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1})$，并采用与 (3.20) 类似的计算可得

$$\begin{aligned}|\langle \partial_t \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\phi}\rangle| &\leq \left(\|\boldsymbol{f}\|_{\mathbb{V}'} + \mu \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{V}} + \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda_1}} \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}} + 2^{\frac{d}{2}} \|\boldsymbol{v}\|^{\frac{4-d}{2}}_{\mathbb{H}} \|\boldsymbol{v}\|^{\frac{d}{2}}_{\mathbb{V}} \right) \|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathbb{V}}\\ &\quad + \left(\beta \|\boldsymbol{v}\|^r_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}} + |\gamma| |\Omega|^{\frac{r-q}{r+1}} \|\boldsymbol{v}\|^q_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}} \right) \|\boldsymbol{\phi}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}.\end{aligned}$$

因此，显然

$$\begin{aligned}&\int_0^T |\langle \partial_t \boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{\phi}(t)\rangle| \mathrm{d}t\\ &\leq \left(\|\boldsymbol{f}\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{V}')} + \mu \|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{V})} + \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda_1}} \|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{H})} \right) \|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{V})}\\ &\quad + 2^{\frac{d}{2}} \|\boldsymbol{v}\|^{\frac{4-d}{2}}_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{H})} \|\boldsymbol{v}\|^{\frac{d}{2}}_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{V})} \|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathrm{L}^{\frac{4}{4-d}}(0,T;\mathbb{V})}\\ &\quad + \left(\beta \|\boldsymbol{v}\|^r_{\mathrm{L}^{r+1}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1})} + |\gamma| |\Omega|^{\frac{r-q}{r+1}} T^{\frac{r-q}{r+1}} \|\boldsymbol{v}\|^q_{\mathrm{L}^{r+1}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1})} \right) \|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathrm{L}^{r+1}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1})},\end{aligned}$$

对于所有 $\boldsymbol{\phi} \in \mathrm{L}^{\frac{4}{4-d}}(0,T;\mathbb{V}) \cap \mathrm{L}^{r+1}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1})$。因此，我们得到 $\partial_t \boldsymbol{v} \in \mathrm{L}^{\frac{4}{d}}(0,T;\mathbb{V}') + \mathrm{L}^{\frac{r+1}{r}}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{r+1}{r}})$。

正则性 $\boldsymbol{v} \in \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}) \cap \mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{V}) \cap \mathrm{L}^{r+1}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1})$) 和 $\partial_t \boldsymbol{v} \in \mathrm{L}^p(0,T;\mathbb{V}') + \mathrm{L}^{\frac{r+1}{r}}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{r+1}{r}}) \hookrightarrow \mathrm{L}^{\min\{p,\frac{r+1}{r}\}}(0,T;\mathbb{V}' + \widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{r+1}{r}})$，其中 p 在 (3.2) 中定义，推出 $\boldsymbol{v} \in \mathrm{W}^{1,\min\{p,\frac{r+1}{r}\}}(0,T;\mathbb{V}' + \widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{r+1}{r}}) \hookrightarrow \mathrm{C}([0,T];\mathbb{V}' + \widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{r+1}{r}})$（[6,定理 2，第 302] 页）。由于 $\mathbb{H}$ 是自反的，且嵌入 $\mathbb{H} \hookrightarrow \mathbb{V}' + \widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{r+1}{r}}$ 是连续的，因此，应用 [27, 引理 8.1，第 3 章，第 275] 页（另见 [5,命题 1.7.1，第 1 章，第 61] 页），可得 $\boldsymbol{v} \in \mathrm{C}_w([0,T];\mathbb{H})$。因此，周期条件满足，具体而言

$$(\boldsymbol{v}(T), \boldsymbol{\varphi}) = (\boldsymbol{v}(0), \boldsymbol{\varphi}) \text{ for all } \boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{H}, \text{ that is, } (\boldsymbol{v}(T) - \boldsymbol{v}(0), \boldsymbol{\varphi}) = 0 \text{ for all } \boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{H}.$$

取 $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{v}(T) - \boldsymbol{v}(0)$，可得

$$\boldsymbol{v}(T) = \boldsymbol{v}(0) \text{ in } \mathbb{H}.$$

利用范数的弱下半连续性以及一致有界性（3.15）和（3.18），进一步可得

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{v}(t)\|^2_{\mathbb{H}} + \mu \int_0^t \|\boldsymbol{v}(s)\|^2_{\mathbb{V}} \mathrm{d}s + \beta \int_0^t \|\boldsymbol{v}(s)\|^{r+1}_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}} \mathrm{d}s\\ &\leq \liminf_{m\to\infty} \left[\|\boldsymbol{v}_m(t)\|^2_{\mathbb{H}} + \mu \int_0^t \|\boldsymbol{v}_m(s)\|^2_{\mathbb{V}} \mathrm{d}s + \beta \int_0^t \|\boldsymbol{v}_m(s)\|^{r+1}_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}} \mathrm{d}s \right] \leq \left(\frac{1}{\mu \lambda_1 T} + 2 \right) \mathcal{K},\end{aligned}$$

对所有 $t \in [0,T]$。由（3.10）可推知

$$\|\boldsymbol{v}_m(t)\|^2_{\mathbb{H}} + 2\mu \int_0^t \|\boldsymbol{v}_m(s)\|^2_{\mathbb{V}} \mathrm{d}s + 2\alpha \int_0^t \|\boldsymbol{v}_m(s)\|^2_{\mathbb{H}} \mathrm{d}s + 2\beta \int_0^t \|\boldsymbol{v}_m(s)\|^{r+1}_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}} \mathrm{d}s$$

$$+2\gamma\int_0^t\|\boldsymbol{v}_m(s)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{q+1}}^{q+1}\mathrm{d}s$$
$$=\|\boldsymbol{v}_m(0)\|_{\mathbb{H}}^2+2\int_0^t\langle\boldsymbol{f}(s),\boldsymbol{v}_m(s)\rangle\mathrm{d}s, \tag{3.31}$$

对所有 $t\in[0,T]$。对于所有 ***Leray-Hopf*** 弱解 的存在性均成立 $r\in[1,\infty)$ 和$d\in\{2,3\}$。取 $t=T$，利用 $\boldsymbol{v}_m(0)=\boldsymbol{v}_m(T)$，然后对（3.31）两边取下极限，可得

$$2\mu\int_0^T\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{V}}^2\mathrm{d}t+2\alpha\int_0^T\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2\mathrm{d}t+2\beta\int_0^T\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^{r+1}\mathrm{d}t$$
$$\leq\liminf_{m\to\infty}\left\{2\mu\int_0^T\|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\mathbb{V}}^2\mathrm{d}t+2\alpha\int_0^T\|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\mathbb{H}}^2\mathrm{d}t+2\beta\int_0^T\|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^{r+1}\mathrm{d}t\right\}$$

$$=\liminf_{m\to\infty}\left\{2\int_0^T\langle\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}_m(t)\rangle\mathrm{d}t-2\gamma\int_0^t\|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{q+1}}^{q+1}\mathrm{d}t\right\}$$
$$=2\int_0^T\langle\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}(t)\rangle\mathrm{d}t-2\gamma\int_0^T\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{q+1}}^{q+1}\mathrm{d}t, \tag{3.32}$$

