arXiv:2603.01929v1 [cs.CC] 2 Mar 2026

关于 Je˘r´abek 论文《蕴涵逻辑的一个简化下界》的短评

L.Gordeev, E. H. Haeusler*Universit¨atT¨ubingen,* 里约热内卢天主教大学
lew.gordeew@uni-tuebingen.de,hermann@inf.puc-rio.br

在 [1], [2], [3]) 中，我们概述了 NP = coNP = PSPACE 相等的证明。这些结果是通过证明论中的树到有向无环图压缩技术得到的，该技术适用于 Prawitz 针对蕴涵极小逻辑的 [7] 自然演绎（自然演绎），并参考了 Hudelmaier 的无切割相继式演算 [5]。本文评述 Je˘r´abek 的方法 [6] ，该方法声称通过为蕴涵极小逻辑给出指数下界来推翻我们的结果（参见 [6]: §5 结论）。这一说法错误且具有误导性，下面我们将简要说明（另见 [4]）。

Je˘r´abek 关于所讨论的指数下界的证明，针对的是最小逻辑的弗雷格系统（一种序列演算），而我们的通用多项式上界则针对通过多前提重复而得到增强的有向无环图式最小纯蕴涵自然演绎（简称：多前提自然演绎）。这两个证明系统都是可靠且完备的，但在可证性意义下并不等价。因为对于某些极小重言式，在我们的有向无环图式多前提自然演绎中，可以通过适当的“小型”推导加以证明；而在[6]的任何有向无环图式弗雷格系统版本中，这些推导都无法被认定为正确的证明。因此， [6] 中所声称的指数下界，与我们的有向无环图式多前提自然演绎中的多项式上界完全相容。简言之，在我们的自然演绎形式体系中，存在多项式时间的有向无环图式证明，而在 [6]中却没有与之对应的证明。对于涉及 Je˘r´abek 所谓“朴素”可证性概念的有向无环图式自然演绎证明，这一否定同样适用；该概念由要求 *“all dag-like deductive paths are closed”* 所确定（参见下文的基本示例）。

铭记于此，让我们提出关键问题
（Q）：PSPACE 是否包含于 NP?
为了证明我们的肯定答案，我们在最小逻辑中定义一个证明系统 T （参见下文对 $NM^{\perp}_{\supset}$ 的正则扩展），其可证性断言“推导 ∂ 证明公式 φ”具有多项式证书（即，可由图灵机在关于 ∂ 权重的多项式时间内验证），并且 T 能以一个权重关于 φ 大小为多项式的推导∂ 证明每个最小重言式 φ。我们的 T 是对 Prawitz 的纯蕴涵极小逻辑自然演绎的一种合适的、具有多个前提的 DAG 式改造，它能够证明所需的断言。这种 T 不同于传统的最小逻辑 DAG 式自然演绎表述。主要区别在于，它修改了 DAG 式可证性的概念；该概念由要求 *“all* 满足适当的正则性条件 *deductive paths are closed”* 所确定。请注意， T的 DAG 结构使我们能够将“庞大”的树形推导压缩为所需的“小型”DAG 式推导。

另请注意，如果肯定不成立，那么如何证明（Q）所声称的否定假设，目前并不清楚。因为要得出给定的 $L \subseteq \{0,1\}^*$ 不属于 NP,

仅仅证明某个选定证明系统中的证明具有超多项式下界是不够的，因为目前尚无对所涉及的所有多项式等价证明系统的明确描述。例如，Je$\check{\text{r}}$´abek 试图处理弗雷格系统，但未能成功；下文的基本示例表明，我们的有向无环图式多前提自然演绎在 [6]中没有对应形式。总而言之， [6] 中声称的指数下界与我们的结果无关，而弗雷格系统以及 [6] 中的等价自然演绎对（Q）毫无用处。

基本示例

我们的最小逻辑基本自然演绎演算 $NM_{\to}$ 包含两条推理规则（$\to I$）和（$\to E$）（$\to$-*introduction* 和 $\to$-*elimination* [1]）：

$$\boxed{(\to I): \frac{\beta}{\alpha \to \beta}} \quad and \quad \boxed{(\to E): \frac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}}.$$

它的多前提版本 $NM^{\perp}_{\to}$ 还包含 *repetition rules* $(R)_n$， $n \geq 1$:

$$\boxed{(R)_n : \frac{\overbrace{\alpha \quad \cdots \quad \alpha}^{n \ times}}{\alpha}}$$

其中 α、 β、 γ 等都是最小逻辑中的任意纯蕴涵公式。给定一条演绎路径 $\Theta = [x_0, \cdots, x_h = r]$，它连接标记为 α 的叶节点 x_0 与标记为 ρ 的根节点 r；若存在 $i < h$，使得 x_i 是标记为 $\alpha \to \beta$ 的（对于某个 β）推理规则（$\to I$）的结论，则称该路径为 *closed*（否则称为 *open*）；这些 *discharged* 假设标记为 $[\alpha]$。

