arXiv:2603.01936v1 [math-ph] 2 Mar 2026

Levin-Wen模型的扇区理论 II：融合与编织

Alex Bols [*1] 与 Boris Kjær [†2]

[1]理论物理研究所，苏黎世联邦理工学院 [2]QMATH，哥本哈根大学数学科学系

2026年3月3日

摘要

本文延续了我们基于任意酉融合范畴 $\mathcal{C}$ 、在无限平面上对 Levin-Wen 模型的研究。Levin-Wen 模型的基态承载任意子激发，其融合与编织性质由相应的超选择扇区 SSS 的编织 C*-张量范畴所刻画。通过构造 SSS 的融合空间与 Drinfeld 中心 $Z(\mathcal{C})$的融合空间之间的显式同构，我们证明这两个范畴具有同构的 F-符号与 R-符号。由此可知，有限扇区的满子范畴与 Drinfeld 中心酉编织幺半等价，

$$\mathsf{SSS}_f \simeq Z(\mathcal{C}).$$

这为一类具有非整数维数任意子的二维格点模型的超选择扇区范畴，提供了首个完整刻画。

1 引言

理解量子自旋系统的有能隙相这一目标，催生了大量文献。在数学物理领域，这项研究被视为一个分类问题；我们希望建立一套完整的不变量来刻画有能隙相，使得如果两个有能隙基态具有相同的不变量，那么它们就属于同一个有能隙相。在二维情形下，这一分类问题的一个重要不变量是有能隙基态的 任意子内容 ，或者更一般地说，是基态允许存在的拓扑缺陷。过去十年间，人们逐渐认识到，这些拓扑缺陷及其融合与编织性质，可以通过扇区理论 [1, 2, 3, 4, 5, 6]加以严格刻画。

在本文中，我们继续研究基于酉融合范畴（UFC） $\mathcal{C}$的无限正方格点上 Levin-Wen 模型的扇区理论，这项研究始于 [7] （下文称为“第一部分”）。人们认为，这些模型能够描述二维空间中所有具有有能隙边界的有能隙相。在第一部分中，我们对 Levin-Wen 模型的不可约任意子扇区进行了分类，即可观测量代数 $\mathcal{A}$的不可约表示的酉等价类；这些表示相对于唯一 Levin-Wen 基态 $\omega^{\mathbb{1}}$的 GNS表示 $\pi^{\mathbb{1}}$ 满足超选择准则。具体而言，对于*Drinfeld* 中心 $\mathcal{C}(\mathcal{C})$中的每个单对象 $X \in \operatorname{Irr} Z$，我们构造了一个端同态 $\rho^X \in \mathrm{End}(\mathcal{A})$，使得 $\{\pi^X := \pi^{\mathbb{1}} \circ \rho^X\}_{X \in \operatorname{Irr} Z}$ $(\mathcal{C})$ 构成一组完备的互不相交的不可约任意子表示。

*电子邮件：abols01@phys.ethz.ch

†电子邮件：bbk@math.ku.dk

在（近似）满足 Haag 对偶性的假设下，可以构造一个与 ω^1相关联的超选择扇区 [1, 8, 2] 的编织 C*-张量范畴 SSS。该构造将代数量子场论 [9, 10, 11, 12]中的扇区理论推广到格点自旋系统的情形。范畴 SSS 严格刻画了该理论的任意子内容，描述任意子的融合与编织，并确立这些数据是有能隙相[13, 2]的不变量。

所构造的不可约任意子表示 ρ^X [7] 是 SSS 的简单对象。因此， [7] 的结果确立了 SSS$_f$——由 SSS 的简单对象生成的满半单子范畴——与 $Z(\mathcal{C})$ 线性等价。本文旨在通过确立 $\mathsf{SSS}_f \simeq Z(\mathcal{C})$ 作为辫子 C*-张量范畴的等价性，分析 Levin-Wen 模型中任意子激发的融合与编织性质。我们通过构造同构来识别这些范畴的融合空间，

$$\Phi_{XY}^Z : Z(\mathcal{C})(X \otimes Y \to Z) \to \mathsf{SSS}_f(\rho^X \otimes \rho^Y \to \rho^Z),$$

并证明这些同构保持 F-符号和 R-符号。在附录 A 中，我们回顾一个熟知论断的细节： F-符号和 R-符号在等价意义下决定半单辫子幺半范畴。

在 Levin-Wen 模型基态满足有界扩展 Haag 对偶性的假设下（下文的假设 1），我们因此得到

定理 1.1. *存在一个酉辫单oidal等价*

$$Z(\mathcal{C}) \simeq \mathsf{SSS}_f .$$

证明见第 7 节。请注意，这个等价将 $Z(\mathcal{C})$ 的酉模张量范畴（UMTC）结构推前至 SSS$_f$，尤其表明 Levin-Wen 模型的任意子具有共轭（反粒子）。

最近， [14, 15] 针对平面上的 Kitaev量子双模型[16] 也得到了类似结果。对于这些模型，可以显式构造局域化且可传输的放大态射，它们最初在 [17], 中引入，用以表示 SSS$_f$ 中对象的所有等价类。 [15] 中的论证关键依赖于这样一个事实：这些放大态射还为可观测量代数提供了模型的任意子理论的作用，也就是规范群的量子偶 $\mathcal{D}(G)$ 的表示范畴。由[18, 第 5 节1] 中的讨论可知，对于此处涉及的 Levin-Wen 模型，弦算符不能 具有类似性质（事实上， $Z(\mathcal{C})$ 可能具有非整数量子维数）。因此，我们用于计算 Levin-Wen 模型中 SSS$_f$ 的辫子幺半结构的方法，必然与 [15] 中采用的策略显著不同。我们认为，本文提出的策略可用于计算二维自旋系统 [19]所有有能隙相的代表性基态的扇区理论。

本文结构如下。第 2 节介绍模型及其超选择扇区范畴后，我们在第 3 节总结第一部分中的一些重要概念，这些概念将在本文第二部分中用到。第 4 节刻画 SSS 的简单对象。第 5 节中，我们构造融合空间的同构 Φ_{XY}^Z，并证明它们保持F-符号。第 6 节中，我们证明它们也保持 R-符号。最后，简短的第 7 节借助附录 A 的结果证明主定理 1.1；附录 A 回顾了如何利用映射 Φ_{XY}^Z 在 $Z(\mathcal{C})$ 与 SSS$_f$ 之间构造酉辫单oidal等价。

致谢

我们感谢 Corey Jones 和 David Penneys 富有帮助的交流。B. K. 得到了 Villum 基金会通过 QMATH 卓越中心（资助编号 10059）和 Villum 青年研究者项目（资助编号 25452）提供的支撑。

目录

1 引言 **1**

2 Levin-Wen 模型及其超选择扇区范畴 **3**
2.1 Levin-Wen 模型.3 2.2 超选择扇区范畴.5

3 第一部分概要 **11**
3.1 skein 模.11 3.2 图 skein 子空间.16 3.3 Drinfeld 插入.18 3.4 包含引理.19

4 简单对象 SSS 的弦算符 2 **0**
4.1 弦算符.20 4.2 SSS$_f$ 的简单对象代表集.23

5 融合 **23**
5.1 局域态与任意子产生.23 5.2 融合空间的同构.25 5.3 F-符号的同构.28

6 编织 **29**
6.1 传输算子.29 6.2 R-符号的同构.34

7 定理 1.1 的证明 **38**

A F- 和 d R-符号决定编织张量结构 3 **9**
A.1 F-和 R-符号的同构.39 A.2 半单范畴的函子及其自然变换.40 A.3 张量约束的构造.42 A.4 命题 A.1 的证明.46

2 Levin-Wen 模型及其超选择扇区范畴

本节回顾 Levin-Wen 模型的定义，并在有界扩展 Haag 对偶性 $[1, 2, 3]$ 的假设下，详细定义与该模型有能隙基态相关联的超选择扇区的辫状 C*-张量范畴。熟悉这些内容的读者可直接跳至第 3 节。

2.1 Levin-Wen 模型

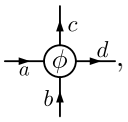
Levin-Wen 模型基于酉融合范畴（酉融合范畴）定义。全文中，我们固定一个任意的酉融合范畴 $\mathcal{C}$，并取代表性简单对象不可约对象$\mathcal{C}$（详见第 3.1.1 节）。

2.1.1 局域自由度

对于每个晶格点 $v \in \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$，我们关联一个局域希尔伯特空间

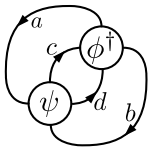
$$\mathcal{H}_v = \bigoplus_{a,b,c,d \in \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}} \mathcal{C}(a \otimes b \to c \otimes d).$$

子空间 $\mathcal{C}(a\otimes b\to c\otimes d)$ 中的元素 $\phi\in\mathcal{H}_v$ 用图形表示为



其中态射 ϕ 与格点 v相关联，且该图从左下读到右上。按照 [20, 21, 22]，我们为 $\mathcal{H}_v$ 配备由下式给出的*skein* 内积

$$\langle\phi,\psi\rangle := \frac{\mathrm{tr}\{\phi^\dagger\circ\psi\}}{\sqrt{d_a d_b d_c d_d}} = \frac{1}{\sqrt{d_a d_b d_c d_d}}$$



对于 $\phi,\ \psi\in\mathcal{C}(a\otimes b\to c\otimes d)$。

对任意 $v\in\mathbb{Z}^2$，令 $\mathcal{A}_v=\mathrm{End}(\mathcal{H}_v)$。对有限的 $V\subset\mathbb{Z}^2$，定义

$$\mathcal{H}_V=\bigotimes_{v\in V}\mathcal{H}_v,\quad \mathcal{A}_V=\bigotimes_{v\in V}\mathcal{A}_v\simeq\mathrm{End}(\mathcal{H}_V).$$

若 $V\subset W$ 是 $\mathbb{Z}^2$的有限子集，则存在自然嵌入 $\mathcal{A}_V\hookrightarrow\mathcal{A}_W$，即与 $\mathcal{A}_{W\setminus V}$上的恒等态射作张量积。对任意（可能无限的） $X\subset\mathbb{Z}^2$，这些包含映射构成一个矩阵代数的有向系统，其直极限为

$$\mathcal{A}_X^{\mathrm{loc}}=\varinjlim_{V\subset\subset X}\mathcal{A}_V,\quad \mathcal{A}_X=\overline{\mathcal{A}_X^{\mathrm{loc}}}^{\|\cdot\|}.$$

-代数 $\mathcal{A}_X^{\mathrm{loc}}$称为 X上的局域可观测量 代数，而C-代数 $\mathcal{A}_X$ 称为 X上的准局域代数 。我们也记作 $\mathcal{A}=\mathcal{A}_{\mathbb{Z}^2}$ 和 $\mathcal{A}^{\mathrm{loc}}=\mathcal{A}_{\mathbb{Z}^2}^{\mathrm{loc}}$。

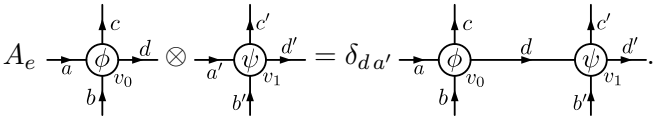
对于任意 $S\subset\mathbb{R}^2$，定义 $\overline{S}=S\cap\mathbb{Z}^2$ 并令

$$\mathcal{A}_S:=\mathcal{A}_{\overline{S}},\quad \mathcal{H}_S:=\mathcal{H}_{\overline{S}}\quad \text{if } \overline{S} \text{ is finite.}$$

2.1.2 Levin-Wen 哈密顿量及其基态

令 $e_1=(1,0)$ 和 $e_2=(0,1)$ 为正方格子 $\mathbb{Z}^2$ 的单位向量。将有向边的集合记为 $\vec{\mathcal{E}}=\{(v_0,v_1)\in\mathbb{Z}^2\times\mathbb{Z}^2:\ \mathrm{dist}(v_0,v_1)=1\}$。

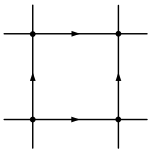
对于 $e\in\vec{\mathcal{E}}$，记 $\bar{e}=(v_1,v_0)$、$\partial_i e=v_0$ 和 $\partial_f e=v_1$。对于每条有向边 $e=(v_0,v_1)\in\vec{\mathcal{E}}$，定义作用于 $\mathcal{H}_{v_0}\otimes\mathcal{H}_{v_1}$ 上的投影算子 A_e，使得



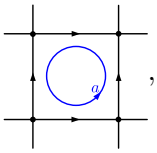
显然 $A_e=A_{\bar{e}}$。我们称 A_e 在 e 处施加了弦网约束。

将 $\mathbb{Z}^2$ 的面集合记为 $\mathcal{F}$。对于每个面 $f\in\mathcal{F}$，定义 $\mathcal{H}_f=\bigotimes_{v\in f}\mathcal{H}_v$，以及作用于 $\mathcal{H}_f$ 上的正交投影算子 B_f；该算子会消去与 $\prod_{e\in f}A_e\mathcal{H}_f$ 正交的向量，并通过插入 $\mathcal{C}$ 的正则元并运用局部关系来作用于 $\prod_{e\in f}A_e\mathcal{H}_f$：

$$B_f$$



$$:=\frac{1}{\mathcal{D}^2}\sum_{a\in\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}}d_a$$



其中 d_a 是 a 和 $\mathcal{D}^2=\sum_a d_a^2$的量子维数。精确定义见第 3.2.5 节。投影算子 B_f 是正交的。此外，根据引理 3.8，所有 $\{B_f\}_{f\in\mathcal{F}}$ 彼此对易；另见命题 5.14]中的 [23,。

Levin-Wen 哈密顿量是形式上的对易投影算符哈密顿量

$$H_{LW} = -\sum_{f\in\mathcal{F}} B_f.$$

态 $\omega\colon \mathcal{A}\to\mathbb{C}$是 H_{LW}的无挫折基态，当且仅当 $\omega(B_f) = 1$对所有 $f\in\mathcal{F}$成立。以下命题已在 [24] 中证明（参见该论文的第 2.3 节和定理 4.8），近期也有人用不同方法在 [7, 的命题 2.1]中证明:

命题 2.1。 *Levin-Wen* 哈密顿量有唯一的无挫折基态，记作 $\omega^{\mathbb{1}}$。这个无挫折基态是纯的。

由于 H_{LW} 是对易投影算符哈密顿量，因此 $\omega^{\mathbb{1}}$ 实际上是 H_{LW}的有能隙基态。令 $(\pi^{\mathbb{1}}, \mathcal{H}, |\Omega\rangle)$ 为 Levin-Wen 哈密顿量唯一无挫折基态 $\omega^{\mathbb{1}}$ 的 GNS 三元组。由于 $\omega^{\mathbb{1}}$ 是纯的， $\pi^{\mathbb{1}}$ 不可约。

2.2 超选择扇区范畴

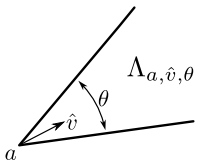
为完整起见，我们在有界扩展 Haag 对偶性的假设下，详细回顾超选择扇区的编织 C*-张量范畴的构造。另见 [3, 第 6.1] 节，其中的表述略有不同。

请注意，尽管本节讨论的是与我们的 Levin-Wen 模型的基态 $\omega^{\mathbb{1}}$相关联的 SSS 范畴，但本节中的讨论实际上对二维自旋系统上的任意纯有能隙基态 $\omega^{\mathbb{1}}$ 都适用。

2.2.1 锥与任意子表示

一个锥 $\Lambda\subset\mathbb{R}^2$ 是平面上的一个子集，其形式为

$$\Lambda = \Lambda_{a,\hat{v},\theta} := \{x\in\mathbb{R}^2 : (x-a)\cdot\hat{v} > \|x-a\|\cos(\theta/2)\}$$



其中顶点 $a\in\mathbb{R}^2$、称为轴的单位向量$\hat{v}\in\mathbb{R}^2$，以及张角 $\theta\in(0,\ 2\pi)$均为任意取值。锥的闭包也称为具有相同顶点、轴和张角的锥。

给定任意锥$\Lambda = \Lambda_{a,\ \hat{v},\ \theta}$，我们将 $\Lambda^{+s} := \Lambda_{b,\ \hat{v},\ \theta}$（其中 $b = a - s\sin(\theta/2)^{-1}\cdot\hat{v}$）记作将 Λ 的边界射线沿垂直方向向外移动距离 s后得到的锥。

扇区理论研究的基本对象是所谓的任意子表示。

定义 **2.2 节中，**表示 $\pi\colon \mathcal{A}\to B(\mathcal{H})$ 相对于 $\pi^{\mathbb{1}}$ 局域化在锥 Λ 中 *if*

$$\pi(x) = \pi^{\mathbb{1}}(x) \qquad for\ all\ x\in\mathcal{A}_{\Lambda^c}.$$

如果对于任意锥Λ，都存在一个酉等价表示局域化在 Λ中，则称表示 π 满足超选择准则（相对于 $\pi^{\mathbb{1}}$）。满足超选择准则的表示称为任意子表示，其酉等价类称为任意子扇区。

2.2.2 允许代数的局域化可传输端同态

任意子扇区刻画了基态$\omega^{\mathbb{1}}$所支撑的任意子激发类型。为了研究这些任意子的融合，我们需要一种复合任意子表示的方法。事实证明，在假设 Haag 对偶性（近似成立）的条件下，任意子

表示都可以从 $\mathcal{A}$扩展到一个稍大的代数上的端同态 。任意子的融合因而对应于这类端同态的复合。

对于任意锥 Λ ，我们定义 $\mathcal{R}_\Lambda := \pi^{\mathbb{1}}(\mathcal{A}_\Lambda)''$ ，并称其为 Λ 的 锥代数 。由于 $\omega^{\mathbb{1}}$ 是纯态，且是某个局域哈密顿量的有能隙基态，由 [2, 引理 5.3] 可知，所有锥 $\mathcal{R}_\Lambda$ 的锥代数都是无限因子。以下假设改编自 [4]。

假设 1 （有界扩展 Haag 对偶性）。 存在 $s \geq 0$ 使得

$$\mathcal{R}'_{\Lambda^c} \subseteq \mathcal{R}_{\Lambda^{+s}}$$

对所有锥 Λ 均成立。

注2.3。 （有界扩展）*Haag* 对偶性已针对一大类基于 C^*-弱 *Hopf* 代数的交换投影算子模型得到证明，见 *[25]*。该类模型包括一些被认为与此处所研究的 *Levin-Wen* 模型属于同一相的模型。也就是说，通过有限深度量子线路以及添加或移除解耦辅助量子比特，可以将 *Levin-Wen* 基态变换为 [25] 中某个模型的基态。由于有界扩展 *Haag* 对偶性在此类变换下保持不变，我们预期此处所研究的 *Levin-Wen* 基态确实满足有界扩展 *Haag* 对偶性。此外请注意，即使不作有界扩展 *Haag* 对偶性这一假设，本文所呈现的结果也足以导出关于任意子理论的有意义结论；见下文注*2.10*。

取一个单位向量 $\hat{f} \in \mathbb{R}^2$ ，称其为禁方向。若锥 $\Lambda = \Lambda_{a,\hat{v},\theta}$ 是 $\hat{f}$允许的 ，则称其为允许锥；此时 $v \cdot f < \cos(\theta/2)$，记作 $\Lambda \perp f$。定义允许代数

$$\mathcal{B} := \overline{\bigcup_{\Lambda \perp \hat{f}} \mathcal{R}_\Lambda}^{\|\cdot\|}.$$

注意， $\pi^{\mathbb{1}}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ 在弱算子拓扑下稠密。

引理 2.4。 设 $\pi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$ 是一个任意子表示。存在唯一的弱算子拓扑连续表示 $\rho : \mathcal{B} \to B(\mathcal{H})$ ，使得 $\rho \circ \pi^{\mathbb{1}} = \pi$。我们称 ρ 为π 到 $\mathcal{B}$的扩张。

证明： 由于 π 是一个任意子表示，对每个锥 Λ，都存在一个酉算子 V_Λ ，使得 $\mathrm{Ad}[V_\Lambda] \circ \pi^{\mathbb{1}}$ 局域于 Λ^c。等价地， $\pi|_{\mathcal{A}_\Lambda} = \mathrm{Ad}[V_\Lambda] \circ \pi^{\mathbb{1}}|_{\mathcal{A}_\Lambda}$。注意，若 $\Lambda \subset \Lambda'$ ，则

$$\mathrm{Ad}[V_{\Lambda'}] \circ \pi^{\mathbb{1}}|_{\mathcal{A}_\Lambda} = \pi|_{\mathcal{A}_\Lambda} = \mathrm{Ad}[V_\Lambda] \circ \pi^{\mathbb{1}}|_{\mathcal{A}_\Lambda}.$$

由于酉元的伴随作用在弱算子拓扑下连续，这意味着当 $\Lambda \subset \Lambda'$ 时，$\mathrm{Ad}[V_\Lambda]|_{\mathcal{R}_\Lambda} = \mathrm{Ad}[V_{\Lambda'}]|_{\mathcal{R}_\Lambda}$。注意到按包含关系部分排序的允许锥集合是有向的，因此可以通过如下方式一致地定义 ρ 在 $\bigcup_{\Lambda \perp \hat{f}} \mathcal{R}_\Lambda$ 上的作用：对于某个允许锥 Λ'，只要 $x \in \mathcal{R}_{\Lambda'}$ ，就令 $\rho(x) = \mathrm{Ad}[V_{\Lambda'}](x)$。最后， ρ 通过范数连续性扩张到 $\mathcal{B}$ 。

任意 $x \in \mathcal{A}^{\mathrm{loc}}$ 都属于某个允许锥 Λ 对应的 $\mathcal{A}_\Lambda$ ，因此我们有 $\rho(\pi^{\mathbb{1}}(x)) = (\mathrm{Ad}[V_\Lambda] \circ \pi^{\mathbb{1}})(x) = \pi(x)$。因此，等式 $\rho \circ \pi^{\mathbb{1}} = \pi$ 在 $\mathcal{A}^{\mathrm{loc}}$ 上成立，并通过连续性扩张到整个 $\mathcal{A}$。□

至此，我们已经证明，每个任意子表示都可以唯一地扩张为允许代数的表示。现在我们将在有界扩展 Haag 对偶性的假设下证明：如果任意子表示局域化在某个允许锥中，那么这个扩张实际上是 $\mathcal{B}$ 的一个端同态。

引理 2.5。 设 π 是局域化在允许锥 Λ 中的任意子表示，且 ρ: $\mathcal{B} \to B(\mathcal{H})$ 是其到 $\mathcal{B}$ 的扩张。在假设 *1* 下，对于任何包含 Λ 的允许锥 Δ ，我们有 $\rho(\mathcal{R}_\Delta) \subset \mathcal{R}_{\Delta^{+s}}$ 。特别地， ρ 是 $\mathcal{B}$ 的端同态。

证明： 由引理 2.4 可知，存在唯一的弱算子拓扑连续表示 ρ: $\mathcal{B} \to B(\mathcal{H})$，使得 $\rho \circ \pi^{\mathbb{1}} = \pi$。