其中我们也用到了强收敛（3.30）。因此，能量不等式由（3.32）得出。此外，估计（3.5）也同样成立。 (3.4)

步骤（2）： 能量等式：现在考虑情形 $r\in[1,\infty)$ 当 $d=2$ 且 $r\in[3,\infty)$ 当$d=3$。我们证明 $\boldsymbol{v}(\cdot)$ 满足能量等式。应当强调，这一等式并不能直接得到。为了推导它，可以采用引入于 [8] 的逼近方法。在该工作中，作者构造了一系列对 $\boldsymbol{v}(\cdot)$ 在有界区域上的逼近，其中逼近函数一致有界，并同时在 Sobolev 空间和 Lebesgue空间中收敛。利用 [8, 11, 15], 中的技巧，我们推断解 $\boldsymbol{v}\in\mathrm{C}([0,T];\ \mathbb{H})$ 且满足能量等式

$$\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2+2\mu\int_0^t\|\boldsymbol{v}(s)\|_{\mathbb{V}}^2\mathrm{d}s+2\alpha\int_0^t\|\boldsymbol{v}(s)\|_{\mathbb{H}}^2\mathrm{d}s+2\beta\int_0^t\|\boldsymbol{v}(s)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{r+1}}^{r+1}\mathrm{d}s+2\gamma\int_0^t\|\boldsymbol{v}(s)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{q+1}}^{q+1}\mathrm{d}s$$
$$=\|\boldsymbol{v}(0)\|_{\mathbb{H}}^2+2\int_0^t\langle\boldsymbol{f}(s),\boldsymbol{v}(s)\rangle\mathrm{d}s,$$

对所有 $t\in[0,T]$ 均成立。对于 $r\in[3,\infty)$，由于正则性 $\boldsymbol{v}\in\mathrm{L}^\infty(0,T;\ \mathbb{H})\cap\mathrm{L}^2(0,T;\ \mathbb{V})\cap\mathrm{L}^{r+1}(0,T;\ \widetilde{\mathbb{L}}^{r+1})$ 以及 $\partial_t\boldsymbol{v}\in\mathrm{L}^2(0,T;\ \mathbb{V}')+\mathrm{L}^{\frac{r+1}{r}}(0,T;\ \widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{r+1}{r}})$，由定理 2.1 可得能量等式。当 $d=2$ 成立时， $r\in[1,3)$ 的情形显然（定理 4.1），因为由 Ladyzhenskaya不等式可知 $\mathrm{L}^\infty(0,T;\ \mathbb{H})\cap\mathrm{L}^2(0,T;\ \mathbb{V})\hookrightarrow\mathrm{L}^4(0,T;\ \widetilde{\mathbb{L}}^4)$。步骤（3）：唯一性。现在我们来证明弱解的唯一性。假设 $\boldsymbol{v}_1(\cdot)$ 和 $\boldsymbol{v}_2(\cdot)$ 是问题（3.1）的两个弱解。那么， $\boldsymbol{v}(\cdot)=\boldsymbol{v}_1(\cdot)-\boldsymbol{v}_2(\cdot)$ 满足：

$$\begin{cases}\partial_t\boldsymbol{v}(t)+\mu\mathrm{A}\boldsymbol{v}(t)+(\mathrm{B}(\boldsymbol{v}_1(t))-\mathrm{B}(\boldsymbol{v}_2(t)))+\alpha\boldsymbol{v}(t)+\beta(\mathcal{C}(\boldsymbol{v}_1(t))-\mathcal{C}(\boldsymbol{v}_2(t)))\\ \qquad+\gamma(\widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v}_1(t))-\widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v}_2(t)))=\boldsymbol{0},\quad\text{in}\quad\mathbb{V}'+\widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{r+1}{r}},\\ \qquad\boldsymbol{v}(0)=\boldsymbol{v}(T),\end{cases} \tag{3.33}$$

对几乎处处的 $t\in[0,T]$，其中 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\in\mathrm{L}^\infty(0,T;\ \mathbb{H})\cap\mathrm{L}^2(0,T;\ \mathbb{V})\cap\mathrm{L}^{r+1}(0,T;\ \widetilde{\mathbb{L}}^{r+1})$，且 $\partial_t\boldsymbol{v}_1$, $\partial_t\boldsymbol{v}_2\in\mathrm{L}^2(0,T;\ \mathbb{V}')+\mathrm{L}^{\frac{r+1}{r}}(0,T;\ \widetilde{\mathbb{L}}^{\frac{r+1}{r}})$。利用映射 $[0,T]\ni t\mapsto\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2\in\mathbb{R}$ 的绝对连续性，并将 $\boldsymbol{v}(\cdot)$与 (3.33) 中的第一个方程取内积，我们得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2+\mu\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{V}}^2+\alpha\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2+\beta\langle\mathcal{C}(\boldsymbol{v}_1(t))-\mathcal{C}(\boldsymbol{v}_2(t)),\boldsymbol{v}(t)\rangle$$

$$= -\gamma\langle\widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v}_1(t)) - \widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v}_2(t)), \boldsymbol{v}(t)\rangle - \langle \mathrm{B}(\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{v}_2(t)), \boldsymbol{v}(t)\rangle, \tag{3.34}$$

对于几乎处处的 $t \in [0,T$], 这里我们用到了以下事实： $\langle \mathrm{B}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v})\ \boldsymbol{v}\rangle = 0$。估计式 (2.5) 给出

$$\beta\langle \mathcal{C}(\boldsymbol{v}_1) - \mathcal{C}(\boldsymbol{v}_2), \boldsymbol{v}\rangle \leq \frac{\beta}{2}\||\boldsymbol{v}_1|^{\frac{r-1}{2}}\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{\beta}{2}\||\boldsymbol{v}_2|^{\frac{r-1}{2}}\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}}^2. \tag{3.35}$$

令我们固定 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{u}) = |\boldsymbol{u}|^{q-1}\boldsymbol{u}$。于是，我们考虑

$$\begin{aligned}
&-\gamma\langle\widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v}_1) - \widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v}_2), \boldsymbol{v}\rangle \\
&= -\gamma\langle|\boldsymbol{v}_1|^{q-1}\boldsymbol{v}_1 - |\boldsymbol{v}_2|^{q-1}\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}\rangle = \left\langle \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\boldsymbol{\psi}(\theta\boldsymbol{v}_1 + (1-\theta)\boldsymbol{v}_2)\mathrm{d}\theta, \boldsymbol{v}\right\rangle \\
&= -\gamma\left\langle \int_0^1 \nabla\boldsymbol{\psi}(\theta\boldsymbol{v}_1 + (1-\theta)\boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}\theta, \boldsymbol{v}\right\rangle \\
&= -\gamma\left\langle \int_0^1 |\theta\boldsymbol{v}_1 + (1-\theta)\boldsymbol{v}_2|^{q-1}\boldsymbol{v}\mathrm{d}\theta, \boldsymbol{v}\right\rangle \\
&\quad + (q-1)\left\langle \int_0^1 |\theta\boldsymbol{v}_1 + (1-\theta)\boldsymbol{v}_2|^{q-3}((\theta\boldsymbol{v}_1 + (1-\theta)\boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{v})(\theta\boldsymbol{v}_1 + (1-\theta)\boldsymbol{v}_2)\mathrm{d}\theta, \boldsymbol{v}\right\rangle \\
&\leq |\gamma|q\left\langle(|\boldsymbol{v}_1| + |\boldsymbol{v}_2|)^{q-1}|\boldsymbol{v}|, |\boldsymbol{v}|\right\rangle \leq |\gamma|q2^{q-2}\left\langle\left(|\boldsymbol{v}_1|^{q-1} + |\boldsymbol{v}_2|^{q-1}\right)|\boldsymbol{v}|, |\boldsymbol{v}|\right\rangle.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

