arXiv:2603.01924v1 [math.AP] 2 Mar 2026

能量超临界维数下大初值波映射的未来稳定性

ANDRAS BONK 和 ROLAND DONNINGER

Abstract. 我们研究奇数空间维数下，从闵可夫斯基时空映射到球面的能量超临界共旋波映射方程。该方程存在一个显式的共旋转自相似爆破解，它也会诱导出在过去发生爆破的解。在爆破之后的区域中，本文所研究的解颇为特殊：它在正向时间上光滑，且其色散衰减不足。我们证明了前向光锥内这一大初值自相似解的非线性渐近稳定性。具体而言，我们确定了一个靠近该显式解的初值数据开集，其中的初值会产生正向时间演化的波映射，其衰减速度慢于一般自由波。

1. 引言

本文研究定义域流形为$1+n$维闵可夫斯基时空$\mathbb{R}^{1,n}$波映射，其目标流形为 n球面 $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$，并将其嵌入欧几里得空间中的黎曼子流形 $\mathbb{R}^{n+1}$。在这一背景下，波映射的外蕴表述是一个函数$U:\mathbb{R}^{1,n}\to\mathbb{S}^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$，它满足波映射方程

$$\partial^\mu\partial_\mu U+(\partial^\mu U\cdot\partial_\mu U)\,U=0. \tag{1}$$

本文及下文均采用以下约定：希腊指标从 0 到 n，$\partial^0=-\partial_0,\partial^i=\partial_i$对所有 $i=1,\dots,n$成立；采用爱因斯坦求和约定；$\cdot$表示 $\mathbb{R}^{n+1}$上的欧几里得内积。

波映射具有标度对称性。若 U 是方程 (1) 的解，则由U_λ定义的 $U_\lambda(t,x):=U\left(\frac{t}{\lambda},\frac{x}{\lambda}\right)$（$\lambda>0$）也是解。守恒能量为

$$E(U)(t)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_tU(t,\cdot)\cdot\partial_tU(t,\cdot)+\partial^iU(t,\cdot)\cdot\partial_iU(t,\cdot).$$

它按 $E(U_\lambda)(t)=\lambda^{n-2}E(U)\left(\frac{t}{\lambda}\right)$的方式缩放（$\lambda>0$）。这种缩放关系为能量空间中的局部和整体适定性提供了一般启发式判断。因此，不同维数下的相应模型分别称为（能量）次临界（若 $n=1$）、临界（若 $n=2$）和超临界（若 $n\geq3$）。

我们关注超临界情形。此处的标度有利于大解的收缩，由此可以预期爆破。事实上，近几十年来，超临界结果主要涉及有限时间内发生爆破的解的存在性与稳定性。一个重要（尽管并非唯一 [25]）的爆破机制由自相似解提供。人们相信这类爆破是通有的 [4, 5, 11]。若一个波映射在标度下不变，即若 $U_\lambda=U$，则称其为自相似的。

本研究全部或部分由奥地利科学基金（FWF）资助，资助编号为 10.55776/P34560、10.55776/PIN2161424 和 10.55776/PAT9429324。为实现开放获取，作者已对本次投稿产生的任何作者接受的手稿版本采用 CC BY 公共版权许可。

1.1. 显式解与对称约化。 自相似解已出现在共旋转 或一等变 解这一子类中；一般定义见 [36, 第 109] 页。就我们的目的而言，映射 $U:\mathbb{R}^{1,\ n}\to\mathbb{S}^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 称为共旋转的，如果存在函数$\widetilde{u}:\mathbb{R}\times[0,\infty)\ \to\mathbb{R}$ 使得

$$U(t,x)=\begin{pmatrix}\sin\left(|x|\widetilde{u}(t,|x|)\right)\frac{x}{|x|}\\ \cos\left(|x|\widetilde{u}(t,|x|)\right)\end{pmatrix}.$$

值得注意的是，存在已知闭式解的自相似共旋转爆破解。根据时间平移对称性，它们构成如下族 [39, 4]

$$U_T^*(t,x)=U^*(T-t,x)\quad\text{where}\quad U^*(t,x)=\frac{1}{(n-2)t^2+|x|^2}\begin{pmatrix}2\sqrt{n-2}tx\\ (n-2)t^2-|x|^2\end{pmatrix},$$

对于任意爆破时刻 $T>0$。其剖面为

$$\widetilde{u}^*(t,r)=\frac{2}{r}\arctan\left(\frac{r}{\sqrt{n-2}t}\right)\tag{2}$$

对于 $t\geq 0,\ r\geq 0$。关键在于， U_T^*在 $(T,\ 0)$ 的后向光锥上处处光滑，唯有点 $(T,\ 0)$ 处除外，该点的梯度会爆破。

1.2. 爆破后的解。波映射的共旋转剖面 $\widetilde{u}$ 解 es

$$\left(\partial_t^2-\partial_r^2-\frac{n+1}{r}\partial_r\right)\widetilde{u}(t,r)+(n-1)\frac{\sin\left(2r\widetilde{u}(t,r)\right)-2r\widetilde{u}(t,r)}{2r^3}=0,$$

对于 $t\in\mathbb{R},\ r\geq 0.$。我们注意到，这是 $\mathbb{R}^{1,\ n+2}$ 上半线性波动方程的径向对应。事实上，从现在起，令 $d:=n+2$，并考虑由 $u(t,\ x)\ =\widetilde{u}(t,\ |x|)$ 给出的 $u:\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$。我们得到

$$\left(\partial_t^2-\Delta_x\right)u(t,x)+(d-3)\frac{\sin(2|x|u(t,x))-2|x|u(t,x)}{2|x|^3}=0.\tag{3}$$

根据方程的时间反演对称性，中的每个符号

$$\widetilde{u}_\pm^*(t,r):=\widetilde{u}^*(\pm t,r)$$

都会给出一个解。爆破解析问题关注的是当 $t\to T^-$ 时 U_T^* 的行为（或者等价地，当 $t\to 0^+$ 时 $\widetilde{u}^*$ 的行为），[11, 16, 10, 9, 2, 17, 18, 15, 26, 13, 12]，而我们关注的则是当 $t\to\infty$ 时 $\widetilde{u}^*$ 的稳定性（对应于当 U_T^* 时 $t\to-\infty$ 的情形）。

为避免混淆，我们强调，尽管 U^* 除时空原点外可延拓为定义在整个时空上的光滑波映射，但并不存在能体现这一行为的剖面。这是因为共旋转拟设会在时空的某个一维子流形上引入奇性。利用反正切恒等式可以找到一个自然的候选剖面，例如 $\widetilde{u}^*_{\text{cont}}(t,\ r)\ =_r^4$反正切 $\left(\frac{r}{\sqrt{n-2}t+\sqrt{(n-2)t^2+r^2}}\right)$，但当 $t<0$ 和 $r\to 0$时，仍会表现出奇异行为。

只考虑解在不发生爆破解的时间方向上的行为，本身就很有意义。以合适的意义证明其稳定性，表明它在超临界波映射的动力学中扮演着重要角色。从动力学的角度看，这个特定解十分特别，因为 u^* 在 $t\geq 1$ 时不会爆破，并且当 $t\to\infty$时按线性速率衰减。相比之下，自由方程的典型解按 $\simeq t^{-\frac{d-1}{2}}$ 的速率衰减。

1.3. 扰动。 在次临界和临界区域中，可以采用范围更广的工具；而在超临界情形中，摄动方法似乎是目前唯一可行的方法。由上文可知，$u^*(t,\ x) = \frac{2}{|x|}\arctan\left(\frac{|x|}{\sqrt{d-4t}}\right)$ 是方程（3）的解。考虑 $w(t,\ x) := tu(t,\ x)$，可以将方程（3）左端的算子改写为一个保持自相似性的算子。w 的方程变为

$$\Box w(t,x) + (d-3)\frac{\sin\left(2\frac{|x|}{t}w(t,x)\right) - 2\frac{|x|}{t}w(t,x)}{2\left(\frac{|x|}{t}\right)^3} = 0, \tag{4}$$

其中 $\Box := t^2(\partial_t^2 - \Delta_x) - 2t\partial_t + 2$。显式解 $w^*(t,\ x) := tu^*(t,\ x) = 2\frac{t}{|x|}\arctan\left(\frac{|x|}{\sqrt{d-4t}}\right)$ 现在是自相似的。

我们通过 $w = w^* + \phi$ 在显式解附近对方程 (4) 进行线性化。将非线性项记为 $F(t,\ x,\ z) := (d-3)\frac{\sin\left(2\frac{|x|}{t}z\right) - 2\frac{|x|}{t}z}{2\left(\frac{|x|}{t}\right)^3}$，$F'(t,\ x,\ z) := \partial_z F(t,\ x,\ z)$，并将非线性项分解为线性部分和非线性余项

$$F(t,x,w^*(t,x)+\phi(t,x)) = F(t,x,w^*(t,x)) + F'(t,x,w^*(t,x))\phi(t,x) + \mathcal{N}(\phi)(t,x),$$

其中

$$\mathcal{N}(\phi)(t,x) := F(t,x,w^*(t,x)+\phi(t,x)) - F(t,x,w^*(t,x)) - F'(t,x,w^*(t,x))\phi(t,x).$$

简短的计算表明

$$\mathcal{V}(t,x) := F'(t,x,w^*(t,x)) = \frac{-8(d-3)(d-4)t^4}{((d-4)t^2+|x|^2)^2}.$$

w^* 满足方程（4）这一事实给出了扰动 ϕ 的方程

$$0 = \left(\Box + \mathcal{V}(t,x)\right)\phi(t,x) + \mathcal{N}(\phi)(t,x). \tag{5}$$

1.4. 坐标与几何。 我们引入一种双曲面叶状结构，以便通过规定类光无穷远处的某种行为来定义适用于演化问题的函数空间。事实证明，这与线性化方程的共形对称性十分相容。

定义1.1。 前向双曲相似坐标（*FHSC*）[19, p. 11] 由以下映射给出

$$\begin{aligned}\Psi : [0,\infty)\times\mathbb{B}^d &\to \mathbb{R}^{1,d},\\ (s,y) &\mapsto \left(\frac{e^s}{1-|y|^2}, \frac{e^s y}{1-|y|^2}\right).\end{aligned}$$

映到其像 $D^+(\Sigma_0^d)$ 上，Ψ 是一个微分同胚，其逆映射为 $\Psi^{-1}(t,\ x) = (-\log(\frac{t}{t^2-|x|^2}),\ \frac{x}{t})$。它是经典相似坐标的复合 $K\circ\chi$

$$\begin{aligned}\chi : [0,\infty)\times\mathbb{B}^d &\to \Gamma,\\ (\tau,\xi) &\mapsto (-e^{-\tau}, e^{-\tau}\xi),\end{aligned}$$

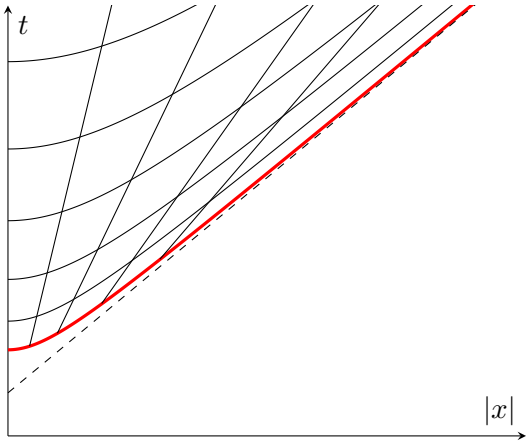

FIGURE 1. FHSC 的投影。直线对应 $y = \text{const}$，双曲面对应 $s = \text{const}$。红色双曲面 Σ_0 是坐标区域的下边界，也是初值问题的初始超曲面。虚线表示顶点为 $(\frac{1}{2}$ 的 $0)$光锥。

其中 $\Gamma := \{(t,\ x) \in \mathbb{R}^{1,\ d} :\ |x| < |t|,\ -1 \le t < 0\}$ 是原点处截断于 -1的过去光锥，而开尔文变换

$$K : \Gamma \to D^+(\Sigma_0^d),$$
$$(t, x) \mapsto \left(\frac{-t}{t^2 - |x|^2}, \frac{x}{t^2 - |x|^2} \right).$$

这里，$D^+(\Sigma_0^d)$ 是从 $(\frac{1}{2}$出发的 $0) \in \mathbb{R}^{1,\ d}$未来光锥内部的子集，由双曲面 $\Sigma_s^d\ (= \{\Psi)$:$s, y)$: $y \in \mathbb{B}^d\}$ （$s \ge 0$）所分叶。事实上，$D^+(\Sigma_0^d)$ 表示 Σ_0^d的未来依赖域。请注意，Σ_0^d 渐近趋近于顶点为 $(\frac{1}{2}$的 $0)$光锥边界。我们请读者参阅图 1，了解这些坐标的示意图。

注释 1.2。该叶状分解的一个优点是能够获得有利的能量估计。自由波动方程的解可以通过类光无穷远传播能量；因此，在该叶状分解的双曲叶上计算的范数可能会随时间衰减。这与笛卡尔坐标形成对比，在笛卡尔坐标中能量是守恒的。关于双曲坐标和初值问题的复杂细节，我们参考 *[41]* 和 *[19]*。

定义 1.3。对于 $\ell \in \{1, 3\}$，我们考虑权函数

$$W_\ell : \mathbb{B}^d \to \mathbb{R},$$
$$y \mapsto (1 - |y|^2)^{\frac{\ell - d}{2}},$$

并且对于每个 $s \ge 0$，函数空间

$$\mathcal{C}^\infty_{\text{rad}}(\Sigma_s^d, W_1) := \{f \mid W_1 f \circ \Psi(s, \cdot) \in C^\infty_{\text{rad}}(\overline{\mathbb{B}^d})\}$$

以及每 个 $k \in \mathbb{N}$，对于 $\mathbf{f} = (f_1,\ f_2) \in \mathcal{C}^\infty_{\text{rad}}(\Sigma_s^d,\ W_1)^2$，加权索 Sobole夫范数定义为

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}^k(\Sigma_s^d)} = \sqrt{\|W_1 f_1 \circ \Psi(s, \cdot)\|^2_{H^k(\mathbb{B}^d)} + \|W_1 f_2 \circ \Psi(s, \cdot)\|^2_{H^{k-1}(\mathbb{B}^d)}}.$$

在笛卡尔坐标中，W_ℓ 对应于在类光无穷远处奇异的权函数，即 $W_\ell \circ \Psi^{-1}(t,\ x) = (\ _{t^2 - |x|^2}^{t^2})^{\frac{d-\ell}{2}}$。

1.5. **主要结果　　第**。这里陈述稳定性结果。其意义将在后文讨论　　.

定理 1.4。设 $n,\ k\in\mathbb{N}$ 满足

$$n\geq 3\ \ odd\ \ \ and\ \ \ k>n/2+1.$$

存在 $\varepsilon>0$，使得对于所有形如(F_1,F_2) $\Sigma_0^n\to \mathrm{T}\mathbb{S}^n\subset\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}$的光滑共旋转初始数据

$$F_1(t,x)=\begin{pmatrix}\sin(|x|(\widetilde{u}^*+\widetilde{f}_1)(t,|x|))\frac{x}{|x|}\\ \cos(|x|(\widetilde{u}^*+\widetilde{f}_1)(t,|x|))\end{pmatrix},F_2(t,x)=\begin{pmatrix}\cos(|x|(\widetilde{u}^*+\widetilde{f}_1)(t,|x|))(\partial_0\widetilde{u}^*+\widetilde{f}_2)(t,|x|)x\\ -|x|\sin(|x|(\widetilde{u}^*+\widetilde{f}_1)(t,|x|))(\partial_0\widetilde{u}^*+\widetilde{f}_2)(t,|x|)\end{pmatrix}$$

其中 $\widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2\in C^\infty_{\mathrm{rad}}(\Sigma_0^1)$ 满足 $\widetilde{f}_i(t,|x|)=f_i(t,x)$，对于 $i\in\{1,2\}$ 满足

$$\|(f_1,f_2)\|_{\mathcal{H}^k(\Sigma_0^{n+2})}\leq\varepsilon,$$

存在唯一的共旋转 $U\in C^\infty(D^+(\Sigma_0^n))$，它是初值问题的解

$$\begin{cases}\partial^\mu\partial_\mu U+(\partial^\mu U\cdot\partial_\mu U)U=0 & in\ D^+(\Sigma_0)\setminus\Sigma_0,\\ U=F_1,\ \partial_0U=F_2 & in\ \Sigma_0,\end{cases}$$

~且其剖面 $\widetilde{u}$ 可分解为 $\widetilde{u}=\widetilde{u}^*+\phi$，使得

$$\sup_{s\geq0}e^{(1+\delta)s}\left\|(\phi,\omega\partial_0\phi)\right\|_{\mathcal{H}^k\left(\Sigma_s^{n+2}\right)}\lesssim\left\|(f_1,f_2)\right\|_{\mathcal{H}^k\left(\Sigma_0^{n+2}\right)},$$

其中 $\omega(t,x)=\frac{t^2-|x|^2}{t}$且 $\phi(t,x)=\widetilde{\phi}(t,|x|)$。固定 $x\in\mathbb{R}^n$ 并考虑 $(t,x)\in D^+(\Sigma_0^n)$。我们有

$$\left|U(t,x)-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right|\simeq t^{-1}$$