Su设 Δ 是包含 Λ 的允许锥，并取 $x \in \mathcal{A}_{\Delta}$。对于任意 $y \in \mathcal{A}_{\Delta^c}$，我们有 e

$$[\rho(\pi^{\mathbb{1}}(x)), \pi^{\mathbb{1}}(y)] = [\pi(x), \pi(y)] = 0$$

这里我们用到了 π 局域化于 Λ 这一事实。这意味着 $\rho(\pi^{\mathbb{1}}(\mathcal{A}_{\Delta})) \subseteq \pi^{\mathbb{1}}(\mathcal{A}_{\Delta^c})' \subseteq \mathcal{R}_{\Delta^{+s}}$，其中最后一个包含关系基于有界扩展 Haag 对偶性的假设。由连续性可得，对于任意包含 Λ 的允许锥 Δ，都有 $\rho(\mathcal{R}_{\Delta}) \subseteq \mathcal{R}_{\Delta^{+s}}$。再次利用连续性，可得 $\rho(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$，如所需。□

任意子表示的扩张满足以下局域化和可传输性条件:

引理 2.6。 设 π 是局域化于允许锥 Λ 的任意子表示。那么， π 到 $\mathcal{B}$ 的扩张 ρ 局域化于 Λ，其意义是 $\rho \circ \pi^{\mathbb{1}}|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}} = \pi|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}} = \pi^{\mathbb{1}}|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}}$。此外，扩张 ρ 是可传输的，其意义是：对于任意允许锥 Δ，存在一个表示ρ'： $\mathcal{B} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 局域化于 Δ，且与 ρ 酉等价。

证明： 局域化断言由 $\rho \circ \pi^{\mathbb{1}} = \pi$ 立即得出。对于可传输性，由于π 是一个任意子表示，存在酉算子 V_{Δ}，使得 $\pi' := \mathrm{Ad}[V_{\Delta}] \circ \pi$ 局域在 Δ 中。表示 π' 是一个任意子表示，根据引理 2.4，它具有唯一的弱算子拓扑连续扩张 ρ' 到 $\mathcal{B}$，且该扩张局域在 Δ 中。酉算子 V_{Δ} 交织 π 和 π'，由连续性可知，这也意味着 V_{Δ} 交织 ρ 和 ρ'。也就是说， ρ 和 ρ' 酉等价。证明完毕。□

这些准备工作引出了下面的定义。

定义 2.7。 若端同态 $\rho \in \mathrm{End}(\mathcal{B})$ 满足 $\rho \circ \pi^{\mathbb{1}}|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}} = \pi^{\mathbb{1}}|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}}$，则称其局域在锥 Λ 中。若对于任意锥 Δ，都存在一个端同态 $\rho' : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ 局域在 Δ 中，并且与 ρ 酉等价，则称端同态 ρ 具有可传输性。

超选择扇区范畴 SSS是一个C^*-范畴，其对象是 $\mathcal{B}$ 的端同态，这些端同态局域在某个允许锥中且可传输。SSS 的态射是交织算子。对于任意 ρ、$\rho' \in \mathrm{Ob}\mathsf{SSS}$，我们将从 ρ到 ρ'的交织算子空间记为

$$\mathsf{SSS}(\rho \to \rho') = \{V \in B(\mathcal{H}) \,|\, V\rho(x) = \rho'(x)V \ \textit{for all}\ x \in \mathcal{B}\}.$$

定义 SSS^f 为 SSS 的满子范畴，其对象 ρ 的端态射空间 $\mathsf{SSS}(\rho \to \rho)$是有限维的。

注释 2.8。 若 $\rho \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{SSS}$局域在一个允许锥 Λ 中，则 $\rho \circ \pi^{\mathbb{1}}$ 是局域在 Λ中的任意子表示，而 ρ 是它到 $\mathcal{B}$的唯一扩张。因此，由引理 *2.6*可知，在有界扩展 *Haag* 对偶性的假设下，SSS 的对象恰好是局域在允许锥中的任意子表示的扩张。

注释 2.9。 引入SSS^f 的原因是，我们希望证明它与 *Drinfeld* 中心 $Z(\mathcal{C})$等价，而其中的所有对象都具有有限维端态射空间。由于SSS 允许无限直和，因此必须限制在SSS^f 内，才能使该等价成立。我们认为，SSS 中的所有无限对象都是SSS^{f}中对象的无限直和或积分。

注2.10。 在第 *4.1* 节中，我们给出了 $\mathcal{B}$ 的局域且可传输端同态的显式构造，这些端同态代表 SSS 中每个简单对象同构类。可以直接证明，该构造确实给出了 $\mathcal{B}$ 的端同态，而无需使用 *Haag* 对偶性（例如参见 *[1,* 命题 *4.6]*）。这些端同态的可传输性也独立于

Haag 对偶性。事实上，我们在第 *6.1* 节中构造了显式的传输算子，它们按照引理 *2.11* 的意义是局域的。

由所有显式构造的端同态的有限积和直和生成的子范畴 $\mathcal{D} \subset$SSS 自然具有编织 C^*-张量范畴的结构。事实上，可以调整公式 (1) 来定义编织；由于锥代数是真无限的，直和存在（参见第 *2.2.4* 节）；而下文证明的引理 *5.9* 可用于构造子对象。类似的方法见 *[26]* 。

以这种方式赋予 $\mathcal{D}$ 编织 C*-张量范畴的结构后，本文中的论证表明，$\mathcal{D}$ 与 $Z(\mathcal{C})$幺半等价且编织等价，并且无需任何（弱化的）*Haag* 对偶性假设。

2.2.3 张量积与编织

我们将展示，局域化且可传输的端同态所组成的范畴 SSS 自然具有张量积和编织结构。首先注意交织算子的以下局域性质。

引理 2.11. 设 ρ 和 ρ' 是 $\mathcal{B}$ 的端同态，且都局域化于某个允许锥 Λ中。若假设 *1* 成立，则 $\mathsf{SSS}(\rho \to \rho') \subset \mathcal{R}_{\Lambda^{+s}} \subset \mathcal{B}$。

证明：设 $T \in$SSS$(\rho \to \rho')$。取 $y \in \mathcal{A}_{\Lambda^c}$。由于 ρ 和 ρ' 都局域化于 Λ 我们有

$$T\pi^{\mathbb{1}}(y) = T\rho(\pi^{\mathbb{1}}(y)) = \rho'(\pi^{\mathbb{1}}(y))T = \pi^{\mathbb{1}}(y)T,$$

这表明 $T \in \pi^{\mathbb{1}}(\mathcal{A}_{\Lambda^c})' = \mathcal{R}'_{\Lambda^c} \subseteq \mathcal{R}_{\Lambda^{+s}}$，其中最后一个包含关系由有界扩展 Haag 对偶性得到。□

由此引理立即可知，SSS 上以下严格张量积是良定义的：

$$\begin{aligned} \rho \times \sigma &:= \rho \circ \sigma && \rho, \sigma \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{SSS} \\ S \times T &:= S\rho(T) = \rho'(T)S, && S \in \mathsf{SSS}(\rho \to \rho'), T \in \mathsf{SSS}(\sigma \to \sigma'). \end{aligned}$$

注 2.12. 由下文的命题 *5.10* 可知，SSSf 在张量积运算下封闭。

局域于距离足够远且彼此不相交的锥中的端同态，其张量积彼此交换。

引理 2.13. 设 ρ 和 σ 是 $\mathcal{B}$ 的端同态，分别局域于允许锥 Λ 和 Δ 中，使得 $\Lambda^{+s} \cap \Delta^{+s} = \emptyset$。在假设 *1* 下，我们有 $\rho \times \sigma = \sigma \times \rho$。

证明：若 $x \in \pi^{\mathbb{1}}(\mathcal{A}_{\Lambda^c \cap \Delta^c})$，则由局域化可得 $\rho(x) = x$ 和 $\sigma(x) = x$，因此$\rho(\sigma(x)) = \rho(x) = x = \sigma(x) = \sigma(\rho(x))$，如所需。

若 $x \in \pi^{\mathbb{1}}(\mathcal{A}_{\Delta})$，则由局域化可得 $\rho(x) = x$，因此 $\sigma(\rho(x)) = \sigma(x)$。由引理 2.5 可得 $\sigma(x) \in \mathcal{R}_{\Delta^{+s}}$，再由局域化可得 $\rho(\sigma(x)) = \sigma(x)$。这也表明在此情形下 $\rho(\sigma(x)) = \sigma(\rho(x))$。同理，对于 $x \in \pi^{\mathbb{1}}(\mathcal{A}_{\Lambda})$，有 $\rho(\sigma(x)) = \sigma(\rho(x))$。

由于 $\rho \circ \sigma$ 和 $\sigma \circ \rho$ 是端同态，且 $\mathcal{A}$ 由 $\mathcal{A}_{\Lambda}$、$\mathcal{A}_{\Delta}$和 $\mathcal{A}_{\Lambda^c \cap \Delta^c}$生成，由此可知上述结果在 $\pi^{\mathbb{1}}(\mathcal{A})$ 上成立。最后，由连续性可将该等式延拓到整个 $\mathcal{B}$。□

对于编织，首先注意到，对于任意允许锥 Λ，存在一个相对于禁方向位于 Λ 顺时针方向的允许锥 Δ，并且满足 $\Lambda^{+s} \cap \Delta^{+s} = \emptyset$，见图 1。给定 ρ，$\sigma \in$ Ob SSS 局域化于 Λ，并假设有界扩展 Haag 对偶性（假设 1），

引理 2.6 和引理 2.5 给出了一个局域化于 Δ 的端同态 $\sigma' \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{SSS}$ 以及一个酉 $V \in \mathsf{SSS}(\sigma \to \sigma')$。于是我们可以定义

$$b_{\rho,\sigma} := V^*\rho(V) \in \mathsf{SSS}(\rho \times \sigma \to \sigma \times \rho). \tag{1}$$

为证明 $b_{\rho,\,\sigma}$ 交织 $\rho \times \sigma$ 和 $\sigma \times \rho$，对任意 $x \in \mathcal{B}$进行计算

$$\begin{aligned} b_{\rho,\sigma}\,(\rho \times \sigma)(x) &= V^*\rho(V)\rho(\sigma(x)) = V^*\rho(V\sigma(x)) = V^*\rho(\sigma'(x))\rho(V) = V^*\sigma'(\rho(x))\rho(V) \\ &= \sigma(\rho(x))V^*\rho(V) = (\sigma \times \rho)(x)\, b_{\rho,\sigma} \end{aligned}$$

其中第四步用到了引理 2.13。

引理 2.14。 在假设 *1* 下，式 (1) 中定义的态射不依赖于 Δ、σ' 或 V 的选取。

证明： 设 Δ'、σ'' 和 W 满足与上文 Δ，σ' 和 V 相同的假设。

假设存在一个允许锥 $\Gamma \supset \Delta$，Δ'，使得 $\Gamma^{+s} \cap \Lambda^{+s} = \emptyset$ 和相对于禁方向位于 Λ 的顺时针方向。现在，$VW^* \in \mathsf{SSS}(\sigma'' \to \sigma')$，且 σ' 和 σ'' 均局域于 Γ。因此，由引理 2.11 可得 $VW^* \in \mathcal{R}_{\Gamma^{+s}}$。由于 ρ 局域于 Λ，我们有 $(VW^*)^*\rho(VW^*) = 1$。利用这一点，可得

$$W^*\rho(W) = W^*(VW^*)^*\rho(VW^*W) = V^*\rho(V),$$

如所要求。

一般来说，总能找到一条从 Δ 到 Δ' 且与 Λ^{+s} [3] 不相交的之字形路径。也就是说，存在一列允许锥 $\Delta_1 = \Delta$、Δ_2、$\cdots$、Δ_{n-1}、$\Delta_n = \Delta'$ 以及允许锥 Γ_1、$\cdots$、Γ_{n-1}，使得对于每个 $i = 1$、$\cdots$、$n-1$，都有 $\Gamma_i^{+s} \cap \Lambda^{+s} = \emptyset$；并且每个 Γ_i 相对于禁方向都位于 Λ 的顺时针方向，并包含 Δ_i 和 Δ_{i+1}。反复应用上述结果即可得出结论。□

引理 2.15。 在假设 *1* 下，由式(1)给出的态射在SSS上定义了酉编织。也就是说，对于所有 ρ、$\sigma \in \mathrm{Ob}\mathsf{SSS}$，态射 $b_{\rho,\,\sigma}$ 是酉的，并且我们有

$$b_{\rho',\sigma'}\, S \times T = T \times S\, b_{\rho,\sigma}$$

对于任意 $\rho', \sigma' \in \mathrm{Ob}\mathsf{SSS}$、$S \in \mathsf{SSS}(\rho \to \rho')$以及 $T \in \mathsf{SSS}(\sigma \to \sigma')$，并且

$$\begin{aligned} b_{\rho\times\sigma,\tau} &= (b_{\rho,\tau} \times \mathbb{1}_\sigma)\,(\mathbb{1}_\rho \times b_{\sigma,\tau}) \\ b_{\rho,\sigma\times\tau} &= (\mathbb{1}_\sigma \times b_{\rho,\tau})\,(b_{\rho,\sigma} \times \mathbb{1}_\tau) \end{aligned}$$

对于所有 $\rho, \sigma, \tau \in \mathrm{Ob}\mathsf{SSS}$。

证明： 酉性由定义立即得出。为证明 $b_{\rho',\sigma'}S \times T = T \times S b_{\rho,\sigma}$，我们假设端同态 ρ, ρ', σ 和 σ' 均局域在一个允许锥 Λ 中，并固定一个位于 Λ 顺时针方向的允许锥 Δ，使得 $\Lambda^{+s} \cap \Delta^{+s} = \emptyset$；此外还有局域在 Δ 中的端同态 σ_R, σ'_R，以及幺正元 $V \in \mathsf{SSS}(\sigma \to \sigma_R)$ 和 $W \in \mathsf{SSS}(\sigma' \to \sigma'_R)$。

我们先证明 $\sigma = \sigma'$ 和 $T = \mathbb{1}_\sigma$ 的特殊情形。此时 $S \times T = S$ 和 $T \times S = \sigma(S)$。因此我们必须证明 $b_{\rho',\sigma}S = \sigma(S)b_{\rho,\sigma}$。证明如下：

$$b_{\rho',\sigma}S = V^*\rho'(V)S = V^*S\rho(V) = V^*\sigma_R(S)\rho(V) = \sigma(S)V^*\rho(V) = \sigma(S)b_{\rho,\sigma},$$

其中我们注意到，引理 2.11 以及 σ_R 的局域化意味着 $\sigma_R(S) = S$。

现在我们来证明 $\rho = \rho'$ 与 $S = \mathbb{1}_\rho$的特殊情形。于是有 $S \times T = \rho(T)$且$T \times S = T$，因此我们必须证明$b_{\rho,\sigma'}\rho(T) = Tb_{\rho,\sigma}$。为此，首先注意到我们可以选取一个允许锥 Δ_L，它位于 Λ 的逆时针方向，并且满足$\Delta_L^{+s} \cap \Lambda^{+s} = \emptyset$（见图

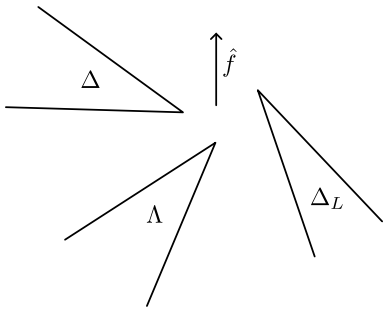


图 1：一个允许锥 Λ，连同允许的锥 Δ和 Δ_L；后两者均与 $\Lambda^{+s\hat{}}$不相交，并且相对于禁方向 f，分别位于 Λ 的顺时针方向和逆时针方向。

1），以及一个局域化于 Δ_L 的端同态 ρ_L 和一个酉 $U \in \mathsf{SSS}(\rho \to \rho_L)$。由前述特殊情形可得

$$b_{\rho,\sigma} = \sigma(U^*)b_{\rho_L,\sigma}U \quad \text{and} \quad b_{\rho,\sigma'} = \sigma'(U^*)b_{\rho_L,\sigma'}U.$$

利用这一点，我们计算

$$b_{\rho,\sigma'}\rho(T) = \sigma'(U^*)b_{\rho_L,\sigma'}U\rho(T) = \sigma'(U^*)W^*\rho_L(W)\rho_L(T)U = \sigma'(U^*)TS$$

这里我们使用引理 2.11 以及 ρ_L 的局域化，得出 $\rho_L(T) = T$ 且 $\rho_L(W) = W$。类似地，

$$Tb_{\rho,\sigma} = T\sigma(U^*)b_{\rho_L,\sigma}U = \sigma'(U^*)TV^*\rho_L(V)U = \sigma'(U^*)TS,$$

因此两个特殊情形现已证明。一般情形由下式推出

$$\begin{aligned} b_{\rho',\sigma'}\, S \times T &= b_{\rho',\sigma'}(S \times \mathbb{1}_{\sigma'})(\mathbb{1}_{\rho} \times T) = (\mathbb{1}_{\sigma'} \times S)b_{\rho,\sigma'}(\mathbb{1}_{\rho} \times T) \\ &= (\mathbb{1}_{\sigma'} \times S)(T \times \mathbb{1}_{\rho})b_{\rho,\sigma} = T \times S\, b_{\rho,\sigma}. \end{aligned}$$

取局域化于 Δ 的 ρ'，σ'，τ'，其酉传递子为 $V_\rho \in \mathsf{SSS}(\rho \to \rho')$、$V_\sigma \in \mathsf{SSS}(\sigma \to \sigma')$ 和 $V_\tau \in \mathsf{SSS}(\tau \to \tau')$。则

$$(b_{\rho,\tau} \times \mathbb{1}_\sigma)(\mathbb{1}_\rho \times b_{\sigma,\tau}) = \beta_{\rho,\tau}\,\rho(\beta_{\sigma,\tau}) = V_\tau^*\rho(V_\tau)\,\rho(V_\tau^*\sigma(V_\tau)) = V_\tau^*(\rho \times \sigma)(V_\tau) = b_{\rho\times\sigma,\tau},$$

这证明了第一个六边形恒等式。对于第二个，注意到 $V_{\sigma\times\tau} := V_\sigma \times V_\tau = V_\sigma\sigma(V_\tau) \in \mathsf{SSS}(\sigma \times \tau \to \sigma' \times \tau')$，并计算

$$\begin{aligned} (\mathbb{1}_\sigma \times b_{\rho,\tau})(b_{\rho,\sigma} \times \mathbb{1}_\tau) &= \sigma\big(V_\tau^*\rho(V_\tau)\big)\,V_\sigma^*\rho(V_\sigma) = \sigma(V_\tau)^*V_\sigma^*\,\sigma'\big(\rho(V_\tau)\big)\rho(V_\sigma) \\ &= \big(V_\sigma\sigma(V_\tau)\big)^*\,\rho\big(\sigma'(V_\tau)V_\sigma\big) = V_{\sigma\times\tau}^*\,\rho\big(V_{\sigma\times\tau}\big) = b_{\rho,\sigma\times\tau} \end{aligned}$$

其中我们在第三步使用了引理 2.13。 □

2.2.4 直和与子对象

设 $\rho_1, \cdots, \rho_n \in \mathsf{Ob}\ \mathsf{SSS}$，则存在一个允许锥 Λ，使得每个 ρ_i 都局部化于 Λ。由于锥代数 $\mathcal{R}_\Lambda$ 是真无限的，我们可以使用二分引理 [27, 引理 6.3.3]来构造等距算子 $\{v_i\}_{i=1}^n$，它们生成 Cuntz 代数 $\mathcal{O}_n$的一个同构副本。然后容易验证

$$\rho := \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ad}[v_i] \circ \rho_i$$

是 $\mathcal{B}$ 的一个端同态，在 Λ 中局域化且可传输。这说明 SSS 具有直和。由构造显然可知，SSS_f 在直和运算下封闭。

现在设 $\rho \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{SSS}$ 局域化于一个允许锥 Λ 中，并令 $p \in \mathrm{SSS}(\rho \to \rho)$ 为一个非平凡正交投影。假设有界扩展 Haag 对偶性（假设 1）成立，由引理 2.11 得到 $p \in \mathcal{R}_{\Lambda^{+s}}$，因此 $\tilde{\sigma}(x) := p\rho(x) = \rho(x)p$ 定义了 $\mathcal{B}$的一个（非幺）端同态。特别地，$\tilde{\sigma}$ 限制为 $\pi^{\mathbb{1}}(\mathcal{A})$ 在 $p\mathcal{H}$上的一个非零表示。由于 $\mathcal{A}$ 是简单的，该表示是忠实的。这意味着 p 必定是无限的。由于 $\mathcal{R}_{\Lambda^{+s}}$ 是真无限因子，因此可得 $p \sim \mathbb{1}$，也就是说，存在一个偏等距算子 $w \in \mathcal{R}_{\Lambda^{+s}}$ 使得 $p = ww^*$和 $\mathbb{1} = w^*w$。现在考虑端同态 $\sigma = \mathrm{Ad}[w] \circ \rho$。容易验证，$\sigma$ 局域化于 Λ^{+s}，且是可传输的。这说明 SSS 容许子对象。最后注意，若 $\rho \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{SSS}f$，则同样有 $\sigma \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{SSS}f$，因此 $\mathrm{SSS}f$ 在取子对象下封闭。

总之，我们得出结论：若假设 1 成立，则 SSS 和 $\mathrm{SSS}f$ 都是带编织结构的 C*-张量范畴，并且 $\mathrm{SSS}f$ 还是半单的。

3 第一部分概要

本节回顾酉融合范畴缀理论的一般事实，以及本文中用到的 [7] 中的结果。

3.1 缀模

3.1.1 酉融合范畴与 Drinfeld 中心

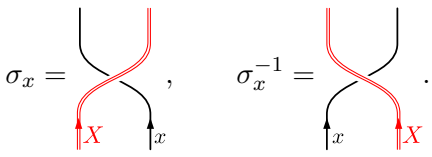
固定一个酉融合范畴（UFC）$\mathcal{C}$，并赋予其典范球面结构；参见 [28, 29, 30, 31]。对于对象 $x, y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$，将态射空间记为 $\mathcal{C}(x \to y)$。每个端态射空间$\mathcal{C}(x \to x)$都带有球面迹 tr，且任意非零对象的量子维数为 $d_x := \mathrm{tr}(\mathrm{id}_x) > 0$。选取简单对象不可约对象$\mathcal{C}$ 的代表元，其中包含张量单位 1。总量子维数为

$$\mathcal{D} := \Big(\sum_{a \in \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}} d_a^2 \Big)^{1/2}.$$

对偶记为 x^*，并带有求值映射与余求值映射 $\mathrm{ev}_x : x^* \otimes x \to \mathbb{1}$ 以及 $\mathrm{coev}_x : \mathbb{1} \to x \otimes x^*$。对每个简单 a，存在唯一的 $\bar{a} \in \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$ 同构于 a^*。酉结构提供伴随 $f \mapsto f^\dagger : \mathcal{C}(x \to y) \to \mathcal{C}(y \to x)$，使 $\mathcal{C}(x \to y)$成为带有迹内积 $(f, g)_{\mathrm{tr}} := \mathrm{tr}(f^\dagger g)$的希尔伯特空间。