利用 H¨older 不等式和 Young 不等式，我们估计 $|\gamma|q2^{q-2}\langle|\boldsymbol{v}_1|^{q-1}|\boldsymbol{v}|,\ |\boldsymbol{v}|\rangle$ 如下

$$\begin{aligned}
|\gamma|q2^{q-2}\left\langle|\boldsymbol{v}_1|^{q-1}|\boldsymbol{v}|, |\boldsymbol{v}|\right\rangle &= |\gamma|q2^{q-2}\int_\Omega |\boldsymbol{v}_1(x)|^{q-1}|\boldsymbol{v}(x)|^{\frac{2(q-1)}{(r-1)}}|\boldsymbol{v}(x)|^{\frac{2(r-q)}{(r-1)}}\mathrm{d}x \\
&\leq |\gamma|q2^{q-2}\left(\int_\Omega |\boldsymbol{v}_1(x)|^{r-1}|\boldsymbol{v}(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{q-1}{r-1}}\left(\int_\Omega |\boldsymbol{v}(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{r-q}{r-1}} \\
&\leq \frac{\beta}{2}\||\boldsymbol{v}_1|^{\frac{r-1}{2}}\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}}^2 + \left(|\gamma|q2^{q-2}\right)^{\frac{r-1}{r-q}}\left(\frac{r-q}{r-1}\right)\left(\frac{2(q-1)}{\beta(r-1)}\right)^{\frac{q-1}{r-1}}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}}^2.
\end{aligned}$$

类似的计算可得

$$|\gamma|q2^{q-2}\left\langle|\boldsymbol{v}_1|^{q-1}|\boldsymbol{v}|, |\boldsymbol{v}|\right\rangle \leq \frac{\beta}{4}\||\boldsymbol{v}_2|^{\frac{r-1}{2}}\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}}^2 + \left(|\gamma|q2^{q-2}\right)^{\frac{r-1}{r-q}}\left(\frac{r-q}{r-1}\right)\left(\frac{4(q-1)}{\beta(r-1)}\right)^{\frac{q-1}{r-1}}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}}^2.$$

因此，我们由（3.36）推得

$$\begin{aligned}
-\gamma\langle\widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v}_1) - \widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v}_2), \boldsymbol{v}\rangle &\leq \frac{\beta}{2}\||\boldsymbol{v}_1|^{\frac{r-1}{2}}\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{\beta}{4}\||\boldsymbol{v}_2|^{\frac{r-1}{2}}\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}}^2 \\
&\quad + \left(|\gamma|q2^{q-2}\right)^{\frac{r-1}{r-q}}\left(\frac{r-q}{r-1}\right)\left(\frac{2(q-1)}{\beta(r-1)}\right)^{\frac{q-1}{r-1}}\left[1 + 2^{\frac{q-1}{r-1}}\right]\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}}^2.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

对于 $r > 3$，我们使用 Hölder 不等式和 Young 不等式估计三线性型 $-\langle \mathrm{B}(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_2)\ \boldsymbol{v}\rangle$，得到

$$-\langle \mathrm{B}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_2), \boldsymbol{v}\rangle = \langle \mathrm{B}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}_2\rangle \leq \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{V}}\||\boldsymbol{v}_2|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}} \leq \frac{\mu}{2}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{V}}^2 + \frac{1}{2\mu}\|\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}}^2.$$

再次利用 H¨older 不等式和 Young 不等式，我们计算得 $\frac{1}{2\mu}\|\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}}^2$ 为

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\mu}\||\boldsymbol{v}_2|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}}^2 &= \frac{1}{2\mu}\int_\Omega |\boldsymbol{v}_2(x)|^2|\boldsymbol{v}(x)|^{\frac{4}{r-1}}|\boldsymbol{v}(x)|^{\frac{2(r-3)}{r-1}}\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{2\mu}\left(\int_\Omega |\boldsymbol{v}_2(x)|^{r-1}|\boldsymbol{v}(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{r-1}}\left(\int_\Omega |\boldsymbol{v}(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{2(r-3)}{r-1}}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\beta}{4}\||\boldsymbol{v}_2|^{\frac{r-1}{2}}\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}}^2+\left(\frac{1}{2\mu}\right)^{\frac{r-1}{r-3}}\left(\frac{r-3}{r-1}\right)\left(\frac{8}{\beta(r-1)}\right)^{\frac{2}{r-3}}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}}^2.$$

因此，我们得到如下估计

$$-\langle \mathrm{B}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_2),\boldsymbol{v}\rangle \leq \frac{\mu}{2}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{V}}^2+\frac{\beta}{4}\||\boldsymbol{v}_2|^{\frac{r-1}{2}}\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}}^2+\left(\frac{1}{2\mu}\right)^{\frac{r-1}{r-3}}\left(\frac{r-3}{r-1}\right)\left(\frac{8}{\beta(r-1)}\right)^{\frac{2}{r-3}}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}}^2. \tag{3.38}$$

将（3.35）、（3.37）、（3.38）用于（3.34），我们推出

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2+\frac{\mu}{2}\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{V}}^2+\alpha\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2\\&\leq\Bigg\{\left(\frac{1}{2\mu}\right)^{\frac{r-1}{r-3}}\left(\frac{r-3}{r-1}\right)\left(\frac{8}{\beta(r-1)}\right)^{\frac{2}{r-3}}\\&\quad+\left(|\gamma|q2^{q-2}\right)^{\frac{r-1}{r-q}}\left(\frac{r-q}{r-1}\right)\left(\frac{2(q-1)}{\beta(r-1)}\right)^{\frac{q-1}{r-1}}\left[1+2^{\frac{q-1}{r-1}}\right]\Bigg\}\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2,\end{aligned} \tag{3.39}$$

对几乎处处的 $t\in[0,T]$。由上述表达式，借助庞加莱´e不等式，立即可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2+(\mu\lambda_1+2\alpha-\zeta)\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2\leq 0 \tag{3.40}$$

where $\zeta=2\Bigg\{\left(\frac{1}{2\mu}\right)^{\frac{r-1}{r-3}}\left(\frac{r-3}{r-1}\right)\left(\frac{8}{\beta(r-1)}\right)^{\frac{2}{r-3}}+\left(|\gamma|q2^{q-2}\right)^{\frac{r-1}{r-q}}\left(\frac{r-q}{r-1}\right)\left(\frac{2(q-1)}{\beta(r-1)}\right)^{\frac{q-1}{r-1}}\left[1+2^{\frac{q-1}{r-1}}\right]\Bigg\}$.