对所有满足$(t,x)\in D^+(\Sigma_0^n)$的 $t>0$，其中 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$表示 $\mathbb{S}^n$的北极。

该定理是以下关于由 U的剖面诱导的半线性波动方程（方程 (3)）的结果的直接推论。从现在起，我们将 Σ_s^d 简称为 Σ_s。

定理 1.5。令 $d,\ k\in\mathbb{N}$ 满足

$$d\geq5\ \ odd\ \ \ and\ \ \ k>d/2.$$

存在 $\varepsilon>0$，使得对每个$(f_1,f_2)\in\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{rad}}(\Sigma_0,W_1)^2$ 满足 $\|(f_1,f_2)\|_{\mathcal{H}^k(\Sigma_0)}\leq\varepsilon$的情形，双曲面初值问题

$$\begin{cases}0=\Box u(t,x)+(d-3)\frac{\sin(2|x|u(t,x))-2|x|u(t,x)}{2|x|^3} & in\ D^+(\Sigma_0)\setminus\Sigma_0,\\ u=u^*+f_1 & in\ \Sigma_0,\\ \partial_0u=\partial_0u^*+f_2 & in\ \Sigma_0,\end{cases}$$

有唯一解 $u\in C^\infty(D^+(\Sigma_0))$。该解可分解为 $u=u^*+\phi$，其中 ϕ具有以下性质：

- $\phi\circ\Psi\in C^\infty([0,\infty)\times\overline{\mathbb{B}^d};W_1)$,
- $\phi\circ\Psi(s,\cdot)$ 对于所有 $s\geq0$ 均为径向函数。

该解在以下意义下趋近于 u^*：存在 $\delta>0$，使得

$$\sup_{s\geq0}\left(e^{(1+\delta)s}\left(\|\phi\|_{H^k(\Sigma_s)}+\|\omega\partial_0\phi\|_{H^{k-1}(\Sigma_s)}\right)\right)\lesssim\|f_1\|_{H^k(\Sigma_0)}+\|f_2\|_{H^{k-1}(\Sigma_0)}.$$

特别地，对于固定的 $x \in \mathbb{R}^d$，我们有

$$u(t,x) \simeq t^{-1}$$

对于所有满足 $(t,x) \in D^+(\Sigma_0)$ 的 $t > 0$。

1.6. **讨论**。

注 1.6. 稳定性结果揭示了如下（高度简化的）动力学图景。我们根据解在 $t \to \infty$ 时的渐近行为对解空间进行排序。从平凡解出发，存在趋于 0（ $t \to \infty$时）的整体解。随后，数值证据（至少对于 $3 \le n \le 6$）表明，存在一个由对应于第一激发态的波映射给出的"阈值"解；关于 $n = 3$，参见 *[5]* 和 *[3]*；关于$4 \le n \le 6$，参见 *[1]*。再往后是由 U_T^*给出的爆破解，人们认为它描述了一般性爆破。进一步考察整体解，首先会发现具有色散衰减的解，然后是衰减更慢的解。我们分析中考虑的时间反演爆破解就处于这一类解中。一般而言，我们预计起作用的时间反演态不止这一种。除我们关于 U^* 的结果外，其余仍属猜想。

然而，正如只有 $u_\pm^*$ 中的符号决定解是爆破还是对所有正时间均存在这一观察所表明的，这些动力学无法按初始数据的大小排序。这并不会改变初始数据的大小，因为它只改变了第二个初始数据的符号。

1.7. 证明思路。若 $w_\Psi \in C^\infty([0,\infty) \times \mathbb{B}^d)$ 通过 $w_\Psi = w \circ \Psi$ 与 $w \in C^\infty(D^+(\Sigma_0))$ 相关，则方程 (4) 化为

$$0 = \widehat{\Box} w_\Psi(s,y) + F(\Psi(s,y), w_\Psi(s,y)), \tag{6}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$其中 $\Box$ 满足 $\Box(\cdot \circ \Psi) = \boxminus \cdot \circ \Psi$，即

$$\widehat{\Box} w_\Psi(s,y) = \left(\partial_s^2 + 2\partial_s \Lambda_y + \left(y^k y^\ell - \delta^{k\ell} \right) \partial_k \partial_\ell + \frac{2d - 3 - 3|y|^2}{1 - |y|^2} \partial_s + 4\Lambda_y + 2 \right) w_\Psi(s,y),$$

其中 $\Lambda_y := y^k \partial_{y^k}$。此外

$$F(\Psi(s,y), w_\Psi(s,y)) = (d-3) \frac{\sin\left(2|y| w_\Psi(s,y)\right) - 2|y| w_\Psi(s,y)}{2|y|^3}.$$

根据方程 (5) 中的分解，其中 $\phi_\Psi := \phi \circ \Psi$，$w_\Psi^* := w^* \circ \Psi$，可得

$$0 = \widehat{\Box} \phi_\Psi(s,y) + F'(\Psi(s,y), w_\Psi^*(s,y)) \phi_\Psi(s,y) + \mathcal{N}_\Psi(\phi_\Psi)(s,y), \tag{7}$$

其中

$$\mathcal{N}_\psi(\phi_\Psi)(s,y) = F(\Psi(s,y), (w_\Psi^* + \phi_\Psi)(s,y)) - F(\Psi(s,y), w_\Psi^*(s,y)) - F'(\Psi(s,y), w_\Psi^*(s,y)) \phi_\Psi(s,y).$$

注意，$w_\Psi^*(s,\ y) = \frac{2}{|y|} \arctan\left(\frac{|y|}{\sqrt{d-4}} \right)$ 与时间无关 s。我们将所有 $s \ge 0$ 的 $w_\Psi^*(y) := w_\Psi^*(s,\ y)$ 简记为。明确地说，式 (7) 为

$$0 = \left(\widehat{\Box} + V(y) \right) \phi_\Psi(s,y) + N(\phi_\Psi(s,\cdot))(y), \tag{8}$$

其中

$$\widehat{\Box}v(s,y)=\left[\partial_s^2+2\partial_s\Lambda_y+(y^ky^\ell-\delta^{k\ell})\partial_k\partial_\ell+\frac{2d-3-3|y|^2}{1-|y|^2}\partial_s+4\Lambda_y+2\right]v(s,y),$$

$$V(y)v(s,y):=-\frac{8(d-3)(d-4)}{(d-4+|y|^2)^2}v(s,y),$$

$$N(v(s,\cdot))(y):=(d-3)\frac{\sin\left(2|y|(w_\Psi^*(y)+v(s,y))\right)-2|y|v(s,y)-\sin\left(2|y|w_\Psi^*(y)\right)}{2|y|^3}-V(y)v(s,y).$$

考虑由方程 (8) 导出的抽象柯西问题，我们证明以下结果。

令 $W:=W_3$。我们引入空间 $\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$，它是 $C^\infty_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;W)^2$关于范数 $\|\mathbf{f}\|^2_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}:=\|\mathbf{W}\mathbf{f}\|^2_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d)}=\|Wf_1\|^2_{H^k(\mathbb{B}^d)}+\|Wf_2\|^2_{H^{k-1}(\mathbb{B}^d)}$ 的完备化

定理 1.7。设 d,k 如定理 *1.5* 中所述。存在 $\varepsilon>0$，使得抽象柯西问题（*ACP*）存在唯一的温和解 $\boldsymbol{\phi}\in C\left([0,\infty)\ \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})\right)$

$$\begin{cases}\partial_s\boldsymbol{\phi}(s) &=\mathbf{L}\boldsymbol{\phi}(s)+\mathbf{N}(\boldsymbol{\phi}(s))\ for\ all\ s>0,\\ \boldsymbol{\phi}(0) &=\mathbf{f},\end{cases}$$

对于所有满足 $\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}\le\varepsilon$的 $\mathbf{f}\in\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$，此外，我们还有以下衰减估计。存在 $\delta>0$，使得

$$\sup_{s\ge0}e^{\delta s}\left\|\boldsymbol{\phi}(s)\right\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}\lesssim\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}.$$

此外假设 $\mathbf{f}\in\mathcal{D}(\mathbf{L})$，$\boldsymbol{\phi}\in C\left([0,\infty)\ \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})\right)\cap C^1\left((0,\infty)\ \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})\right)$ 是（*ACP*）的唯一经典解。

我们将阐释定理 1.7 的构成要素，同时概述本文的内容。

- （ACP）的构造使得 $\mathbf{L}=\mathbf{L}_0+\mathbf{L}'$，其中 $\mathbf{L}_0$ 生成自由波流（对应于 $\Box$），而 $\mathbf{L}'$ 是势的算子类比；该势源于显式解附近非线性项的线性化（对应于 V）。$\mathbf{N}$ 是剩余的非线性项（对应于 N）。

- 关键在于，我们可以通过共形对合将其与一个相关的自由波问题联系起来，从而证明由 $\mathbf{L}_0$ 生成的流具有衰减估计。这种对应关系引出了加权函数空间，在其中衰减性质显而易见。共形反演所诱导的奇异空间权函数的倒数仅在奇数维情形下光滑，这正是我们将讨论范围限制在这一假设下的技术原因。

- 引入$\mathbf{L}'$ 来考虑由$\mathbf{L}$ 生成的流，不再构成真正的障碍，这一点令人惊讶，因为这通常是半群论证中最困难的部分。深入了解$\mathbf{L}$的谱结构后，我们发现，只有实部非负的孤立特征值才可能阻碍线性化波流的衰减。在相关的爆破解析问题中，以下谱分析分为两个区域：一方面是虚轴与时间平移对称性所诱导模态的特征值之间的区域（该特征值在相关的爆破解析问题中具有正实部）；另一方面是该特征值右侧的半平面。模态特征值右侧的半平面可通过标准的斯图姆-刘维尔论证处理。其左侧的区域则转化为求解一个连接问题，目前尚无通用的已知策略，而这通常也是分析中最困难的部分。不过，在我们的情形下，时间平移对称性所诱导的特征值位于虚轴左侧（这是因为时间平移对渐近行为没有影响），这意味着

斯图姆-刘维尔论证足以证明不存在实部非负的特征值。

- 随后，利用线性化流的衰减性质，通过标准的不动点论证处理完整的非线性问题。
- 最后一节探讨定理 1.7的影响，尤其是它与定理 1.5的联系。

1.8. **相关研究**。 作为几何波动方程的典型例子之一，波映射方程在过去几十年中受到了广泛关注。由于相关文献浩如烟海，不可能一一回顾，我们将讨论范围限定于相关偏微分方程的长时间动力学，主要关注自相似解，并顺带提及爆破解动力学。关于色散型偏微分方程理论的详尽论述，参见 [28, 38], ；关于波映射的专门介绍，参见 [29], 以及较新的文献 [22]。

超临界波映射方程存在自相似爆破解这一结果在 [35] 中得到证明，并分别在 [39] 中为 $n = 3$ 、在 [4] 中为 $n \geq 4$给出了闭式解。对于超临界波映射而言，不导致爆破的大初始数据这一理论问题仍鲜有研究。一个显著的例外是单等变（或共旋转）波映射的情形：在 [8] 中，研究者沿用了针对相关幂次非线性波动方程（非线性波动方程）问题所开创的步骤 [30], ，构造出光滑的整体解，并证明它们在某些扰动下稳定。然而，本项目并未涉及爆破解 u^* 在 $t \to \infty$ 的爆破后于从奇性发出的光锥内的稳定性，因为该构造要求沿时间轴满足一个小量条件，而时间反演爆破解并不满足这一条件。另一种思路见 [23], ，其中研究者在能够容纳爆破解奇异行为的Besov空间中追踪演化过程。在数值方面，区分爆破解与整体解的阈值——这相当于考察第一激发态——是 [1] 在 $3 \leq n \leq 6$ 维中的研究内容。

对于三维三次波动方程，径向对称情形下爆破后的双曲面稳定性问题，数值方面的研究见 [6] ，理论方面的研究见 [19] ；非径向对称情形的结果见 [7], 经典意义下的初值问题见 [20]。 [6] 和 [19] 中的核心思路，是利用（线性化）方程的共形对称性，将向前稳定性与爆破稳定性联系起来。尽管三次非线性波动方程的整个方程都具有共形对称性，但论证只需利用线性化方程的对称性。我们采用类似的方法。不同之处在于，我们的方程被转化为一个至少五维的波动方程，因此需要引入在零无穷远处奇异的维数相关权函数，这与三维三次非线性波动方程的情形不同。与此同时，这也带来了维数诱导的时间衰减性质。因此，本文中的非线性稳定性具有零余维；相比之下，三次波动方程的情形则表述为余维4稳定性。 [19]中的稳定性结论是在扰动满足如下条件时给出的：完整解属于对其进行扰动的同一函数空间。维数诱导的奇异权函数带来的一个后果，也是一个主要区别在于，跟踪扰动所用的函数空间并不包含显式的爆破解本身。

1.9. **记号**。 自然数集、实数集和复数集分别记作 $\mathbb{N}$、 $\mathbb{R}$、 $\mathbb{C}$ 。半径为 1 的 d维开球记作 $\mathbb{B}^d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| < 1\}$。

若 a_ι， $b_\iota \geq 0$ 是由参数 $\iota \in I$索引的非负实数，我们定义关系$a_\iota \lesssim b_\iota$ ： 若存在常数 $C > 0$ ，使得对所有 $\iota \in I$， $a_\iota \leq C b_\iota$ 一致成立。相应地，$a_\iota \simeq b_\iota$ 当且仅当 $a_\iota \lesssim b_\iota$ 且 $b_\iota \lesssim a_\iota$。

对于由定义在 $\mathbb{B}^d$ 上的函数组成的函数空间 $X(\mathbb{B}^d)$，以及在 $\mathbb{B}^d$ 上非零的权函数 w ，我们将 $X(\mathbb{B}^d; w)$ 记作由 $w^{-1}X(\mathbb{B}^d) = \{f \mid wf \in X(\mathbb{B}^d)\}$ 得到的空间。若 $X(\mathbb{B}^d)$ 是赋范向量空间，则范数$\|\cdot\|_{X(\mathbb{B}^d)}$ 通过$\|f\|_{X(\mathbb{B}^d; w)} = \|wf\|_{X(\mathbb{B}^d)}$ 在 $X(\mathbb{B}^d; w)$ 上诱导出一个范数。

为避免混淆，我们举例说明：将测度乘以 w 得到的加权 L^2 空间，有时记作 $L^2(\mathbb{B}^d, w(r)\mathrm{d}r)$，在我们的记号中对应于 $L^2(\mathbb{B}^d; \sqrt{w})$。

我们用 $C^\infty(\overline{\mathbb{B}^d})$ 表示由光滑函数组成的空间，这些函数在 $\mathbb{B}^d$ 上所有阶的偏导数均有界。我们也滥用记号，将 $C^\infty([0,1])$、$C^\infty([0,\infty))$、$C^\infty([0,\infty)\times\mathbb{B}^d)$ 和$C^\infty([0,\infty)\times\mathbb{B}^d)$也记作同一形式。径向函数子空间定义为

$$C^\infty_{\mathrm{rad}}(\overline{\mathbb{B}^d}) := \{f \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}^d}) \mid f \text{ is radially symmetric}\}.$$

闭单位区间上的光滑偶函数空间定义为

$$C^\infty_{\mathrm{ev}}([0,1]) := \{f \in C^\infty([0,1]) \mid \forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x\to 0^+} f^{(2n-1)}(x) = 0\}.$$

回顾 [31]，对于任意 $f \in C^\infty_{\mathrm{rad}}(\overline{\mathbb{B}^d})$，都存在一个径向剖面函数 $f \in C^\infty_{\mathrm{ev}}([0,1])$，使得$f(x) = f(|x|)$。

对于 $k \in \mathbb{N}_0$，我们将 $f \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}^d})$ 的 Sobolev 范数定义为

$$\|f\|_{H^k(\mathbb{B}^d)} := \Big(\sum_{0\le|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha f\|^2_{L^2(\mathbb{B}^d)}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

赋予范数 $\|\cdot\|_{H^k(\mathbb{B}^d)}$ 的空间 $C^\infty(\overline{\mathbb{B}^d})$ 是一个内积空间，其完备化为 Sobolev 空间 $H^k(\mathbb{B}^d)$。

对于函数空间 X_1，X_2，我们考虑由函数元组组成的积空间 $X_1\times X_2$

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix},$$

其中 $f_1 \in X_1$, $f_2 \in X_2$。本文中我们始终用粗体字母表示积空间中的元素。如果 X_1，X_2 是赋范空间，那么 $X_1\times X_2$也是赋范空间。为与内积结构相容，积空间上的范数总是由 $\|\mathbf{f}\|_{X_1\times X_2} := \sqrt{\|f_1\|^2_{X_1} + \|f_2\|^2_{X_2}}$ 所诱导。

2. Free wave evolution in FHSC

下文中，我们将在相似坐标下，为与重缩放波算子相关的流建立一个泛函分析框架

$$\widehat{\Box} w(s,y) = \left[\partial_s^2 + 2\partial_s\Lambda_y + (y^k y^\ell - \delta^{k\ell})\partial_k\partial_\ell + \frac{2d-3-3|y|^2}{1-|y|^2}\partial_s + 4\Lambda_y + 2\right] w(s,y). \tag{9}$$