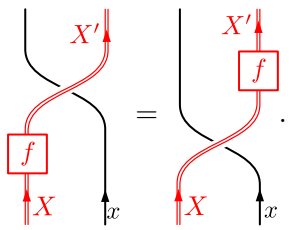
我们通篇采用图形演算（参见 [29, 第 I.2]章），并照例略去结合子、单位子和枢轴映射。

Drinfeld 中心 $Z(\mathcal{C})$具有对象(X, σ)，其中 $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$，且 $\sigma : X \otimes - \Rightarrow - \otimes X$ 是一个带有分量的半缠结



(2)

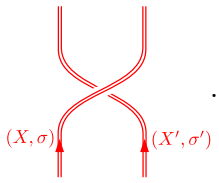
它们满足 $\sigma_{\mathbb{1}} = \mathrm{id}_X$ 和 $\sigma_{x \otimes y} = (\mathrm{id}_y \otimes \sigma_z) \circ (\sigma_y \otimes \mathrm{id}_z)$。一个态射 $(X, \sigma) \to (X', \sigma')$ 是一个映射 $f \in \mathcal{C}(X \to X')$，它使半编织相互交织：



通常，我们在对象的记号中省略半编织。

范畴 $Z(\mathcal{C})$ 是一个酉模张量范畴，其 dagger 结构和对偶结构与 $\mathcal{C}$ [32] 的相应结构一致；非严格对偶情形另见 [33，命题 2.3] 。令 $\operatorname{Irr} Z(\mathcal{C})$ 为包含 1 的单对象代表元集合；对于每个 $X \in \operatorname{Irr} Z(\mathcal{C})$，都存在唯一一个与 X^* 同构的 $\_X \in \operatorname{Irr} Z(\mathcal{C})$。 $Z(\mathcal{C})$ 中的编织为

$$\beta_{(X,\sigma),(X',\sigma')} = \sigma_{X'} =$$



. (3)

3.1.2 扩展曲面上的纽结模

我们为装饰曲面定义 skein 模；参见 [34, 附录 A], [35, 第 2], [36, 37] 节。所有流形均视为分片线性的。装饰的 1维流形 是紧致的定向 1 维流形 $\mathcal{N}$（可能带边界），并配有有限多个带符号的标记点 $m_{\mathcal{N}} \subset \mathcal{N}$。装饰曲面 是一个定向曲面 Σ，并带有对 $\partial\Sigma$ 的装饰。我们会直接提及其底层曲面的拓扑性质（例如，挖去 m 个圆盘的球面）。

Σ 中的弦图由一个嵌入图构成 Γ，其边由$\mathcal{C}$ 的对象标记，内部顶点则由 $\mathcal{C}$中的相容态射标记，并遵循图形演算。通过遗忘函子 $Z(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$，也允许使用来自 $Z(\mathcal{C})$的标签。该图在标记点处与 $\partial\Sigma$横截相交，边定向在正点处指向边界（负点处则背离边界）。这些边界标签确定了边界条件 b： $m_{\partial\Sigma} \to \operatorname{Ob}\mathcal{C}$。

当所有标签都属于 $\operatorname{Irr}\mathcal{C}$时，该边界条件是简单的。令 $\operatorname{Bd}(\Sigma)$表示连通边界分支的集合，并将其视为装饰一维流形。对于 $\mathcal{N} \subset \partial\Sigma$，记 $b_{\mathcal{N}}$ 为 b的限制；对于图 x，令 $x_{\mathcal{N}}$ 表示其诱导的边界数据。

对于装饰一维流形 $\mathcal{N}$，定义$\hat{}\mathcal{N}$ 为反转定向并切换所有符号；类似地，$\hat{}\hat{}\frown\hat{}$可由 Σ得到 Σ，使得 $\partial\Sigma = \partial\Sigma$。在 Σ 上的图 x 通过反转边定向并将每个内部顶点标签替换为其dagger，确定了 Σ 上的$\hat{}x$。

令 $\mathcal{S}(\Sigma; b)$ 表示 Σ 上满足边界条件 b 的弦图集合。定义

$$A(\Sigma; b) := \mathbb{C}[\mathcal{S}(\Sigma; b)]/\sim,$$

为由这些图示张成的向量空间，并对以下关系生成的关系取商

(i) 在固定 $\partial\Sigma$ 的情况下对 Σ 进行同痕，以及

(ii) 在与边横截相交的可缩圆盘内应用局部关系。

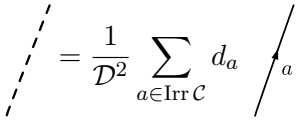
The缠结模 of $\Sigma$is

$$A(\Sigma) := \bigoplus_{b \in \mathcal{B}(\Sigma)} A(\Sigma; b),$$

其中 $\mathcal{B}(\Sigma)$ 是简单边界条件的有限集合。

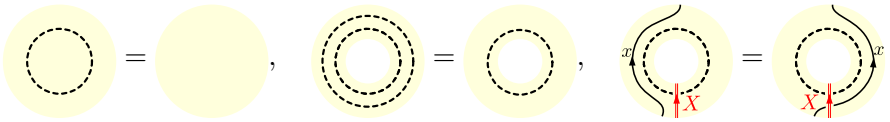
对于任意的图 x in Σ，我们用 $[x]_\Sigma$ 表示它在 $A(\Sigma)$ 中的等价类；若曲面可从上下文中明确，则简记为 $[x]$。

约定3.1。 我们允许弦图的边由虚线着色，定义如下：



. (4)

对于任意 $x \in$ 对象$\mathcal{C}$ 和任意 $X \in$ 对象 $Z(\mathcal{C})$*([35,* 推论 *3.5], [38,* 引理 *2.2])*，这条虚线满足以下局部关系：



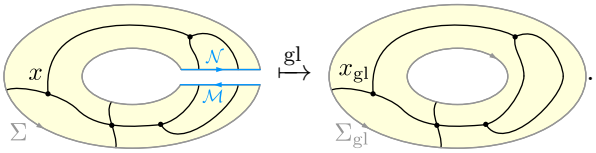
(5)

在任意装饰曲面中的嵌入圆盘和环带上。这些性质称为虚线的归一化性质、投影算子性质和遮蔽性质。

3.1.3 粘合

设 Σ 是一个装饰曲面，且设 $\mathcal{N}$，$\mathcal{M} \subset \partial\Sigma$ 是互不相交的装饰边界子流形。若 $\mathcal{N}$ 与 $\mathcal{M}$ 作为装饰一维流形同胚，则称它们可粘合 $\mathcal{N} \cong \hat{}\mathcal{M}$。此时存在一个保留标记点的反定向同胚 $\psi : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$，我们将通过 ψ 把 $\mathcal{N}$ 与 $\mathcal{M}$ 识别后得到的曲面记为 Σ_ψ。所得装饰曲面仅取决于 ψ [39, 的同痕类（引理 4.1.1]）。

固定这样一个映射 ψ，并将粘合后的曲面记为 Σ_{gl}。对于 Σ 上的弦图 x，当 $\mathcal{N}$ 与 $\mathcal{M}$ 上的边界数据满足匹配时，称其匹配；具体而言，每对对应的标记点（m，$\psi(m)$）都带有相同的标签。在此条件下，x 自然确定了 Σ_{gl} 上的一个图 x_{gl}：



该构造线性地下降到 skein 模上，从而给出一个定义良好的映射

$$\mathrm{gl} : A(\Sigma) \to A(\Sigma_{\mathrm{gl}}), \qquad \mathrm{gl}([x]) := \begin{cases} [x_{\mathrm{gl}}], & \text{if the boundary labels match,} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

3.1.4 管代数与缠结模上的作用

设 $\mathcal{S}$ 是一个装饰圆。与单位区间 I 作积，得到一个装饰圆柱 $\mathcal{S} \times I$，其底边界和顶边界分别为

$$\partial_b(\mathcal{S} \times I) = \hat{\mathcal{S}} \times \{0\}, \qquad \partial_t(\mathcal{S} \times I) = \mathcal{S} \times \{1\}.$$

缠结模

$$\mathrm{Tube}_{\mathcal{S}} := A(\mathcal{S} \times I)$$

具有自然的 C*-代数结构：乘法通过将一个代表元的底部与另一个代表元的顶部粘合来定义，而对合则由反射给出

$$[x]^* = [f(\hat{x})], \qquad f(\theta, r) = (\theta, 1 - r).$$

这个代数是与 $\mathcal{S}$ [40, 41, 32] 相关联的 管代数。

为描述矩阵单位，我们引入扩展流形：带有一个指定基准点（与标记点不同）的装饰一维流形称为扩展一维流形；每个边界分支都配有一个基准点的装饰曲面称为扩展曲面。基准点在图中以 X 表示。

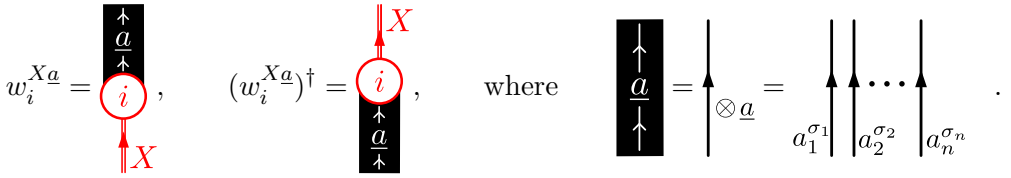
在 $\mathcal{S}$ 上选择一个基准点，并假设 $\mathcal{S}$ 有标记点 $m_{\mathcal{S}} = \{m_1, \ldots, m_n\}$，这些标记点从基准点出发，按与 $\mathcal{S}$ 的定向相反的方向排列。令 $\sigma_i \in \{+, -\}$ 表示 m_i 的符号。对于边界条件 a：$m_{\mathcal{S}} \to$ 不可约对象$\mathcal{C}$，定义

$$\otimes \underline{a} := a(m_1)^{\sigma_1} \otimes \cdots \otimes a(m_n)^{\sigma_n}, \qquad d_{\underline{a}} := d_{\otimes \underline{a}},$$

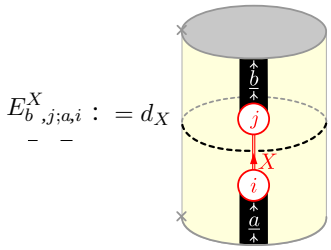
并令

$$\chi^{\otimes\mathcal{S}} = \bigoplus_{\underline{a}:m_{\mathcal{S}}\to \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}} \otimes\underline{a}.$$

对于每个 $X\in$ 不可约对象 $Z(\mathcal{C})$ 及边界条件 $\underline{a}$，固定一个关于迹内积的标准正交基 $\{\underline{w}_i^{X\,\underline{a}}\}_i \subset \mathcal{C}(X\to\otimes\underline{a})$，其图示为



命题 3.2 ([7,命题 3.4])。这些元素



构成 管$_{\mathcal{S}}$ 中的一组完备矩阵单位。它们满足

$$E^Y_{\underline{c},k;\underline{b}',j'}\,E^X_{\underline{b},j;\underline{a},i} = \delta_{XY}\,\delta_{\underline{b}\underline{b}'}\,\delta_{jj'}\,E^X_{\underline{c},k;\underline{a},i}, \qquad \sum_{X,\underline{a},i} E^X_{\underline{a},i;\underline{a},i} = \mathrm{id}_{\mathrm{Tube}_{\mathcal{S}}}. \tag{6}$$

因此，极小中心投影为

$$P^X = \sum_{\underline{a},i} E^X_{\underline{a},i;\underline{a},i}, \qquad X\in \mathrm{Irr}\,Z(\mathcal{C}).$$

若投影 $p\in \mathrm{Tube}_{\mathcal{S}}$ 满足 $p\le P^X$，则称其为型 X。

3.1.5 TQFT内积

缠结模 $A(\Sigma)$ 充当图拉耶夫–维罗–巴雷特–韦斯特伯里拓扑量子场论[42, 43]的态空间。由于 $\mathcal{C}$ 是酉的，TQFT 配分函数 Z 在 $A(\Sigma)$[36, 37] 上诱导出一个内积，我们现在回顾其定义。

配分函数 Z 将一个复数 $Z(M;\,x)$ 指派给任意配备弦图 $x\in S(\partial M)$ 的三维流形 M。这仅取决于类 $[x]\in A(\partial M)$，从而给出一个线性映射

$$Z_M : A(\partial M)\to\mathbb{C}.$$

对于曲面 Σ，定义捏缩积 $\Sigma\times I$，方法是将 $\partial\Sigma\times I\simeq\partial\Sigma$ 压缩，因此 at

$$\partial(\Sigma\times I) = \Sigma\cup\hat{\Sigma}.$$

给定 $[x]\in A(\Sigma;\,b)$ 和 $[y]\in A(\Sigma;b')$，定义

$$([x],[y])_{A(\Sigma)} := \delta_{b\,b'}\,Z_{\Sigma\times I}(\hat{x}\cup y),$$

$\hat{}$，其中 $\hat{}x\cup y$ 是 $\partial(\Sigma\times I)$ 上的图，由 Σ 上的 $\hat{}x$ 和 Σ 上的 y 构成。这给出了 $A(\Sigma)$ 上定义良好的正定内积，称为*TQFT*内积。

相对于此内积，沿边界分支的管代数作用是*-表示，从而赋予 $A(\Sigma)$酉 $A(\partial\Sigma)$-模的结构。

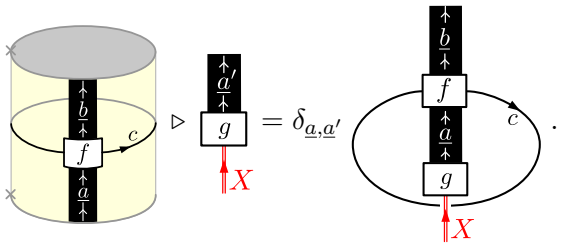
3.1.6 穿孔圆盘上的纽结模

设 Σ 是一个与带有 m 个内部孔洞的圆盘同胚的扩展曲面。

锚点是 Σ 中的一个嵌入图，它只有一个顶点，即锚点，以及从该顶点横向连接到每个边界分支 $\mathcal{S} \in \mathrm{Bd}(\Sigma)$ 的边，连接点不同于基准点。各边按照锚点周围的顺时针方向排序，从而诱导出 $\mathrm{Bd}(\Sigma)$ 的枚举 $\{\mathcal{S}_\kappa^{\updownarrow}\}_{\kappa=0}^{m}$，其中 $\mathcal{S}_0^{\updownarrow}$ 为外边界。

定义 3.3 ([7])。如果两个锚点诱导出相同的$\mathrm{Bd}(\Sigma)$枚举，并且可以通过固定所有基准点的同痕相互变形，则称它们等价。如果从每个锚点中移除连接到$\mathcal{S}$ 的边后得到的子图是同痕的，则称它们 $\mathcal{S}$ 在一个边界分支意义下等价。

对于任意扩展圆 $\mathcal{S}$和 $X \in \mathrm{Ob}\ Z(\mathcal{C})$，空间 $\mathcal{C}(X \to \chi^{\otimes \mathcal{S}})$ 通过以下方式成为一个酉左 $\mathrm{Tube}_{\mathcal{S}}$-模:



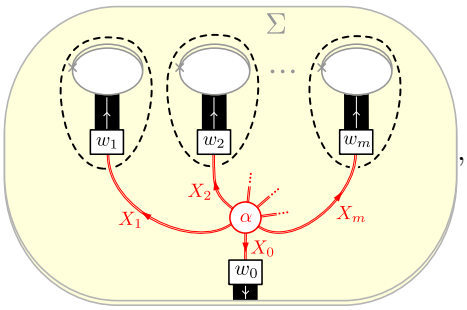
(7)

定义

$$\mathcal{C}_{\updownarrow}(\Sigma) := \bigoplus_{X_0,\dots,X_m \in \mathrm{Irr}(Z(\mathcal{C}))} Z(\mathcal{C})(X_0^* \to X_1 \otimes \cdots \otimes X_m) \otimes \mathcal{C}(X_0 \to \chi^{\otimes \mathcal{S}_0^{\updownarrow}}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}(X_m \to \chi^{\otimes \mathcal{S}_m^{\updownarrow}}). \tag{8}$$

（该空间在 [7] 中被称为 $\mathcal{C}^*$。）每个边界分支 $\mathcal{S}_\kappa^{\updownarrow}$ 都承载一个酉 $\mathrm{Tube}^{\mathcal{S}_\kappa^{\updownarrow}}$ 作用$\triangleright_\kappa$，使得 $\mathcal{C}_{\updownarrow}(\Sigma)$ 成为一个酉 $A(\partial\Sigma)$-模。定义一个线性映射（该映射在[7]中被称为 $\Phi_{\Sigma}^{\updownarrow *}$）

$$\Phi_\Sigma^{\updownarrow} : \alpha \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m \mapsto \left(\prod_{\kappa=1}^{m} d_{X_\kappa}\right)^{1/2} \mathcal{D}^{m-1}$$



, (9)

其中 α 位于锚点处，每条线段 X_κ 沿第 κ 条边延伸，并在 $\mathcal{S}_\kappa^{\updownarrow}$附近解析为 w_κ。典范同构 $Z(\mathcal{C})(X_0^* \to Y) \simeq Z(\mathcal{C})(\mathbb{1} \to X_0 \otimes Y)$ 用于将 α 解释为从 $\mathbf{1}$ 出发的态射。等价的锚点给出相同的映射 $\Phi_\Sigma^{\updownarrow}$。

命题 3.4 ([7,命题 3.5])。该映射

$$\Phi_\Sigma^{\updownarrow} : \mathcal{C}_{\updownarrow}(\Sigma) \longrightarrow A(\Sigma)$$

是 $A(\partial\Sigma)$-模的酉同构。

3.2 图 skein 子空间

3.2.1 区域与弦网子空间

设 $C^{\mathbb{Z}^2}$ 是标准胞腔复形，其顶点为 $C_0^{\mathbb{Z}^2}=\mathbb{Z}^2$，边为 $\mathcal{E}$，面为 $\mathcal{F}$。有向边的集合为 $\vec{E}_C:=\{e\in\vec{\mathcal{E}}:$ $e\in E_C$ 或 $\bar{e}\in E_C\}$。区域 是一个子复形 $C\subset C^{\mathbb{Z}^2}$，其顶点集、边集和面集分别记作 V_C、 E_C、 F_C。我们将支撑在 C 上的可观测量代数记作 $\mathcal{A}_C=\mathcal{A}_{V_C}$；若 C 是有限的，则 $\mathcal{H}_C:=\mathcal{H}_{V_C}$。

与有限区域相关联的弦网子空间 是

$$H_{C_1}:=\Big(\prod_{e\in E_C}A_e\Big)\mathcal{H}_C,$$

仅取决于 C_1 的 1-骨架 C。

3.2.2 分配给区域的扩展曲面

我们为每个区域 C 指定扩展曲面

$$\Sigma_C:=\{v\in\mathbb{R}^2:\mathrm{dist}_\infty(v,C)\le 1/3\},\quad \mathrm{dist}_\infty(v,C):=\inf_{w\in C}\|v-w\|_\infty,$$

$C\subset\mathbb{R}^2$ 的 $1/3$-加厚。标记边界点是 $\partial\Sigma_C$ 与 $\mathbb{Z}^2$ 的边的交点。若相应的边（朝向左上方定向）离开 Σ_C，则该标记边界点为 正；若进入 Σ_C，则为 负。

每个连通边界分支 $\mathcal{N}\in\mathrm{Bd}(\Sigma_C)$ 都是水平线段与竖直线段的并。对于紧致分支，基准点置于最左上方竖直线段的顶端；对于非紧致分支，则任意选取。

当 C 有限且连通时， Σ_C 具有一个特定的 外边界；其余边界称为 内边界。

3.2.3 弦网子空间与 skein 模的同构

设 C 为一个有限区域。弦网子空间 H_{C_1} 中的乘积向量自然对应于 Σ_{C_1} 上的弦图。对于标记 $l\in\mathcal{L}_{SN}(C)$，令 $f_v\in\mathcal{H}_v(l)$ 为每个顶点 $v\in C_0$ 的单位向量，并令 $f=(f_v)_{v\in C_0}$，其中

$$\phi_f:=\bigotimes_{v\in C_0}f_v\in\mathcal{H}_C(l)\subset H_{C_1}.$$

定义在 Σ_{C_1} 上与 x_f 相关联的弦图：取 $\mathbb{Z}^2$ 图与 Σ_{C_1} 的交集，边指向右上方，并由 l 标记，顶点由 f_v标记。映射

$$\pi_{C_1}(\phi_f):=[x_f]_{\Sigma_{C_1}}\tag{10}$$

将乘积向量与其图示对应起来。

另定义

$$\sigma_{C_1}(\phi_f):=d_{\partial l}^{-1/4}\,[x_f]_{\Sigma_{C_1}},\qquad d_{\partial l}:=\prod_{e\in\vec{\partial}C}d_{l(e)},\tag{11}$$

and 线性延拓。根据构造，对于任意边界条件， $\sigma_C(H_{C_1}^b)\subset A(\Sigma_{C_1};b)$ n b.