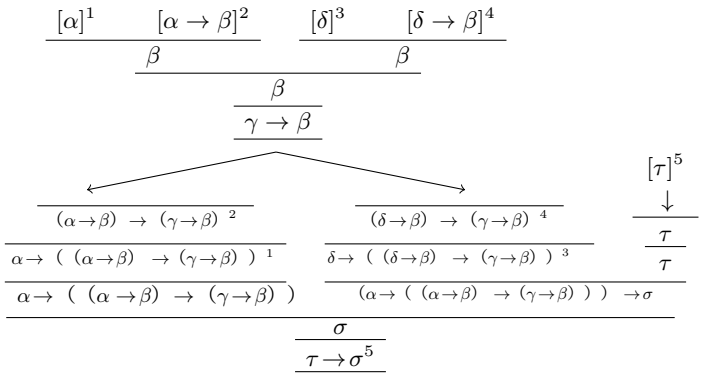
考虑一个关于 $\tau \to \sigma$ 的树状演绎 $\partial \in NM_{\to}$：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha]^1 \qquad [\alpha \to \beta]^2}{\beta}}{\gamma \to \beta}}{(\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \beta)^2}}{\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \beta))^1}}{\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \beta))} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\delta]^3 \qquad [\delta \to \beta]^4}{\beta}}{\gamma \to \beta}}{(\delta \to \beta) \to (\gamma \to \beta)^4}}{\delta \to ((\delta \to \beta) \to (\gamma \to \beta))^3} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\tau]^5}{\tau}}{\tau}}{\tau}}{(\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \beta))) \to \sigma}}{\dfrac{\sigma}{\tau \to \sigma^5}}$$

其中
$\tau := (\delta \to ((\delta \to \beta) \to (\gamma \to \beta))) \to ((\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \beta))) \to \sigma)$。
显然， ∂ 中的每一条演绎路径都是封闭的，因此 $\tau \to \sigma$ 是可证明于 $NM_{\to}$。

通过使用重复规则（R）$_2$ 合并两个出现位置$\gamma \to \beta$，定义压缩的有向无环图式演绎 $\partial' \in NM^{\perp}_{\to}$，其结论为 β：

[1]也称为 *modus ponens*。



请注意， ∂' 有开放演绎路径，例如经由（$\delta \to \beta$） $\to$（$\gamma \to \beta$）连接假设 α （或 $\alpha \to \beta$）与 $\tau \to \sigma$ 的路径，和/或经由（$\alpha \to \beta$） $\to$（$\gamma \to \beta$）连接假设 δ （或 $\delta \to \beta$）的路径。然而， ∂' 中其他（称为 *regular*的）演绎路径的闭合，已经证实了 $\tau \to \sigma$的可证性。只需将 ∂' 树状展开回 ∂，即可清楚看出这一点；这种展开会消除所有相关的开放 DAG 式演绎路径。现在，正则演绎路径由其中涉及的重复规则（R）$_2$ 自然确定。（对于任意 DAG 式证明的一般情况，我们通过添加适当的正则性条件来扩展 $NM^{+}_{\to}$，从而能够以多项式方式形式化这一概念。）

请注意， [6] 中使用的弗雷格系统被声称与相应的自然演绎系统（无论是树状还是 DAG 式版本）在可证性 *"all deductive paths are closed"* 上等价；然而，正如我们刚刚所证明的，这并非 DAG 式可证性的必要条件，而较弱的充分条件 *"all* 正则 *deductive paths are closed"* 则使我们能够证明我们的主张 NP =coNP = PSPACE。

参考文献

[1] L. Gordeev、E. H. Haeusler， *Proof Compression and NP Versus PSPACE*, Studia Logica (107) (1)：55–83 (2019)[2]L. Gordeev、E. H. Haeusler, *Proof Compression and NP VersusPSPACE II*，逻辑部通报 (49) (3)：213–230 (2020)，http://dx.doi.org/10.18788/0138-0680.2020.16[3]L. Gordeev、E. H. Haeusler， *Proof Compression and NP Versus PSPACEII: Addendum*，逻辑部通报 (51)，9 页 (2022) http://dx.doi.org/10.18788/0138-0680.2022.01[4] L. Gordeev、E. H. Haeusler， *Proof of NP=coNP=PSPACE: Current upgrade*, http://arxiv.org/abs/2311.17939 (2025)[5] J. Hudelmaier, *An O n n -space decision procedure for intuitionistic propositional logic* 3 1 13 1993 log), J. Logic Computat. ( ): – ( )[6] E. Je˘r´abek, *A simplified lower bound for implicational logic*，剑桥大学出版社，符号逻辑通报 31 (1)：53–87 (2025)

[7] D. Prawitz，**自然演绎：一项证明论研究**，Almqvist & Wik- sell，1965；Dover Publications，20