2.1. 与爆破问题的联系。 我们注意到一个关键事实：变量

$$f(s,y) := e^{(d-2)s}(1-|y|^2)^{\frac{3-d}{2}} w(s,y) \tag{10}$$

给出了微分算子

$$\frac{e^{(d-2)s}}{(1-|y|^2)^{\frac{d-3}{2}}}\widehat{\Box} w(s,y) = \left[\partial_s^2 + 2\partial_s\Lambda_y - (\delta^{k\ell} - y^k y^\ell)\partial_{y^k}\partial_{y^\ell} + \partial_s + 2\Lambda_y\right] f(s,y) =: \Box^* f(s,y), \tag{11}$$

例如，由物理坐标中的共形对称性可知，这出现在相关爆破解析问题 [15] 的自由演化中。这表明，应在与共形对称性相容的函数空间中追踪其演化。

首先，回顾爆破解析问题中采用的泛函分析框架。通过引入分量 $f_1(s,y) := f(s,y)$ $f_2(s,y) := (\partial_s + \Lambda_y) f(s,y)$，式 (11) 被改写为如下的一阶系统

$$\partial_s \begin{bmatrix} f_1(s,y) \\ f_2(s,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2(s,y) - \Lambda_y f_1(s,y) \\ -\Lambda_y f_2(s,y) - f_2(s,y) + \Delta_y f_1(s,y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Box^* f(s,y) \end{bmatrix}. \tag{12}$$

由此得到以下定义。

定义 2.1. 令 $d \in \mathbb{N}$，$(g_1, g_2) \in C^\infty(\mathbb{B}^d)^2$，并定义

$$\mathbf{L}_0^* \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}(y) := \begin{bmatrix} g_2(y) - \Lambda g_1(y) \\ -\Lambda g_2(y) - g_2(y) + \Delta g_1(y) \end{bmatrix}.$$

$\widehat{\ }$为建立与方程 (9) 中微分算子 $\Box$所对应演化之间的联系，我们定义以下分量

$$w_1(s,y) := w(s,y), \qquad w_2(s,y) := \left(\partial_s + \Lambda_y + (d-2) + (d-3) \frac{|y|^2}{1-|y|^2} \right) w(s,y). \tag{13}$$

定义 $W(y) := (1-|y|^2)^{\frac{3-d}{2}}$，即本节开头所述共形权重的空间部分，并令 $\mathbf{W}h := (Wh_1, Wh_2)$，且对一般的 $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$，令 $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{h} := (\frac{1}{W} h_1, \frac{1}{W} h_2)$。选取这对 (w_1, w_2)，使得

$$e^{(2-d)s} \mathbf{W}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(s,\cdot) \\ f_2(s,\cdot) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1(s,\cdot) \\ w_2(s,\cdot) \end{bmatrix}. \tag{14}$$

值得注意的是

$$\begin{aligned} \partial_s \begin{bmatrix} w_1(s,\cdot) \\ w_2(s,\cdot) \end{bmatrix} &= \mathbf{W}^{-1} \partial_s \begin{bmatrix} e^{(2-d)s} f_1(s,\cdot) \\ e^{(2-d)s} f_2(s,\cdot) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{W}^{-1} e^{(2-d)s} \left(((2-d)\mathbf{I} + \partial_s) \begin{bmatrix} f_1(s,\cdot) \\ f_2(s,\cdot) \end{bmatrix} \right) \\ &= \mathbf{W}^{-1} e^{(2-d)s} \left(((2-d)\mathbf{I} + \mathbf{L}_0^*) \begin{bmatrix} f_1(s,\cdot) \\ f_2(s,\cdot) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Box^* f(s,\cdot) \end{bmatrix} \right) \\ &= \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}_0^{*,2-d} \mathbf{W} \begin{bmatrix} w_1(s,\cdot) \\ w_2(s,\cdot) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \widehat{\Box} w(s,\cdot) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

因此，所关注的算子形式上为 $\mathbf{L}_0 := \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}_0^{*\,2-d}{}, \mathbf{W}$，其中 $\mathbf{L}_0^{*\,2-d}{}$，表示平移算子 $\mathbf{L}_0^* - (d-2)\mathbf{I}$。

为应用 [15, 第 63 页定理 B 的结果1]，，我们只需构造相应的函数空间。这里我们假设维数为奇数，以确保 W 的光滑性。

定义 2.2。设 $3 \le d \in \mathbb{N}$ 为奇数且 $k \in \mathbb{N}$。定义在边界处以 $\frac{d-3}{2}$ 阶消失的光滑函数空间如下：

$$C^\infty(\overline{\mathbb{B}^d}; W) := \left\{ f \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}^d}) : Wf \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}^d}) \right\}.$$

我们在 $C^\infty_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d; W)^2$ 上赋予范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})} := \|\mathbf{W}\cdot\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d)}$。记 $\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d; \mathbf{W})$ 为 $C^\infty_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d; W)^2$ 关于 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}$ 的完备化。类似地，我们定义径向子空间

$$C^\infty_{\mathrm{rad}}(\overline{\mathbb{B}^d}; W) := \left\{ f \in C^\infty_{\mathrm{rad}}(\overline{\mathbb{B}^d}) : Wf \in C^\infty_{\mathrm{rad}}(\overline{\mathbb{B}^d}) \right\}.$$

径向子空间 $\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d; \mathbf{W}) \subset \mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d; \mathbf{W})$ 是作为 $C^\infty_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d; W)^2$ 关于 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}$ 的完备化而得到的。

注记 2.3。• 显然，$W:(C^\infty_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;W)^2,\|\cdot\|_{\overline{\mathcal{H}^k}(\mathbb{B}^d;W)})\to(C^\infty(\mathbb{B}^d)^2,\|\cdot\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d)})$ 是内积空间之间的等距同胚，它可延拓为 $\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;W)$ 与 $\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d)$ 之间的酉算子，并且其在径向子空间上的限制亦然。在记号上，我们将不区分 W 及其在索伯列夫空间上的延拓。

- $(\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W}))_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个希尔伯特空间的嵌套序列，因为$(\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d))_{k\in\mathbb{N}}$同样具有这一性质。

- 注意，空间 $\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$ 与通过将测度乘以任意权函数所得到的加权乘积 *Sobolev* 空间之间，没有显而易见的关系。

2.2. **自由演化一致指数稳定**。 经过这些准备，我们现在可以陈述每个大于或等于3的奇数维以及每种正则性下自由演化的精确增长估计。

引理2.4。 设 $3\le d\in\mathbb{N}$ 为奇数且 $k\in\mathbb{N}$。算子$\mathbf{L}_0:\ \mathcal{D}(\mathbf{L}_0)\ \subset\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})\ \to\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$，定义为

$$\mathbf{L}_0\mathbf{f}=\mathbf{W}^{-1}\mathbf{L}_0^{*,2-d}\mathbf{W}\mathbf{f},\qquad\qquad \mathcal{D}(\mathbf{L}_0):=C^\infty(\overline{\mathbb{B}^d};W)^2,$$

是可闭的，其闭包$\mathbf{L}_0:\ \mathcal{D}\left(\mathbf{L}_0\right)\subset\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})\ \to\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$，定义为

$$\overline{\mathbf{L}_0}\mathbf{f}=\mathbf{W}^{-1}\overline{\mathbf{L}_0^{*,2-d}}\mathbf{W}\mathbf{f},\qquad\qquad \mathcal{D}\left(\overline{\mathbf{L}_0}\right)=\mathbf{W}^{-1}\mathcal{D}\left(\overline{\mathbf{L}_0^*}\right),$$

生成强连续半群$\mathbf{S}_0:=\mathbf{W}^{-1}\mathbf{S}_0^{*\,2-d},(\cdot)\mathbf{W}:\ [0,\infty)\ \to\ \mathcal{L}\left(\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})\right)$。对于每个 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$，都存在 $M_{d,k,\varepsilon}\ge1$，使得该半群满足增长估计

$$\|\mathbf{S}_0(s)\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}\le M_{d,k,\varepsilon}e^{(\omega_{d,k,\varepsilon}-(d-2))s}\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})},\qquad\qquad \omega_{d,k,\varepsilon}=\max\left\{\frac{d}{2}-k,\varepsilon\right\}$$

对所有$\mathbf{f}\ \in\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$ 以及所有 $s\ge0$，均成立。

所涉及的算子与径向对称性相容。具体而言，由下式给出的算子$\mathbf{L}_0\restriction\ :\mathcal{D}(\mathbf{L}_0\restriction)\ \subset\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$ $\to\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$

$$\mathbf{L}_0\restriction\mathbf{f}=\mathbf{L}_0\mathbf{f},\qquad\qquad \mathcal{D}(\mathbf{L}_0\restriction)=C^\infty_{\mathrm{rad}}(\overline{\mathbb{B}^d};W)^2$$

i是可闭的，其闭包$\mathbf{L}_0\restriction:\ \mathcal{D}(\overline{\mathbf{L}_0}\restriction)\ \subset\overline{\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})\ \to\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$ 由下式给出

$$\overline{\mathbf{L}_0\restriction}\mathbf{f}=\overline{\mathbf{L}_0}\mathbf{f},\qquad\qquad \mathcal{D}(\overline{\mathbf{L}_0\restriction})=\mathcal{D}(\overline{\mathbf{L}_0})\cap\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W}),$$

生成径向子空间半群$\mathbf{S}_0\restriction:\ [0,\infty)\ \to\mathcal{L}\left(\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})\right)$，其定义如下

$$\mathbf{S}_0\restriction(s)\mathbf{f}=\mathbf{S}_0(s)\mathbf{f}$$

对所有$\mathbf{f}\ \in\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$ 以及所有 $s\ge0$。

证明。注意，L_0^* 等于 [15, 第 62 页定理 B 中的算子。1] 对于 $R_0=R=1,\ h\equiv-1$。S_0 是一个半群，因为它通过同胚 W 与 $\mathrm{S}_0^{*\,2-d}$ 相似（关于相似半群的介绍，参见 [21, 第 59] 页）。这里，$\mathrm{S}_0^{*\,2-d}$，$(s):=e^{-(d-2)s}\mathrm{S}_0^*(s)$ 是在 [15]中得到的 S_0^*的重标度半群。$\mathrm{S}_0=\mathrm{W}^{-1}\underline{\mathrm{S}_0^{*\,2-d}}$ 的生成元 W 由 $\mathrm{W}^{-1}\mathrm{L}_0^{*\,2-d}$ 给出；由于 W 是一个同胚，它等于 L_0 的闭包。函数空间的构造方式使得增长估计可直接由 [15]中的估计以及半群缩放 [21, 第 60] 页得出。

$$\|\mathbf{S}_0(s)\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}=\left\|\mathbf{W}^{-1}\mathbf{S}_0^{*,2-d}(s)\mathbf{W}\mathbf{f}\right\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}\le M_{d,k,\varepsilon}e^{(\omega_{d,k,\varepsilon}-(d-2))s}\|\mathbf{W}\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d)}$$

对于所有的$\mathbf{f}\ \in\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$ 以及所有的 $s\ge0$。

能够限制到径向子空间，是因为在 [15]中也可以这样做。 □

注 2.5。 我们指出，增长界是尖锐的，因为1的共形对合给出了（乘以 t 后）容许解 $e^{-(d-2)s}(1-|y|^2)^{\frac{d-3}{2}}$ 。

注 2.6. 尽管先验地，这分别是关于每个 $k \geq 1$ 在$\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$ 上的一对生成元与半群的陈述，但应将这族半群视为作用在最大空间$\mathcal{H}^{k_{\min}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$ 上的同一个半群，并在限制到子空间$\mathcal{H}^{\ell}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$时具有附加性质。这一点在远为一般的情形下也成立，有时被称为“限制性质” *[26, 引理 C.1]*。对于后文出现的任何一族半群与生成元，这一点同样成立，这也解释了为何在全文记号中我们略去半群与生成元对底层希尔伯特空间的依赖。

3. Linearised evolution

在本节中，我们将势作为有界扰动引入演化。由于该项来自超临界波映射所诱导的非线性项，我们将讨论限制于空间维数 $d \geq 5$。与上一节相同，我们假设 d 为奇数。事实上，在本节中，设 $d \geq 5$ 为奇数且 $k \in \mathbb{N}$。我们关注的是线性化演化

$$(\widehat{\Box} + V(y))v(s,y) = 0,$$

其中 $V(y) = -\frac{8(d-3)(d-4)}{(d-4+|y|^2)^2}$。

注意，对于所有$k \in \mathbb{N}$，乘以 V定义了一个有界算子 $H^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\, W) \to H^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\, W)$，因为 V的每阶导数在 $\mathbb{B}^d$上都有界。

3.1. 线性化半群的生成。

我们立即转到半群图景。

定义 3.1。径向算子 $\mathbf{L} := \mathbf{L}_0\restriction + \mathbf{L}'$： $\mathcal{D}(\mathbf{L}) \subset \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W}) \to \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$ 定义为 $\mathcal{D}(\mathbf{L}) := \mathcal{D}(\mathbf{L}_0\restriction)$，并且

$$\mathbf{L}' \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})), \qquad \mathbf{L}'\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 \\ -Vf_1 \end{bmatrix}.$$

乘以 V 的有界性意味着$\mathbf{L}'$ 有界，尤其是闭的。因此$\mathbf{L}$ 是一个闭算子。半群的扰动理论表明，$\mathbf{L}$ 生成一个线性化波流。

引理 3.2。闭线性算子 $L: \mathcal{D}(L) \subset \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\, W) \to \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\, W)$ 是强连续单参数半群 $S: [0,\infty) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\, W))$ 的生成元。此外，设$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ 以及 $M_{d、k、\varepsilon}$、 $\omega_{d、k、\varepsilon}$ 为定理 *2.4* 中的常数。则 S 满足

$$\|\mathbf{S}(s)\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})} \leq M_{d,k,\varepsilon} e^{\left(\omega_{d,k,\varepsilon} - (d-2) + M_{d,k,\varepsilon}\|\mathbf{L}'\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W}))}\right)s} \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}$$

对于所有 $\mathbf{f} \in \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$ 以及 $s \geq 0$。

证明。 生成具有所述增长估计的半群 $\mathbf{S}$ 的算子 $\mathbf{L}$ ， 可直接由有界扰动定理 [21, p. 158] 应用于定理 2.4.□中的半群 $\mathbf{S}_0\restriction$ 得出。

由于我们无法控制 $M_{d,k,\varepsilon}\|\mathbf{L}'\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W}))}$ ，因此该增长估计不足以证明稳定演化。接下来，我们将通过深入了解$\mathbf{L}$的谱来改进增长估计。

3.2. **谱分析**。 下面简要介绍本节其余部分的安排：

- 首先，我们证明$\mathbf{L}'$ 是紧算子，并且$\mathbf{L}$的谱中对应于不稳定演化的部分被限制在一个紧区域内，再应用解析 Fredholm 定理，从而将线性稳定性归结为模态稳定性。

- 接下来，我们证明模态解会导出一维问题的解。
- 随后，通过标准的 Sturm-Liouville 理论应用排除这些解的存在。

- 通过应用 Gearhart-Pr¨uss-Greiner 定理，谱分析得出演化具有线性稳定性。

第一步是注意到$\mathbf{L}'$ 不仅有界，而且还是紧算子；这可直接由 Sobolev 嵌入的紧性推出。

引理 3.3. 算子$\mathbf{L}'$: $\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W}) \to \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$ 是紧算子。

证明。 将$\mathbf{L}'$ 分解为有界算子

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W}) \to \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d) \to H^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d) \hookrightarrow H^{k-1}_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d) \to \ \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d) \ \to \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W}),\\
&\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \ \mapsto \begin{bmatrix} Wf_1 \\ Wf_2 \end{bmatrix} \ \mapsto \ Wf_1 \ \mapsto \ Wf_1 \ \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ -VWf_1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ -Vf_1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

由于中间的 Sobolev嵌入是紧的，$\mathbf{L}'$ 作为有界算子与紧算子的复合是紧算子。□

接下来，我们将证明$\mathbf{L}$ 的谱中对应于不稳定演化的部分被限制在一个有界区域内。

Sinc为显式描述$\mathbf{L}_0\restriction$，我们先给出一个技术性引理 a.