下面的引理结合了 [7, 引理 A. 5] 和 [7, 命题 4.4] 的一个特殊情形：

引理 3.5. 映射 $\pi_{C_1}:H_{C_1}\to A(\Sigma_{C_1})$ 是一个向量空间同构，而 $\sigma_{C_1}:H_{C_1}\to A(\Sigma_{C_1})$ 是一个希尔伯特空间同构。

约定 3.6. 我们常用弦图来表示 H_{C_1} 中的 π_{C_1} 态，弦图绘制在 Σ_{C_1} 上，并运用图形演算。反之，对于绘制在 Σ_{C_1} 上的弦图 x，记作

$$\phi_x:=\pi_{C_1}^{-1}([x])$$

H_{C_1}中对应的向量。

3.2.4 管代数在弦网子空间上的作用

设 C 为一个区域，使得 Σ_C 具有紧边界。对于每个连通边界分支$\mathcal{S} \in \mathrm{Bd}(\Sigma_C)$，将领圈区域 $C^{\mathcal{S}}$定义为满足 $\mathcal{S} \in \mathrm{Bd}(\Sigma_{C^{\mathcal{S}}})$的最小子区域。

如果 C包含一个面 f，移除它会产生一个边界分支 $\mathcal{S}_f$；相应的领圈区域为 $C^f := C^{\mathcal{S}_f}$。类似地，移除一条边及其属于 C的两个相邻面，会产生一个边界分支 $\mathcal{S}^e$，其领圈区域为 $C^e := C^{\mathcal{S}_e}$。我们将 $\mathcal{S}_e$ 称为位于 e处的穿孔。

对于每个 $\mathcal{S} \in \mathrm{Bd}(\Sigma_C)$，定义一个表示

$$\mathfrak{t}_{\mathcal{S}} : \mathrm{Tube}_{\mathcal{S}} \to \mathrm{End}(\mathcal{H}_{C^{\mathcal{S}}})$$

令 $\mathfrak{t}_{\mathcal{S}}(a)$在 $H_{C^{\mathcal{S}}}^{\perp}$上为零，并通过以下方式作用于弦网子空间 $H_{C^{\mathcal{S}}}$

$$\mathfrak{t}_{\mathcal{S}}(a)\,\phi := \sigma_{C^{\mathcal{S}}}^{-1}\big(a \triangleright_{\mathcal{S}} \sigma_{C^{\mathcal{S}}}(\phi)\big), \quad \phi \in H_{C^{\mathcal{S}}}. \tag{12}$$

根据引理 3.5，每个 $\mathfrak{t}_{\mathcal{S}}$ 都是 $\mathrm{Tube}_{\mathcal{S}}$的 *-表示。

对于任意面 f 和边 e，记 $\mathfrak{t}_f := \mathfrak{t}_{\mathcal{S}_f}$ 以及 $\mathfrak{t}_e := \mathfrak{t}_{\mathcal{S}_e}$。

3.2.5 B_f 投影算子的定义

对于对应于面 $f \in \mathcal{F}$ 的边界分支 $\mathcal{S}_f$，设 $\mathfrak{t}_f := \mathfrak{t}_{\mathcal{S}_f}$ 是其在 $\mathcal{H}_{C^f}$ 上关联的 $\mathrm{Tube}^{\mathcal{S}_f}$-表示。定义正交投影算子

$$B_f := \mathfrak{t}_f(P^{\mathbb{1}}), \qquad P^{\mathbb{1}} = \in \mathrm{Tube}_{\mathcal{S}_f}. \tag{13}$$

3.2.6 图 skein 子空间

设 C 是一个有限区域。其 图 *skein* 子空间 为

$$H_C := B_C H_{C_1} = P_C \mathcal{H}_C, \tag{14}$$

其中 $B_C := \prod_{f\in F_C} B_f$ 且 $P_C := \prod_{f\in F_C} B_f \prod_{e\in E_C} A_e$。该子空间继承自 $\mathcal{H}_C$ 的 skein 内积。

由于 Σ_{C_1} 中的局部关系和同痕在 Σ_C 中同样成立，因此包含映射 $\Sigma_{C_1} \subset \Sigma_C$ 诱导出一个定义良好的满射

$$\iota_C : A(\Sigma_{C_1}) \to A(\Sigma_C), \quad [y]_{\Sigma_{C_1}} \mapsto [y]_{\Sigma_C}.$$

回顾（11），定义

$$\sigma_C := \mathcal{D}^{-|F_C|}\,\iota_C \circ \sigma_{C_1} : H_{C_1} \to A(\Sigma_C).$$

命题 3.7 ([7, 命题 4.4])。 **</style}映射：** $H_C \to A(\Sigma_C)$是酉的。对于任意连通边界 $\mathcal{S} \in \mathrm{Bd}(\Sigma_C)$，我们有

$$a \triangleright_{\mathcal{S}} \sigma_C(\psi) = \sigma_C(\mathfrak{t}_{\mathcal{S}}(a)\psi), \quad \psi \in H_C,\, a \in \mathrm{Tube}_{\mathcal{S}}.$$

因此，H_C在 管作用 $\{\mathfrak{t}_{\mathcal{S}}\}$下是一个酉 $A(\partial\Sigma_C)$-模，而 $\sigma_C|_{H_C}$是酉模之间的交织算子。

引理 3.8 ([7, 引理 4.5])。 对于不同的边界分支 $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \mathrm{Bd}(\Sigma_C)$ 以及任意$a \in$ 管$_{\mathcal{S}}$, $b \in$ 管$_{\mathcal{S}'}$,

$$[\mathfrak{t}_{\mathcal{S}}(a), \mathfrak{t}_{\mathcal{S}'}(b)] = 0.$$

特别地，所有 B_f 投影算子都对易。

一个边界条件 $p = \{p_{\mathcal{S}}\}_{\mathcal{S}\in \mathrm{Bd}(\Sigma_C)}$ 为 H_C 的每个边界分支指定一个投影算子 $p_{\mathcal{S}} \in \mathrm{Tube}_{\mathcal{S}}$。定义

$$H_C(\underline{p}) := \Big(\prod_{\mathcal{S}\in \mathrm{Bd}(\Sigma_C)} \mathfrak{t}_{\mathcal{S}}(p_{\mathcal{S}})\Big) H_C, \quad P_C(\underline{p}) := B_C \prod_{\mathcal{S}\in \mathrm{Bd}(\Sigma_C)} \mathfrak{t}_{\mathcal{S}}(p_{\mathcal{S}}). \tag{15}$$

给定 $\mathrm{Bd}(\Sigma_C)$ 的一个枚举 $\{\mathcal{S}_\kappa\}_{\kappa=0}^m$，我们也记作

$$H_C(p_{\mathcal{S}_0}, \dots, p_{\mathcal{S}_m}) = H_C(\underline{p}), \quad P_C(p_{\mathcal{S}_0}, \dots, p_{\mathcal{S}_m}) = P_C(\underline{p}).$$

3.2.7 线 skein 子空间的刻画

设 C 是一个有限连通区域。那么 Σ_C 同胚于一个带有 m 个孔的圆盘，其中 $m \in \mathbb{N}_0$。我们称 Σ_C 的一个锚点为 C 的一个锚点。

命题 3.9 ([7,命题 4.6])。设 C 是一个带有锚点的有限连通区域。那么

$$\Psi_C^{\text{⚓}} := \sigma_C^{-1} \circ \Phi_C^{\text{⚓}} : \mathcal{C}_{\text{⚓}}^*(\Sigma_C) \longrightarrow H_C \tag{16}$$

是 $A(\partial\Sigma_C)$-模的酉同构。

3.3 Drinfeld 插入

对每个 $X \in$ 不可约对象 $Z(\mathcal{C})$以及每个扩展圆 $\mathcal{S}$，相对于迹内积固定一个单位向量 $w_{\mathcal{S}}^X \in \mathcal{C}($ $X \to \chi^{\otimes \mathcal{S}})$，并令 $p_{\mathcal{S}}^X \in$Tube$_{\mathcal{S}}$ 为相应的极小投影算子（见命题 3.2）。

对于 $X = \mathbb{1}$ 和 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_e$，我们取

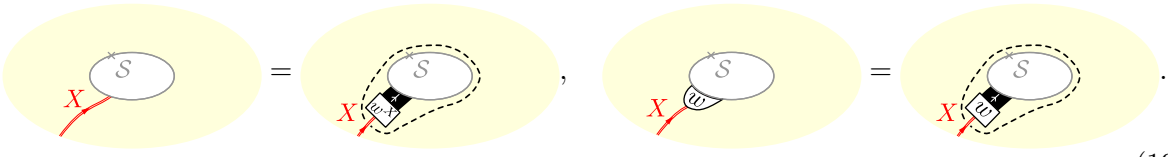
$$w_{\mathcal{S}_e}^{\mathbb{1}} = \frac{1}{\mathcal{D}} \sum_{a\in \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}} d_a^{1/2} \; a, \tag{17}$$

并定义

$$p_{\mathcal{S}_e}^{\mathbb{1}} := vv^*, \quad v := \frac{1}{\mathcal{D}} \sum_{a\in \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}} d_a^{1/2} \; \in \mathrm{Tube}_{\mathcal{S}_e}. \tag{18}$$

此处 $\mathcal{S}_e \times I$ 被表示为一个环带，其外边界与$\mathcal{S}_e \times I$的底部等同。由 [7, 引理5.4] $\mathfrak{t}_e(p_{\mathcal{S}_e}^{\mathbb{1}})$， $= B_{f_1} B_{f_2}$ 在与 e相邻的两个面上施加基态约束。当上下文清楚时，我们省略 $\mathcal{S}$ 下标： $w^X := w_{\mathcal{S}}^X$和 $p^X := p_{\mathcal{S}}^X$。

约定3.10. 给定固定的边界向量 w^X，我们对弦图采用如下图示约定：



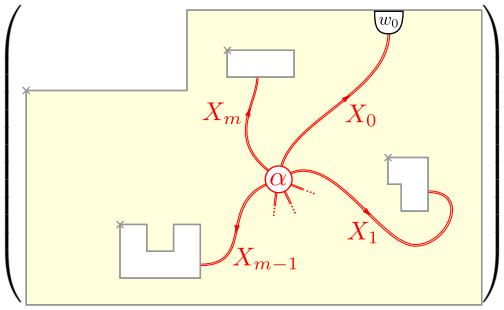
(19)

设 C 是一个带有锚点的有限连通区域。命题 3.9表明，向量 o f

具有如下形式

$$\Psi_C^{\updownarrow}\big(\alpha\otimes w_0\otimes w^{X_1}\otimes\cdots\otimes w^{X_m}\big)$$

$$=\left(\prod_{\kappa=0}^{m} d_{X_\kappa}\right)^{1/2}\mathcal{D}^m\sigma_C^{-1}$$



,

对于 $X_0\in$不可约对象 $Z(\mathcal{C})$、 $w_0\in\mathcal{C}(X_0\xrightarrow{\updownarrow}\chi^{\otimes\mathcal{S}_0})$ 和 $\alpha\in Z(\mathcal{C})(X_0^*\to X_1\otimes\cdots\otimes X_m)$ 张成

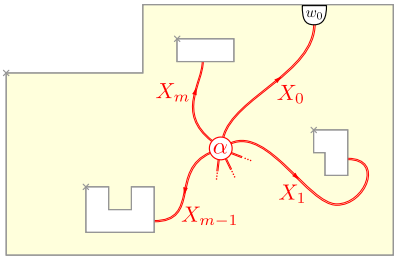
$$H_C^{(X_1,\dots,X_m)}:=H_C(\mathrm{id},p^{X_1},\dots,p^{X_m}). \tag{20}$$

到该子空间的正交投影算子为 $P_{(X_1,\dots,X_m)C}:=P_C(\mathrm{id}\ p^{X_1},\dots,p^{X_m}$).

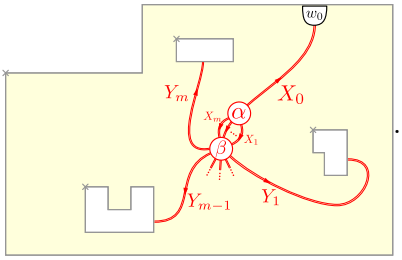
对于任意 $\beta\in Z(\mathcal{C})(X_1\otimes\cdots\otimes X_m\to Y_1\otimes\cdots\otimes Y_m)$，*Drinfeld* 插入 $\mathrm{Dr}_C^{\updownarrow}[\beta]\in\mathcal{A}_C$作用于 $H^{(X_1,\dots,X_m)C}$，其作用方式为

$$\mathrm{Dr}_C^{\updownarrow}[\beta]:\Psi_C^{\updownarrow}\big(\alpha\otimes w_0\otimes w^{X_1}\otimes\cdots\otimes w^{X_m}\big)\mapsto\Psi_C^{\updownarrow}\big((\beta\circ\alpha)\otimes w_0\otimes w^{Y_1}\otimes\cdots\otimes w^{Y_m}\big), \tag{21}$$

并湮灭 $H^{(X_1,\dots,X_m)C}$ 的正交补。图示而言， $\sigma_C\circ\mathrm{Dr}_C^{\updownarrow}[\beta]\circ\sigma_C^{-1}$ 表示为



$$\mapsto\left(\prod_{\kappa=1}^{m}\frac{d_{Y_\kappa}}{d_{X_\kappa}}\right)^{1/2}$$



. (22)

引理 3.11 (乘法性 [7, 引理 6.2])。 设 C 是一个有限连通区域，其 $|\mathrm{Bd}(\Sigma_C)|=m+1$ 带有锚点。若 $\Theta=\bigoplus_{X\in\text{不可约对象}(Z(\mathcal{C}))}X$，则

$$\mathrm{Dr}_C^{\updownarrow}:\mathrm{End}_{Z(\mathcal{C})}(\Theta^{\otimes m})\longrightarrow\mathrm{End}\Big(\bigoplus_{X_1,\dots,X_m}H_C^{(X_1,\dots,X_m)}\Big)$$

定义一个 *-表示。

3.4 包含引理

一条对偶路径 $I=\{f_i\}_{i=1}^{l}$ 是由一系列面组成的序列，其中 f_i 彼此相邻 f_{i+1} 对所有 i均成立；若所有 f_i 互不相同，则称其为自避。记 $\partial_{\mathrm{i}}I=f_1$、 $\partial_{\mathrm{f}}I=f_l$和 $I_{\mathrm{in}}=\{f_2,\dots,f_{l-1}\}$（可能为空）。令 $\mathcal{E}_I\subset\mathcal{E}$ 为 I中相邻面之间的边。

设 D 为一个有限连通区域。若 $I_{\mathrm{in}}\subset D$、$\mathcal{E}_I\subset D$成立，且初始面和末尾面位于 D的外边界上，则称 D 可以沿一条自避 I 切开。定义

$$D\setminus I:=D\setminus\Big(I_{\mathrm{in}}\cup\bigcup_{e\in\mathcal{E}_I}e\Big).$$

于是， $D\setminus I=C\sqcup C'$ 由唯一确定的不相交连通区域 C 和 C'组成，其中 Σ_D 的所有内边界分量均继承自 C 或 C'。我们称 D 由 C和 C' 沿 I粘合而成，记作 $D=C\sqcup_I C'$。

Σ_C和 $\Sigma_{C'}$的所有内边界分量分别与 Σ_D的内边界分量对应。 Σ_C 和 $\Sigma_{C'}$ 的外边界各自包含由 I确定的一个边界区间 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{I}'$ 。令$m_{C,I}$ （分别为$m_{C',I}$）表示位于 $\mathcal{E}_I$的边上的 Σ_C （分别为 $\Sigma_{C'}$）的标记边界点，并将 $\mathcal{I}$ （分别将 $\mathcal{I}'$）定义为 $\partial\Sigma_C$ （分别为 $\partial\Sigma_{C'}$）中包含球 $B_{1/3}$（m）的最小闭子区间，其中每个$m \in m_{C,I}$ （分别为$m_{C',I}$）。

将 $\mathcal{I}$ 与 $\mathcal{I}'$ 粘合后得到一个与 Σ_D同胚的曲面，我们将其认作 Σ_D。所诱导的粘合映射

$$\mathrm{gl} : A(\Sigma_C \sqcup \Sigma_{C'}) \simeq A(\Sigma_C) \otimes A(\Sigma_{C'}) \longrightarrow A(\Sigma_D)$$

如第3.1.3节所示。

设 $\clubsuit$ 是 Σ_C 的一个锚点，其到外边界分量 $\mathcal{S}_0{}^C$的附着点也位于 Σ_C 的外边界上。设 $_D$ 是 Σ_D 的一个锚点，使得 $\mathcal{S}_0{}^D$是 Σ_D的外边界，并且使得 $\mathcal{S}_\kappa^{\clubsuit_C} = \mathcal{S}_{\kappa+\lambda}^{\clubsuit_D}$，对于某个偏移量 $\lambda \in \{0, 1, \ldots, n-m\}$， $\kappa = 1$、……、 m。如果$_D$的图包含$_C$的图作为子图，我们称$_D$ 以偏移量$_C$ 延伸，并称其偏移量为 λ。更一般地，任意锚点 $'_D \sim \clubsuit_D$ 也称为以偏移量 λ延伸$_C$。

回顾一下， $P^{(X_1,\ldots,X_n)}{}_D$ 是投影到图 skein 子空间 $H^{(X_1,\ldots,X_n)}{}_D \subset \mathcal{H}_D$ 上的正交投影算子，该子空间定义于公式（20）中。下面的包含引理对于处理定义在不同区域上的 Drinfeld 插入至关重要。

引理 3.12 （包含 [7, 引理 6。7]）。 设 $D = C \sqcup_I C'$ （因此 D 是将 C与 C' 沿自避对偶路径 I粘合而成的），并设 $_D$ 是将 $_C$ 偏移 λ后得到的扩张。对于任意的X_1、…、 X_n、Y_1、…、$Y_n \in$ 不可约对象 $Z(\mathcal{C})$ 以及任意的 $\beta \in Z(\mathcal{C})\big(X_{\lambda+1} \otimes \cdots \otimes X_{\lambda+m} \to Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_m\big)$，我们有

$$\mathrm{Dr}_C^{\clubsuit_C}[\beta]\, P_D^{(X_1,\ldots,X_n)} = \mathrm{Dr}_D^{\clubsuit_D}\left[\mathrm{id}_{X_1\otimes\cdots\otimes X_\lambda} \otimes \beta \otimes \mathrm{id}_{X_{\lambda+m+1}\otimes\cdots\otimes X_n}\right].$$

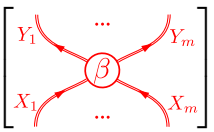
注记3.13。 谨慎处理后，可以通过更灵活的方式定义锚点的扩张，从而推广包含引理。我们提及一个包含引理原表述未涵盖的平凡但有用的关系（另见 *[7]* 中式 *(58)* 的讨论）。

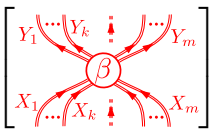
设 C 是一个带锚点的有限连通区域，并假设对于某条边e 和某个数值 k，有 $\mathcal{S}_{k+1}^{\clubsuit} = \mathcal{S}_e$ 。设 $C' \supset C$ 是通过填补 C 中位于 e处的穿孔而得到的有限子区域，并设$'$ 是其唯一的子锚，且它是 C'上的一个锚点。根据定义以及式（18）中真空边界条件 $p^{\mathbb{1}}$ 的选取，立即可得

$$P_{C'}^{(X_1,\cdots,X_m)} = P_C^{(X_1,\cdots,X_k,\mathbb{1},X_{k+1},\cdots,X_m)},$$

其中 $m+1 = |\mathrm{Bd}(\Sigma_{C'})|$。此外，给定一个态射 $\beta\colon X_1 \otimes \cdots \otimes X_m \to Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_m$， 我们有

$$\mathrm{Dr}_{C'}^{\clubsuit'}\left[\begin{array}{c}\beta\end{array}\right] P_{C'}^{(X_1,\cdots,X_m)} = \mathrm{Dr}_C^{\clubsuit}\left[\begin{array}{c}\beta\end{array}\right] P_C^{(X_1,\cdots,X_k,\mathbb{1},X_{k+1},\cdots,X_m)}.$$





4 由弦算符得到的 SSS$_f$ 的简单对象

我们回顾第 4.1 节中由 [7] 构造弦算符的过程，并在第 4.2 节中利用它们为 SSS$_f$ 构造一组代表性的简单对象。

4.1 弦算符

4.1.1 链环

回顾 [7, 第 6 节3]，链环 是一个有限对偶路径 $L = (f_1, \cdots, f_l)$，由至少五个面组成，并且满足：面 f_i 和面 f_j 共享一条边，当且仅当 $|i-j| \le 1$；此外， L 的前四个面位于同一直线上， L的最后四个面也位于同一直线上。

令 $e_{\mathsf{i}} = \partial_{\mathsf{i}} L$ 表示面 f_1 和面 f_2 之间的边，令 $e_{\mathsf{f}} = \partial_{\mathsf{f}} L$ 表示面 f_{l-1} 和面 f_l之间的边。位于 e_{i}处的穿孔，分别位于 e_{f}处的穿孔，称为 L的初始穿孔和最终穿孔。

区域 C^L 是由 L 的体面 $F_L := \{f_3, \cdots, f_{l-2}\}$、属于 L 各面的所有边（ e_{i} 和 e_{f}除外），以及属于这些边的所有顶点构成的区域（参见第 3.2.1 节）。与之关联的扩展曲面 $\Sigma_L := \Sigma_{C^L}$（参见第 3.2.2 节）是一个双穿孔圆盘，穿孔位于 $\partial_{\mathsf{i}} L$ 和 $\partial_{\mathsf{f}} L$。

对于任意这样的链环 L，我们固定 C_L 的一个锚点 $\mathfrak{t}_L$（参见第 3.1.6 节和第 3.2.7 节），其在外边界分量 $\mathcal{S}_0{}^L$下的等价类（定义 3.3）由以下条件唯一确定：$\mathfrak{t}_L$ 的底图位于右条带 $\Sigma_{L,r} := \Sigma_{C^{L,r}}$中，其中 $C^{L,r}$ 是 C^L 的子区域，由相对于 L的定向、位于 C^L 右侧的所有顶点和边构成。（参见第 6.3] 节）

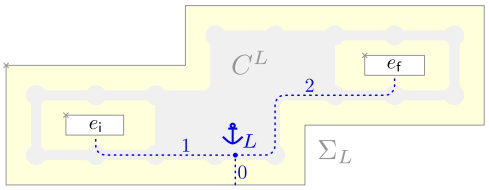


图 2：一个链环 L 及其区域 C^L （以浅灰色标出），以及相应的曲面 Σ_L （以浅黄色标出）。锚点 $\mathfrak{t}_L$ 以蓝色显示。

我们将链环 L 的支撑 记作 $\mathsf{supp}\,(L) = V_{C^L}$。在依赖于区域 C^L 的记号中，我们通常用 L 代替 C^L。例如， $\mathcal{A}_L := \mathcal{A}_{C^L}$， $\mathcal{H}_L := \mathcal{H}_{C^L}$, $H_L := H_{C^L}$,$\sigma_L := \sigma_{C^L}$, $\Psi^{\mathfrak{t}}_L := \Psi^{\mathfrak{t}}_{C^L}$， 等等。与此记号一致，我们有 $F_L = F_{C^L} = \{f_3, \cdots, f_{l-2}\}$。我们也省略锚点 $\mathfrak{t}_L$ 的标准选取，写作 $\mathbf{Dr}_L[\beta] = \mathbf{Dr}_{C^L}[\beta]$。

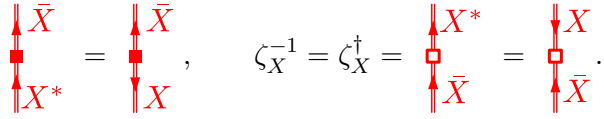
Σ_L 的边界分支总是采用由 $\mathfrak{t}_L$ 诱导的线性序，因此 $H_L(p_0, p_1, p_2) = H_L(p)$，其中 $p_\kappa = p_{\mathcal{S}^{\mathfrak{t}}_\kappa}$ 对应 $\kappa = 0, 1, 2$。我们也将这些边界分支上的相应 Tube作用记作 $\mathfrak{t}^L_\kappa := \mathfrak{t}_{\mathcal{S}^{\mathfrak{t}}_\kappa}$。（见第 3.2.4 节）

如果 $L_1 = (f_1, \cdots, f_k)$ 和 $L_2 = (f'_1 \cdots, f'_l)$ 满足 $\partial_{\mathsf{i}}(L_1) = \partial_{\mathsf{f}}(L_2)$，且复合态射 $L_2 \wedge L_1 := (f'_1, \cdots, f'_{l-1}, f'_l, f_2, \cdots, f_k)$ 仍是一个链环，则称这两个链环是可复合的 。