对于 $\mu\lambda_1+2\alpha>\zeta$，由（3.40），我们得到

$$\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2\leq\|\boldsymbol{v}(0)\|_{\mathbb{H}}^2e^{-Lt},\quad\text{where}\quad L=(\mu\lambda_1+2\alpha-\zeta)>0. \tag{3.41}$$

对所有 $t\in[0,T]$。取 $t=T$于（3.41），并利用事实 $\boldsymbol{v}(T)=\boldsymbol{v}(0)$，我们得到 $\|\boldsymbol{v}(0)\|_{\mathbb{H}}=0$。将此事实用于（3.41），我们得到 $\boldsymbol{v}_1(t,x)=\boldsymbol{v}_2(t,x)$，对于 $t\in[0,T]$，对几乎处处 $x\in\Omega$.

对于 $r>3$，也可以按以下方式估计 $\langle \mathrm{B}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v}_2\rangle$：

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{B}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v}_2\rangle&\leq\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{V}}\||\boldsymbol{v}_2|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}}\leq\frac{1}{\beta}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{V}}^2+\frac{\beta}{4}\|\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}}^2\\&=\frac{1}{\beta}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{V}}^2+\frac{\beta}{4}\int_\Omega|\boldsymbol{v}(x)|^2\left(|\boldsymbol{v}_2(x)|^{r-1}+1\right)\frac{|\boldsymbol{v}_2(x)|^2}{|\boldsymbol{v}_2(x)|^{r-1}+1}\mathrm{d}x\\&\leq\frac{1}{\beta}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{V}}^2+\frac{\beta}{4}\int_\Omega|\boldsymbol{v}(x)|^2|\boldsymbol{v}_2(x)|^{r-1}\mathrm{d}x+\frac{\beta}{4}\int_\Omega|\boldsymbol{v}(x)|^2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这里我们用到了以下事实：$\left\|\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{|\boldsymbol{v}|^{r-1}+1}\right\|_{\mathbb{L}^\infty}<1$，对于 $r\geq 3$。用这个估计代替（3.38），对于 $\beta\mu>1$，由（3.39）可推出，对所有 $t\in[0,T]$ 均有

$$\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2\leq\|\boldsymbol{v}(0)\|_{\mathbb{H}}^2e^{-L_1t},\quad\text{where } L_1=2\Bigg\{\left(\mu-\frac{1}{\beta}\right)\lambda_1+\alpha-\eta\Bigg\}>0,$$

以及 $\eta=\Bigg\{\frac{\beta}{4}+\left(|\gamma|q2^{q-2}\right)^{\frac{r-1}{r-q}}\left(\frac{r-q}{r-1}\right)\left(\frac{2}{\beta(q-1)}\right)^{\frac{q-1}{r-1}}\left[1+2^{\frac{q-1}{r-1}}\right]\Bigg\}$。在这种情况下，取 $\left(\mu-\frac{1}{\beta}\right)\lambda_1+\alpha>\eta$ 和 $\beta\mu>1$ 也可得到唯一性。

对于 $r=3$ 和 $\beta\mu>1$，利用（2.5）和（3.37），可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2+\mu\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{V}}^2+\alpha\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2+\frac{\beta}{2}\||\boldsymbol{v}_1(t)|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2+\frac{\beta}{2}\||\boldsymbol{v}_2(t)|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2\\&\leq-\gamma\langle\widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v}_1(t))-\widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v}_2(t)),\boldsymbol{v}(t)\rangle+\langle \mathrm{B}(\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{v}(t)),\boldsymbol{v}_2(t)\rangle\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\beta}{2}\||\boldsymbol{v}_1(t)|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2+\frac{\beta}{4}\||\boldsymbol{v}_2(t)|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2+\kappa\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2+\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{V}}\||\boldsymbol{v}_2(t)|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}$$
$$\leq \frac{\beta}{2}\||\boldsymbol{v}_1(t)|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2+\frac{\beta}{2}\||\boldsymbol{v}_1(t)|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2+\kappa\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2+\frac{1}{\beta}\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{V}}^2,$$

对于几乎处处的 $t\in[0,T]$，其中 $\kappa=\left(|\gamma|q2^{q-2}\right)^{\frac{2}{3-q}}\left(\frac{3-q}{2}\right)\left(\frac{q-1}{\beta}\right)^{\frac{q-1}{2}}\left[1+2^{\frac{q-1}{2}}\right]$。因此，对于 $\beta\mu>1$ 和 $\alpha+\left(\mu-\frac{1}{\beta}\right)\lambda_1>\kappa$，可得

$$\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2\leq\|\boldsymbol{v}(0)\|_{\mathbb{H}}^2e^{-2\widetilde{L}t},\quad\text{for all}\quad t\in[0,T],\quad\text{where}\quad\widetilde{L}=\alpha+\left(\mu-\frac{1}{\beta}\right)\lambda_1-\kappa,$$

弱解的唯一性随之得证。 □

注3.5。 对于 $\gamma=0$ 在 (3.1)，即对于具有 $r>3$ 的 *CBF*方程，在条件 $\mu\lambda_1+2\alpha>2\left(\frac{1}{2\mu}\right)^{\frac{r-1}{r-3}}\left(\frac{r-3}{r-1}\right)\left(\beta^{\,4(r-1)}\right)^{\frac{2}{r-3}}$ 下，弱解具有唯一性；而对于 $r=3$，只要满足 $2\beta\mu\geq1$，唯一性便成立。

Appendix A. Uniqueness for $d=2,3$ and $r\in[1,3]$

对于 $d=2$、3 和 $r\in[1,3]$（包括情形 $r=3$，该情形不在定理3.4的涵盖范围内），唯一性问题的难度与二维和三维时间周期纳维-斯托克斯方程相当。对于数据 $\boldsymbol{f}\in\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})$ 满足适当小性假设的情形，利用适当函数空间中的不动点论证，我们得到了强解的唯一性。对于$\boldsymbol{f}\in\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})$，若 $\boldsymbol{v}\in\mathrm{C}([0,T];\mathbb{V})\cap\mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{D}(\mathrm{A}))$，且 $\partial_t\boldsymbol{v}\in\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})$，则称其为系统 (3.1) 的时间周期强解，条件是 $\boldsymbol{v}(0)=\boldsymbol{v}(T)$，且 (3.1) 对于 $\mathbb{H}$ 中几乎处处的 $t\in(0,T)$ 成立。

定理A.1. 对于 $d=2$、*3* 和 $r\in[1,3]$，给定 $\boldsymbol{f}\in L^2(0,T;\mathbb{H})$。如果 $\|\boldsymbol{f}\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})}$ 足够小，则对于问题（*3.1*），存在唯一的时间周期强解 $\boldsymbol{v}\in C([0,T];\mathbb{V})\cap L^2(0,T;D(A))\cap H^1(0,T;\mathbb{H})$。此外，该解满足以下估计：

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{V})}+\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{D}(\mathrm{A}))}+\|\partial_t\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})}\leq C\|\boldsymbol{f}\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})}.\tag{A.1}$$