引理 3.4。 设$\mathbf{f}\in \mathcal{D}\left(\mathbf{L}_0\restriction\right)$，并令$\mathbf{g}:=(g_1,g_2):=\mathbf{L}_0\restriction\mathbf{f}$。则$\mathbf{f}=(f_1,f_2)$ 满足

$$\begin{aligned}
g_1 &= f_2 - W^{-1}\Lambda(Wf_1) - (d-2)f_1,\\
g_2 &= -W^{-1}\Lambda(Wf_2) - f_2 + W^{-1}\Delta(Wf_1) - (d-2)f_2,
\end{aligned}$$

在分布的意义下。

证明。设$\mathbf{f} \in \mathcal{D}\left(\mathbf{L}_0\restriction\right)$ 根据闭包的定义，存在一个序列$(\mathbf{f}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbf{L}_0\restriction) = C^\infty_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\ W)^2$，使得$\lim_{n\to\infty}\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_n\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})} = 0$ 且 $\lim_{n\to\infty}\|\mathbf{g} - \mathbf{g}_n\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})} = 0$，其中 $\mathbf{g}_n := \mathbf{L}_0\restriction\mathbf{f}_n$。根据 $\mathbf{L}_0\restriction$ 的定义，我们有

$$\begin{aligned}
g_{1n} &= f_{2n} - W^{-1}\Lambda(Wf_{1n}) - (d-2)f_{1n},\\
g_{2n} &= -W^{-1}\Lambda(Wf_{2n}) - f_{2n} + W^{-1}\Delta(Wf_{1n}) - (d-2)f_{2n},
\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{f}_n = (f_{1n},\ f_{2n})$ 和 $\mathbf{g}_n = (g_{1n},\ g_{2n})$。用 $C^\infty_c\left(\mathbb{B}^d\right)$ 中的一个函数检验这些方程，分部积分并取极限 $n\to\infty$，即可得到这些结论。□

引理 3.5。 设 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ 和 $\omega_{d,\ k,\ \varepsilon}$ 为定理 *2.4* 中相应的常数。存在 $R>0$，使得 $\sigma(\mathbf{L}) \cap \Gamma_R = \emptyset$，其中

$$\Gamma_R := \{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > \frac{\omega_{d,k,\varepsilon} - (d-2)}{2}, |z| > R\}.$$

此外，我们有

$$\sup_{\lambda\in\Gamma_R} \left\|(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W}))} < \infty.$$

证明。由定理 2.4 中自由预解算子 [21,p. 55] 的增长估计 $\|\mathbf{S}_0\restriction(s)\|_{\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})} \le M_{d,k,\varepsilon} e^{(\omega_{d,k,\varepsilon}-(d-2))s}$，可得其积分表示。

$$\mathbf{R}(\lambda, \overline{\mathbf{L}_0\restriction}) := (\lambda\mathbf{I} - \overline{\mathbf{L}_0\restriction})^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\mathbf{S}_0\restriction(s)\,\mathrm{d}s$$

对所有满足 $\mathrm{Re}(\lambda) > \omega_{d,k,\varepsilon} - (d-2)$ 的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 均存在。*Birman–Schwinger* 原理，即该恒等式

$$\lambda\mathbf{I} - \mathbf{L} = (\mathbf{I} - \mathbf{L}'\mathbf{R}(\lambda, \overline{\mathbf{L}_0\restriction}))(\lambda\mathbf{I} - \overline{\mathbf{L}_0\restriction}),$$

这意味着，对于 $\mathrm{Re}(\lambda) > \omega_{d,k,\varepsilon} - (d-2)$，$\lambda\mathbf{I} - \mathbf{L}$ 有界可逆，当且仅当 $\mathbf{I} - \mathbf{L}'\mathbf{R}(\lambda, \mathbf{L}_0)$ 有界可逆。

我们证明，借助 Neumann 级数论证，对某个 $R > 0$ 的所有 $\lambda \in \Gamma_R$，$\mathrm{I} - \mathrm{L}'\mathrm{R}(\lambda, \mathrm{L}_0)$ 是有界可逆的。设 $\mathrm{Re}(\lambda) > \omega_{d,k,\varepsilon} - (d-2)$，$\mathrm{g} \in \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d; \mathrm{W})$，并令 $\mathrm{R}(\lambda, \mathrm{L}_0\restriction)\mathrm{g} =: \mathrm{f}$。因此 $\mathrm{f} \in \mathcal{D}(\mathrm{L}_0\restriction)$ 且 $(\lambda\mathrm{I} - \overline{\mathrm{L}_0\restriction})\mathrm{f} = \mathrm{g}$。特别地，由定理 3.4，我们有

$$g_1 = -f_2 + W^{-1}\Lambda(Wf_1) + (d - 2 + \lambda)f_1,$$

i.e.

$$f_1 = \frac{1}{d-2+\lambda}(f_2 - W^{-1}\Lambda(Wf_1) + g_1).$$

因此

$$\begin{aligned}
\left\|\mathbf{L}'\mathbf{R}(\lambda, \overline{\mathbf{L}_0\restriction})\mathbf{g}\right\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})} &= \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ -Vf_1 \end{pmatrix}\right\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})} \\
&\lesssim \frac{1}{|d-2+\lambda|}\left(\|Wf_2\|_{H^{k-1}(\mathbb{B}^d)} + \|\Lambda(Wf_1)\|_{H^{k-1}(\mathbb{B}^d)} + \|Wg_1\|_{H^{k-1}(\mathbb{B}^d)}\right), \\
&\lesssim \frac{1}{|d-2+\lambda|}(\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})} + \|\mathbf{g}\|_{\mathcal{H}^{k-1}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}) \\
&\lesssim \frac{1}{|d-2+\lambda|}\|\mathbf{g}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})},
\end{aligned}$$

其中我们在第三个和 $\lesssim \|\cdot\|_{H^k(\mathbb{B}^d)}$ 中使用了 $\|\Lambda\cdot\|_{H^{k-1}}$

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})} = \left\|\mathbf{R}(\lambda, \overline{\mathbf{L}_0\restriction})\mathbf{g}\right\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})} \le \frac{M_{d,k,\varepsilon}}{|\operatorname{Re}\lambda - (\omega_{d,k,\varepsilon} - (d-2))|}\|\mathbf{g}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})} \lesssim \|\mathbf{g}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}$$

第四步中使用了这一点。请注意，这里我们利用了实部与增长估计之间的距离可以一致地估计为远离 0。取足够大的 $R > 0$ 可得 $\left\|\mathrm{L}'\mathrm{R}(\lambda, \mathrm{L}_0\restriction)\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathrm{W}))} \le \frac{1}{2}$ 对所有 $\lambda \in \Gamma_R$ 均成立。因此，$(\mathrm{I} - \mathrm{L}'\mathrm{R}(\lambda, \mathrm{L}_0\restriction))^{-1}$ 作为 Neumann 级数存在，并且 $\left\|(\mathrm{I} - \mathrm{L}'\mathrm{R}(\lambda, \mathrm{L}_0\restriction))^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathrm{W}))} \le 2$ 对所有 $\lambda \in \Gamma_R$ 均成立。附加结论可由

$$\begin{aligned}
\sup_{\lambda\in\Gamma_R}\left\|(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W}))} &\le \sup_{\lambda\in\Gamma_R}\left\|\mathbf{R}(\lambda, \overline{\mathbf{L}_0\restriction})\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W}))}\left\|(\mathbf{I} - \mathbf{L}'\mathbf{R}(\lambda, \overline{\mathbf{L}_0\restriction}))^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W}))} \\
&\le \frac{2M_{d,k,\varepsilon}}{|\operatorname{Re}\lambda - (\omega_{d,k,\varepsilon} - (d-2))|} \lesssim 1.
\end{aligned}$$

□

注 3.6. 注意，通过对与谱的连通部分之间的距离施加较弱的约束，集合 Γ_R 甚至可以扩大。为简便起见，我们选取距离为 $\omega_{d,k,\varepsilon} - (d-2)$ 2，但证明对任意正距离都成立。不过，采用较粗略的估计便能获得足够的信息。

结合前面的结果，我们将问题归结为模态稳定性。也就是说，由于$\mathbf{L}'$是紧的，定理 3.5 与解析 *Fredholm* 定理 [37, p. 194]相结合可知，对于所有满足 $\mathrm{Re}\,\lambda > {}^{\omega_{d,k,\varepsilon}-(d-2)}{}_2$ 的 $\lambda \in \mathbb{C}$，$\lambda\mathbf{I} - \mathbf{L}$ 都是有界可逆的，只有有限个特征值例外，且每个特征值的代数重数有限。按照惯用术语，我们将对应于这些特征值的特征函数称为模态解。

为了找到模态解，我们需要求解 $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{L})\mathbf{f} = 0.$。我们证明，潜在的模态解会导出一维问题的光滑解。随后，我们排除它们的存在。

引理 3.7. 任何满足$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{L})\mathbf{f} = 0$ 的非零$\mathbf{f} \in \overline{\mathcal{D}(\mathbf{L})} = \mathcal{D}(\mathbf{L}_0\restriction) \subset \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$，其中$\lambda \in \mathbb{C}$ 且 $\mathrm{Re}(\lambda) > -1$，都会导出一个非零光滑的 $\widetilde{f}_1^W \in C^\infty([0,1])$，它满足

$$((\cdot)^2-1)(\widetilde{f}_1^W)'' + \frac{2(\lambda+d-1)(\cdot)^2+1-d}{(\cdot)}(\widetilde{f}_1^W)' + \left((\lambda+d-1)(\lambda+d-2)+V\right)\widetilde{f}_1^W = 0$$

并且满足

$$\widetilde{f}_1^W \simeq 1$$

在两个端点附近。

证明。根据闭包的定义，$\mathbf{f} \in \mathcal{D}\left(\mathbf{L}_0\restriction\right) \subset \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$ 意味着存在一个序列 $(\mathbf{f}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\, W)^2$，使得 $\lim_{n\to\infty}\|\mathbf{f}-\mathbf{f}_n\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})} = 0$，且 $\lim_{n\to\infty}\|(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L})\mathbf{f}_n\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})} = 0$。记 $\mathbf{g}_n := (\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L})\mathbf{f}_n \subset C^\infty_{\mathrm{rad}}\left(\mathbb{B}^d;\, W\right)^2$。令 $\lambda_1 := \lambda+d-1, \lambda_2 := \lambda+d-2$。根据 $\mathbf{L}$ 的定义，我们有

$$\begin{cases} \lambda_2 f_{1n} - f_{2n} + W^{-1}\Lambda(W f_{1n}) = g_{1n}, \\ \lambda_1 f_{2n} + W^{-1}\Lambda(W f_{2n}) - W^{-1}\Delta(W f_{1n}) + V f_{1n} = g_{2n}, \end{cases}$$

其中 $(f_{1n}, f_{2n}) = \mathbf{f}_n, (g_{1n}, g_{2n}) = \mathbf{g}_n$。为简化计算，我们利用 $\mathbf{W}$ 建立的一一对应关系，转而考虑 $(\mathbf{W}\mathbf{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\mathbf{W}\mathbf{g}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d)^2$。于是，上述方程变为

$$\begin{cases} \lambda_2 f_{1n}^W - f_{2n}^W + \Lambda f_{1n}^W = g_{1n}^W, \\ \lambda_1 f_{2n}^W + \Lambda f_{2n}^W - \Delta f_{1n}^W + V f_{1n}^W = g_{2n}^W, \end{cases}$$

由 $(f_{1n}^W, f_{2n}^W) := \mathbf{W}\mathbf{f}_n$ 和 $(g_{1n}^W, g_{2n}^W) := \mathbf{W}\mathbf{g}_n$ 给出。用波浪号标记径向代表，方程写作

$$\begin{cases} \lambda_2 \widetilde{f}_{1n}^W - \widetilde{f}_{2n}^W + (\cdot)(\widetilde{f}_{1n}^W)' = \widetilde{g}_{1n}^W, \\ \lambda_1 \widetilde{f}_{2n}^W + (\cdot)(\widetilde{f}_{2n}^W)' - \frac{d-1}{(\cdot)}(\widetilde{f}_{1n}^W)' - (\widetilde{f}_{1n}^W)'' + V\widetilde{f}_{1n}^W = \widetilde{g}_{2n}^W. \end{cases}$$

对 $\widetilde{f}_{1n}^W$ 求解可得

$$\begin{cases} \lambda_2 \widetilde{f}_{1n}^W + (\cdot)(\widetilde{f}_{1n}^W)' - \widetilde{g}_{1n}^W = \widetilde{f}_{2n}^W, \\ ((\cdot)^2-1)(\widetilde{f}_{1n}^W)'' + \frac{2\lambda_1(\cdot)^2+1-d}{(\cdot)}(\widetilde{f}_{1n}^W)' + (\lambda_1\lambda_2+V)\,\widetilde{f}_{1n}^W = (\cdot)(\widetilde{g}_{1n}^W)' + \lambda_1\widetilde{g}_{1n}^W + \widetilde{g}_{2n}^W. \end{cases}$$

回顾关于 $\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$ 中 $\mathbf{f}_n, \mathbf{g}_n$ 的收敛假设，以及对每个 $h \in C^\infty_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d)$ 都成立的等价关系 $\|h\|_{H^k(\mathbb{B}^d)} \simeq \left\|\sqrt{1-|\cdot|^2}^{\,k}\,\widetilde{h}\right\|_{H^k(0,1)}$，参见引理 B.4]。这意味着 $\widetilde{f}_{1n}^W, \widetilde{g}_{1n}^W$ 是 $H^k((0,1);(\cdot)^{\frac{d-1}{2}})$ 中的柯西序列，其极限函数分别为 $\widetilde{f}_1^W \neq 0, 0$。特别是，这

意味着对每个 $\delta > 0$ 都有 $\widetilde{f}_1^W \in H^k((\delta, 1))$，进而推出分布收敛。因此，分布微分方程为

$$((\cdot)^2 - 1)(\widetilde{f}_1^W)'' + \frac{2\lambda_1(\cdot)^2 + 1 - d}{(\cdot)}(\widetilde{f}_1^W)' + (\lambda_1\lambda_2 + V)\,\widetilde{f}_1^W = 0.$$

在 (0,1) 上，这是一个具有光滑系数的常微分方程。因此，解已经是经典解 [27, p. 58], 并且在第二步中光滑。

我们转而考察端点处的行为。我们计算 Frobenius 指标

$$\{0, 2-d\} \text{ at } 0 \qquad \text{and} \qquad \{0, -\lambda - \frac{d-3}{2}\} \text{ at } 1,$$

$\widetilde{f}_1^W$ 的。在 $r = 0$ 附近，基本解组 (ϕ_1, ϕ_2) 为

$$\phi_1(r) := r^0\varphi_1(r), \qquad \phi_2(r) := r^{2-d}\varphi_2(r) + C\log(r)\phi_1(r)$$

具有解析性 φ_1, φ_2 在 $r = 0$ 附近，其中 $\varphi_1(0) = 1 = \varphi_2(0)$。现在 $0 \neq \widetilde{f}_1^W \in H^k\left((0,1);\ (\cdot)^{\frac{d-1}{2}}\right)$ 规定 $\widetilde{f}_1^W$ 必须是 ϕ_1 的非零倍数，因为 ϕ_2 不属于 $H^k\left((0,1);\ (\cdot)^{\frac{d-1}{2}}\right)$。对所有 $d \geq 5$ 和 $k \in \mathbb{N}$，

在 $r = 1$ 附近，基本解组 $(\phi_1,\ \phi_2)$ 为

$$\phi_1(r) = (1-r)^0\varphi_1(r), \qquad \phi_2(r) = (1-r)^{-\lambda - \frac{d-3}{2}}\varphi_2(r) + C\log(1-r)\phi_1(r)$$

同样，在 $r = 1$ 附近有解析的 φ_1，φ_2，其中 $\varphi_1(1) = 1 = \varphi_2(1)$。注意，根据关于 λ 的假设，$\mathrm{Re}(-\lambda - \frac{d-3}{2}) < 0$。因此，$\phi_2'$ 不是平方可积的。于是，该解在 $r = 1$ 附近必为 ϕ_1 的非零倍数。

总之，我们已经证明 $\widetilde{f}_1^W \neq 0$ 在整个 $[0,1]$ 上光滑，并且满足

$$((\cdot)^2 - 1)(\widetilde{f}_1^W)'' + \frac{2(\lambda + d - 1)(\cdot)^2 + 1 - d}{(\cdot)}(\widetilde{f}_1^W)' + ((\lambda + d - 1)(\lambda + d - 2) + V)\,\widetilde{f}_1^W = 0$$

in 在经典意义下成立，且其在两个端点附近的行为由 $\widetilde{f}_1^W(r) \simeq 1$ 给出 . □

3.3. 斯图姆-刘维尔。前一个引理促使我们研究以下方程的光滑解是否存在：

$$((\cdot)^2 - 1)f'' + \frac{2(\lambda + d - 1)(\cdot)^2 + 1 - d}{(\cdot)}f' + ((\lambda + d - 1)(\lambda + d - 2) + V)\,f = 0. \tag{15}$$

我们将采用斯图姆-刘维尔理论中的一个标准论证。为此，我们将方程化为标准的刘维尔形式。也就是说，考虑

$$f'' + pf' + qf = 0,$$

其中 $p(r) := -\frac{2}{(\lambda+d-1)r} \frac{1-r^2}{r^2+1-d}$ $q(r) := -(\lambda+d-1)(\lambda+d-2)+V(r)1-r^2$。取 $f(r) = h(r)g(r)$，其中 $h(r) := e^{-\frac{1}{2}P(r)}$，$P'(r) = p(r)$，我们得到方程

$$-(1-r^2)^2 g''(r) + \left[\frac{\frac{(d-3)(d-1)}{4} - r^2(\frac{3d-9}{2})}{r^2} + (1-r^2)V(r)\right] g(r) = -(\lambda+1)(\lambda+d-4)g(r). \tag{16}$$

我们也记下（至多相差一个乘性常数） $h(r) = r^{\frac{1-d}{2}}(1-r^2)^{\frac{1-d-2\lambda}{4}}$。

注记 3.8. 注意，方程 (15) 的两个解 $f_1(r) := \frac{1}{d-4+r^2}$（对 $\lambda = 4-d$）与 $f_2(r) := (1-r^2)^{\frac{5-d}{2}}$（对 $\lambda = -1$），分别由时间平移对称性以及时间平移与共形对合的复合所诱导，被变换为同一个解 $g_0(r) := r^{\frac{d-1}{2}}(\frac{1-r^2}{d-4+r^2})^{\frac{7-d}{4}}$（但请注意，$f_2$ 在 $d > 5$ 处并不光滑；对 $d = 5$，函数 f_1 与 f_2 重合。）

由定理 3.7 可知，对于 $\operatorname{Re}\lambda > -1$，由原问题的一个特征函数所诱导的方程 (15) 的解 ϕ 的性态，在 0 附近由 $\phi(r) \simeq 1$ 决定，在 1 附近由 $\phi(r) \simeq 1$ 决定。解 ϕ 被变换为方程 (16) 的解 ϕ_h，其在 0 附近的行为如同 $\phi_h(r) \simeq r^{\frac{d-1}{2}}$，在 1 附近如同 $\phi_h(r) \simeq (1-r)^{\frac{d-1+2\lambda}{4}}$。因此，当 $\operatorname{Re}\lambda > -1$ 时，ϕ_h 属于空间 $L^2((0,1); 1-\frac{1}{(\cdot)^2})$，反之亦然，从而得到一一对应。这促使我们转而采用 L^2 框架，因为此处所讨论的算子将是自伴的。

因此，我们需要考虑方程（16）中的奇异 Sturm–Liouville 算子。

定义 3.9. 我们将形式微分算子记为 τ

$$\tau g := -\frac{1}{w}\left[g'' + qg\right],$$

其中 $w(r) = \frac{1}{(1-r^2)^2}$，$q(r) := -\left[\frac{(d-3)(d-1)}{4} \quad \frac{-r^2(\frac{3d-9}{2})}{r^2(1-r^2)^2} \quad + \frac{V}{(\frac{r}{1-r^2})}\right]$。定义算子 T如下:

$$T : D(T) \subset L^2((0,1); \sqrt{w}) \to L^2((0,1); \sqrt{w}), \qquad Tf := \tau f,$$

其定义域为 $D(T) := \{u \in L^2((0,1); \sqrt{w}) \mid u \in AC_{\mathrm{loc}}(0,1)\ u' \in AC_{\mathrm{loc}}(0,1)\ Tu \in L^2((0,1); \sqrt{w})\}$.