4.1.2 跃迁、对产生与酉门的定义

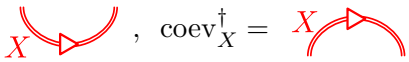
对于每个 $X \in$ 不可约对象 $Z(\mathcal{C})$，我们固定一个酉态射 $\zeta_X : X^* \to X$，并将它及其逆态射图示为

$$\zeta_X = \quad = \quad , \qquad \zeta_X^{-1} = \zeta_X^\dagger = \quad = \quad . \tag{23}$$



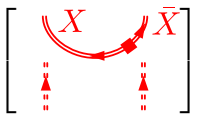
我们还令

$$\mathrm{ev}_X^\dagger = \quad , \quad \mathrm{coev}_X^\dagger = \tag{24}$$

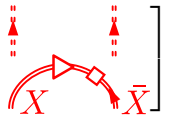


并定义 Drinfeld 插入算子（见第 3.3 节）

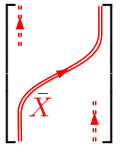
$$\mathrm{Dr}_L^{(\mathbb{1}\,\mathbb{1}\to X\bar{X})} := d_X^{-1/2}\,\mathrm{Dr}_L \left[\right., \tag{25}$$

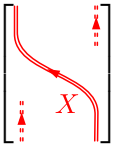


$$\mathrm{Dr}_L^{(X\bar{X}\to\mathbb{1}\,\mathbb{1})} := (\mathrm{Dr}_L^{(\mathbb{1}\,\mathbb{1}\to X\bar{X})})^* = d_X^{-1/2}\,\mathrm{Dr}_L \left[\right., \tag{26}$$



$$\mathrm{Dr}_L^{(X\,\mathbb{1}\to\mathbb{1}\,X)} := \mathrm{Dr}_L \left[\right., \quad \mathrm{Dr}_L^{(\mathbb{1}\,X\to X\,\mathbb{1})} := (\mathrm{Dr}_L^{(\mathbb{1}\,X\to X\,\mathbb{1})})^* = \mathrm{Dr}_L \left[\right. . \tag{27}$$





根据 [7, 引理 6.8]，这些 Drinfeld 插入是部分等距，且

$$P_L^{\mathbb{1}\,\mathbb{1}} := \mathfrak{t}_1^L(p^{\mathbb{1}})\mathfrak{t}_2^L(p^{\mathbb{1}})B_L = (\mathrm{Dr}_L^{(\mathbb{1}\,\mathbb{1}\to X\bar{X})})^*\mathrm{Dr}_L^{(\mathbb{1}\,\mathbb{1}\to X\bar{X})}, \tag{28}$$

$$P_L^{X\bar{X}} := \mathfrak{t}_0^L(P^{\mathbb{1}})\mathfrak{t}_1^L(p^X)\mathfrak{t}_2^L(p^{\bar{X}})B_L = \mathrm{Dr}_L^{(\mathbb{1}\,\mathbb{1}\to X\bar{X})}(\mathrm{Dr}_L^{(\mathbb{1}\,\mathbb{1}\to X\bar{X})})^* \tag{29}$$

$$P_L^{X\,\mathbb{1}} := \mathfrak{t}_1^L(p^X)\mathfrak{t}_2^L(p^{\mathbb{1}})B_L = (\mathrm{Dr}_L^{(X\,\mathbb{1}\to\mathbb{1}\,X)})^*\mathrm{Dr}_L^{(X\,\mathbb{1}\to\mathbb{1}\,X)}, \tag{30}$$

$$P_L^{\mathbb{1}\,X} := \mathfrak{t}_1^L(p^{\mathbb{1}})\mathfrak{t}_2^L(p^X)B_L = \mathrm{Dr}_L^{(X\,\mathbb{1}\to\mathbb{1}\,X)}(\mathrm{Dr}_L^{(X\,\mathbb{1}\to\mathbb{1}\,X)})^*. \tag{31}$$

其中 $B_L = \prod_{f\in F_L} B_f$ 对 L的体面施加条件 B_f。

进一步记 $P_L^{\mathbb{1}} = P_L^{\mathbb{1}\,\mathbb{1}} + P_L^{\mathbb{1}\,X} P_L^X$ $P_L = P_L^X + P_L^{\mathbb{1}} = P^{\mathbb{1}\,\mathbb{1}} + ?:,?:= P_L^{X\,\mathbb{1}} + P_L^{X\bar{X}}$，以及 $P_L^{X\,\mathbb{1}} + P_L^{\mathbb{1}\,X} + P_L^{X\bar{X}}$????，并定义一个自伴酉门

$$u_L^X := \mathrm{Dr}_L^{(\mathbb{1}\,\mathbb{1}\to X\bar{X})} + \mathrm{Dr}_L^{(X\bar{X}\to\mathbb{1}\,\mathbb{1})} + \mathrm{Dr}_L^{(X\,\mathbb{1}\to\mathbb{1}\,X)} + \mathrm{Dr}_L^{(\mathbb{1}\,X\to X\,\mathbb{1})} + (\mathbb{1} - P_L^{??}) \tag{32}$$

它与链环 L相关联。根据构造，u_L 满足以下交织性质：

$$u_L^X P_L^{\mathbb{1}\,\mathbb{1}} = P_L^{X\bar{X}} u_L^X, \qquad u_L^X P_L^{\mathbb{1}\,X} = P_L^{X\,\mathbb{1}} u_L^X. \tag{33}$$

这些酉门也满足拼接引理：

引理 4.1 ([7], 引理 6.9). 设 $X \in$ 不可约对象 $Z(\mathcal{C})$，且 L_1 和 L_2 是可复合链环，并且 $L = L_2 \wedge L_1$。那么

$$u_{L_2}^X u_{L_1}^X P_L^{\mathbb{1}?} = u_L^X P_L^{\mathbb{1}?}.$$

4.1.3 字符串算子作为 $\mathcal{A}$ 的端同态。

A 链 $\mathcal{C} = (L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是由链环组成的半无限序列 L_n，满足 $L_{n\to m}^{\mathcal{C}} := L_n \wedge L_{n-1} \wedge \cdots \wedge L_m$ 对所有自然数 $m \le n$ 都是定义良好的链环。我们用 $\mathcal{C}[n \to m] = (L_i)_{i=m}^n$ 表示 $\mathcal{C}$ 的有限子链，也用 $\mathcal{C}_n := \mathcal{C}[n \to 1]$ 表示，并用 $\partial_i\mathcal{C} = \partial_{\mathfrak{f}} L_1$ 表示该链的初始穿孔，它是第一个链环的最终穿孔。我们还将链 $\mathcal{C}$ 的支撑写作 $\mathrm{supp}\,(\mathcal{C}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{supp}\,(L_n)$。

For 任意 $X \in$ 不可约对象 $Z(\mathcal{C})$ 和自然数 $m \le n$，我们都可以用以下门构造一个有限酉电路

$$U_{\mathcal{C}[n\to m]}^X = u_{L_n}^X \times \cdots \times u_{L_m}^X$$

由式 (32) 中的门组成。我们还定义 $\rho_{\mathcal{C}_n}^X := \mathrm{Ad}[(U_{\mathcal{C}[n\to 1]}^X)^*]$。

引理 4.2 ([7], 引理 6.10). 设 $\mathcal{C}$ 为一条链，且 $X \in$ 不可约对象 $Z(\mathcal{C})$。

极限

$$\rho_{\mathcal{C}}^X := \lim_{n\uparrow\infty} \rho_{\mathcal{C}_n}^X,$$

按范数逐点存在，并定义了 $\mathcal{A}$ 的一个保单位 *-自同态。该端同态的支撑位于支撑 $(\mathcal{C})$ 上，意即若 $x \in \mathcal{A}_{\mathrm{supp}\,(\mathcal{C})^c}$，则 $\rho_{\mathcal{C}}^X(x) = x$。

4.2 SSS$_f$简单对象的代表集

根据 [7, 命题 7.2、命题 7.10]， $\pi^X_{\mathcal{C}} = \pi^{\mathbb{1}} \circ \rho^X_{\mathcal{C}}$是一个任意子表示，局域于任何包含 $\mathcal{C}$支撑的锥中。令 $\bar{\rho}^X_{\mathcal{C}}$为其到 $\mathcal{B}$ 的唯一扩张，如引理 2.4 所述，并满足

$$\bar{\rho}^X_{\mathcal{C}} \circ \pi^{\mathbb{1}} = \pi^{\mathbb{1}} \circ \rho^X_{\mathcal{C}}.$$

回想一下， $\pi^{\mathbb{1}}(\mathcal{A})$ 在 $\mathcal{B}$ 中弱算子拓扑稠密，因此，扩张 $\{\bar{\rho}^X_{\mathcal{C}}\}_{X\in \mathrm{Irr}\, Z(\mathcal{C})}$之间的交织算子与任意子表示 $\{\pi^X_{\mathcal{C}}\}_{X\in \mathrm{Irr}\, Z(\mathcal{C})}$之间的交织算子完全相同。因此，我们得到主定理 [7] 的一个等价表述。

定理 4.3 ([7,定理 2。3])。 设 $\mathcal{C}$ 是支撑在一个允许锥中的链。那么，端同态集合 $\{\bar{\rho}^X_{\mathcal{C}}\}_{X\in \mathrm{Irr}\, Z(\mathcal{C})}$ 是 SSS$_f$ 的一组完备的简单对象代表。特别地，在假设 *1* 下，SSS$_f$ 是有限半单的。

5 融合

上一节的结果意味着 $Z(\mathcal{C})$ 与 SSS$_f$ 同构为半单酉范畴。本节中，我们证明 $Z(\mathcal{C})$ 与 SSS$_f$ 具有同构的 F-符号。众所周知，这意味着 $Z(\mathcal{C})$ 与 SSS$_f$ 幺半等价。实际上，根据命题 A.1，我们还能得出它们酉幺半等价。

记号 5.1. 在本节中，我们固定一条任意的链 $\mathcal{C} =(L_n)$ ，其支撑包含在某个允许锥中，并记为 $e_n = \partial_{\mathfrak{i}} L_n$。对应的简单端同态记为 $\bar{\rho}^X = \bar{\rho}^X_{\mathcal{C}}$，并将记号简化为 $u^X_n = u^X_{L_n}$、 $U^X_n = U^X_{\mathcal{C}_n}$、 $U^X_{n\to m} = U^X_{\mathcal{C}[n\to m]}$ 和 $P^{\bullet\bullet}_n = P^{\bullet\bullet}_{L_n}$，以及 $P^{\bullet\bullet}_{n\to m} = P^{\bullet\bullet}_{L^{\mathcal{C}}_{n\to m}}$。

5.1 局部态与任意子产生

我们先 介绍一些基本的一般性观察，这些观察将在全文中发挥作用 .

5.1.1 局域态与算子的最终常值序列

定义 5.2. 设 $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的一个子空间。若对每个 $|\Psi\rangle \in \mathcal{K}$ ，都存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \geq N$，序列 $(B_n) \subset B(\mathcal{H})$ 在 $\mathcal{K}$ 上最终为常值，则称该序列在 上最终为常值。

$$B_n |\Psi\rangle = B_N |\Psi\rangle . \tag{34}$$

引理 5.3. 若$(A_n) \subset B(\mathcal{K})$ 和$(B_n) \subset B(\mathcal{H})$ 是定义在 $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ 上的最终常值序列，则对任意 $k \in \mathbb{Z}$，序列$(B_{n+k}A_n)$ 在 $\mathcal{K}$ 上最终常值。此外，若 $\mathcal{K} = \mathcal{H}$且序列$(A_n)$、$(B_n)$ 一致有界，则极限 $A = \lim_n A_n$ 和 $B = \lim_n B_n$ 在强算子拓扑下存在，并且

$$BA = \lim_n B_{n+k}A_n. \tag{35}$$

证明： 我们对 $k \geq 0$ 证明此结论。 $k < 0$ 的情形可用类似方法处理。令$|\Psi\rangle \in \mathcal{K}$，并取满足 ($A_n$) 的式 (34) 的 N 。由于 $A_N |\Psi\rangle \in \mathcal{K}$，存在 M ，使得对所有 $m \geq M$ 都有 $B_m A_N |\Psi\rangle = B_M A_N |\Psi\rangle$。于是，对所有满足 $n' + k \geq M$ 的 $n \geq n' \geq N$，

$$B_{n+k}A_n |\Psi\rangle = B_{n+k}A_N |\Psi\rangle = B_{n'+k}A_N |\Psi\rangle = B_{n'+k}A_{n'} |\Psi\rangle , \tag{36}$$

从而证明第一个断言。这些极限在 $\mathcal{K}$上显然是逐点定义的。假定每个序列都有一致界，则这定义了 $\mathcal{K}$ 上的一个有界算子；若 $\mathcal{K}$ 是稠密的，该算子可延拓为 $\mathcal{H}$ 上的有界算子。然后，如式 (36)那样在稠密子空间 $\mathcal{K}$ 上对 BA 求值，即可得到式(35)。□

定义 5.4. 序列 $(A_n) \subset \mathcal{A}^{\mathrm{loc}}$ 是 在局部态上最终为常数，如果 $(\pi^{\mathbb{1}}(A_n))$ 在 $\pi^{\mathbb{1}}(\mathcal{A}^{\mathrm{loc}})\,|\Omega\rangle$上最终为常数。

回忆一下，弦算符通过最终为常值的序列定义在 $x \in \mathcal{A}^{\mathrm{loc}}$ 上

$$\rho^X_{\mathcal{C}_n}(x) = (U^X_{\mathcal{C}_n})^* x U^X_{\mathcal{C}_n}.$$

显然，该序列在局部态上最终为常值。

5.1.2 长弦产生任意子

考虑链 L_{n-1}的初始边 e_{n-1} 处的穿孔，酉门 u^X_{n-1} 作用于任意满足 e_{n-1}处真空条件的态时，要么不起作用，要么在 e_{n-1} 处产生类型为 X 的激发。这是特意设计成这样的，因此

$$U^X_n P^{\mathbb{1}\mathbb{1}}_n = P^{X?}_n U^X_n P^{\mathbb{1}\mathbb{1}}_n = p^X_n U^X_n P^{\mathbb{1}\mathbb{1}}_n. \tag{37}$$

在证明 [7, 引理 7.6]时，我们利用了这一事实，以说明弦算符产生不可约任意子表示。下面的引理将同一事实应用于作用在局部态上的多个弦算符，并对其进行了方便的概括。

回忆一下，我们固定了一条链 $\mathcal{C} = (L_n)$，并使用简化后的记号 5.1。

引理 5.5 （激发）。 设 $|\Psi\rangle = \pi^{\mathbb{1}}(x)\,|\Omega\rangle$，其中某个 $x \in \mathcal{A}^{\mathrm{loc}}$。那么存在 N，使得对所有 $k \geq 1$ 和 $n \geq N + k$，以及所有 X_0、……、$X_k \in$不可约对象 $Z(\mathcal{C})$，

$$\pi^{\mathbb{1}}(U^{X_0}_n \cdots U^{X_k}_{n+k})\,|\Psi\rangle = \pi^{\mathbb{1}}(P^{(X_k,\ldots,X_0)}_D U^{X_0}_n \cdots U^{X_k}_{n+k})\,|\Psi\rangle\,, \tag{38}$$

其中 $D = \bigcup_{\kappa=1}^{k} C^{L_{n+\kappa}}$，边界分支的枚举方式使得 $\mathcal{S}_\kappa$ 是 $\partial_{\mathrm{i}} L_{n+k-\kappa+1}$ 处的穿孔，其中 $\kappa = 1$、……、$k+1$。此外，只要 D' 与 D 具有相同的内边界分量，且与 $\mathcal{C}[n-1 \to 1]$ 的支撑和 x 的支撑不相交，那么将 D 替换为任意有限区域 D' 时，(38) 仍成立。

注 5.6。 上述边界分支的枚举方式，是为了与 $k = 1$ 且 $D = C^{L_{n+1}}$ 时链环 L_{n+1} 上的标准锚点所诱导的枚举方式相匹配。例如，若 $X_0 = \mathbb{1}$，引理指出 $\pi^{\mathbb{1}}(U^{X_1}_{n+1})\,|\Psi\rangle = \pi^{\mathbb{1}}(P^{X_1\,\mathbb{1}}_{L_{n+1}} U^{X_1}_{n+1})\,|\Psi\rangle$，注意到 $P^{X_1\,\mathbb{1}}_{L_{n+1}} = P^{(X_1,\mathbb{1})}_{L_{n+1}}$在所选的枚举方式下。

证明：对于任意 $X \in$不可约对象 $Z(\mathcal{C})$，记所有 $n \in \mathbb{N}$ 为 $p^X_n = \mathfrak{t}_{\mathcal{S}_{e_n}}(p^X)$，其中 $e_n = \partial_{\mathrm{i}} L_n$。令 n 任意。利用式（37），我们发现对任意 $\kappa < n$，

$$U^X_{n-\kappa} P^{\mathbb{1}\,\mathbb{1}}_{n+\kappa\to n-\kappa} = P^{\mathbb{1}\,X}_{n+\kappa\to n-\kappa+1} U^X_{n-\kappa} P^{\mathbb{1}\,\mathbb{1}}_{n+\kappa\to n-\kappa}.$$

通过反复应用拼接引理 4.1 以及酉门（33）的交织性质，

$$\begin{aligned}
U^X_{n+\kappa} P^{\mathbb{1}\,\mathbb{1}}_{n+\kappa\to n-\kappa} &= U^X_{n+\kappa\to n-\kappa+1} U^X_{n-\kappa} P^{\mathbb{1}\,\mathbb{1}}_{n+\kappa\to n-\kappa} \\
&= U^X_{n+\kappa\to n-\kappa+1} P^{\mathbb{1}\,X}_{n+\kappa\to n-\kappa+1} U^X_{n-\kappa} P^{\mathbb{1}\,\mathbb{1}}_{n+\kappa\to n-\kappa} \\
&= u^X_{L_{n+\kappa\to n-\kappa+1}} P^{\mathbb{1}\,X}_{n+\kappa\to n-\kappa+1} U^X_{n-\kappa} P^{\mathbb{1}\,\mathbb{1}}_{n+\kappa\to n-\kappa} \\
&= P^{X\,\mathbb{1}}_{n+\kappa\to n-\kappa+1} u^X_{L_{n+\kappa\to n-\kappa+1}} U^X_{n-\kappa} P^{\mathbb{1}\,\mathbb{1}}_{n+\kappa\to n-\kappa} \\
&= P^{X\,\mathbb{1}}_{n+\kappa\to n-\kappa+1} U^X_{n+\kappa} P^{\mathbb{1}\,\mathbb{1}}_{n+\kappa\to n-\kappa} \\
&= P^{\mathbb{1}\,\mathbb{1}}_{n+\kappa-1\to n-\kappa+1} p^X_{n+\kappa} U^X_{n+\kappa} P^{\mathbb{1}\,\mathbb{1}}_{n+\kappa\to n-\kappa}.
\end{aligned}$$

由此可知，对于 $n > k$,

$$U^{X_0}_n \cdots U^{X_k}_{n+k} P^{\mathbb{1}\,\mathbb{1}}_{n+k\to n-k} = p^{X_0}_n \cdots p^{X_k}_{n+k} U^{X_0}_n \cdots U^{X_k}_{n+k} P^{\mathbb{1}\,\mathbb{1}}_{n+k\to n-k}.$$

由于 x 具有有限支撑，我们可以取 N，使得对于所有 $n \geq N$， $L_n \cap \mathrm{supp}\,(x) = \emptyset$。于是，对于所有 $n \geq N + k$，$\pi^{\mathbb{1}}\left(P^{\mathbb{1}\,\mathbb{1}}_{n+k\to n-k}\right)|\Psi\rangle = |\Psi\rangle$。现在，若取 D'如给定 $k \geq 1$和 $n \geq N + k$时假设所述，则结论成立，因为 $\pi^{\mathbb{1}}(P_{D'})\,|\Psi\rangle = |\Psi\rangle$，这是因为 D'的支撑与 x不相交；并且对于所有 $\kappa = 0$、……、 k， $P_{D'}$与 $U^{X_\kappa}_{n+\kappa}$可交换。事实上，对于 D' 中的每个面，根据 [7], 的引理 6.5，B_f 都满足这一点；而且很容易将其推广到 D' 中不属于 D'某个面的边的情形。□

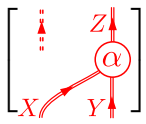
5.2 融合空间的同构

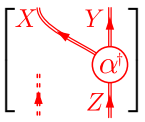
现在我们定义映射

$$\Phi^Z_{XY} : Z(\mathcal{C})(X \otimes Y \to Z) \to \mathsf{SSS}(\bar{\rho}^X \otimes \bar{\rho}^Y \to \bar{\rho}^Z)$$

对于所有 X， Y， $Z \in$不可约对象$(Z(\mathcal{C}))$，定义如下。对于 $\alpha\colon X \otimes Y \to Z$，以及每个 $n \geq m$，我们对任意链环（连同其标准锚点）定义

$$\mathrm{Dr}_L[\alpha] = \mathrm{Dr}_L\left[\quad\right], \qquad \mathrm{Dr}_L[\alpha^\dagger] = \mathrm{Dr}_L\left[\quad\right]$$





并使用以下简写记号：

$$\mathrm{Dr}_n[\alpha] = \mathrm{Dr}_{L_n}[\alpha], \qquad \mathrm{Dr}_{n\to m}[\alpha] = \mathrm{Dr}_{L^{\mathrm{e}}_{n\to m}}[\alpha].$$

于是定义

$$\Phi_n[\alpha] := (U^Z_n)^* \mathrm{Dr}_{n+1}\big[\alpha\big] U^Y_n U^X_{n+1}. \tag{39}$$

引理 5.7。 设 $X, Y, Z \in$不可约对象 $Z(\mathcal{C})$ 且 $\alpha\colon X \otimes Y \to Z$。序列 $(\Phi_n[\alpha])_{n\in\mathbb{N}}$ 在局部态上最终为常数。极限，

$$\Phi^Z_{XY}[\alpha] := \lim_n \pi^{\mathbb{1}}(\Phi_n[\alpha]) \in \pi^{\mathbb{1}}(\mathcal{A}_\Lambda)'',$$

是一个交织算子 $\Phi^Z_{XY}[\alpha]\colon \ \bar{\rho}^X \times \bar{\rho}^Y \to \bar{\rho}^Z$。

此外，序列$(\Phi_n[\alpha]^*)_{n\in\mathbb{N}}$ 在局部态上最终为常数，并且

$$\Phi^{XY}_Z[\alpha^\dagger] := \left(\Phi^Z_{XY}[\alpha]\right)^* = \lim_n \pi^{\mathbb{1}}(\Phi_n[\alpha]^*).$$

证明： 令 $|\Psi\rangle \in \pi^{\mathbb{1}}(\mathcal{A}^{\mathrm{loc}})\,|\Omega\rangle$，并按照激发引理 5.5 取 N， 使得对所有 $n \geq N + 1$，

$$\pi^{\mathbb{1}}(U^Y_n U^X_{n+1})\,|\Psi\rangle = \pi^{\mathbb{1}}(P^{(X,Y)}_{L_{n+1}} U^Y_n U^X_{n+1})\,|\Psi\rangle\,. \tag{40}$$