证明。 **步骤1：线性问题**。 我们首先考虑 $\mathbb{H}$ 中的以下线性时间周期问题：

$$\begin{cases}\partial_t\boldsymbol{u}(t)+(\mu\mathrm{A}+\alpha\mathrm{I})\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{h}(t),\quad\text{for a.e. } t\in(0,T),\\ \boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}(T),\end{cases}\tag{A.2}$$

其中，A 是斯托克斯算子，而 $\boldsymbol{h}\in\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})$。由于 $(\lambda_k,\boldsymbol{w}_k)$，$k\in\mathbb{N}$ 是 A 的特征对，因此对于算子 $\mathcal{L}:=\mu\mathrm{A}+\alpha\mathrm{I}$，我们有 $\mathcal{L}\boldsymbol{w}_k=\omega_k\boldsymbol{w}_k$, 其中 $\omega_k:=\mu\lambda_k+\alpha>0$. 利用展开式

$$\boldsymbol{u}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\boldsymbol{w}_k,\quad\boldsymbol{h}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}h_k(t)\boldsymbol{w}_k,\tag{A.3}$$

其中 $u_k=(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{w}_k)$ 和 $h_k=(\boldsymbol{h},\ \boldsymbol{w}_k)$ 满足式（A.2），对每个 k,

$$\dot{u}_k(t)+\omega_ku_k(t)=h_k(t),\ u_k(0)=u_k(T).\tag{A.4}$$

(A.4) 的唯一解为

$$u_k(t)=e^{-\omega_kt}\left(u_k(0)+\int_0^te^{\omega_ks}h_k(s)\mathrm{d}s\right),\tag{A.5}$$

对所有 $t \in [0,T]$。令 $t=T$，并利用周期性条件 $u_k(T)=u_k(0)$，得到

$$u_k(0) = e^{-\omega_k T}\left(u_k(0) + \int_0^T e^{\omega_k s} h_k(s)\mathrm{d}s\right).$$

求解 $u_k(0)$，得到

$$u_k(0) = \frac{e^{-\omega_k T}}{1-e^{-\omega_k T}} \int_0^T e^{\omega_k s} h_k(s)\mathrm{d}s.$$

将此表达式代入（A.5）可得

$$u_k(t) = \frac{e^{-\omega_k t}}{1-e^{-\omega_k T}}\left[\int_0^t e^{\omega_k s} h_k(s)\mathrm{d}s + e^{-\omega_k T}\int_t^T e^{\omega_k s} h_k(s)\mathrm{d}s\right]. \tag{A.6}$$

等价地，我们有

$$u_k(t) = \int_0^T K_k(t,s) h_k(s)\mathrm{d}s, \tag{A.7}$$

其中，标量周期格林核为

$$K_k(t,s) = \begin{cases} \frac{e^{-\omega_k(t-s)}}{1-e^{-\omega_k T}}, & 0 \le s \le t, \\ \frac{e^{-\omega_k(t-s+T)}}{1-e^{-\omega_k T}}, & t < s \le T. \end{cases}$$

由于 $\omega_k > 0$，我们知道 $0 < e^{-\omega_k T} < 1$，这意味着 $1-e^{-\omega_k T} \ge 1-e^{-\omega_1 T} = c > 0$.因此，我们得到 $\frac{1}{1-e^{-\omega_k T}} \le C$，且关于 k 一致。利用柯西-施瓦茨不等式，我们推出

$$\left|\int_0^t e^{\omega_k s} h_k(s)\mathrm{d}s\right| \le \left(\int_0^T e^{2\omega_k s} ds\right)^{1/2} \|h_k\|_{\mathrm{L}^2(0,T)} \le \frac{e^{\omega_k T}}{\sqrt{2\omega_k}} \|h_k\|_{\mathrm{L}^2(0,T)}.$$

类似的估计 对右侧的第二项也成立（A.6）。因此，我们推 r

$$u_k^2(t) \le \frac{C}{\omega_k} \|h_k\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T)}.$$

由于 $\omega_k = \mu\lambda_k + \alpha \ge \mu\lambda_k$，我们有 $\frac{\lambda_k}{\omega_k} \le \frac{1}{\mu}$. 利用这一事实，我们推出

$$\lambda_k u_k^2(t) \le C\|h_k\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T)}.$$

注意，$\|\boldsymbol{v}(t)\|^2_{\mathbb{V}} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k^2(t)$。对上述表达式中的 k 求和，我们得到

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{\mathbb{V}} \le C\sum_{k=1}^{\infty} \|h_k\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T)} = C\|\boldsymbol{h}\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})}.$$

将（A.4）乘以 $\omega_k u_k$，得到

$$\frac{\omega_k}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_k^2(t)) + \omega_k^2 u_k^2(t) = \omega_k u_k(t) h_k(t), \tag{A.8}$$

对几乎处处 $t \in (0,T)$。把时间从 0 积分到 T，在 (A.8) 中，我们得到

$$\frac{\omega_k}{2}\left(u_k^2(T) - u_k^2(0)\right) + \omega_k^2 \int_0^T u_k^2(t)\mathrm{d}t = \omega_k \int_0^T u_k(t) h_k(t)\mathrm{d}t.$$

利用周期性 $u_k(T)=u_k(0)$，边界项消失，并应用杨氏不等式，可得

$$\omega_k^2 \int_0^T u_k^2(t)\mathrm{d}t = \omega_k \int_0^T u_k(t) h_k(t)\mathrm{d}t \le \frac{\omega_k^2}{2}\int_0^T u_k^2(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^T h_k^2(t)\mathrm{d}t. \tag{A.9}$$

由于 $\omega_k = \mu\lambda_k + \alpha \geq \mu\lambda_k$，我们有 $\lambda_k^2 \leq \frac{1}{\mu^2}\omega_k^2$. 因此，由（A.9），可推得

$$\lambda_k^2 \int_0^T u_k^2(t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{\mu^2}\omega_k^2 \int_0^T u_k^2(t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{\mu^2}\int_0^T h_k^2(t)\mathrm{d}t.$$

注意 $\|\mathrm{A}\boldsymbol{u}\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})} = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\int_0^T u_k^2(t)\mathrm{d}t$. 对上述表达式中的 k 求和，我们得到

$$\|\mathrm{A}\boldsymbol{u}\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})} \leq \frac{1}{\mu^2}\|\boldsymbol{h}\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})},$$

从而 $\boldsymbol{u} \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{D}(\mathrm{A}))$。由(A.2)，我们有 $\partial_t\boldsymbol{u} = \boldsymbol{h} - \mathcal{L}\boldsymbol{u}$. 由于 $\boldsymbol{h} \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})$且$\mathcal{L}\boldsymbol{u} \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})$, 我们得到 $\partial_t\boldsymbol{u} \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})$以及

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{D}(\mathrm{A}))} + \|\partial_t\boldsymbol{u}\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})} \leq C\|\boldsymbol{h}\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})}.$$

因此线性问题(A.2)存在唯一的时间周期强解（见(A.3)和(A.7)）

$$\boldsymbol{u} \in \mathcal{X} := \mathrm{C}([0,T];\mathbb{V}) \cap \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{D}(\mathrm{A})) \cap \mathrm{H}^1(0,T;\mathbb{H}),$$

并具有估计

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathcal{X}} \leq C\|\boldsymbol{h}\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})}.$$