注记 3.10. 按照惯例，我们对定义域只作最低限度的假设，以确保 τ 中涉及的求导有意义。显然，只要变换后的解 ϕ_h 存在，$D(T)$ 就足够一般，能够包含这些解。

设 $\mu := -(\lambda+1)(\lambda+d-4)$。Frobenius 分析（或我们之前的讨论）表明，$\tau g = \mu g$的解在 0 处的 Frobenius 指标为 $\{\frac{d-1}{2}, -\frac{d-3}{2}\}$，在 1 处为 $\{\frac{2 \pm \sqrt{(d-5)^2 - 4\mu}}{4}\}$。特别地，对于 $\mu = 4-d$（对应于 $\lambda = 0$），我们在 0 处有 $\{\frac{d-1}{2}, -\frac{d-3}{2}\}$，在 1 处有 $\{\frac{d-1}{4}, -\frac{d-1}{4}\}$。在每个端点，有一种行为不属于 $L^2((0,1); \sqrt{w})$-可积，这表明根据 *Weyl* 选择定理 [40, p. 82，定理 5.6]，T在两个端点处均处于极限点情形。根据自伴扩张的 Weyl 理论 [40, p. 83，定理 5.7]，，两端均处于极限点情形意味着，定义在 $D(T)$ 上的T与其在 $T\restriction\{u$ 具有紧支撑于 $(0,1)\}$上的限制的闭包相同；后者是一个具有紧预解式的自伴算子。因此，其谱仅由可数个实单特征值组成。

通过以下论证排除自伴问题中的特征值 $\mu < 0$，即可推出原问题中不存在满足 $\operatorname{Re}\lambda > -1$ 的特征值。令 $\lambda = a + bi$。假设 $a > -1$。我们有 $\operatorname{Re}\mu = -a^2 + b^2 - (d-3)a - d + 4$，且 $\operatorname{Im}\mu = -b(2a + d - 3)$. 自伴问题中的特征值均为实数，因此 $\operatorname{Im}\mu = 0$，而关于 a 的假设意味着 $b = 0$。因此，根据关于 a 的假设，$\operatorname{Re}\mu = -a^2 - (d-3)a - d + 4 < 0$。

我们将利用上文的解 $g_0(r) = r^{\frac{d-1}{2}}(\frac{1-r^2}{d-4+r^2}^{\frac{7-d}{4}})$ 排除特征值 $\mu < 0$。该解满足 $\tau g_0 = 0$，且在 $(0,1)$ 上没有零点。根据 Frobenius 分析，我们知道以下方程存在唯一解

$$\tau g_\mu = \mu g_\mu, \qquad g_\mu(0) = 0, \qquad g_\mu^{\left(\frac{d-1}{2}\right)}(0) = 1.$$

斯图姆比较定理表述如下。

引理 3.11. 设 $\mu \in \mathbb{R}_0^-$。那么，方程的唯一解 g_μ *to*

$$\tau g_\mu = \mu g_\mu, \qquad g_\mu(0) = 0, \qquad g_\mu^{\left(\frac{d-1}{2}\right)}(0) = 1,$$

在(0,1)上没有零点。

证明。 我们沿用 [42, 第 34 页定理 2.6.3] 中的证明。 $\mu = 0$ 的情形可由 g_0的显式描述处理。对于 $\mu < 0$，我们用反证法。假设 y_0 是 g_μ的第一个零点；由于 τ 在 0 处非振荡，这个零点必然存在。*Picone* 恒等式

$$\left[\frac{g_\mu}{g_0}(g'_\mu g_0 - g_\mu g'_0)\right]' = \frac{(g'_\mu g_0 - g_\mu g'_0)^2}{(g_0)^2} - w\mu(g_\mu)^2$$

可直接计算得出。从 0 积分到 y_0 yields

$$0 = \int_0^{y_0} \frac{(g'_\mu g_0 - g_\mu g'_0)^2}{(g_0)^2} - \mu \int_0^{y_0} w(g_\mu)^2$$

其中我们用到了 $g_\mu(0) = g_0(0) = 0 = g_\mu(y_0)$。由于在 $(0, y_0)$ 上 $\mu < 0$ 且 $w > 0$，因此得出 $g_\mu \equiv 0$在 $[0, y_0]$上成立。这与 $g_{\left(\frac{d-1}{2}\right)\mu}(0) = 1$矛盾，由此完成证明。□

随后，经过调整的 Sturm 振荡定理便完成了整个论证。

引理 3.12。 自伴算子 T 没有特征值 $\mu < 0$。

证明。 我们引用 [24, 定理 1.2][1]，该定理指出， T 在区间 $[\nu, 0)$ 内的特征值个数，等于 g_0 的零点数减去 g_ν的零点数，即 $0 - 0 = 0$。由于这对任意 $\nu < 0$ 都成立，因此不存在特征值 $\mu < 0$。□

3.4. **线性化演化是一致指数稳定的**。总而言之，本节已证明半平面 $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\lambda > -1\}$ 包含于线性化演化生成元 $\mathbf{L}$ 的预解集 $\rho(\mathbf{L})$。结合定理 3.5，应用 Gearhart-Pr¨uss-Greiner 定理（参见例如 [21, 第 302 页，定理 1.11]），可知在所有大于或等于 5 的奇数维中，线性化演化均具有指数稳定性。

定理 3.13。算子 $\mathbf{L}: \mathcal{D}(\mathbf{L}) \subset \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W}) \to \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$ 生成强连续半群 $\mathbf{S}: [0,\infty) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W}))$。此外，存在 $\delta > 0$，使得 $\mathbf{S}$满足增长估计

$$\|\mathbf{S}(s)\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})} \lesssim e^{-\delta s}\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}$$

对所有 $\mathbf{f} \in \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$ 以及 $s \geq 0$。

证明。 半群的生成是定理 3.2 的内容。为证明该估计，记 $\mathbb{H}_0 := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\lambda > 0\}$ 为 0 右侧的开半平面，并回顾定理 3.5 中的集合 $\Gamma_R = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > \omega_{d,\ k,\ \varepsilon-(d-2)\ 2},\ |z| > R\}$。应用 [21, p. 302, Theorem 1.11] 需要一致有界性

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{H}_0} \|\mathbf{R}(\lambda, \mathbf{L})\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})} < \infty.$$

将闭半平面 $\mathbb{H}_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\lambda \geq 0\}$ 划分为 $\mathbb{H}_0 \cap \Gamma_R$和 $\overline{\mathbb{H}_0} \cap (\Gamma_R)^C$。第一个集合上的估计由定理 3.5 得出。第二个集合上的估计源于预解算子关于 λ 是解析的，因而它在紧集 $\mathbb{H}_0 \cap (\Gamma_R)^C$ 上有界。援引 Gearhart-Pr¨uss-Greiner 定理即得所需的一致指数稳定性。□

[1]请注意， [24]中的定理 1.2 有一个小的笔误： $N(c)$ 应表示 u_2 的零点数减去 u_1的零点数，而不是反过来。

4. Nonlinear evolution

由于我们将利用所出现的索伯列夫空间的代数性质，本节始终令 $d, k \in \mathbb{N}$，其中

$$d \geq 5 \text{ odd} \quad \text{and} \quad k > d/2.$$

我们现在已经汇集了考虑完整方程 (8) 所需的全部前提条件

$$0 = \left(\widehat{\Box} + V(y)\right) v(s,y) + N(v(s,\cdot))(y),$$

其中

$$\widehat{\Box} v(s,y) = \left[\partial_s^2 + 2\partial_s \Lambda_y + (y^k y^\ell - \delta^{k\ell})\partial_k \partial_\ell + \frac{2d-3-3|y|^2}{1-|y|^2}\partial_s + 4\Lambda_y + 2\right] v(s,y),$$

$$V(y) v(s,y) = -\frac{8(d-3)(d-4)}{(d-4+|y|^2)^2} v(s,y),$$

$$N(v(s,\cdot))(y) = \frac{d-3}{2} \frac{\sin\left(2|y|\left(u_\Psi^*(y) + v(s,y)\right)\right) - 2|y| v(s,y) - \sin\left(2|y| u_\Psi^*(y)\right)}{|y|^3} - V(y) v(s,y),$$

其中 $u_\Psi^*(y) = \frac{2}{|y|} \arctan\left(\frac{|y|}{\sqrt{d-4}}\right)$ 是方程 (4) 的解，该解在 FHSC 中是静态的。为总结引言中的讨论以及前几节的结果，我们指出，在半群图景中，我们形式上有

$$\partial_s \Phi_v(s) = \mathbf{L}\Phi_v(s) + \mathbf{N}(\Phi_v(s)) + \begin{bmatrix} 0 \\ \left[(\overline{\Box}\phi + \mathcal{V}\phi + \mathcal{N}(\phi)) \circ \Psi\right](s,\cdot) \end{bmatrix} \tag{17}$$

对于方程 (13) 中引入的变量对

$$\Phi_v(s)(y) := \begin{bmatrix} v(s,y) \\ \left(\partial_s + \Lambda_y + (d-2) + (d-3)\frac{|y|^2}{1-|y|^2}\right) v(s,y) \end{bmatrix}$$

其中 $v = \phi \circ \Psi$ 以及非线性余项算子在 $\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in C^\infty_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d; W)^2$上稠密定义，由

$$\mathbf{N}(\mathbf{f}) := \begin{bmatrix} 0 \\ N(f_1) \end{bmatrix}.$$

本节旨在将非线性项纳入前几节构建的泛函分析框架。

4.1. 非线性项的性质。 为此，我们首先考察 N的具体形式，并证明一个局部利普希茨界，这将是后续压缩论证的主要要素。根据引言中的讨论，非线性余项是一个与时间无关的泰勒展开二阶项。

引理 4.1。 设 $(y, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}$。令 $\widetilde{F}(y,z) := \frac{d-3}{2} \frac{\sin(2|y|z)}{|y|^3} e^{-2|y|z}$。记 $\widetilde{F}'(y,z) := \partial_z \widetilde{F}(y,z)$。那么有

$$N(f)(y) = \widetilde{F}\left(y, u_\Psi^*(y) + f(y)\right) - \widetilde{F}\left(y, u_\Psi^*(y)\right) - \widetilde{F}'\left(y, u_\Psi^*(y)\right) f(y)$$

对于 $f \in C^\infty_{\mathrm{rad}}(\overline{\mathbb{B}^d};\ W)$。此外，对于所有 $f \in C^\infty_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\ \overline{W})$，均有 $N(f) \in C^\infty_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d; \overline{W})$。

证明。 该恒等式可通过直接比较两边得到证明。附加结论由 N introducedin [32, 引理 4.1] 的形式得出。□

关键在于，二次项$\mathbf{N}$满足局部利普希茨界。

引理 4.2. 映射$\mathbf{N}\colon C^\infty_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;W)^2 \to \overline{C}^\infty_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;W)^2$可唯一延拓为映射$\mathbf{N}:\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W}) \to \mathcal{H}^{k+1}{}_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W}) \subset \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$，并具有如下性质：对于任意 $M>0$，估计式

$$\|\mathbf{N}(\mathbf{f})\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})} \le \|\mathbf{N}(\mathbf{f})\|_{\mathcal{H}^{k+1}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})} \lesssim \|\mathbf{f}\|^2_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}, \tag{18}$$

$$\|\mathbf{N}(\mathbf{f})-\mathbf{N}(\mathbf{g})\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})} \lesssim \|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}\left(\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}+\|\mathbf{g}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}\right) \tag{19}$$

对每个 $\mathbf{f}$、$\mathbf{g}\in\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$ 且满足 $\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}$ $\|\mathbf{g}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}\le M$ 的情形均成立。此外，$\mathbf{N}$ 在 *Fr´echet* 意义下连续可微。

证明。 注意到 $H^k\left(\mathbb{B}^d\right)$ 的代数性质意味着

$$\|ab\|_{H^k\left(\mathbb{B}^d;W\right)} \lesssim \|a\|_{H^k\left(\mathbb{B}^d;W\right)}\|b\|_{H^k\left(\mathbb{B}^d\right)}. \tag{AP}$$

对所有 $a\in H^k\left(\mathbb{B}^d;\ W\right)$, $b\in H^k\left(\mathbb{B}^d\right)$。

为得到第一个不等式，由定理 4.1、[32, 引理 4.1]中引入的 N 的形式以及 (AP)，可推得

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{N}(\mathbf{f})\|_{\mathcal{H}^{k+1}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})} &= \|N(f_1)\|_{H^k\left(\mathbb{B}^d;W\right)}\\
&\lesssim \|f_1\|_{H^k\left(\mathbb{B}^d;W\right)}\left\|f_1\int_0^1(1-z)\widetilde{F}''\left(\cdot,u^*_\Psi(\cdot)+zf_1(\cdot)\right)\mathrm{d}z\right\|_{H^k\left(\mathbb{B}^d\right)}\\
&\lesssim \|f_1\|^2_{H^k\left(\mathbb{B}^d;W\right)}\int_0^1(1-z)\left\|\widetilde{F}''\left(\cdot,u^*_\Psi(\cdot)+zf_1(\cdot)\right)\right\|_{H^k\left(\mathbb{B}^d\right)}\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

对所有 $\mathbf{f}\in C^\infty_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\ W)^2$,，其中 $\widetilde{F}''(y,\ x):=\partial_x^2\widetilde{F}(y,\ x)=-2(d-3)\frac{\sin(2|y|x)}{|y|}$。注意，$\widetilde{F}''$ 在 y 中是光滑的，且 $F''(y,\ 0)=0$。利用绍德尔引理 [34, 第 217 页定理 6.2.2]，我们可以估计

$$\left\|\widetilde{F}''\left(\cdot,u^*_\Psi(\cdot)+zf_1(\cdot)\right)\right\|_{H^k\left(\mathbb{B}^d\right)} \lesssim \varphi\left(\|u^*_\Psi+zf_1\|_{H^k\left(\mathbb{B}^d\right)}\right)$$

对某个光滑的 φ。总而言之，注意到$\|f_1\|_{H^k(\mathbb{B}^d)} \lesssim \|f_1\|_{H^k(\mathbb{B}^d;W)} \lesssim \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}$，并利用 φ在紧集上有界，我们得到

$$\|\mathbf{N}(\mathbf{f})\|_{\mathcal{H}^{k+1}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})} \lesssim \|\mathbf{f}\|^2_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}$$

对所有 $\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}\le M$。这证明了第一个断言对所有满足 $\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\overline{\mathbf{W}})}\le M$ 的 $\mathbf{f}\in C^\infty_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\ W)^2$ 成立。类似地，针对第二个断言，我们利用定理 4.1, [32,引理 4.1] 以及 (AP) 来估计

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{N}(\mathbf{f})-\mathbf{N}(\mathbf{g})\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})} &\lesssim \|N(f_1)-N(g_1)\|_{H^k\left(\mathbb{B}^d\right)}\\
&\lesssim \|f_1-g_1\|_{H^k\left(\mathbb{B}^d;W\right)}\left(\|f_1\|_{H^k\left(\mathbb{B}^d;W\right)}+\|g_1\|_{H^k\left(\mathbb{B}^d;W\right)}\right)\\
&\quad\times\int_0^1\int_0^1\left\|\widetilde{F}''\left(\cdot,u^*_\Psi(\cdot)+s(tf_1(\cdot)+(1-t)g_1(\cdot))\right)\right\|_{H^k\left(\mathbb{B}^d\right)}\mathrm{d}t\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