现在令 $n \geq N + 3$，并考虑区域 D，它由 $L_{n+1\to N+2}$ 添加与 L_{N+2} 和 L_{n+1} 的穿孔相对应的穿孔后得到；再根据穿孔 $(e_{n+1},\ e_n,\ e_{N+2},\ e_{N+1})$ 对边界分支进行编号。参见图 3。

由激发引理 5.5 可得

$$\pi^{\mathbb{1}}(U^Y_{N+1} U^X_{N+2})\,|\Psi\rangle = \pi^{\mathbb{1}}(P^{(\mathbb{1},\mathbb{1},X,Y)}_D U^Y_{N+1} U^X_{N+2})\,|\Psi\rangle\,.$$

取图 3 中 $_D$ 关于$\mathbb{1}$ D 的一个锚点。反复应用拼接引理 4.1 和

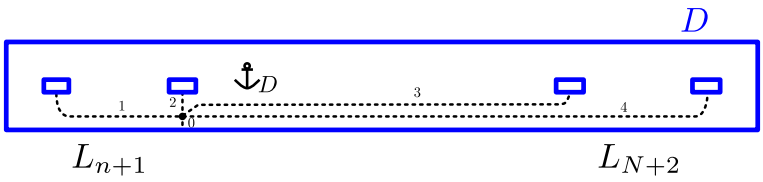


图 3：区域 D 及其锚点 $_D$的示意表示。由 $_D$ 诱导的 D 穿孔的枚举对应于排序 $(e_{n+1},\ e_n,\ e_{N+2},\ e_{N+1})$。锚点$D$ 扩展了标准锚点 L_{n+1} 和偏移量为 2 的标准锚点 L_{N+2} 。

由包含引理3.12以及注记3.13，我们得到

$$
\begin{aligned}
&(U^Z_{n\to N+2})^*\mathrm{Dr}_{n+1}[\alpha]U^Y_{n\to N+2}U^X_{n+1\to N+3}P^{(\mathbb{1},\mathbb{1},X,Y)\,D}\\
&\quad=\mathrm{Dr}^{(Z\mathbb{1}\to\mathbb{1}Z)}{}_{n\to N+2}\,\mathrm{Dr}_{n+1}[\alpha]\mathrm{Dr}^{(\mathbb{1}Y\to Y\mathbb{1})}{}_{n\to N+2}\,\mathrm{Dr}^{(\mathbb{1}X\to X\mathbb{1}}_{n+1\to N+3}P_D^{(\mathbb{1},\mathbb{1},X,Y)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\mathrm{Dr}_D^{\,D}\\
&\times\mathrm{Dr}_D^{D}\\
&\times\mathrm{Dr}_D^{\,D}\\
&\times\mathrm{Dr}_D^{D}\\
&=\text{博士}_{N+2}[\alpha]P_D^{(\mathbb{1},\mathbb{1},X,Y}.)
\end{aligned}
$$

结合

$$
\begin{aligned}
(U^Z_n)^* &= (U^Z_{N+1})^*(U^Z_{n\to N+2})^*,\\
U^Y_nU^X_{n+1} &= U^Y_{n\to N+2}U^X_{n+1\to N+3}U^Y_{N+1}U^X_{N+2},
\end{aligned}
$$

我们得到

$$\pi^{\mathbb{1}}(\Phi_n[\alpha])\,|\Psi\rangle = \pi^{\mathbb{1}}(\Phi_{N+1}[\alpha])\,|\Psi\rangle$$

对所有 $n\geq N+3$ 均成立。由于 $|\Psi\rangle$ 是任意的，我们得出结论： $\Phi_n[\alpha]$ 在局部态上最终为常数。

我们先前指出， $\rho^Y(x)$ 是一个在局部态上最终为常数的序列的极限。由于 $\rho^Y(x)\in\mathcal{A}^{\mathrm{loc}}$， $\rho^X(\rho^Y(x))$ 也同样是一个在局部态上最终为常数的序列的极限。因此，对于使 $\mathrm{Dr}_n[\alpha]$ 与 x 对易的 $n\geq N$，我们计算：

$$
\begin{aligned}
\Phi_n[\alpha]\rho^X_{n+1}(\rho^Y_n(x)) &= (U^Z_n)^*\mathrm{Dr}_{n+1}[\alpha]U^Y_nU^X_{n+1}(U^X_{n+1})^*(U^Y_n)^*xU^Y_nU^X_{n+1}\\
&= (U^Z_n)^*x\mathrm{Dr}_{n+1}[\alpha]U^Y_nU^X_{n+1}\\
&= (U^Z_n)^*x(U^Z_n)^*U^Z_n\mathrm{Dr}_{n+1}[\alpha]U^Y_nU^X_{n+1}\\
&= \rho^Z_n(x)\Phi_n[\alpha],
\end{aligned}
$$

利用引理 5.3，我们得出

$$\Phi^Y_{XY}[\alpha]\bar{\rho}^X(\bar{\rho}^Y(x)) = \bar{\rho}^Z(x)\Phi^Y_{XY}[\alpha].$$

这对所有的 $\mathcal{A}$ 都成立。

最后请注意，根据乘法性引理 3.11，$\Phi_n[\alpha]^* = (U_{n+1}^X)^*(U_n^Z)^*\mathrm{Dr}_{n+1}[\alpha^\dagger]U_n^Z$。证明 $\Phi_n[\alpha]^*$ 在局域态上最终为常数的过程与上述证明完全类似，留给读者完成。由此可得 $\left(\Phi_{XY}^Z[\alpha]\right)^* = \Phi_Z^{XY}[\alpha^\dagger]$。□

注 5.8. 注意，$\pi^{\mathbb{1}}(\Phi_n[\alpha]) \to \Phi_{XY}^Z[\alpha]$ 在强算子拓扑闭子代数$\pi^{\mathbb{1}}(\mathcal{A}_\Lambda)''$ 中收敛，并且对于任意 $W \in$ 不可约对象 $Z(\mathcal{C})$，$\bar{\rho}^W$ 在该子代数上是强算子拓扑连续的。因此，

$$\bar{\rho}^W(\Phi_{XY}^Z[\alpha]) = \lim_n \bar{\rho}^W(\pi^{\mathbb{1}}(F_n[\alpha])) = \lim_n \pi^{\mathbb{1}}\left[(U_{n+1}^W)^*\Phi_n[\alpha]U_{n+1}^W\right]. \tag{41}$$

此外，序列 $\left((U_{n+1}^W)^*\Phi_n[\alpha]U_{n+1}^W\right)_{n\in\mathbb{N}}$在局域态上最终为常数。证明与上述证明相同，只是还额外出现了 W 激发，这里从略。

关于这些映射Φ_{XY}^Z，首先可以观察到它们给出了融合规则的一个同构（命题 5.10）。这将由以下引理推出。

引理 5.9. 对于每个 $X, Y, Z \in$ 不可约对象 $Z(\mathcal{C})$ 以及 $\alpha, \delta\colon X \otimes Y \to Z$，我们有

$$\Phi_{XY}^Z[\alpha]\Phi_Z^{XY}[\delta^\dagger] = d_Z^{-1}\,\mathrm{tr}\left\{\alpha \circ \delta^\dagger\right\} \times 1_{\mathcal{H}},$$

and

$$\Phi_Z^{XY}[\delta^\dagger]\Phi_{YX}^Z[\alpha] = \lim_n \pi^{\mathbb{1}}\left((U_{n+1}^X)^*(U_n^Y)^*\mathrm{Dr}_{n+1}[\delta^\dagger \circ \alpha]U_n^Y U_{n+1}^X\right).$$

证明：在整个证明过程中，我们将 $\mathcal{A}$ 与其像 $\pi^{\mathbb{1}}(\mathcal{A})$ 等同，并从记号中省略 $\pi^{\mathbb{1}}$。我们在局域态的稠密子空间上验证该恒等式。令 $|\Psi\rangle \in \pi^{\mathbb{1}}(\mathcal{A}^{\mathrm{loc}})|\Omega\rangle$。由激发引理 5.5 和注 5.6 可知，对所有足够大的 n，都有 $U_n^Z|\Psi\rangle = P_{n+1}^{\mathbb{1}Z}U_n^Z|\Psi\rangle$。利用引理 5.3 和乘法性引理 3.11，我们计算得：

$$\begin{aligned}
\Phi_{XY}^Z[\alpha]\Phi_Z^{XY}[\delta^\dagger]|\Psi\rangle &= (U_n^Z)^*\mathrm{Dr}_{n+1}[\alpha]U_n^Y U_{n+1}^X (U_{n+1}^X)^*(U_n^Y)^*\mathrm{Dr}_{n+1}[\delta^\dagger]U_n^Z|\Psi\rangle \\
&= (U_n^Z)^*\mathrm{Dr}_{n+1}\left[\quad\right] U_n^Z|\Psi\rangle \\
&= d_Z^{-1}\,\mathrm{tr}\left\{\alpha \circ \delta^\dagger\right\} \times (U_n^Z)^*\mathrm{Dr}_{n+1}\left[\mathrm{id}_{\mathbb{1}} \otimes \mathrm{id}_Z\right]P_{n+1}^{\mathbb{1}Z}U_n^Z|\Psi\rangle \\
&= d_Z^{-1}\,\mathrm{tr}\left\{\alpha \circ \delta^\dagger\right\} \times |\Psi\rangle,
\end{aligned}$$

这里我们用到了 $\alpha \circ \delta^\dagger = d_Z^{-1}\mathrm{tr}\left\{\alpha \circ \delta^\dagger\right\} \times \mathrm{id}_Z$，以及 $\mathrm{Dr}_{n+1}[\mathrm{id}_{\mathbb{1}} \otimes \mathrm{id}_Z]P_{n+1}^{\mathbb{1}Z} = P_{n+1}^{\mathbb{1}Z}$ 这一面。类似地，由激发引理 5.5 可知，对所有足够大的n，都有 $U_n^Y U_{n+1}^X|\Psi\rangle = P_{(X,Y)}$

$_{n+1}\ U_n^Y U_{n+1}^X|\Psi\rangle$。利用引理 5.3 和乘法性引理 3.11 推理可得

$$\begin{aligned}
\Phi_Z^{XY}[\delta^\dagger]\Phi_{XY}^Z[\alpha]|\Psi\rangle &= (U_{n+1}^X)^*(U_n^Y)^*\mathrm{Dr}_{n+1}[\delta^\dagger]U_n^Z(U_n^Z)^*\mathrm{Dr}_{n+1}[\alpha]U_n^Y U_{n+1}^X|\Psi\rangle \\
&= (U_{n+1}^X)^*(U_n^Y)^*\mathrm{Dr}_{n+1}[\delta^\dagger \circ \alpha]U_n^Y U_{n+1}^X|\Psi\rangle,
\end{aligned}$$

完成证明。 □

命题 5.10. 设 X，$Y \in$ 不可约对象 Z（$\mathcal{C}$）并且设

$$\{\pi_{Z,\kappa} : X \otimes Y \to Z\}_{Z\in\mathrm{Irr}\,Z(\mathcal{C}),\kappa=1,\cdots,N_{XY}^Z}$$

给出 $X \otimes Y$ 的正交直和分解。则

$$\{\Phi_{XY}^Z[\pi_{Z,\kappa}] : \bar{\rho}^X \times \bar{\rho}^Y \to \bar{\rho}^Z\}_{Z\in\mathrm{Irr}\,Z(\mathcal{C}),\kappa=1,\cdots,N_{XY}^Z}$$

给出了 $\bar{\rho}^X \times \bar{\rho}^Y$ 的正交直和分解。特别地，SSSf 在张量积下封闭，且 $\{\Phi_{XY}^Z\}$ 给出了 ***A.1*** 节中所定义的融合规则的同构。

证明： 由引理 5.9 可立即得出，

$$\sum_{Z,\kappa} \Phi^{Z}_{XY}\left[\pi_{Z,\kappa}\right]^{*}\Phi^{Z}_{XY}\left[\pi_{Z,\kappa}\right] = \sum_{Z,\kappa} \Phi^{XY}_{Z}\left[\pi^{\dagger}_{Z,\kappa}\right]\Phi^{Z}_{XY}\left[\pi_{Z,\kappa}\right] = \mathrm{id}_{\bar{\rho}^{X}\times\bar{\rho}^{Y}},$$

and

$$\Phi^{XY}_{Z}\left[\pi_{Z,\kappa}\right]\Phi^{XY}_{Z'}\left[\pi_{Z',\lambda}\right]^{*} = \Phi^{Z}_{XY}\left[\pi_{Z,\kappa}\right]\Phi^{XY}_{Z'}\left[\pi^{\dagger}_{Z',\lambda}\right] = \delta_{Z,Z'}\delta_{i,i'}\times\mathrm{id}_{\bar{\rho}^{Z}}$$

对所有 Z，$Z'\in$ 不可约对象 $Z(\mathcal{C})$。 □

5.3 F-符号的同构

$Z(\mathcal{C})$ 的 F-符号是由以下交换图定义的酉映射

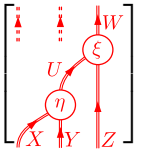
$$\begin{array}{ccc} Z(\mathcal{C})(X\otimes(Y\otimes Z)\to W) & \xrightarrow{\ \simeq\ } & \bigoplus_{V\in\mathrm{Irr}(Z(\mathcal{C}))} Z(\mathcal{C})(X\otimes V\to W)\otimes Z(\mathcal{C})(Y\otimes Z\to V) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle -\circ\alpha_{X,Y,X}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle F^{W}_{XYZ}} \\ Z(\mathcal{C})((X\otimes Y)\otimes Z\to W) & \xrightarrow{\ \simeq\ } & \bigoplus_{U\in\mathrm{Irr}(Z(\mathcal{C}))} Z(\mathcal{C})(U\otimes Z\to W)\otimes Z(\mathcal{C})(X\otimes Y\to U) \end{array}$$

其中，左侧的竖直箭头由与结合子 α 的前复合给出，而从右向左的水平同构则逐分量地由复合给出：$\xi\otimes\eta\mapsto\xi\circ(\mathrm{id}_X\otimes\eta)$。SSS$f$ 的 F-符号也以类似方式定义，其中结合子是恒等态射。

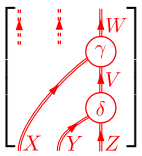
以下引理表明，$\{\Phi^{Z}_{XY}\}$ 按照附录 A 中描述的意义，将 $Z(\mathcal{C})$ 与 SSSf 的 F-符号交织起来。

引理 5.11。 令 $D_n = C^{L_n}\cup C^{L_{n+1}}$、$U$、$V$、$W$、$X$、$Y$、$Z\in$ 不可约对象 $Z(\mathcal{C})$。对于所有 ξ：$U\otimes Z\to W$ 和 η：$X\otimes Y\to U$，以及所有 γ：$X\otimes V\to W$ 和 δ：$Y\otimes Z\to V$，

$$\Phi^{W}_{UZ}[\xi]\circ(\Phi^{U}_{XY}[\eta]\times\mathrm{id}_{\bar{\rho}^{Z}}) = \lim_{n}\pi^{\mathbb{1}}\left((U^{W}_{n})^{*}\mathrm{Dr}_{D_{n+1}}\left[\ \right]U^{Z}_{n}U^{Y}_{n+1}U^{X}_{n+2}\right), \tag{42}$$



$$\Phi^{W}_{XV}[\gamma]\circ(\mathrm{id}_{\bar{\rho}^{X}}\times\Phi^{V}_{YZ}[\delta]) = \lim_{n}\pi^{\mathbb{1}}\left((U^{W}_{n})^{*}\mathrm{Dr}_{D_{n+1}}\left[\ \right]U^{Z}_{n}U^{Y}_{n+1}U^{X}_{n+2}\right), \tag{43}$$



其中极限取于强算子拓扑。

证明： 我们在局部态的稠密子空间上验证这两个恒等式，并在整个证明过程中省略 $\pi^{\mathbb{1}}$ 的记号。令 $|\Psi\rangle\in\pi^{\mathbb{1}}(\mathcal{A}^{\mathrm{loc}})|\Omega\rangle$，并根据激发引理 5.5 取足够大的 n，使得

$$U^{Z}_{n}U^{Y}_{n+1}U^{X}_{n+2}|\Psi\rangle = P^{(X,Y,Z)}_{D_{n+1}}U^{Z}_{n}U^{Y}_{n+1}U^{X}_{n+2}|\Psi\rangle.$$

结合 $\Phi^{U}_{XY}[\eta]\times\mathrm{id}_{\bar{\rho}^{Z}} = \Phi^{U}_{XY}[\eta]$ 和引理 5.3，我们发现 (42) 的左边变为

$$\begin{aligned}\Phi^{W}_{UZ}[\xi]\Phi^{U}_{XY}[\eta]|\Psi\rangle &= (U^{W}_{n})^{*}\mathrm{Dr}_{n+1}[\xi]U^{Z}_{n}U^{U}_{n+1}(U^{U}_{n+1})^{*}\mathrm{Dr}_{n+2}[\eta]U^{Y}_{n+1}U^{X}_{n+2}|\Psi\rangle \\ &= (U^{W}_{n})^{*}\mathrm{Dr}_{n+1}[\xi]\mathrm{Dr}_{n+2}[\eta]P^{(X,Y,Z)}_{D_{n+1}}U^{Z}_{n}U^{Y}_{n+1}U^{X}_{n+2}|\Psi\rangle \\ &= (U^{W}_{n})^{*}\mathrm{Dr}_{D_{n+1}}[\xi\circ(\eta\otimes\mathrm{id}_{Z})]U^{Z}_{n}U^{Y}_{n+1}U^{X}_{n+2}|\Psi\rangle,\end{aligned}$$

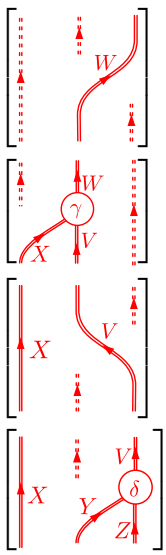
其中我们结合使用了乘法性引理 3.11 和包含引理3.12，并将后者应用于 L_n，$L_{n+1} \subset D_{n+1}$，其锚点为 D_{n+1}，扩展了 L_n 和 L_{n+1}。这就证明了第一个恒等式。

对于第二个恒等式，我们有 $\mathrm{id}_{\bar{\rho}^X} \times \Phi^V_{YZ}[\delta] = \bar{\rho}^X(\Phi^V_{YZ}[\delta])$，因此在这种情况下可得

$$
\begin{aligned}
&\left(\Phi^W_{XV}[\gamma] \circ (\mathrm{id}_{\bar{\rho}^X} \times \Phi^V_{YZ}[\delta])\right) |\Psi\rangle \\
&= (U^W_{n+1})^* \mathrm{Dr}_{n+2}[\gamma] U^V_{n+1} U^X_{n+2} (U^X_{n+2})^* (U^V_n)^* \mathrm{Dr}_{n+1}[\delta] U^Z_n U^Y_{n+1} U^X_{n+2} |\Psi\rangle \\
&= (U^W_n)^* \left(u^W_{n+1} \mathrm{Dr}_{n+2}[\gamma] u^V_{n+1} \mathrm{Dr}_{n+1}[\delta] P^{(X,Y,Z)}_{D_{n+1}}\right) U^Z_n U^Y_{n+1} U^X_{n+2} |\Psi\rangle \\
&= (U^W_n)^* \mathrm{Dr}_{D_{n+1}}[\gamma \circ (\mathrm{id}_X \otimes \delta)] U^Z_n U^Y_{n+1} U^X_{n+2} |\Psi\rangle .
\end{aligned}
$$

这里，第二个等式是利用定义和支撑集不相交性进行的简单代数化简。最后一个等式则由反复应用包含引理 3.12 和乘法性引理 3.11 得出，这表明：

$$
\begin{aligned}
& u^W_{n+1} \mathrm{Dr}_{n+2}[\gamma] u^V_{n+1} \mathrm{Dr}_{n+1}[\delta] P^{(X,Y,Z)}_{D_{n+1}} \\
=& \mathrm{Dr}^{\Updownarrow D_{n+1}}_{D_{n+1}} \\
\times& \mathrm{Dr}^{\Updownarrow D_{n+1}}_{D_{n+1}} \\
\times& \mathrm{Dr}^{\Updownarrow D_{n+1}}_{D_{n+1}} \\
\times& \mathrm{Dr}^{\Updownarrow D_{n+1}}_{D_{n+1}} \quad P^{(X,Y,Z)}_{D_{n+1}} \\
=& \mathrm{Dr}_{D_{n+1}}[\gamma \circ (\mathrm{id}_X \otimes \delta)] P^{(X,Y,Z)}_{D_{n+1}} .
\end{aligned}
$$



□

6 编织

本节将证明，对融合空间的识别 $\{\Phi^Z_{XY}\}$ 也交织了 R-符号。这将根据命题 A.1 推出 $Z(\mathcal{C})$ 和 SSSf 作为带编织的 C*-张量范畴是等价的。

请注意，记号 5.1 不再适用，因为我们将处理多条链。

6.1 传输算子

为了计算由公式 (1) 得到的 SSSf 的编织，对于任意的 $X \in$ 不可约对象 $Z(\mathcal{C})$ 以及足够良好的半无限链 $\mathcal{C}$ 和$\mathcal{C}'$，我们在 $\bar{\rho}^X_{\mathcal{C}}$与 $\bar{\rho}^X_{\mathcal{C}'}$ 之间构造显式的酉传递算子。尽管只需针对固定的基准链和一条辅助链进行构造即可，但为求完整，我们仍描述一般性的构造，参见注2.10。

6.1.1 同痕引理

弦算符传输的核心要素，是弦算符的酉门所具有的一种同痕不变性。

定义 6.1。 如果 $\partial_{\mathrm{i}}L = \partial_{\mathrm{i}}L'$ 和 $\partial_{\mathrm{f}}L = \partial_{\mathrm{f}}L'$，并且存在一个区域 E，使得链接 L 和 L' 之间存在简单同痕，则称.....