我们定义 $\mathcal{X}_{\mathrm{per}} := \{\boldsymbol{u} \in \mathcal{X}\colon \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}(T)\}$。我们将解算子 $\mathcal{S}\colon \mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H}) \to \mathcal{X}_{\mathrm{per}}$ 记为

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{u}.$$

步骤 2：非线性问题。现在考虑关于 3.1 的非线性问题（ $d = 3$ 和$r \in [1,3]$。关于 $d = 3$ 和 $r \in [1,3]$ 的情形类似，此处略去。对于几乎处处成立的 3.1，我们将式（$t \in (0,T)$ 中的方程 $\mathbb{H}$ 改写为

$$\partial_t\boldsymbol{v}(t) + (\mu\mathrm{A} + \mathrm{I})\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{f}(t) - \mathrm{B}(\boldsymbol{v}(t)) - \beta\mathcal{C}(\boldsymbol{v}(t)) - \gamma\widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v}(t)).$$

我们定义映射

$$\Phi(\boldsymbol{v}) = \mathcal{S}\Big(\boldsymbol{f} - \mathrm{B}(\boldsymbol{v}) - \beta\mathcal{C}(\boldsymbol{v}) - \gamma\widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v})\Big).$$

注意，式（3.1）的时间周期强解对应于不动点 $\boldsymbol{v} = \Phi(\boldsymbol{v})$。我们利用 H¨older 不等式和 Ag mon 不等式估计 $\|\mathrm{B}(\boldsymbol{v})\|_{\mathrm{L}^2(0,\ T;\ \mathbb{H})}$，得到

$$\begin{aligned}\|\mathrm{B}(\boldsymbol{v})\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})} &\leq \int_0^T \|(\boldsymbol{v}(t)\cdot\nabla)\boldsymbol{v}(t)\|^2_{\mathbb{H}}\mathrm{d}t \leq \int_0^T \|\boldsymbol{v}(t)\|^2_{\widetilde{\mathbb{L}}^\infty}\|\nabla\boldsymbol{v}(t)\|^2_{\mathbb{H}}\mathrm{d}t\\ &\leq C\sqrt{T}\sup_{t\in[0,T]}\|\boldsymbol{v}(t)\|^3_{\mathbb{V}}\left(\int_0^T \|\mathrm{A}\boldsymbol{v}(t)\|^2_{\mathbb{H}}\mathrm{d}t\right)^{1/2},\end{aligned}$$

因此

$$\|\mathrm{B}(\boldsymbol{v})\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})} \leq C\Big(\|\boldsymbol{v}\|^2_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{V})} + \|\boldsymbol{v}\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{D}(\mathrm{A}))}\Big) \leq C\|\boldsymbol{v}\|^2_{\mathcal{X}}.$$

An 应用索 Sobole夫不等式可得 $\|\boldsymbol{v}\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{2r}} \leq C\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{V}}$，其中 $r \in [1,3]$，因此 t

$$\|\mathcal{C}(\boldsymbol{v})\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})} \leq C\|\boldsymbol{v}\|^r_{\mathrm{L}^{2r}(0,T;\widetilde{\mathbb{L}}^{2r})} \leq C\|\boldsymbol{v}\|^r_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{V})} \leq C\|\boldsymbol{v}\|^r_{\mathcal{X}}.$$

由于 $1 \leq q < r$，类似的计算可得

$$\|\widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v})\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})} \leq C\|\boldsymbol{v}\|^q_{\mathcal{X}}.$$

因此，我们有

$$\|\Phi(\boldsymbol{v})\|_{\mathcal{X}} = \Big\|\mathcal{S}\Big(\boldsymbol{f} - \mathrm{B}(\boldsymbol{v}) - \beta\mathcal{C}(\boldsymbol{v}) - \gamma\widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v})\Big)\Big\|_{\mathcal{X}} \leq \Big\|\boldsymbol{f} - \mathrm{B}(\boldsymbol{v}) - \beta\mathcal{C}(\boldsymbol{v}) - \gamma\widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v})\Big\|_{\mathcal{X}}$$

$$\leq C\big(\|\boldsymbol{f}\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})}+\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{X}}^2+\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{X}}^r+\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{X}}^q\big). \tag{A.10}$$

令 $R>0$，并将半径为 R 的闭球定义为

$$\mathcal{B}_R:=\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{X}_{\mathrm{per}}:\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{X}}\leq R\}.$$

由 (A.10)，我们推得

$$\|\Phi(\boldsymbol{v})\|_{\mathbb{X}}\leq C\big(\|\boldsymbol{f}\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})}+R^2+R^r+R^q\big).$$

令 $R=2C\|\boldsymbol{f}\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})}$。若 $\|\boldsymbol{f}\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})}$ 足够小，使得 $C(R^2+R^r+R^q)\leq\frac{R}{2}$，则 $\Phi(\mathcal{B}_R)\subset\mathcal{B}_R$。

现在证明 Φ 是 $\mathcal{B}_R$ 上的压缩映射。记

$$\Phi(\boldsymbol{v}_1)-\Phi(\boldsymbol{v}_2)=\mathcal{S}\Big(-\mathrm{B}(\boldsymbol{v}_1)+\mathrm{B}(\boldsymbol{v}_2)-\beta(\mathcal{C}(\boldsymbol{v}_1)-\mathcal{C}(\boldsymbol{v}_2))-\gamma(\widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v}_1)-\widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v}_2))\Big),$$

因此

$$\|\Phi(\boldsymbol{v}_1)-\Phi(\boldsymbol{v}_2)\|_{\mathbb{X}}\leq C\|\mathcal{F}(\boldsymbol{v}_1)-\mathcal{F}(\boldsymbol{v}_2)\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})},$$

其中 $\mathcal{F}(\boldsymbol{v})=\mathrm{B}(\boldsymbol{v})+\beta\mathcal{C}(\boldsymbol{v})+\gamma\widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v})$。我们知道 $\mathrm{B}(\boldsymbol{v}_1)-\mathrm{B}(\boldsymbol{v}_2)=\mathrm{B}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)+\mathrm{B}(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_2)$，利用 H¨older 不等式和 Agmon 不等式，可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\|\mathrm{B}(\boldsymbol{v}_1(t))-\mathrm{B}(\boldsymbol{v}_2(t))\|_{\mathbb{H}}^2\mathrm{d}t\\
&\leq 2\int_0^T\|\mathrm{B}(\boldsymbol{v}_1(t),\boldsymbol{v}_1(t)-\boldsymbol{v}_2(t))\|_{\mathbb{H}}^2\mathrm{d}t+2\int_0^T\|\mathrm{B}(\boldsymbol{v}_1(t)-\boldsymbol{v}_2(t),\boldsymbol{v}_2(t))\|_{\mathbb{H}}^2\mathrm{d}t\\
&\leq 2\int_0^T\Big(\|\boldsymbol{v}_1(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^\infty}^2+\|\boldsymbol{v}_2(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^\infty}^2\Big)\|\boldsymbol{v}_1(t)-\boldsymbol{v}_2(t)\|_{\mathbb{V}}^2\mathrm{d}t\\
&\leq C\sqrt{T}\Bigg[\sup_{t\in[0,T]}\|\boldsymbol{v}_1(t)\|_{\mathbb{V}}\bigg(\int_0^T\|\mathrm{A}\boldsymbol{v}_1(t)\|_{\mathbb{H}}^2\mathrm{d}t\bigg)^{1/2}+\sup_{t\in[0,T]}\|\boldsymbol{v}_2(t)\|_{\mathbb{V}}\bigg(\int_0^T\|\mathrm{A}\boldsymbol{v}_2(t)\|_{\mathbb{H}}^2\mathrm{d}t\bigg)^{1/2}\Bigg]\\
&\quad\times\sup_{t\in[0,T]}\|\boldsymbol{v}_1(t)-\boldsymbol{v}_2(t)\|_{\mathbb{V}}^2\\
&\leq CR^2\|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2\|_{\mathbb{X}}^2,
\end{aligned}$$