对所有 $\mathbf{f},\mathbf{g}\in C^\infty_{\mathrm{rad}}(\overline{\mathbb{B}}^d;\ W)^2$。与第一个断言一样，我们得出

$$\int_0^1\int_0^1\left\|\widetilde{F}''\left(\cdot,u^*_\Psi(\cdot)+s(tf_1(\cdot)+(1-t)g_1(\cdot))\right)\right\|_{H^k\left(\mathbb{B}^d\right)}\mathrm{d}t\mathrm{d}s \lesssim 1$$

对所有 $\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}$ $\|\mathbf{g}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}\le M$均成立。这意味着第二个估计对所有 $\mathbf{f}$、$\mathbf{g}\in C^\infty_{\mathrm{rad}}(\overline{\mathbb{B}^d;\ W})^2$ 均成立，其中 $\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}$ $\|\mathbf{g}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}\le M$。这些估计使得 $\mathbf{N}$ 可以唯一地连续延拓为映射 $\mathbf{N}:\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})\to\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$，其像包含于 $\mathcal{H}^{k+1}\,\mathrm{rad}\,(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$，并满足所述估计。

对于附加结论，我们首先注意到$\mathbf{N}$是 Fr´échet 可微的，即$\mathbf{N}$ 在$\mathbf{f}$处的预期 Fr´échet 导数由乘法算子给出

$$\mathbf{h} \mapsto D\mathbf{N}(\mathbf{f})\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ N'(f_1)h_1 \end{bmatrix},$$

其中 $N'(f_1) := 2f_1 \int_0^1 (1-z)\, \widetilde{F}''(\cdot, u_\Psi^*(\cdot) + zf_1(\cdot))\, \mathrm{d}z + f_1^2 \int_0^1 (1-z)\, \widetilde{F}'''(\cdot, u_\Psi^*(\cdot) + zf_1(\cdot))z\mathrm{d}z$with $\widetilde{F}'''(y,z) := \partial_z \widetilde{F}''(y,z)$，作为算子 $\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d; \mathbf{W}) \to \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d; \mathbf{W})$，对每个$\mathbf{f} \in \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d; \mathbf{W})$都是有界的。这很容易得出，因为 $N'(f_1) \in H^k\left(\mathbb{B}^d;\, W\right)$，与上文证明 $N(f_1) \in H^k\left(\mathbb{B}^d;\, W\right)$的论证类似。

最后，我们证明映射 $\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d; \mathbf{W}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d; \mathbf{W})), \mathbf{f} \mapsto D\mathbf{N}(\mathbf{f})$的连续性。注意，由 (AP) 可得

$$\begin{aligned}
\|D\mathbf{N}(\mathbf{f}) - D\mathbf{N}(\mathbf{g})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W}))} &= \sup_{\|\mathbf{h}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}=1} \|(D\mathbf{N}(\mathbf{f}) - D\mathbf{N}(\mathbf{g}))\mathbf{h}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})} \\
&= \sup_{\|\mathbf{h}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}=1} \left\|(N'(f_1) - N'(g_1))h_1\right\|_{H^{k-1}\left(\mathbb{B}^d;W\right)} \\
&\le \sup_{\|\mathbf{h}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}=1} \left\|(N'(f_1) - N'(g_1))h_1\right\|_{H^k\left(\mathbb{B}^d;W\right)} \\
&\lesssim \left\|N'(f_1) - N'(g_1)\right\|_{H^k\left(\mathbb{B}^d\right)}
\end{aligned}$$

因此，只需证明 $N'\colon\ H^k_{\mathrm{rad}}\left(\mathbb{B}^d;\, W\right) \to H^k_{\mathrm{rad}}\left(\mathbb{B}^d\right)$的连续性。由于所涉及的空间都是巴拿赫代数，只需证明其中每一项的连续性即可。分别对映射 $f_1 \mapsto \widetilde{F}''^{(\prime)}(\cdot, u_\Psi^*(\cdot) + zf_1(\cdot))$运用微积分基本定理，可得

$$\begin{aligned}
&\widetilde{F}''^{(\prime)}(\cdot, u_\Psi^*(\cdot) + zf_1(\cdot)) - \widetilde{F}''^{(\prime)}(\cdot, u_\Psi^*(\cdot) + zg_1(\cdot)) \\
&= \int_0^1 \widetilde{F}'''^{(\prime)}(\cdot, u_\Psi^*(\cdot) + z(tf_1(\cdot) + (1-t)g_1(\cdot)))\, z(f_1(\cdot) - g_1(\cdot))\, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

$\widetilde{\ } x \mapsto F''(y,x)$的光滑性表明，根据绍德尔引理，这些项都可由某个光滑的 φ乘以 $\varphi(\|f_1 - g_1\|_{H^k(\mathbb{B}^d;W)})$控制。因此， N' 是局部利普希茨连续的，尤其是连续的。证明完毕。□

4.2. **解的概念**。 既然我们刚刚获得了对非线性项$\mathbf{N}$的控制，我们便可以有意义地应用杜哈梅尔原理，从而采用 [33, 第184页定义1.1]中的解的概念。

定义4.3. 回顾

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S} : [0,\infty) \to \mathcal{L}\left(\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d; \mathbf{W})\right) \text{ the semigroup from Theorem 3.13,} \\
&\mathbf{L} : \mathcal{D}(\mathbf{L}) \subset \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d; \mathbf{W}) \to \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d; \mathbf{W}) \text{ its generator from Theorem 3.1,} \\
&\mathbf{N} : \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d; \mathbf{W}) \to \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d; \mathbf{W}) \text{ the nonlinearity from Theorem 4.2.}
\end{aligned}$$

令$\mathbf{f} \in \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$。
一个映射$\mathbf{v} \in C\left([0,\infty)\ \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d; \mathbf{W})\right) \cap C^1\left((0,\infty)\ \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d; \mathbf{W})\right.$，它满足$\mathbf{v}(s) \in \mathcal{D}(\mathbf{L})$，并且

$$\begin{cases} \partial_s \mathbf{v}(s) = \mathbf{L}\mathbf{v}(s) + \mathbf{N}(\mathbf{v}(s)), \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{f}, \end{cases}$$

对于所有 $s>0$，称其为该抽象柯西问题的经典解。一个映射$\mathbf{v}\in C([0,\infty)$ $\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W}))$，它满足

$$\mathbf{v}(s)=\mathbf{S}(s)\mathbf{f}+\int_0^s \mathbf{S}(s-s')\mathbf{N}(\mathbf{v}(s'))\,\mathrm{d}s' \tag{20}$$

对所有 $s>0$，称其为抽象柯西问题的温和解。

现在转而研究抽象柯西问题（ACP）的正向时间稳定解。为此，我们将线性化波流的衰减纳入适当的函数空间。

定义 4.4. 设 $\delta>0$ 为定理 3.13 中的增长常数。定义巴拿赫空间 $(\mathfrak{X}^{d,k},\ \|\cdot\|_{\mathfrak{X}^{d,k}})$ 如下：

$$\mathfrak{X}^{d,k}:=\left\{\mathbf{v}\in C\left([0,\infty),\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})\right)\mid \|\mathbf{v}(s)\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}\lesssim e^{-\delta s}\ \text{for all } s\geq 0\right\},$$
$$\|\mathbf{v}\|_{\mathfrak{X}^{d,k}}:=\sup_{s\in[0,\infty)}\left(e^{\delta s}\,\|\mathbf{v}(s)\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}\right).$$

4.3. **非线性渐近稳定性**。我们采用标准的不动点论证来证明整体适定性，即半整体存在性、唯一性以及对初始数据的连续依赖性。

引理 4.5. 存在 $0<\varepsilon_0<1$，使得对所有 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$，存在 $C_\varepsilon>1$，使得对所有 $\mathbf{f}\in\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$ 满足 $\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\,\mathbf{W})}\leq \frac{\varepsilon}{C_\varepsilon}$ 的情形，都存在唯一的$\mathbf{v_f}\in\mathfrak{X}^{d,\,k}$使其满足

$$\mathbf{v_f}(s)=\mathbf{S}(s)\mathbf{f}+\int_0^s \mathbf{S}(s-s')\mathbf{N}(\mathbf{v_f}(s'))\,\mathrm{d}s'$$

对所有 $s\geq 0$。此外，$\mathbf{v_f}$ 满足 $\|\mathbf{v_f}\|_{\mathfrak{X}^{d,\,k}}\leq\varepsilon$ 并且我们有

$$\|\mathbf{v_f}-\mathbf{v_g}\|_{\mathfrak{X}^{d,k}}\lesssim\|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}$$

对所有 $\mathbf{f}$、$\mathbf{g}\in\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\ \mathbf{W})$，其中 $\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\ \mathbf{W})}\ \|\mathbf{g}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\ \mathbf{W})}\leq\frac{\varepsilon}{C_\varepsilon}$。

证明。令 $0<\varepsilon_0$ 为任意但固定的，并且 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$。设

$$B_\varepsilon:=\{\mathbf{v}\in\mathfrak{X}^{d,k}\mid\|\mathbf{v}\|_{\mathfrak{X}^{d,k}}\leq\varepsilon\}$$

$\mathfrak{X}^{d,k}$中的半径为 ε 的闭球。对于 $\mathbf{f}\in\mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$ 和 $\mathbf{v}\in\mathfrak{X}^{d,k}$ 定义

$$\mathbf{K_f}(\mathbf{v})(s):=\mathbf{S}(s)\mathbf{f}+\int_0^s\mathbf{S}(s-s')\mathbf{N}(\mathbf{v}(s'))\,\mathrm{d}s'.$$

定理 4.2 中关于非线性项的估计推出 $\|\mathbf{N}(\mathbf{v}(s'))\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}\lesssim e^{-2\delta s'}\varepsilon^2$ 并且$\|\mathbf{N}(\mathbf{u}(s'))-\mathbf{N}(\mathbf{v}(s'))\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}\lesssim e^{-\delta s'}\varepsilon\,\|\mathbf{u}(s')-\mathbf{v}(s')\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}$，对所有 $s'\geq 0$ 以及 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in B_\varepsilon$均成立。由此可得

$$\|\mathbf{K_f}(\mathbf{v})(s)\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}\lesssim e^{-\delta s}\,\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}+e^{-\delta s}\varepsilon^2,$$
$$\|\mathbf{K_f}(\mathbf{u})(s)-\mathbf{K_f}(\mathbf{v})(s)\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}\lesssim e^{-\delta s}\varepsilon\int_0^s\left\|\mathbf{u}(s')-\mathbf{v}(s')\right\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}\lesssim e^{-\delta s}\varepsilon\,\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{\mathfrak{X}^{d,k}}$$

对所有$\mathbf{u},\mathbf{v}\in B_\varepsilon$均成立。因此，可以选择 ε_0，使得对所有 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$，存在 $C_\varepsilon>1$，令映射 $B_\varepsilon\to B_\varepsilon,\mathbf{v}\mapsto\mathbf{K_f}(\mathbf{v})$ 有定义，且对所有$\mathbf{f}\in\mathfrak{X}^{d,k}$，只要 $\|\mathbf{f}\|_{\mathfrak{X}^{d,k}}\leq\frac{\varepsilon}{C_\varepsilon}$，该映射就是压缩映射。巴拿赫不动点定理表明，存在唯一的$\mathbf{v_f}\in B_\varepsilon$，使得$\mathbf{K_f}(\mathbf{v_f})=\mathbf{v_f}$。利用上述第二个估计中的第一个不等式，根据格隆沃尔不等式可得，在所有 $\mathfrak{X}^{d,k}$ 上的唯一性。附加估计由以下方式推得

$$\|\mathbf{K_f}(\mathbf{v_f})(s)-\mathbf{K_g}(\mathbf{v_g})(s)\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}\leq l\,\|\mathbf{v_f}-\mathbf{v_g}\|_{\mathfrak{X}^{d,k}}+\|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}$$

对所有 $s\geq 0$，由带有常数 $l<1$ 的三角不等式可得，$\mathbf{K_f}$ 是压缩映射。证明至此完成。

□

注 4.6。 注意，由于 $\mathbf{0}$ 是$\mathbf{K_0}$，的唯一不动点，连续依赖性推出估计式 $\|\mathbf{v_f}\|_{\mathfrak{X}^{d,\ k}} \lesssim \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\ \mathbf{W})}$。

5. Proof of main results

定理 4.5 是本文的基石。接下来，我们将在更强的假设下改进这一结果。本节中，令 $d,\ k \in \mathbb{N}$ 满足

$$d \geq 5 \text{ odd} \quad \text{and} \quad k > d/2.$$

我们的主要目标是将（抽象柯西问题）与经典初值问题联系起来。首先，我们将温和解提升为（抽象柯西问题）的经典解。

引理 5.1。 设$\mathbf{v} \in C([0,\infty)\ \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W}))$ 是（抽象柯西问题）的一个温和解，初始数据为$\mathbf{f} \in \mathcal{D}(\mathbf{L})$。那么$\mathbf{v}$ 是（抽象柯西问题）的唯一经典解。

证明。 我们利用 $[33,$ 第187页，定理 1.5$]^2$，根据 Fr´echet 导数意义下$\mathbf{N}$ 的 C^1，可知$\mathbf{v}$ 已经是（抽象柯西问题）的经典解。 □

由定理 4.5 和定理 5.1 可得定理 1.7。

虽然当然可以继续采用较低的正则性假设，但我们仅考虑光滑初始数据。下一步要注意，在光滑初始数据这一假设下，(ACP) 的解是联合光滑的。

引理 5.2. 设$\mathbf{v} \in C([0,\infty)\ \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W}))$ 是*(ACP)*的一个温和解，其初始数据为$\mathbf{f} \in C^\infty_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\ W)^2 \subset \mathcal{D}(\mathbf{L})$。则$\mathbf{v} \in C^\infty([0,\infty) \times \mathbb{B}^d;\ W)^2$。

证明。设 $\mathbf{f} \in C^\infty_{\mathrm{rad}}(\overline{\mathbb{B}^d};\ W)^2$。由于对所有 $s \geq 0$，$\mathbf{v}(s) \in \mathcal{H}^k_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$，定理 4.2 蕴含对所有 $s \geq 0$，$\mathbf{N}(\mathbf{v}(s)) \in \mathcal{H}^{k+1}\ \mathrm{rad}\ (\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$。因此，温和解 v 满足的不动点方程 (20)，结合限制性质 $[26,$ p. 34、S 的引理 C.1$]$以及$C^\infty_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\ W)^2$ 在所有 $s > 0$ 下关于 S(s) 不变这一事实，递归地表明，对所有 $s > 0, k \geq \lceil \frac{d}{2} \rceil$，$\mathbf{v}(s) \in \mathcal{H}^{k+1}\,\mathrm{rad}\ (\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$。事实上，由于不动点方程右端出现的所有算子在 $\mathcal{H}^{k+1}\mathrm{rad}\ (\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$ 上均强连续，对所有 $k \geq \lceil \frac{d}{2} \rceil$，有 $\mathbf{v} \in C([0,\infty)\ \mathcal{H}^{k+1}\mathrm{rad}\ (\mathbb{B}^d;\mathbf{W}))$。根据 Sobolev嵌入，对所有 $s \geq 0$，$\mathbf{v}(s) \in C^\infty_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\ W)^2$。为证明这对所有 s-阶导数同样成立，我们注意到，根据前一个引理，v 是经典解，因此满足

$$\partial_s \mathbf{v}(s) = \mathbf{L}\mathbf{v}(s) + \mathbf{N}(\mathbf{v}(s))$$

对所有 $s > 0$ 均成立。由于 $C^\infty_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\ W)^2$ 在 $\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{N}$ 的作用下保持不变，因此对所有 $s > 0$，都有 $\partial_s \mathbf{v}(s) \in C^\infty_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\ W)^2$。因此，我们可以在每个 $y \in \mathbb{B}^d$ 处逐点考察该方程。首先注意到，对于每个 $l \in \mathbb{N}$，$\mathbf{L}$ 作为映射 $\mathcal{H}^{l+1}{}_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\ \mathbf{W}) \to \mathcal{H}^l_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\ \mathbf{W})$ 是有界的。因此

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\mathbf{v} : [0,\infty) &\to \left(C\left(\overline{\mathbb{B}^d}; W\right)^2, \|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{B}^d;W)^2} \right), \\ s &\mapsto \mathbf{L}\mathbf{v}(s) \end{aligned}$$

由于它是连续映射的复合，因此是连续的，因为我们可以选取足够大的 $l \in \mathbb{N}$，使得 $\mathcal{H}^l_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})$ 连续嵌入到后一个空间中。由

$$|\mathbf{L}\mathbf{v}(s_1)(y_1) - \mathbf{L}\mathbf{v}(s_2)(y_2)| \leq |\mathbf{L}\mathbf{v}(s_1)(y_1) - \mathbf{L}\mathbf{v}(s_1)(y_2)| + \|\mathbf{L}\mathbf{v}(s_1) - \mathbf{L}\mathbf{v}(s_2)\|_{L^\infty(\mathbb{B}^d;W)^2}$$

[2]我们指出，书中的证明写得并不准确，因为书中错误地声称算子的连续可微性意味着利普希茨连续性。不过，只需稍作调整，将利普希茨连续性改为局部利普希茨连续性，就可以轻松修正该证明。

可知映射 $[0,\infty)\times\mathbb{B}^d\to\mathbb{R}, (s,y)\mapsto \mathbf{L}\mathbf{v}(s)(y)$ 是连续的。我们还注意到，由于

$$\mathbf{N}(\mathbf{v}(s))(y)=\begin{bmatrix}0\\ v_1(s,y)^2\int_0^1(1-z)\widetilde{F}''(y,u_\Psi^*(y)+zv_1(s,y))\,\mathrm{d}z\end{bmatrix},$$