1. C^L、$C^{L'} \subset E$；*2.* 存在一个区域 $C \subset E$，使得 E 是通过沿一条自避对偶路径（见第 *3.4* 节）将 L 与 C 粘合得到的；*3.* 存在一个区域 $C' \subset E$，使得 E 是通过沿一条自避对偶路径将 L' 与 C' 粘合得到的；*4.* 对于 E，存在一个锚点 $_E$，其以偏移量零延拓了 $_L$ 和 $_{L'}$。

⚓ ⚓ ⚓

称区域 E 支撑 L 与 L' 之间的简单同痕。

该定义旨在应用包含引理3.12。注意，由这些假设可知，Σ_E 是一个双穿孔圆盘，其穿孔分别与 $\partial_{\mathrm{i}}L$ 和 $\partial_{\mathrm{f}}L$ 重合。粘合到 L 和 L' 上以分别得到 E 的子区域 C 和 C'，各自具有相关区域 Σ_C 和 $\Sigma_{C'}$，且这些区域都是圆盘。见图 4。

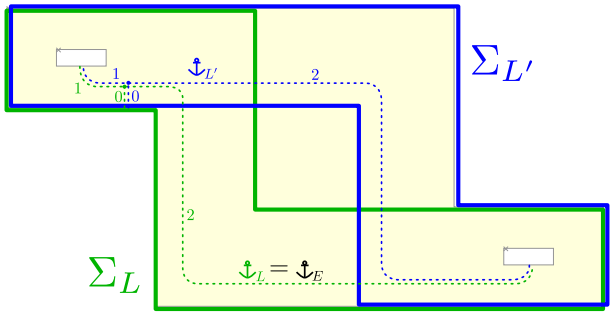


图 4：由区域 E 支撑的链环 L 和 L' 的同痕。区域 Σ_L、$\Sigma_{L'}$ 和 Σ_E 分别以绿色、蓝色和浅黄色显示。图中还显示了锚点 $_E = \ _L$ 和 $_{L'}$ 的一种选取，以及其各股的枚举。 ⚓

回顾一下，对于任意区域 E，投影算子 $P_E \in \mathcal{A}_E$ 是投影到与 E 相关联的图 skein 子空间 $H_E \subset \mathcal{H}_E$ 上的正交投影算子。参见第 3.2.6 节。

引理 6.2 (同痕)。 若链环 L 和 L' 之间存在由区域E 支撑的简单同痕，则

$$u_L^X P_E = u_{L'}^X P_E$$

对于任意 $X \in$ 不可约对象 $Z(\mathcal{C})$。

证明：回忆酉算子 u_L^X的定义式（32）。该定义中出现的 Drinfeld 插入是部分等距，其初投影和终投影由式（28）—（31）给出。显然，对于所有这些投影算子都有 $P_L^{\bullet\bullet} P_E = P_{L'}^{\bullet\bullet} P_E$，因此只需证明以下四个等式：

$$\mathrm{Dr}_L^{(\mathbb{1}\,\mathbb{1}\to X\bar{X})} P_E = \mathrm{Dr}_{L'}^{(\mathbb{1}\,\mathbb{1}\to X\bar{X})} P_E, \quad \mathrm{Dr}_L^{(X\bar{X}\to\mathbb{1}\,\mathbb{1})} P_E = \mathrm{Dr}_{L'}^{(X\bar{X}\to\mathbb{1}\,\mathbb{1})} P_E,$$
$$\mathrm{Dr}_L^{(X\,\mathbb{1}\to\mathbb{1}\,X)} P_E = \mathrm{Dr}_{L'}^{(X\,\mathbb{1}\to\mathbb{1}\,X)} P_E, \quad \mathrm{Dr}_L^{(\mathbb{1}\,X\to X\,\mathbb{1})} P_E = \mathrm{Dr}_{L'}^{(\mathbb{1}\,X\to X\,\mathbb{1})}.$$

下面证明其中第一个等式。其余等式的证明完全类似。我们采用由锚点L、 L'和E诱导的边界分支枚举。由于E是沿着一条自避对偶路径将圆盘C粘合到链环L上得到的，并且E在没有偏移量的情况下扩展L，包含引理3.12给出

$$\mathrm{Dr}_L^{(\mathbb{1}\,\mathbb{1}\to X\bar{X})} P_E = d_X^{-1/2}\,\mathrm{Dr}_L \left[\quad\right] P_E^{(\mathbb{1}\,\mathbb{1})}$$



$$= d_X^{-1/2}\,\mathrm{Dr}_E^{E} \left[\quad\right] P_E^{(\mathbb{1}\,\mathbb{1})} = d_X^{-1/2}\,\mathrm{Dr}_E^{E} \left[\quad\right] P_E$$





其中，在第一个和最后一个等式中，我们注意到 Drinfeld 插入的支撑分别位于$P_{(\mathbb{1}\,\mathbb{1})L}$和 $P_{(\mathbb{1}\mathbb{1})E}$上，并且 $P_L^{\mathbb{1}\,\mathbb{1}} P_E = P_{(\mathbb{1}\,\mathbb{1})E}$。出于同样的原因，我们有

$$\mathrm{Dr}_L^{(\mathbb{1}\,\mathbb{1}\to X\bar{X})} P_E = d_X^{-1/2}\,\mathrm{Dr}_E^{E} \left[\quad\right] P_E.$$



结合这些结果，便得到上面的第一个等式。 □

为了在下文应用这个同痕，我们还需要拼接引理的以下变体：

引理 6.3. 设 $X \in$ 不可约对象 $Z(\mathcal{C})$，且 L_1 和 L_2 是可复合链环，其中 $L = L_2 \wedge L_1$。那么

$$u_{L_1}^X u_{L_2}^X P_L^{X\,\mathbb{1}} = u_L^X P_L^{X\,\mathbb{1}}.$$

证明： 与 [7]中拼接引理 6.9 的证明一样，我们有

$$u_{L_1}^X u_{L_2}^X P_L^{X\,\mathbb{1}} = \mathrm{Dr}_{L_1}^{(X\,\mathbb{1}\to\mathbb{1}\,X)} \mathrm{Dr}_{L_2}^{(X\,\mathbb{1}\to\mathbb{1}\,X)} P_L^{X\,\mathbb{1}}$$

and

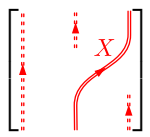
$$u_L^X P_L^{X\,\mathbb{1}} = \mathrm{Dr}_L^{(X\,\mathbb{1}\to\mathbb{1}\,X)} P_L^{X\,\mathbb{1}}.$$

考虑区域 $D = C^{L_1} \cup C^{L_2}$，并设 $_D$ 如 [7], 中引理 6.9 的证明所述，使得$_D$ 将锚点 $_{L_1}$ 的偏移量扩展为 0，而 $_D$ 将锚点 $_{L_1}$ 的偏移量扩展为 1。由于我们通过填充 D的中间穿孔得到 L，因此有

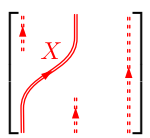
$$B_L = B_D \mathfrak{t}_{\mathcal{S}_2^{D}}(p^{\mathbb{1}}) = \mathfrak{t}_{\mathcal{S}_2^{D}}(p^{\mathbb{1}}) B_D.$$

利用这一观察以及包含引理3.12和乘法性引理3.11，我们得到

$$\mathrm{Dr}_{L_1}^{(X\,\mathbb{1}\to\mathbb{1}\,X)} \mathrm{Dr}_{L_2}^{(X\,\mathbb{1}\to\mathbb{1}\,X)} P_L^{X\,\mathbb{1}} = \mathrm{Dr}_D \left[\quad\right]$$



$$\times \mathrm{Dr}_D \left[\quad\right] P_L^{X\,\mathbb{1}}$$



$$= \mathrm{Dr}_L^{(X\,\mathbb{1}\to\mathbb{1}\,X)} P_L^{X\,\mathbb{1}},$$

最后一个等式显然成立，参见注记3.13。 □

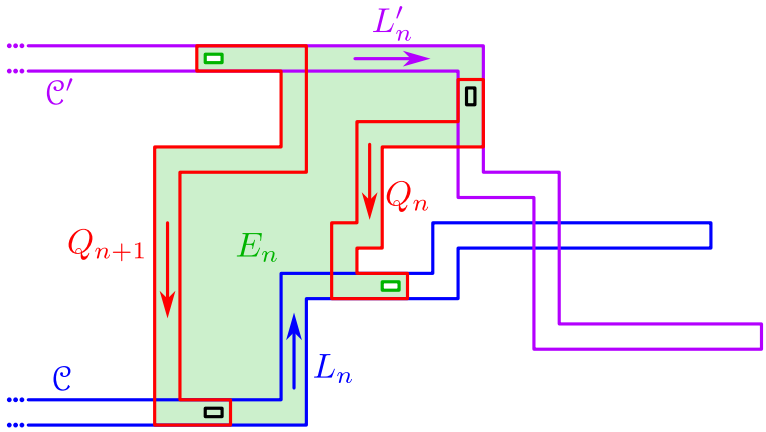


图5：链 $\mathcal{C}=(L_n)$ 与 $\mathcal{C}'=(L'_n)$ 之间的一座桥（$\{Q_n\}$，$\{E_n\}$）的一部分。

6.1.2 传输算子的构造

现在，我们为支撑在链$\mathcal{C}$，$\mathcal{C}'$ 上的弦算符$\bar{\rho}^X_{\mathcal{C}}$和 $\bar{\rho}^X_{\mathcal{C}'}$ 构造显式的传输算子，这些链具有所谓的桥，见图5

定义 6.4。设 $\mathcal{C}=\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\mathcal{C}'=\{L'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为链。从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{C}'$ 的桥是一个二元组$(\{Q_n\}_{n\geq N}$，$\{E_n\}_{n\geq N}\})$，其中某个 $N\in\mathbb{N}$ 满足：每个 Q_n 都是链环，每个 E_n 都是区域，并且对所有 $n\geq N$，

1. L_n 和 Q_{n+1} 可复合，即 $Q_{n+1}\wedge L_n$ 是链环；*2.* Q_n 和 L'_n 可复合，即 $L'_n\wedge Q_n$ 是链环；

3. 区域 E_n 支撑 $Q_{n+1}\wedge L_n$ 与 $L'_n\wedge Q_n$ 之间的简单同痕，

4. 对于任意有限区域 C，存在 $n_0\geq N$，使得如果 $n\geq n_0$，则 $E_n\cap C=\emptyset$。

5. 区域 E_n 与 $\mathcal{C}[n-2\to 1]$ 和 $\mathcal{C}'[n-2\to 1]$ 的支集互不相交。

我们称桥 $(\{Q_n\}_{n\geq N},\{E_n\}_{n\geq N})$ 支撑在锥 Λ 中，若所有链环$\{L_n,L'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{Q_n\}_{n\geq N}$ 的支撑都是 Λ 的子集。

命题 6.5. 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$ 是链，并假设 $(\{Q_n\}_{n\geq N},\{E_n\}_{n\geq N})$ 是一个从$\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{C}'$ 的桥。令 $X\in$不可约对象 $Z(\mathcal{C})$。对于每个 $n\geq N$，定义酉算子

$$T_n=(U^X_{\mathcal{C}'_n})^* u^X_{Q_{n+1}} U^X_{\mathcal{C}_n}. \tag{44}$$

于是，序列 $\{T_n\}_{n\geq N}$ 在局部态上最终为常数，且其极限

$$T:=\lim_{n\uparrow\infty}\pi^{\mathbb{1}}(T_n) \tag{45}$$

是从 $\bar{\rho}^X_{\mathcal{C}}$ 到 $\bar{\rho}^X_{\mathcal{C}'}$ 的酉交织算子。

*Mo*此外，若桥 $(\{Q_n\}_{n\geq N},\{E_n\}_{n\geq N})$ 支撑在锥 Λ 中，则 $T\in\mathcal{R}(\Lambda)$.

证明：在整个证明过程中，我们将 $\mathcal{A}$ 与其像 $\pi^{\mathbb{1}}(\mathcal{A})$ 等同，并从记号中省略 $\pi^{\mathbb{1}}$。由于对象 $X\in$不可约对象 $Z(\mathcal{C})$ 是固定的，在不会引起歧义的地方，我们也从记号中省略它。

考虑一个局域态 $|\Psi\rangle:=x|\Omega\rangle$，其中 $x\in\mathcal{A}^{\mathrm{loc}}$。

令 $n\geq\max\{N+2,n_0\}$，其中 N 由激发引理 5.5 根据 x给出，而 n_0 则由定义 6.4 第 4 项针对 x 的支撑保证。考虑到第 5 项

定义 6.4 的第 5 项，我们看到激发引理 5.5 的假设对 E_n成立（将引理应用于取值 $n-1$ 和 $k=1$，其中 $X_0=X$ 和 $X_1=\mathbb{1}$，且区域为$D=L_{(n-1)+1}\subset E_n$）。由此可得

$$U_{\mathcal{C}_{n-1}}|\Psi\rangle = P_{E_n}^{(\mathbb{1},X)} U_{\mathcal{C}_{n-1}}|\Psi\rangle\,. \tag{46}$$

于是我们计算，

$$\begin{aligned}
T_n|\Psi\rangle &= U^*_{\mathcal{C}'_n}\, u_{Q_{n+1}}\, U_{\mathcal{C}_n}\,|\Psi\rangle = U^*_{\mathcal{C}'_n}\, u_{Q_{n+1}}\, u_{L_n}\, U_{\mathcal{C}_{n-1}}\,|\Psi\rangle \\
&\overset{(46)}{=} U^*_{\mathcal{C}'_n}\, u_{Q_{n+1}}\, u_{L_n}\, P_{E_n}^{(\mathbb{1},X)}\, U_{\mathcal{C}_{n-1}}\,|\Psi\rangle \overset{Lem.6.3}{=} U^*_{\mathcal{C}'_n}\, u_{Q_{n+1}\wedge L_n}\, P_{E_n}^{(\mathbb{1},X)}\, U_{\mathcal{C}_{n-1}}\,|\Psi\rangle \\
&\overset{Lem.6.2}{=} U^*_{\mathcal{C}'_n}\, u_{L'_n\wedge Q_n}\, P_{E_n}^{(\mathbb{1},X)}\, U_{\mathcal{C}_{n-1}}\,|\Psi\rangle \overset{Lem.6.3}{=} U^*_{\mathcal{C}'_n}\, u_{L'_n}\, u_{Q_n}\, P_{E_n}^{(\mathbb{1},X)}\, U_{\mathcal{C}_{n-1}}\,|\Psi\rangle \\
&= U^*_{\mathcal{C}'_{n-1}}\, u_{Q_n}\, U_{\mathcal{C}_{n-1}}\,|\Psi\rangle = T_{n-1}|\Psi\rangle\,.
\end{aligned}$$

由于这对所有 $n\geq \max\{N+2, n_0\}$ 都成立，我们得出 $(T_n)_{n\geq N}$ 在局部态上最终为常数。

现在证明极限 $T=\lim_n T_n$ 是一个从 $\bar\rho^X_{\mathcal{C}}$ 到 $\bar\rho^X_{\mathcal{C}'}$ 的交织算子。固定 $y\in\mathcal{A}^{\mathrm{loc}}$，并注意到对于所有足够大的 $n\in\mathbb{N}$，使得 $\operatorname{supp} Q_{n+1}\cap \operatorname{supp}(y)=\emptyset$，我们有

$$T_n\left(U^*_{\mathcal{C}_n} y U_{\mathcal{C}_n}\right) = U_{\mathcal{C}'_n} u_{Q_{n+1}}\, y U_{\mathcal{C}_n} = U_{\mathcal{C}'_n} y\, u_{Q_{n+1}} U_{\mathcal{C}_n} = \left(U_{\mathcal{C}'_n} y U^*_{\mathcal{C}'_n}\right) T_n.$$

由于 (T_n)、$(U^*_{\mathcal{C}_n} y U_{\mathcal{C}_n})$ 和 $(U^*_{\mathcal{C}'_n} y U_{\mathcal{C}'_n})$ 是在局部态上最终为常数的序列，分别收敛到 T，$\bar\rho^X_{\mathcal{C}}(y)$ 和 $\bar\rho^X_{\mathcal{C}}(y)$，由引理 5.3 可得

$$T\,\bar\rho^X_{\mathcal{C}}(y)\,|\Psi\rangle = \bar\rho^X_{\mathcal{C}'}(y)\,T\,|\Psi\rangle$$

对于所有 $y\in\mathcal{A}^{\mathrm{loc}}$ 以及任意局域态 $|\Psi\rangle\in\mathcal{A}^{\mathrm{loc}}|\Omega\rangle$。由稠密性，我们进而得出 $T\in\mathsf{SSS}(\bar\rho^X_{\mathcal{C}}\to\bar\rho^X_{\mathcal{C}'})$。

为证明 T 是酉的，我们首先注意到，通过改变链环 $\{Q_n\}$ 的定向，可以得到一个从 $\mathcal{C}'$ 到 $\mathcal{C}$ 的桥。接着，与上文同理可知，序列 $(T_n^*)_{n\geq N}$ 在局部态上最终保持不变，因此强收敛到 T^*。利用 T_n 的酉性，我们得到

$$T^*T\,|\Psi\rangle = \lim_n T_n^* T_n\,|\Psi\rangle = |\Psi\rangle\,,$$

根据引理 5.3，对任意局部态 $|\Psi\rangle\in\mathcal{A}^{\mathrm{loc}}|\Omega\rangle$，也有 $TT^*|\Psi\rangle=|\Psi\rangle$。由稠密性可知，$T$ 是酉的。

最后，如果 $\Lambda\subset\mathbb{R}^2$ 包含所有链环 $\{L_n, L'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和所有链环 $\{Q_n\}_{n\geq N}$ 的支撑，那么每个 T_n 都支撑在 Λ 中，因此可得 $T\in\mathcal{R}(\Lambda)$。□

注 6.6。对于所有链 $\mathcal{C}$、锥 Λ 以及 $Y\in$ 不可约对象 $Z(\mathcal{C})$，端同态 $\bar\rho^Y_{\mathcal{C}}$ 在 $\pi^{\mathbb{1}}(\mathcal{A}_\Lambda)$ 上强算子拓扑连续。因此，对于上述引理中强算子拓扑收敛 $T_n\to T$ 在允许锥 Λ 对应的 $\pi^{\mathbb{1}}(\mathcal{A}_\Lambda)''$ 中发生的情形，我们注意到

$$\bar\rho^Y_{\mathcal{C}}(T) = \lim_n \bar\rho^Y_{\mathcal{C}}(\pi^{\mathbb{1}}(T_n)) = \lim_n \pi^{\mathbb{1}}\left[(U^Y_{\mathcal{C}_{n+1}})^* T_n U^Y_{\mathcal{C}_{n+1}}\right]. \tag{47}$$

序列 $\left(U^Y_{\mathcal{C}_{n+1}})^* T_n U^Y_{\mathcal{C}_{n+1}}\right)_{n\geq N}$在局部态上最终为常数。对于 T^*，也有类似的结论。我们省略证明，只说明它与上述证明完全相同，只是额外包含了 Y 激发。

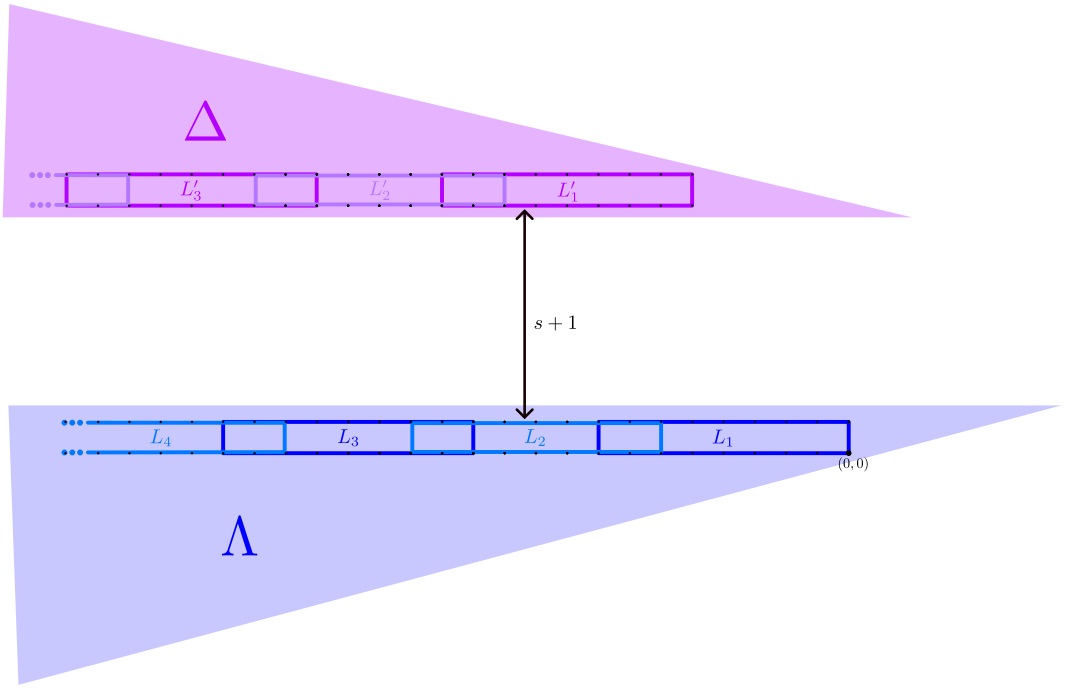


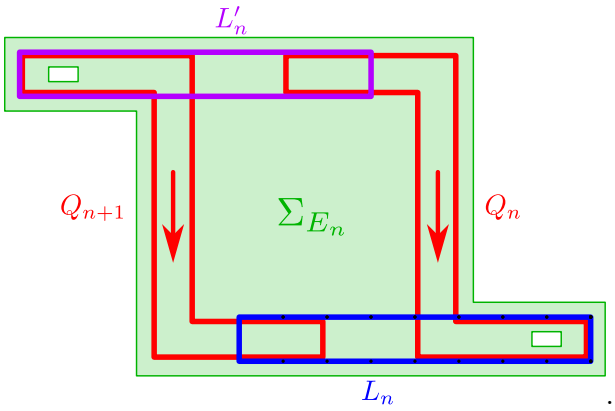
图 6：蓝色的基准链 $\mathcal{C}$，与位于其上方、呈紫色的右侧链 $\mathcal{C}'$ 相距 $s+1$。图中还显示了满足第 2.2.3 节中编织构造假设的锥 Λ 和 Δ。

6.2 R-符号的同构

在本小节中，我们固定如下的基准链 $\mathcal{C}=(L_n)$。将 $\mathbb{Z}^2$ 的面集 $\mathcal{F}$ 与对偶格 $(\mathbb{Z}^2)^*$ 对应起来，使得左下顶点为 $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ 的面 f 具有坐标 $(x,y)\in(\mathbb{Z}^2)^*$。对于每个 $n\in\mathbb{N}$，我们取 $L_n=((-6n-2+i,0))_{i=0}^{7}$，方向朝右。见图 6。固定基准链 $\mathcal{C}$ 后，对于任意 $X\in$ 不可约对象 $Z(\mathcal{C})$，记 $\bar{\rho}^X:=\bar{\rho}^X_{\mathcal{C}}$；并令 Φ^Z_{XY}: $Z(\mathcal{C})(X\otimes Y\to\mathbb{Z})\to\mathrm{SSS}f(\bar{\rho}^X\times\bar{\rho}^Y\to\bar{\rho}^Z)$ 为第 5.2 节中针对基准链 $\mathcal{C}$ 构造的映射。

为了计算 SSSf的 R-符号，我们必须计算任意 $X,Y\in$不可约对象 $Z(\mathcal{C})$ 的编织 $b_{Y,X}:=b_{\bar{\rho}^Y,\bar{\rho}^X}:\bar{\rho}^Y\times\bar{\rho}^X\to\bar{\rho}^X\times\bar{\rho}^Y$。为此，我们固定第二条链 $\mathcal{C}'=(L'_n)$，其链环 L'_n 由 L_n 平移 $s+2$ 个格距向上并向左移动五个格距得到。这保证了端同态 $\bar{\rho}^X_{\mathcal{C}}$ 和 $\bar{\rho}^X_{\mathcal{C}'}$ 分别局域在允许锥 Λ 和 Δ中，满足第 2.2.3 节中编织构造的假设，见图 6。