对所有 $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\in\mathcal{B}_R$。现在考虑 $\|\mathcal{C}(\boldsymbol{v}_1)-\mathcal{C}(\boldsymbol{v}_2)\|_{\mathrm{L}^2(0,\ T;\ \mathbb{H})}$ 并利用泰勒公式和索 Sobole夫不等式对其进行估计，得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\|\mathcal{C}(\boldsymbol{v}_1(t))-\mathcal{C}(\boldsymbol{v}_2(t))\|_{\mathbb{H}}^2\mathrm{d}t\\
&\leq C\int_0^T\Big(\|\boldsymbol{v}_1(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{2r}}^{2(r-1)}+\|\boldsymbol{v}_2(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{2r}}^{2(r-1)}\Big)\|\boldsymbol{v}_1(t)-\boldsymbol{v}_2(t)\|_{\widetilde{\mathbb{L}}^{2r}}^2\mathrm{d}t\\
&\leq C\sup_{t\in[0,T]}\Big(\|\boldsymbol{v}_1(t)\|_{\mathbb{V}}^{2(r-1)}+\|\boldsymbol{v}_2(t)\|_{\mathbb{V}}^{2(r-1)}\Big)\sup_{t\in[0,T]}\|\boldsymbol{v}_1(t)-\boldsymbol{v}_2(t)\|_{\mathbb{V}}^2\\
&\leq CR^{2(r-1)}\|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2\|_{\mathbb{X}}^2,
\end{aligned}$$

对 $r\in[1,3]$ 以及所有 $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\in\mathcal{B}_R$ 类似的计算可得

$$\int_0^T\|\widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v}_1(t))-\widetilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{v}_2(t))\|_{\mathbb{H}}^2\mathrm{d}t\leq CR^{2(q-1)}\|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2\|_{\mathbb{X}}^2,$$

对 $1\leq q<r\leq 3$ 且对所有 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\in\mathcal{B}_R$ 结合上述所有估计，我们得到

$$\|\mathcal{F}(\boldsymbol{v}_1)-\mathcal{F}(\boldsymbol{v}_2)\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})}\leq C\big(R+R^{r-1}+R^{q-1}\big)\|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2\|_{\mathbb{X}}.$$

因此，我们有

$$\|\Phi(\boldsymbol{v}_1)-\Phi(\boldsymbol{v}_2)\|_{\mathcal{X}} \leq C\left(R+R^{r-1}+R^{q-1}\right)\|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2\|_{\mathcal{X}}.$$

若 R 选取得足够小，使得 $C\left(R+R^{r-1}+R^{q-1}\right)<1$，则 Φ 是 $\mathcal{B}_R$上的压缩映射。通过应用巴拿赫不动点定理，我们推知存在唯一的 $\boldsymbol{v}\in\mathcal{B}_R$使得 $\Phi(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}$。因此， $d=3$和 $r\in[1,3]$，若$\|\boldsymbol{f}\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})}$足够小，则问题（ $\boldsymbol{v}\in\mathcal{X}$ 的唯一时间周期强解3.1存在。由于 $\boldsymbol{v}$ 属于 $\mathcal{B}_R$，我们有

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\mathcal{X}} \leq R = 2C\|\boldsymbol{f}\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})},$$

这就完成了估计式（A.1）的证明。 □

注 A.2。*1.* 由于 *Sobolev* 不等式和加利亚多-尼伦伯格不等式，在定理*A.1* 中使用的不动点论证对于三维中的 $r\in[1,5]$ 以及所有 $r\in[1,\infty)$ 二维情形仍然有效。

2. 对于 $d=2$和 $r\in[1,3]$的情形，由于 $\boldsymbol{f}\in\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})$，可以考虑伽辽金近似系统 (3.9) 并推导出如下形式的一致有界性

$$\|\boldsymbol{v}_m(t)\|_{\mathbb{V}}^2+\int_0^t\|\mathrm{A}\boldsymbol{v}_m(s)\|_{\mathbb{H}}^2\mathrm{d}s+\int_0^t\|\boldsymbol{v}_m'(s)\|_{\mathbb{H}}^2\mathrm{d}s\leq C\|\boldsymbol{f}\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})},$$

对所有 $t\in[0,T]$ 均成立。根据巴拿赫–阿劳格鲁定理，我们可以提取出在相应空间中弱收敛的子序列。此外，根据*Aubin-Lions-Simon*紧性定理，我们在 $L^2(0,T;\mathbb{V})$ 中得到强收敛。将极限代入伽辽金系统 *(3.9)*，可得问题 *(1.1)* 存在一个强解 $\boldsymbol{v}\in C([0,T];\mathbb{V})\cap L^2(0,T;D(A))$，且满足 $\partial_t\boldsymbol{v}\in L^2(0,T;\mathbb{H})$。如果$\|\boldsymbol{f}\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H})}$ 取得足够小，则可以控制双线性项，并可仿照定理*3.4*证明中的步骤（*3*）得到弱解的唯一性（二维纳维–斯托克斯方程参见 [31,*Section* 5] ）。

致谢： M. T. MOHAN 的研究得到印度政府原子能部国家高等数学委员会（NBHM）的资助（项目编号：02011/13/2025/NBHM(R.P)/R&D II/1137）。我们衷心感谢审稿人认真审阅稿件并提出建设性意见，这些意见显著提升了论文的质量和清晰度。

声明:
伦理审批： 不适用**利益冲突：** 作者声明不存在利益冲突。**作者贡献：** 所有作者贡献均等。**数据和材料的可用性：** 不适用。

References

[1] S. N. Antontsev 和 H. B. de Oliveira，具有滑移边界条件且含吸收项的纳维–斯托克斯方程：存在性、唯一性与有限时间消失，《京都纳维-斯托克斯方程及其应用会议》，京都， *Res. Inst. Math. Sci.*，（2007），21–41。[2] S. N. Antontsev 和 H. B. de Oliveira，经吸收项修正的纳维–斯托克斯问题，

Appl. Anal.（ ），第 – 期。

89 2010 12, 1805 1825

[3] X. Cai 和 Q. Jiu，具有阻尼项的不可压纳维–斯托克斯方程的弱解与强解，

J.（ ），第 – 期。[4] V.