映射 $(s,y)\mapsto \mathbf{N}(\mathbf{v}(s))(y)$ 与 v_1 在 s 中一样联合光滑。因此，$s\mapsto\partial_s\mathbf{v}(s,y)$ 可连续延拓至 $s=0$。对于更高阶导数，注意到 $\partial_s\mathbf{v}(s)\in C^\infty_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;W)^2\subset D(\mathbf{L})$ 蕴含 $\partial_s\mathbf{L}\mathbf{v}(s)=\mathbf{L}\partial_s\mathbf{v}(s)$，并且用与之前相同的论证，我们可归纳得出，对于所有 $l\in\mathbb{N}, s\geq 0$，都有 $\partial_s^l\mathbf{v}(s)\in C^\infty_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;W)^2$。因此，$\mathbf{v}\in C^\infty([0,\infty)\times\mathbb{B}^d;W)^2$。证明完毕。□

接下来我们注意到，(抽象柯西问题) 的解的第一个分量满足一个经典初值问题。这是抽象柯西问题的构造以及我们刚刚证明的解的正则性所导致的。

引理5.3. 作与定理*5.2*相同的假设。则 $v_1:=[\mathbf{v}]_1\in C^\infty([0,\infty)\times\mathbb{B}^d;W)$ 是解

$$\begin{cases}\left(\widehat{\Box}+V(y)\right)v_1(s,y)+N(v(s))(y)=0,\\ v_1(0,y)=f_1(y),\\ \widehat{\nabla}v_1(0,y)=f_2(y),\end{cases}$$

其中 $\widehat{\nabla}=\partial_s+\Lambda_y+\frac{d-2-|y|^2}{1-|y|^2}$。

证明。 在给定假设下，我们在定理5.2的证明中得知，可以逐点考虑（抽象柯西问题）。注意到 $[\mathbf{L}'(\mathbf{v})(s)]_1=0=[\mathbf{N}(\mathbf{v}(s))]_1$, 于是得到

$$\begin{cases}\partial_s v_1(s,y)=[\mathbf{L}_0\mathbf{v}(s)]_1(y),\\ \partial_s v_2(s,y)=[\mathbf{L}_0\mathbf{v}(s)]_2(y)+V(y)v_1(s,y)+N(v_1(s))(y),\\ v_1(0,y)=f_1(y),\\ v_2(0,y)=f_2(y).\end{cases}$$

其中 $[\mathrm{L}_0\mathbf{v}(s)]_1=v_2(s,\cdot)-W^{-1}\Lambda(Wv_1(s,\cdot))-(d-2)v_1(s,\cdot)$，且 $[\mathrm{L}_0\mathbf{v}(s)]_2=-W^{-1}\Lambda(Wv_2(s,\cdot))-(d-1)v_2(s,\cdot)+W^{-1}\Delta(Wv_1(s,\cdot))$。向 v_1 求解可得

$$\begin{cases}v_2(s,y)=\left(\partial_s+\Lambda_y+\frac{d-2-|y|^2}{1-|y|^2}\right)v_1(s,y),\\ \left(\widehat{\Box}+V(y)\right)v_1(s,y)+N(v_1(s))(y)=0,\\ v_1(0,y)=f_1(y),\\ \widehat{\nabla}v_1(0,y)=f_2(y).\end{cases}$$

这就证明了该论断。 □

结合定理5.2和定理5.3，我们得到以下结果。

引理*5.4.* 设 $f=(f_1,f_2)\in C^\infty_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;W)^2$，且 $\|f\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;W)}$ 足够小。那么，*(ACP)* 的唯一经典解 ϕ 是联合光滑的，即 $\phi\in C^\infty([0,\infty)\times\mathbb{B}^d;W)^2$，其中 $\phi(s)$ 对每个 $s\geq 0$ 都是径向的。特别地，$\phi_1:=[\phi]_1$ 是初值问题的唯一解，属于 $\{\phi\in C^\infty([0,\infty)\times\mathbb{B}^d;W)\mid\phi(s,\cdot)$，并且对所有 $s\geq 0\}$ 都是径向的

$$\begin{cases}0=(\widehat{\Box}+V(y))\phi_1(s,y)+N(\phi_1(s,\cdot))(y) & in\ (0,\infty)\times\mathbb{B}^d,\\ \phi_1(0,y)=f_1(y) & in\ \mathbb{B}^d,\\ \widehat{\nabla}\phi_1(0,y)=f_2(y) & in\ \mathbb{B}^d.\end{cases}$$

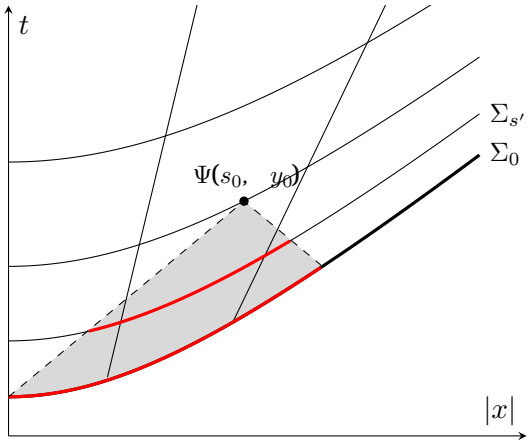

FIGURE 2. 点 $(t,x) = \Psi(s_0,y_0)$ 的因果过去在初始双曲面上的投影。对于给定的 $0 \le s' < s_0$，双曲面 $\Sigma_{s'}, \Sigma_0$ 上的红色区域分别是 $D_{s'}$ 和 D_0 的像。

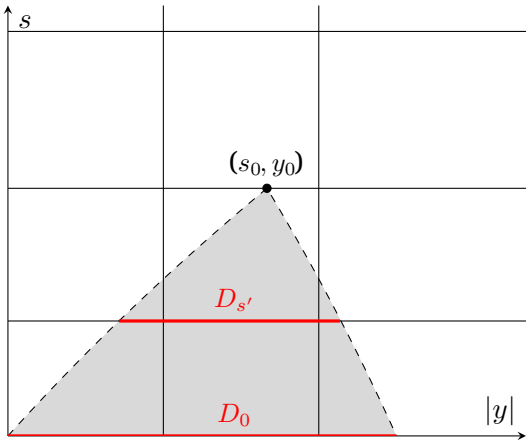

FIGURE 3. FHSC 中 $J^-(s_0,y_0)$ 的投影，即左图。请注意，边界（虚线）并非由一条直线给出，而是由两个对数函数给出。

存在 $\delta > 0$ 使得

$$\sup_{s\ge 0}\left(e^{\delta s}\left\|\phi_1(s)\right\|_{H^k(\mathbb{B}^d;W)} + e^{\delta s}\left\|\widehat{\nabla}\phi_1(s)\right\|_{H^{k-1}(\mathbb{B}^d;W)}\right) \lesssim \|f_1\|_{H^k(\mathbb{B}^d;W)} + \|f_2\|_{H^{k-1}(\mathbb{B}^d;W)}.$$

通过考虑 $v = w^*_\Psi + \phi_1$，这一关于扰动演化的小数据结果导出了由方程 (6) 给出的初值问题的大数据结果。

推论5.5。 设 $\mathbf{f} \in C^\infty_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;W)^{2\times}$，其中 $\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{B}^d;\mathbf{W})}$ 足够小。那么初值问题

$$\begin{cases} 0 = \widehat{\Box} v(s,y) + F(\Psi(s,y), v(s,y)) & in\ (0,\infty)\times\mathbb{B}^d, \\ v(0,y) = u^*_\Psi(0,y) + f_1(y) & in\ \mathbb{B}^d, \\ \widehat{\nabla} v(0,y) = \widehat{\nabla} u^*_\Psi(0,y) + f_2(y) & in\ \mathbb{B}^d, \end{cases} \tag{IVP}$$

在仿射空间中有唯一解

$$\left\{ w^*_\Psi + \phi \mid \phi \in C^\infty([0,\infty)\times\overline{\mathbb{B}^d};W), \phi(s,\cdot)\ radial\ for\ all\ s\ge 0 \right\}.$$

存在 $\delta > 0$ 使得

$$\sup_{s\ge 0} e^{\delta s}\left(\left\|w^*_\Psi(s) - v(s)\right\|_{H^k(\mathbb{B}^d;W)} + \left\|\widehat{\nabla} w^*_\Psi(s) - \widehat{\nabla} v(s)\right\|_{H^{k-1}(\mathbb{B}^d;W)}\right) \lesssim \|f_1\|_{H^k(\mathbb{B}^d;W)} + \|f_2\|_{H^{k-1}(\mathbb{B}^d;W)}.$$

在将定理 5.5 改写为物理坐标形式之前，我们先将唯一性推广到一般的光滑函数情形。这可视为 FHSC 中的有限传播速度。以下论证请参阅图 2 和图 3。

引理5.6。 定理 *5.5* 中的解在 $C^\infty([0,\infty)\times\mathbb{B}^d)$ 中是唯一的。

证明。 固定 $(s_0,\ y_0) \in (0,\ \infty)\times\mathbb{B}^d$。考虑其截至 $s=0$ 的因果过去，由以下集合给出

$$J^-(s_0,y_0) := \left\{ (s,y)\in[0,s_0)\times\mathbb{B}^d : \left(\frac{e^s}{1-|y|^2} - \frac{e^{s_0}}{1-|y_0|^2}\right)^2 - \left|\frac{e^s y}{1-|y|^2} - \frac{e^{s_0}y_0}{1-|y_0|^2}\right|^2 \ge 0 \right\}.$$

对于每个 $0 \le s < s_0$，我们考虑

$$D_s := \{y \in \mathbb{B}^d : (s, y) \in J^-(s_0, y_0)\}.$$

显然，我们有 $J^-(s_0,\ y_0) = \bigcup_{0\le s<s_0}\{s\} \times D_s$。仔细化简 $J^-(s_0,\ y_0)$ 中的条件可知，每个 D_s 都是一个球。事实上，令 $R(s) := 1 - e^{s-s_0}$, $P(s) := e^{s-s_0}$。我们得到

$$D_s = \mathbb{B}^d_{R(s)}(P(s)y_0).$$

利用式 (13) 中引入的变量对，我们定义一个局部能量

$$\begin{aligned} E_{(s_0,y_0)}(w)(s) &:= e^{2(d-2)s}\int_{D_s} |\nabla(Ww_1(s,\cdot))|^2 + |Ww_1(s,\cdot)|^2 + |Ww_2(s,\cdot)|^2 \\ &= \int_{D_s} |\nabla f_1(s,\cdot)|^2 + |f_1(s,\cdot)|^2 + |f_2(s,\cdot)|^2. \end{aligned}$$

这里，f_1，f_2 按式 (12) 选取，等式由式 (14) 得出。为了对s求导，对于每个 $0 \le s < s_0$，我们引入映射

$$\begin{aligned} \Phi_s : \mathbb{B}^d &\to D_s, \\ x &\mapsto R(s)x + P(s)y_0. \end{aligned}$$

我们有 $\det(D\Phi_s(x)) = R(s)^d$。为简洁起见，记 $g(s,\ \cdot) := |\nabla f_1(s,\ \cdot)|^2 + |f_1(s,\ \cdot)|^2 + |f_2(s,\ \cdot)|^2$。我们计算

$$\begin{aligned} \partial_s E_{(s_0,y_0)}(w)(s) = \int_{D_s} \partial_s g(s,\cdot) &+ R(s)^{d-1}\partial_s R(s)\int_{\partial\mathbb{B}^d} g(s,\Phi_s(x))\ \mathrm{d}S(x) \\ &+ R(s)^{d-1}\partial_s P(s)\int_{\partial\mathbb{B}^d} y_0\cdot x\ g(s,\Phi_s(x))\ \mathrm{d}S(x). \end{aligned}$$

对于第一个被积函数，我们利用式 (12) 中的恒等式进行计算（为简洁起见，令 $g \equiv g(s,\ \cdot)$ $f_1 \equiv f_1(s,\ \cdot)$ $f_2 \equiv f_2(s,\ \cdot)$，并将 y^j 认作映射 $y \mapsto y^j$）

$$\begin{aligned} \partial_s g &= 2\partial_s\partial^k f_1\partial_k f_1 + 2\partial_s f_1 f_1 + 2\partial_s f_2 f_2 \\ &= 2\partial^k(f_2 - \Lambda f_1)\partial_k f_1 + 2f_1(f_2 - \Lambda f_1) + 2f_2[-\Lambda f_2 - f_2 + \Delta f_1 + \Box^* f] \\ &= 2\partial^k(\partial_k f_1 f_2) - 2\partial^k f_1\partial_k f_1 - \Lambda(\partial^k f_1\partial_k f_1) + 2f_1 f_2 - \Lambda(f_1^2) - \Lambda(f_2^2) - 2f_2^2 + f_2\Box^* f \\ &= 2\partial^k(\partial_k f_1 f_2) - \partial_j[y^j g] + (d-2)\partial^k f_1\partial_k f_1 + df_1^2 + (d-2)f_2^2 + 2f_2\Box^* f \\ &\le \partial^k(\partial_k f_1 f_2) - \partial_j[y^j g] + dg + 2f_2\Box^* f. \end{aligned}$$

分部积分得到

$$\begin{aligned} \int_{D_s}\partial_s g(s,\cdot) \le d\int_{D_s} g(s,\cdot) + 2\int_{D_s} f_2(s,\cdot)\Box^* f(s,\cdot) &\\ + R(s)^{d-1}\int_{\partial\mathbb{B}^d} 2x^k\partial_k f_1(s,\Phi_s(x))f_2(s,\Phi_s(x))\ \mathrm{d}S(x) &\\ - R(s)^d\int_{\partial\mathbb{B}^d} g(s,\Phi_s(x))\ \mathrm{d}S(x) &\\ - R(s)^{d-1}P(s)\int_{\partial\mathbb{B}^d} x\cdot y_0\ g(s,\Phi_s(x))\ \mathrm{d}S(x) & \end{aligned}$$

利用恒等式 $\partial_s R(s) = -1 + R(s)$、$\partial_s P(s) = P(s)$，我们看到，对于能量的导数，边界项发生了一些抵消，剩下

$$\partial_s E_{(s_0,y_0)}(w)(s) \le dE_{s_0,y_0}(w)(s) + 2\int_{D_s} f_2 \Box^* f(s,\cdot) + R(s)^{d-1}\int_{\partial\mathbb{B}^d} 2x^k \partial_k f_1(s,\Phi_s(x)) f_2(s,\Phi_s(x)) - R(s)^{d-1}\int_{\partial\mathbb{B}^d} g(s,\Phi_s(x))\,\mathrm{d}S(x).$$

由柯西-施瓦茨不等式和 $|x| = 1$ 可得

$$2x^k \partial_k f_1(s,\Phi_s(x)) f_2(s,\Phi_s(x)) \le |\nabla f_1(s,\Phi_s(x)|^2 + f_2(s,\Phi(x))^2 \le g(s,\Phi(x)).$$

最后，这表明

$$\partial_s E_{(s_0,y_0)}(w)(s) \lesssim E_{s_0,y_0}(w)(s) + \int_{D_s} |\Box^* f(s,\cdot)|^2,$$

其中，混合项也用到了柯西-施瓦茨不等式。

我们希望将这个不等式用于定理 5.5 中给出的初值问题 (IVP) 的两个解 v 和 v' 之差。回顾公式 (11) 中的恒等式，即

$$\Box^*(f_v - f_{v'}) = e^{(d-2)s} W(y) \widehat{\Box}(v - v'),$$

$\widehat{\ }$对于 f_v，$f_{v'}$与 v，v'由公式 (10) 关联。v，v'是 (IVP) 的解这一事实意味着 $\Box(v(s,\cdot) - v'(s,\cdot)) = F(\Psi(s,\cdot)\, v(s,\cdot)) - F(\Psi(s,\cdot)\, v'(s,\cdot))$。这里

$$F(\Psi(s,y), v(s,y)) = (d-3)\frac{\sin(2|y|v(s,y)) - 2|y|v(s,y)}{2|y|^3},$$

由公式 (6) 得出。注意到函数 $(y,\ z) \mapsto (d-3)\frac{\sin(2|y|z)-2|y|z}{2|y|^3}$ 是光滑的，可得估计 $F(\Psi(s,\cdot)\, v(s,\cdot)) - F(\Psi(s,\cdot)\, v'(s,\cdot)) \lesssim v(s,\cdot) - v'(s,\cdot)$。这表明

$$\int_{D_s} |\Box^*(f_v - f_{v'})|^2 \lesssim e^{2(d-2)s}\int_{D_s} |W(v(s,\cdot) - v'(s,\cdot))|^2 \le E_{(s_0,y_0)}(v - v')(s).$$

综上，这意味着

$$\partial_s E_{(s_0,y_0)}(v - v')(s) \lesssim E_{(s_0,y_0)}(v - v')(s).$$

由 Gr¨onwall 不等式和 $E_{(s_0,y_0)}(v - v')(0) = 0$，可证明 FHSC 光锥内的唯一性 $J^-(s_0, y_0)$。由于 $(s_0, y_0) \in (0,\infty) \times \mathbb{B}^d$ 是任意的，证明至此完成。□

在物理坐标中，我们得到定理 1.5 的一个重标度版本。

推论 5.7。存在 $\varepsilon > 0$，使得对于定义在 Σ_0 上的每个 (f_1, f_2)，若 $(f_1 \circ \Psi(0,\cdot)\ f_2 \circ \Psi(0,\cdot)) \in C^\infty_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\ W)^2$ 满足

$$\sqrt{\|f_1 \circ \Psi(0,\cdot)\|^2_{H^k(\mathbb{B}^d;W)} + \|f_2 \circ \Psi(0,\cdot)\|^2_{H^{k-1}(\mathbb{B}^d;W)}} \le \varepsilon,$$

双曲面初值问题

$$\begin{cases} 0 = \Box_{t,x}\left(\frac{1}{t} w(t,x)\right) + (d-3)\frac{\sin\left(2\frac{|x|}{t} w(t,x)\right) - 2\frac{|x|}{t} w(t,x)}{2|x|^3} & in\ D^+(\Sigma_0) \setminus \Sigma_0, \\ w = w^* + f_1 & in\ \Sigma_0, \\ \overline{\overline{\nabla}} w = \overline{\overline{\nabla}} w^* + f_2 & in\ \Sigma_0, \end{cases}$$

有唯一解 $w \in C^\infty(D^+(\Sigma_0))$。这里 $\nabla = \widehat{\nabla}(\cdot \circ \Psi) \circ \overline{\overline{\Psi}}^{-1}$。解 w 可分解为 $w = w^* + \phi$，使得 ϕ 具有以下性质

- $\phi \circ \Psi \in C^\infty([0,\infty) \times \overline{\mathbb{B}^d};\ W)$,
- $\phi \circ \Psi(s,\cdot)$ 对所有 $s \geq 0$ 都是径向的。

T该解会趋近于 w^*，具体而言，存在 $\delta > 0$ 使得

$$\sup_{s\geq 0}\left(e^{\delta s}\sqrt{\|(w^*-w)\circ\Psi(s,\cdot)\|^2_{H^k(\mathbb{B}^d;W)}+\left\|(\overline{\overline{\nabla}}w^*-\overline{\overline{\nabla}}w)\circ\Psi(s,\cdot)\right\|^2_{H^{k-1}(\mathbb{B}^d;W)}}\right)$$
$$\lesssim \sqrt{\|f_1\circ\Psi(0,\cdot)\|^2_{H^k(\mathbb{B}^d;W)}+\|f_2\circ\Psi(0,\cdot)\|^2_{H^{k-1}(\mathbb{B}^d;W)}}.$$

最后，考虑 $u(t,\ x) := w(t,\ x)/t$。由于 $t = \frac{1}{1-|y|^2}$ 在 Σ_0 上的作用，将初始数据从 $C^\infty_{\mathrm{rad}}(\overline{\mathbb{B}^d};\ W)^2$ 调整为 $C^\infty_{\mathrm{rad}}(\overline{\mathbb{B}^d};\ W_1)^2$，并证明第二个演化分量可以替换为经缩放的时间导数，即可得到定理 1.5。

5.1. 定理 1.5 的证明。

证明。 在整个证明过程中，用 $(\cdot)_\Psi$ 表示通过坐标变换 Ψ 拼接得到的函数。在前一个推论中令 $u(t,\ x) = w(t,\ x)/t$，可得 u 满足

$$\begin{cases} 0 = \Box u(t,x) + (d-3)\frac{\sin(2|x|u(t,x))-2|x|u(t,x)}{2|x|^3} & \text{in } D^+(\Sigma_0)\setminus\Sigma_0,\\ u = u^* + g_1 & \text{in } \Sigma_0,\\ \overline{\nabla} u = \overline{\nabla} u^* + g_2 & \text{in } \Sigma_0, \end{cases}$$

其中我们定义了 $\nabla_{t,x} := \frac{1}{t}\nabla_{t,x}(t\cdot)$ $g_1(t,x) := f_1(t,x)/t, g_2(t,x) = f_2(t,x)/t$。可以看出，假设 $((g_1)_\Psi(0,\cdot),(g_2)_\Psi(0,\cdot)) \in C^\infty_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\ W_1)^2$ 等价于假设 $((f_1)_\Psi(0,\cdot),(f_2)_\Psi(0,\cdot)) \in C^\infty_{\mathrm{rad}}(\mathbb{B}^d;\ W)^2$。光滑函数空间中的唯一性仍然成立，因为乘以 t 是定义在 $D^+(\Sigma_0)$ 上的函数的一个微分同胚。在稳定性陈述中令 $\psi := u^* - u$，结合 $t = \frac{e^s}{1-|y|^2}$ 在 Σ_s 上这一事实，并相应地改变范数，可得

$$\sup_{s\geq 0}\left(e^{(1+\delta)s}\left\|\left(\psi_\Psi(s,\cdot),(\overline{\nabla}\psi)_\Psi(s,\cdot)\right)\right\|_{H^k\times H^{k-1}(\mathbb{B}^d;W_1)}\right) \lesssim \|((g_1)_\Psi(0,\cdot),(g_2)_\Psi(0,\cdot))\|_{H^k\times H^{k-1}(\mathbb{B}^d;W_1)}.$$

具体形式

$$(\overline{\nabla}\psi)_\Psi(s,y) = \left(\partial_s + y^j\partial_j + \frac{d-1}{1-|y|^2}\right)\psi_\Psi(s,y)$$

连同不等式

$$\left\|\left((\cdot)^j\partial_j + \frac{d-1}{1-|\cdot|^2}\right)\psi_\Psi(s,\cdot)\right\|_{H^{k-1}(\mathbb{B}^d;W_1)} = \left\|(\cdot)^j\partial_j\left(W_1\psi_\Psi(s,\cdot)\right)\right\|_{H^{k-1}(\mathbb{B}^d)} \lesssim \|W_1\psi_\Psi(s,\cdot)\|_{H^k(\mathbb{B}^d)}$$

推出 $\|(\psi_\Psi(s,\cdot)\ \partial_s\psi_\Psi(s,\cdot))\|_{H^k\times H^{k-1}(\mathbb{B}^d;W_1)} \simeq \left\|(\psi_\Psi(s,\cdot),(\nabla\psi)_\Psi(s,\cdot))\right\|_{H^k\times H^{k-1}(\mathbb{B}^d;W_1)}$。考虑时间导数 $\partial_t\psi(t,x)$，并通过 $\omega(t,x)$ 进行重标度：$= \frac{t^2-|x|^2}{t}$。注意，在 Σ_0 上我们得到 $\omega \equiv 1$。在 FHSC 中，我们有 $(\omega\partial_0\psi)_\Psi(s,y) = \left((1+|y|^2)\partial_s - (1-|y|^2)y^j\partial_j\right)\psi_\Psi(s,y)$。与之前类似，我们得到估计式

$$\left\|(1-|\cdot|^2)(\cdot)^j\partial_j\psi_\Psi(s,\cdot)\right\|_{H^{k-1}(\mathbb{B}^d;W_1)} \lesssim \|\psi_\Psi(s,\cdot)\|_{H^k(\mathbb{B}^d;W_1)}.$$

结合 $1+|\cdot|^2 \simeq 1$，我们得到

$$\|(\psi_\Psi(s,\cdot),(\omega\partial_0\psi)_\Psi(s,\cdot))\|_{H^k\times H^{k-1}(\mathbb{B}^d;W_1)} \simeq \left\|(\psi_\Psi(s,\cdot),(\overline{\nabla}\psi)_\Psi(s,\cdot))\right\|_{H^k\times H^{k-1}(\mathbb{B}^d;W_1)}.$$

这就说明，在初值问题和稳定性估计的表述中，可以用 $\omega\partial_0$ 替换 ∇，从而得到定理 1.5 的第一部分。

关于衰减率的附加结论则可由下述推导得出。Sobolev嵌入意味着

$$\|W_1(\cdot)\psi_\Psi(s,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{B}^d)} \lesssim e^{-(1+\delta)s} \text{ for all } s \geq 0.$$

因此（注意 $W_1 \geq 1$），我们有

$$|u^*_\Psi(s,y) - u_\Psi(s,y)| \lesssim e^{-(1+\delta)s}$$

对所有 $s \geq 0$ 以及所有 $y \in \mathbb{B}^d$。在笛卡尔坐标下，这可表示为

$$|u^*(t,x) - u(t,x)| \lesssim \left(\frac{t}{t^2 - |x|^2}\right)^{1+\delta}$$

对所有 $(t,x) \in D^+(\Sigma_0)$。考虑一个固定的 $x \in \mathbb{R}^d$。我们有 $|u^*(t,x) - u(t,x)| \lesssim t^{-(1+\delta)}$，对所有使得 $(t,x) \in D^+(\Sigma_0)$ 的 $t \geq 1$。由于 $u^*(t,x) \simeq t^{-1}$ 对所有使得 $(t,x) \in D^+(\Sigma_0)$ 的 $t \geq 1$ 成立，我们推得对 $u(\cdot,x)$ 同样成立。至此完成定理 1.5 的证明。□

致谢。第一作者感谢他的研究团队，尤其感谢 Frederick Moscatelli 与他进行了许多有趣且富有启发性的讨论，并感谢 Matthias Ostermann 对本文早期草稿提出的宝贵意见。

References

[1] Pawe l Biernat、Piotr Bizo´n 和 Maciej Maliborski。“高维等变波映射的爆破解析阈值”。载于：《Nonlinearity》30.4（2017年），第 1513–1522 页。[2] Pawe l Biernat、Roland Donninger 和 Birgit Sch¨orkhuber。“超双曲相似坐标与超临界波映射的全局稳定爆破剖面”。载于：《国际数学研究通知》21（2021年），第 16530–16591 页。[3] Piotr Bizo´n。“从闵可夫斯基时空映至三维球面的等变自相似波映射”。载于：《数学物理通讯》215.1（2000年），第 45–56 页。[4] Piotr Bizo´n 和 Pawe l Biernat。“高维等变波映射与杨–米尔斯场的一般自相似爆破”。载于：《数学物理通讯》338.3（2015年），第 1443–1450 页。[5] Piotr Bizo´n、Tadeusz Chmaj 和 Zbis law Tabor。“波映射的色散与坍缩”。载于：《Nonlinearity》13.4（2000年），第 1411–1423 页。[6] Piotr Bizo´n 和 Anıl Zengino˘glu。“三次波动方程全局动力学的普适性”。载于：《Nonlinearity》22.10（2009年），第 2473–2485 页。[7] Annegret Y. Burtscher 和 Roland Donninger。“聚焦三次波动方程的双曲演化与全局动力学”。载于：《数学物理通讯》353.2（2017年），第 549–596 页。[8] Elisabetta Chiodaroli 和 Joachim Krieger。“一类波映射方程的大幅全局解”。载于：《美国数学会会刊》369.4（2017年），第 2747–2773 页。[9] O. Costin、R. Donninger 和 X. Xia。“自相似波映射模态稳定性的一项证明”。载于：《Nonlinearity》29.8（2016年），第 2451–2473 页。[10] Ovidiu Costin、Roland Donninger 和 Irfan Glogi´c。“高维自相似波映射的模态稳定性”。载于：《数学物理通讯》351.3（2017年），第 959–972 页。[11] Roland Donninger。“关于等变波映射的稳定自相似爆破”。载于：《纯粹与应用数学通讯》64.8（2011年），第 1095–1147 页。[12] Roland Donninger 和 Frederick Moscatelli。《无对称性波映射的爆破稳定性》。2026年。arXiv：2601.19516 [数学物理]。[13] Roland Donninger 和 Frederick Moscatelli。《高维无对称性自相似波映射的模态稳定性》。2026年。arXiv：2601.19515 [数学物理]。[14] Roland Donninger 和 Matthias Ostermann。“能量超临界杨–米尔斯理论中的全局稳定自相似爆破剖面”。载于：《偏微分方程通讯》48.9（2023年），第 1148–1213 页。[15] Roland Donninger 和 Matthias Ostermann。《关于旋转协变波映射与等变杨–米尔斯联络的稳定自相似爆破》。2025年。arXiv：2409.14733 [数学物理]。[16] Roland Donninger、Birgit Sch¨orkhuber 和 Peter C. Aichelburg。“关于等变波映射的稳定自相似爆破：线性化问题”。载于：《Ann. Henri Poincar´e》13.1（2012年），第 103–144 页。[17] Roland Donninger 和 David Wallauch。“超临界波映射的最优爆破稳定性”。载于：《数学进展》433（2023年），论文编号 109291，共 86 页。[18] Roland Donninger 和 David Wallauch。“三维波映射的最优爆破稳定性”。载于：《偏微分方程分析》18.4（2025年），第 895–962 页。[19] Roland Donninger 和 Anıl Zengino˘glu。“三次波动方程的非色散衰减”。载于：《偏微分方程分析》7.2（2014年），第 461–495 页。[20] Thomas Duyckaerts 和 Giuseppe Negro。“具有渐近自相似行为的三次波动方程整体解”。载于：《数学物理通讯》405.3（2024年），论文编号 84，共 43 页。[21] Klaus-Jochen Engel 和 Rainer Nagel。《线性演化方程的单参数半群》。第 194 卷。《数学研究生教材》。由 S. Brendle、M.

Campiti、T. Hahn、G. Metafune、G. Nickel、D. Pallara、C. Perazzoli、A. Rhandi、S. Romanelli 和 R. Schnaubelt。施普林格出版社，纽约，2000年，第 xxii+586.[22] Dan-Andrei Geba 和 Manoussos G. Grillakis。波映射理论及相关几何问题导论。世界科学出版公司，新泽西州哈肯萨克，2017年，第 xvii+477.[23] Pierre Germain。“波映射方程的 Besov 空间与自相似解”。载于：《偏微分方程通讯》33.7-9 (2008)，第 1571–1596 页。[24] F. Gesztesy、B. Simon 和 G. Teschl。“朗斯基行列式的零点与重整化振荡理论”。载于：《美国数学杂志》118.3 (1996)，第 571–594 页。[25] T. Ghoul、S. Ibrahim 和 V. T. Nguyen。“1-等变能量超临界波映射 II型爆破解的构造”。载于：《微分方程杂志》265.7 (2018)，第 2968–3047 页。[26] Irfan Glogi´c。“所有维数下超临界波映射的全局稳定爆破剖面”。载于：《微分变分学与偏微分方程》64.2 (2025)，第 46 号论文，34页。[27] Lars H¨ormander。线性偏微分算子分析。*I*。《数学经典》。分布理论与傅里叶分析，1990年第二版重印本 [柏林施普林格出版社；MR1065993 (91m:35001a)]。施普林格出版社，柏林，2003年，第 x+440.[28] Sergiu Klainerman 和 Sigmund Selberg。“双线性估计及其在非线性波动方程中的应用”。载于：《当代数学通讯》4.2 (2002)，第 223–295 页。[29] J. Krieger。“波映射的全局正则性与奇性形成”。载于：《微分几何综述》第 *XII* 卷：几何流。第 12 卷。《微分几何综述》，国际出版社，马萨诸塞州萨默维尔，2008年，第 167–201 页。[30] Joachim Krieger 和 Wilhelm Schlag。“ $\mathbb{R}^{3+1}$上的能量超临界非线性波动方程的大幅全局解”。载于：《数学分析杂志》133 (2017)，第 91–131 页。[31] Matthias Ostermann。“Sobolev 空间中径向对称函数子空间的刻画”。载于：《当代数学通讯》27.3 (2025)，第 2450018 号论文，15页。[32] Matthias Ostermann。“所有维数下聚焦型半线性波动方程的稳定爆破”。载于：《美国数学会会刊》377.7 (2024)，第 4727–4778 页。[33] Amnon Pazy。线性算子半群及其在偏微分方程中的应用。第 44 卷。《应用数学科学》。施普林格出版社，纽约，1983年，第 viii+279.[34] Jeffrey Rauch。双曲偏微分方程与几何光学。第 133 卷。《数学研究生丛书》。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2012年，第 xx+363

[35] Jalal Shatah. “SU(2) σ模型的弱解与奇点的发展”。载于：《纯粹与应用数学通讯》41.4（1988年），第459–469页。[36] Jalal Shatah 和 Michael Struwe。《几何波动方程》。第2卷。库朗数学讲义。纽约大学库朗数学科学研究所，纽约；美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1998年，第viii+153页。[37] Barry Simon。《算子理论》。第4部分。《分析学综合课程》。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2015年，第xviii+749页。[38] 陶哲轩。《非线性色散方程》。第106卷。CBMS 数学区域会议系列。局部与整体分析。数学科学会议委员会，华盛顿特区；美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2006年，第xvi+373页。[39] Neil Turok 和 David Spergel。“全局织纹与微波背景”。载于：《物理评论快报》64（1990年），第2736–2739页。[40] Joachim Weidmann。《常微分算子的谱理论》。第1258卷。《数学讲义》。施普林格出版社，柏林，1987年，第vi+303页。[41] Anıl Zengino˘glu。“双曲面叶状分层与零无穷远固定”。载于：《经典与量子引力》25.14（2008年），第145002页，共19页。

[42] Anton Zettl。《斯图姆-刘维尔理论》。第121卷。数学调查与专著。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2005年，第xii+328页。

Universität Wien, Fakultät für Mathematik, Oskar-Morgenstern-Platz 1, 1090 Vienna, Austria*Email address*: andras.bonk@univie.ac.at

Universität Wien, Fakultät für Mathematik, Oskar-Morgenstern-Platz 1, 1090 Vienna, Austria
Email address: roland.donninger@univie.ac.at