Math. Anal. Appl. **343** 2008 2, 799 809

V. Chepyzhov 和 M. I. Vishik， *Attractors for Equations of Mathematical Physics*，《美国数学会专题论文集》，第49卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2002。[5] P. Cherrier 和 A. J. Milani， *Linear and Quasi-linear Evolution Equations in Hilbert Spaces*，《研究生数学丛书》，第135卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2012。[6] L. C. Evans， *Partial Differential Equations*，第二版，《研究生数学丛书》，第19卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2010。

[7] R. Farwig、H. Kozono 和 H. Sohr，利用 L^q方法研究一般区域中的斯托克斯方程与纳维–斯托克斯方程，*Acta Math.* **195**（2005），21–53。[8] C. L. Fefferman、K. W. Hajduk 和 J. C. Robinson，通过特征子空间同时逼近勒贝格范数与索伯列夫范数，*Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **125**（2022），第4期，759–777。[9] D. Fujiwara 和 H. Morimoto，向量场亥姆霍兹分解的

L_r *J. Fac. Sci. Univ.* 定理，（），*Tokyo Sect. IA Math.* **24** 1977 3, 685 700

第 – 期。[10] G. P. Galdi，纳维–斯托克斯初边值问题导论，载于 *mathematical fluid mechanics* 1 70, ¨ 2000 ，–，《流体力学进展》，Birkhauser，巴塞尔，。[11] G. P. Galdi，*An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations*，第二版，《Springer 数学专著丛书》，Springer，纽约，2011。[12] G. P. Galdi 和 A. L. Silvestre，运动物体周围纳维–斯托克斯方程时间周期解的存在性，*Pacific J. Math.* **223**（2006），第2期，251–267。[13] G. P. Galdi，整个平面上纳维–斯托克斯方程时间周期解的存在性与唯一性，*Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S* **6**（2013），第5期，1237–1257。[14] G. P. Galdi，运动物体周围纳维–斯托克斯方程正则时间周期解的存在性、唯一性与渐近行为：旋转情形，*Indiana Univ. Math. J.*，71（2022），第6期，2259–2281。[15] S. Gautam 和 M. T. Mohan，关于对流 Brinkman–Forchheimer 方程，*Dyn. Partial Differ. Equ.* **22**（2025），第3期，191–233。[16] S. Gautam、K. Kinra 和 M. T. Mohan，对流型布林克曼–福希海默扩展达西方程的反馈稳定化，*Appl. Math. Optim.* **91**（2025），第1期，论文编号25，共75页。[17] K. W. Hajduk 和 J. C. Robinson，三维临界对流 Brinkman–Forchheimer 方程的能量等式，*J. Differential Equations* **263**（2017），第11期，7141–7161。[18] M. Hieber 等，三维外域上的 L^r-亥姆霍兹–韦尔分解，*J. Funct. Anal.* **281**（2021），第8期，论文编号109144，共52页。[19] R. A. Johnson、P. Nistri 和 M. I. Kamenskiui，利用拓扑度研究薄域中纳维–斯托克斯方程周期解的存在性，*J. Dynam. Differential Equations*，12 4，681 2000 712（），第 – 期。[20] V. K. Kalantarov 和 S. Zelik，具有快速增长非线性项的 Brinkman–Forchheimer 方程的光滑吸引子，*Commun. Pure Appl. Anal.* **11**（2012）2037–2054。[21] H. Kato，纳维–斯托克斯方程周期解的存在性，*J. Math. Anal. Appl.* **208**（1997 1，141 157），第 – 期。[22] H. Kozono 和 T. Yanagisawa，向量场的 L^r-变分不等式及有界区域中的亥姆霍兹–韦尔分解，*Indiana Univ. Math. J.* **58**（2009），第4期，1853–1920。[23] H. Kozono、Y. Mashiko 和 R. Takada，具有科里奥利力的纳维–斯托克斯方程周期解的存在性及其渐近稳定性，*J. Evol. Equ.*，14（2014），第3期，565–601。[24] M. Kyed，整个空间中三维纳维–斯托克斯方程时间周期解的存在性与正则性，*Nonlinearity* **27** 2014 12, 2909 2935，（），第 – 期。D. Lauerova，Rothe方法与纳维–斯托克斯方程及磁流体动力学方程的时间周期解，*Apl. Mat.*，35（1990），第2期，89–98。[25] ´ [26] J.-L. Lions，*Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non linéaires*，Dunod，巴黎，1969；Gauthier-Villars，巴黎，[27] 1969 。*Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications. Vol. I*J.-L. Lions 和 E. Magenes，*Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications. Vol. I*，Springer，纽约-海德堡，1972。[28] P. Maremonti 和 M. Padula，外域中纳维–斯托克斯方程周期解的存在性、唯一性与可达性，*J. Math. Sci.* **93**（1999），第5期，719–746。[29] P. A. Markowich、E. S. Titi 和 S. Trabelsi，三维 Brinkman–Forchheimer 扩展达西模型的连续数据同化，*Nonlinearity* **29**（2016），第4期，1292–1328。[30] M. T. Mohan，受纯跳噪声扰动的随机对流型布林克曼–福希海默方程的适定性与渐近行为，*Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput.* **10**（2022），第2期，614–690。[31] H. Morimoto，具有非齐次边界条件的时间周期纳维–斯托克斯流，*J. Math. Sci. Univ.*（），第 – *Tokyo* **16** 2009 1, 113 123

期。[32] T. Nakatsuka，整个空间中纳维 – 斯托克斯方程时间周期强解的存在性，*J.*，（），*Math. Anal. Appl.* **543** 2025 2, 128991, 24

第 期，论文编号 页。[33] A. Novruzi 和 F. Mezatio，时间周期运动区域中不可压纳维–斯托克斯方程时间周期强解的存在性与唯一性：描述人工心脏中的血流，*J. Math.*，（），*Anal. Appl.* **548** 2025 2, 129410, 28

第 期，论文编号 页。[34] G. Prouse，纳维–斯托克斯方程的周期解，*Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat.*（），– *Nat. (8)* **35** 1963 443 447

[35] R. Salvi，关于具有周期运动边界的区域中纳维–斯托克斯方程周期弱解的存在性， *Acta Appl. Math.***37** （1994），第 1-2 期，169–179。[36] R. Salvi，关于具有周期运动边界的外域中纳维–斯托克斯方程周期弱解的存在性，载于 *Navier-Stokes Equations and Related Nonlinear Problems (Funchal, 1994)*，63–73，Plenum，纽约。[37] C. Simader 和 H. Sohr，关于有界域与外域中 L^q- 空间的亥姆霍兹分解与 Neumann 问题的新方法，*Mathematical Problems Relating to the Navier-Stokes Equation*，1-35，《数学及其应用研究》丛书，Ser. Adv. Math. Appl. Sci.，第 11 卷，World Sci. Publ.，River Edge，NJ，1992。[38] J. Simon，空间 $L^p(0, T; B)$ 中的紧集，*Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **146** （1987），65–96。

[39] *The Navier-Stokes Equations* ¨ ¨ ¨ 2001 H.

[40] *Navier-Stokes Equations* 2, Sohr，，《巴塞尔高级教材：巴塞尔教科书》，Birkhauser，巴塞尔；R. M. Temam，《数学及其应用研究》，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，第三版，1984。[41] Z. Zhang、X. Wu 和 M. Lu，关于带阻尼的不可压纳维–斯托克斯方程强解的唯一性，*J. Math. Anal. Appl.* **377** （2011），第 1 期，414–419。