为了计算编织 $b_{Y,\ X}$，我们需要一个酉传递算子 T^X: $\bar{\rho}^X\to\bar{\rho}^X_{\mathcal{C}'}$。我们将取$T^X$为命题 6.5 中利用桥 $(\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ \{E_n\}_{n\in N})$ 构造的传递算子，其中 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$ 之间的链环 Q_n 及区域 E_n 对每个 $n\in\mathbb{N}$ 的指定如下：



容易验证，这确实给出了一个从 $\mathcal{C}$到 $\mathcal{C}'$的桥。

于是我们有

$$b_{Y,X} = (T^X)^*\,\bar{\rho}^Y(T^X). \tag{48}$$

回顾附录 A，SSSf 的 $Z(\mathcal{C})$-符号只是$-\circ b_{X,Y}$和$-\circ\beta_{X,Y}$在融合空间上的作用。下面的引理表明，映射 $\{\Phi^Z_{XY}\}$按照附录 A 中所述的意义 intertwine R-符号。

引理6.7. 对于任意 $X,Y,W\in$不可约对象 $Z(\mathcal{C})$，以及 $\alpha\colon X\otimes Y\to W$，

$$\Phi^W_{XY}[\alpha]\circ b_{Y,X} = \Phi^W_{YX}\big[\alpha\circ\beta_{Y,X}\big].$$

证明： 由引理 5.7 可知，该断言等价于

$$b^*_{Y,X}\circ\Phi^{XY}_W[\gamma] = \Phi^{YX}_W\big[\beta^\dagger_{Y,X}\circ\gamma\big],$$

其中 $\gamma=\alpha^\dagger\colon W\to X\otimes Y$。只需在局域态的稠密子空间 $\pi^{\mathbb{1}}(\mathcal{A}^{\mathrm{loc}})\,|\Omega\rangle$ 上验证这个恒等态射。下文我们将省略记号中的 $\pi^{\mathbb{1}}$，并考虑满足 $x\in\mathcal{A}^{\mathrm{loc}}$ 的局域态 $|\Psi\rangle = x\,|\Omega\rangle$。

由激发引理 5.5 和定义 6.4 可知，我们可以找到一个足够大的 $N\in\mathbb{N}$，使得 x 的支撑与 E_n 不相交，对所有 $n\geq N$ 均如此，并且

$$U^W_{\mathcal{C}_{n-1}}|\Psi\rangle = P^{(\mathbb{1},W)}_{E_n}U^W_{\mathcal{C}_{n-1}}|\Psi\rangle \tag{49}$$

对所有 $n\geq N$。我们旨在证明

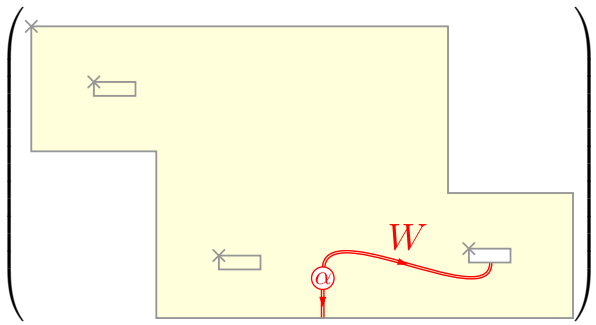
$$(u^X_{Q_n})^*(u^X_{L'_n})^*u^Y_{L_n}u^X_{Q_{n+1}}\mathrm{Dr}_{L_n}[\gamma]P^{(\mathbb{1},W)}_{E_n} = \mathrm{Dr}_{L_n}\big[\beta^\dagger_{Y,X}\circ\gamma\big]P^{(\mathbb{1},W)}_{E_n} \tag{50}$$

对所有此类 n。固定 $n\geq N$，令 D_n 为从 E_n 经由在 $\partial_{\mathsf{i}}L_n$ 处添加一个穿孔而得到的区域，因此 Σ_{D_n} 成为一个有三个穿孔的圆盘。记 $K_n := Q_{n+1}\wedge L_n$ 和 $K'_n := L'_n\wedge Q_n$，使得区域 E_n 支撑着 K_n 与 K'_n 之间的简单同痕。如定义 6.1 后的讨论所述，我们可以取 $E_n = K_n$。注意，我们有 $P_{(\mathbb{1},\mathbb{1},W)D_n} = P_{(\mathbb{1},W)E_n}$，其中我们采用 D_n的三个穿孔的排序 $(\partial_{\mathsf{i}}L'_n,\partial_{\mathsf{i}}L_n,\partial_{\mathsf{f}}L_n)$。

回忆第 3.3 节，$P_{(\mathbb{1},\mathbb{1},W)D_n}$的值域由如下形式的向量张成：

$$\psi = \mathcal{D}^{-3}\times\Psi^{\bullet_1}_{D_n}\big(\alpha\otimes w_0\otimes w^{\mathbb{1}}\otimes w^{\mathbb{1}}\otimes w^W\big) \tag{51}$$

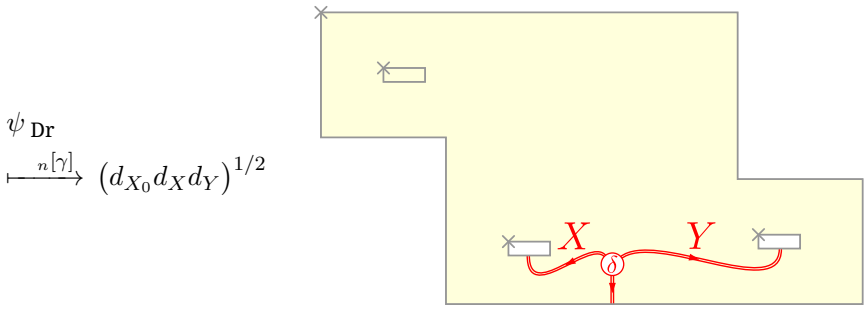
$$= \big(d_{X_0}d_W\big)^{1/2}\sigma^{-1}_{D_n}$$



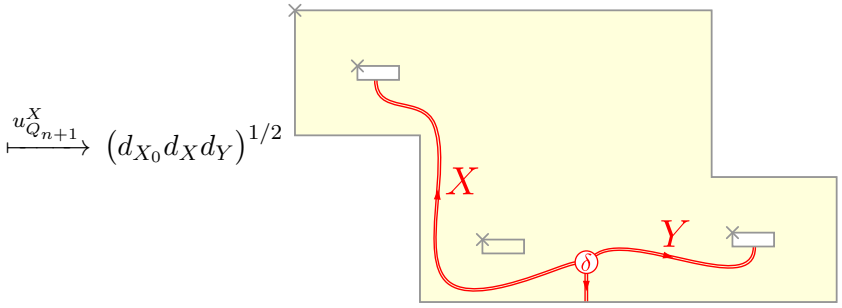
,

其中边界条件 $w_0 : \bar{W} \to \chi^{\otimes \mathcal{S}_0{}^1}$ 任意。这里，锚点 $_1$ 如图7所示，我们采用式（23）中引入的酉 $\zeta_W : W^* \to W$ 的图示表示。约定不标出真空线，并且在没有（$=$ 真空）附着弦的边界分支上施加真空边界条件 $w^{\mathbb{1}}$ （参见约定3.10）。我们还会填补这类边界分支上的穿孔，以强调它们被遮蔽；弦图中的任意一股都可以通过同痕穿过这些穿孔，而不改变所表示的向量。我们也省略图中的外边界条件 w_0，因为在接下来的计算中它将保持固定。

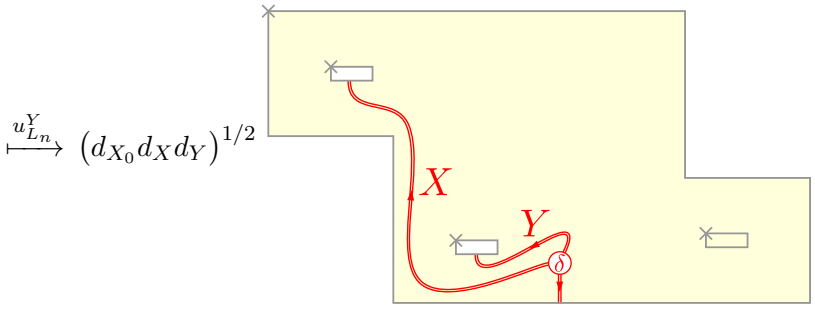
进一步省略同构 σ_{D_n}的记号后，我们计算算子 $(u^X_{Q_n})^*(u^X_{L'_n})^* u^Y_{L_n} u^X_{Q_{n+1}} \mathrm{Dr}_{L_n}[\gamma]$ 对这种形式的向量 ψ 的作用。首先，对锚点分别为L_n 和$_1$ 的 $L_n \subset D_n$ 应用包含引理3.12，可得



对 $Q_{n+1} \subset D_n$ 应用包含引理3.12，分别使用锚点Q_{n+1}和$_1$ ，可得



包含引理3.12的类似应用表明



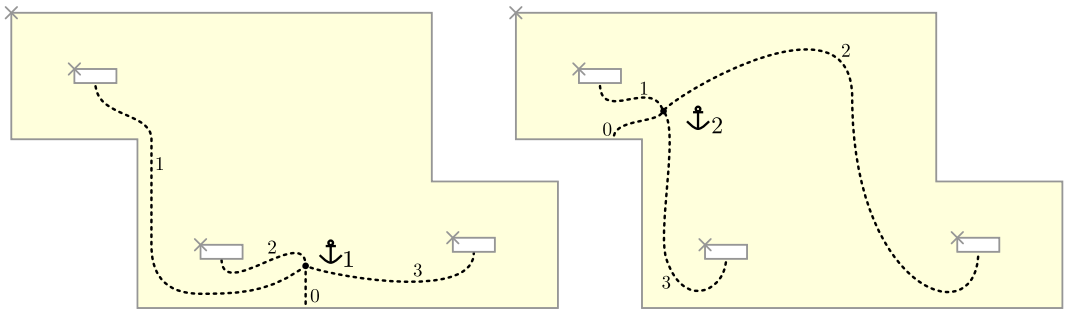
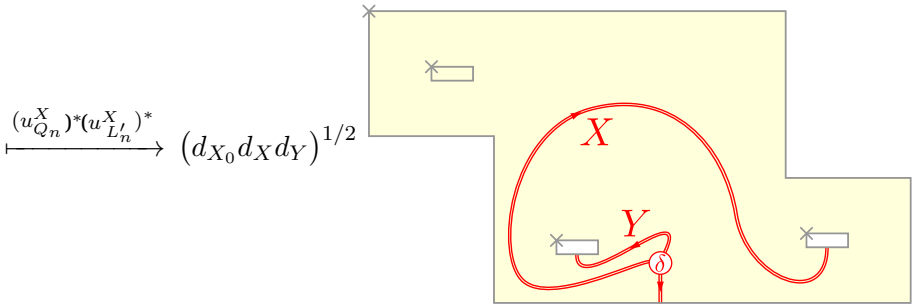
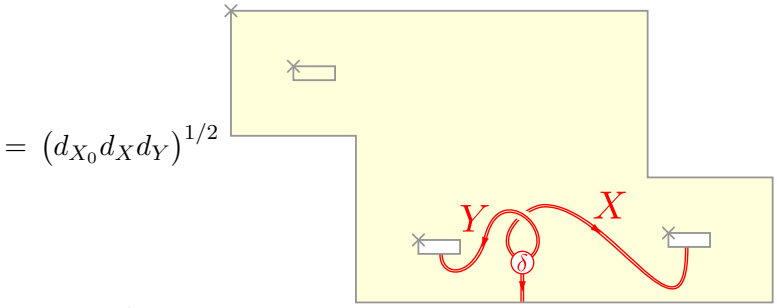


图7：引理6.7证明中使用的锚点。

注意，所得向量属于 $P^{X,\mathbb{1}}_{K'_n}$的值域。因此，我们可以应用引理 6.3以及 $u^X_{L'_n}$ 和u_{Q_n} 的自伴性，得知$(u^X_{Q_n})^*(u^X_{L'_n})^*$ 在此向量上的作用与 $u^X_{K'_n}$的作用相同。为了应用包含引理3.12来理解 $u^X_{K'_n}$的作用，我们考虑图7中所示的锚点2 ，它扩展了K'_n。相应的 $\mathbf{Dr}_{D_n^2}$-作用是根据 $\Psi_{D_n^2}$ 定义的，并且很容易看出给定的态如何在$\Psi_{D_n^2}$下参数化（就方程（51）的意义而言），因此我们得到



最后，利用同痕和方程（5），并回顾约定3.10，我们注意到， X-股线可以穿过 $\partial_{\mathfrak{l}}L_n$处的穿孔，最终位于如下所示的 Y-股线下方：



其中，最后一步再次使用了包含引理3.12。由于 $\psi \in$值域$P(\mathbb{1},\mathbb{1},W)_{D_n}$ $=$值域$P(\mathbb{1},W)_{E_n}$是任意的，这就证明了（50）。

现在我们利用结果（49）和（50）来证明引理中的断言。由注 6.6 可知，算子 $\rho^Y((T^X)^*)$ 是一个序列的极限，而该序列最终在

局部态。因此，利用引理 5.3，我们计算

$$
\begin{aligned}
&\bar{\rho}^{Y}\left(T^{X}\right)^{*} T^{X}\, \Phi_{W}^{XY}[\gamma]\,|\Psi\rangle \\
&= (U_{\mathcal{C}_n}^{Y})^{*}(U_{\mathcal{C}_{n-1}}^{X})^{*}(u_{Q_n}^{X})^{*} U_{\mathcal{C}'_{n-1}}^{X} U_{\mathcal{C}_n}^{Y} \times (U_{\mathcal{C}'_n}^{X})^{*} u_{Q_{n+1}}^{X} U_{\mathcal{C}_n}^{X} \times (U_{\mathcal{C}_n}^{X})^{*}(U_{\mathcal{C}_{n-1}}^{Y})^{*} \mathrm{Dr}_{L_n}\left[\gamma\right] U_{\mathcal{C}_{n-1}}^{W}\,|\Psi\rangle \\
&= (U_{\mathcal{C}_n}^{Y})^{*}(U_{\mathcal{C}_{n-1}}^{X})^{*}(u_{Q_n}^{X})^{*}(u_{L'_n}^{X})^{*} u_{n}^{Y} u_{Q_{n+1}}^{X} \mathrm{Dr}_{L_n}\left[\gamma\right] U_{\mathcal{C}_{n-1}}^{W}\,|\Psi\rangle \\
&= (U_{\mathcal{C}_n}^{Y})^{*}(U_{\mathcal{C}_{n-1}}^{X})^{*} \mathrm{Dr}_{L_n}\left[\beta_{Y,X}^{\dagger} \circ \gamma\right] U_{\mathcal{C}_{n-1}}^{W}\,|\Psi\rangle \\
&= \Phi_{W}^{YX}\left[\beta_{Y,X}^{\dagger} \circ \gamma\right]|\Psi\rangle\,.
\end{aligned}
$$

由于局域态 $|\Psi\rangle$是任意的，故由稠密性即可得出该断言。 □

7 定理 1.1 的证明

证明： 固定第 6.2 节中的基准链 $\mathcal{C}$，并将所有 $X \in$ 不可约对象 $Z(\mathcal{C})$ 记作 $\bar{\rho}^{X} = \bar{\rho}_{\mathcal{C}}^{X}$。

回顾第 2.2 节，在假设 1 下，范畴 SSS$_f$ 是酉辫子张量范畴。定理 4.3 进一步表明，SSS$_f$ 是有限半单范畴，集合 Irr SSS$_f$:=$\{\bar{\rho}^{X}\}_{X\in \mathrm{Irr}\, Z(\mathcal{C})}$是 SSS$_f$的简单对象代表集。映射 $X \mapsto \bar{\rho}^{X}$给出了从 Irr $Z(\mathcal{C})$ 到 Irr SSS$_f$ 的双射。根据引理 5.9 和 5.11，我们有映射$\{\Phi_{XY}^{Z}\}_{X、\,Y、\,Z\in \mathrm{Irr}\, Z(\mathcal{C})}$，它们分别是关于这些简单对象集合的 F和 R-符号的交织算子，其中对象为 $Z(\mathcal{C})$ 和 SSS$_f$。命题 5.10 表明，$\{\Phi_{XY}^{Z}\}$ 保持正交直和分解。由命题 A.1 可知，$Z(\mathcal{C})$ 和 SSS$_f$ 作为酉辫子张量范畴是等价的。□

A F 和 R 符号确定辫子张量结构

我们将详细阐述这一众所周知的陈述。

F 和 R 符号的同构

设 $(\mathcal{C},\ \otimes,\ \alpha,\ \mathbf{1},\ l,\ r)$ 是一个半单幺半范畴，且 $\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$ 是一个包含 $\mathbf{1}$ 的单对象代表元集合。相对于 $\mathrm{Irr}\ \mathcal{C}$，$\mathcal{C}$ 的 F 符号是可逆线性映射

$$F^l_{ijk}:\bigoplus_{n\in\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}}\mathcal{C}(i\otimes n\to l)\otimes\mathcal{C}(i\otimes k\to n)\to\bigoplus_{m\in\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}}\mathcal{C}(m\otimes k\to l)\otimes\mathcal{C}(i\otimes j\to m)$$

由交换图定义，对所有 $i,\ j,\ k,\ l\in\mathrm{Irr}\ \mathcal{C}$ 均成立

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{C}(i\otimes(j\otimes k)\to l) & \xrightarrow{\ \simeq\ } & \bigoplus_{n\in\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}}\mathcal{C}(i\otimes n\to l)\otimes\mathcal{C}(j\otimes k\to n)\\ \Big\downarrow{\scriptstyle -\circ\alpha_{i,j,k}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle F^l_{ijk}}\\ \mathcal{C}((i\otimes j)\otimes k\to l) & \xrightarrow{\ \simeq\ } & \bigoplus_{m\in\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}}\mathcal{C}(m\otimes k\to l)\otimes\mathcal{C}(i\otimes j\to m).\end{array}$$

若 $\mathcal{C}$ 配备了编织 β，则相对于 $\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$，$\mathcal{C}$ 的 R 符号是可逆态射

$$R^k_{ij}:\mathcal{C}(j\otimes i\to k)\xrightarrow{-\circ\beta_{i,j}}\mathcal{C}(i\otimes j\to k),$$

对所有 $i,\ j,\ k\in\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$ 均有定义。

现设 $(\mathcal{C},\ \otimes,\ {}^{\mathcal{C}}\alpha,\ \mathbf{1},\ {}^{\mathcal{C}}l,\ {}^{\mathcal{C}}r)$ 和 $(\mathcal{D},\ \otimes,\ {}^{\mathcal{D}}\alpha,\ \mathbf{1},\ {}^{\mathcal{D}}l,\ {}^{\mathcal{D}}r)$ 是半单幺半范畴，其简单对象的代表集分别为 $\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$ 和 $\mathrm{Irr}\,\mathcal{D}$。此外，设存在一个双射 $f\colon\mathrm{Irr}\ \mathcal{C}\to\mathrm{Irr}\ \mathcal{D}$，使得 $f(\mathbf{1})=\mathbb{1}$，这意味着 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 作为线性范畴等价。若 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 具有相同的融合规则，则称

$$\mathcal{C}(i\otimes j\to k)\simeq\mathcal{D}(f(i)\otimes f(j)\to f(k))$$

对所有 $i,\ j,\ k\in\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$，此时 f 给出了融合规则的一个同构。

设 ${}^{\mathcal{C}}F$ 和 ${}^{\mathcal{D}}F$ 分别是 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 相对于简单对象代表集 $\mathrm{Irr}\ \mathcal{C}$ 和 $\mathrm{Irr}\ \mathcal{D}$ 的 F-符号。为简化记号，记 $i=f(i)$，我们称一组态射

$$\phi^k_{i,j}:\mathcal{C}(i\otimes j\to k)\to\mathcal{D}(\underline{i}\otimes\underline{j}\to\underline{k}),$$

若对所有 $i,\ j,\ k,\ l\in\mathrm{Irr}\ \mathcal{C}$，下图交换，则称其交织 F-符号：

$$\begin{array}{ccc}\bigoplus_n\mathcal{C}(i\otimes n\to l)\otimes\mathcal{C}(j\otimes k\to n) & \xrightarrow{\ {}^{\mathcal{C}}F^l_{ijk}\ } & \bigoplus_m\mathcal{C}(m\otimes k\to l)\otimes\mathcal{C}(i\otimes j\to m)\\ \Big\downarrow{\scriptstyle \bigoplus_n\phi^l_{i,n}\otimes\phi^n_{j,k}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \bigoplus_m\phi^l_{m,k}\otimes\phi^m_{i,j}}\\ \bigoplus_n\mathcal{D}(\underline{i}\otimes\underline{n}\to\underline{l})\otimes\mathcal{D}(\underline{j}\otimes\underline{k}\to\underline{n}) & \xrightarrow{\ {}^{\mathcal{D}}F^{\underline{l}}_{\underline{i}\underline{j}\underline{k}}\ } & \bigoplus_m\mathcal{D}(\underline{m}\otimes\underline{k}\to\underline{l})\otimes\mathcal{D}(\underline{i}\otimes\underline{j}\to\underline{m})\end{array}\tag{52}$$

如果每个 $\phi^k_{i,j}$ 还都是可逆的，那么我们就说 $\{\phi^k_{i,j}\}$ 给出了 F-符号的同构，这尤其意味着 f 给出了融合规则的同构。

若 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 亦为辫的，且分别关于不可约对象 $\mathcal{C}$ 与不可约对象 $\mathcal{D}$ 具有 R-符号 ${}^{\mathcal{C}}R$ 与 ${}^{\mathcal{D}}R$，则称映射 $\{\phi^k_{i,j}\}_{i,j,k\in\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}}$ 交织 R-符号，如果下列

图对所有 $i,j,k\in$ 不可约对象 $\mathcal{C}$都交换:

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{C}(j\otimes i\to k) & \xrightarrow{{}^{\mathcal{C}}R^{k}_{ij}} & \mathcal{C}(i\otimes j\to k)\\ \phi^{k}_{j,i}\big\downarrow & & \big\downarrow\phi^{k}_{i,j}\\ \mathcal{D}(\underline{j}\otimes\underline{i}\to\underline{k}) & \xrightarrow{{}^{\mathcal{D}}R^{\underline{k}}_{\underline{i}\,\underline{j}}} & \mathcal{D}(\underline{i}\otimes\underline{j}\to\underline{k})\end{array}\tag{53}$$

如果每个$\phi^{k}_{i,j}$ 此外还是可逆的，则我们称 $\{\phi^{k}_{i,j}\}$给出了 R-符号的一个同构。

我们称 $\mathcal{C}$与 $\mathcal{D}$具有同构的 F-符号，如果存在 F-符号的同构。我们称 $\mathcal{C}$与 $\mathcal{D}$具有同构的 F-符号与 R-符号，如果存在一个与 R-符号相容的 F-符号同构。

本附录致力于证明下述结果，其证明见下文A.4 节。

命题 A.1. 设 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 为半单幺半范畴。若 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 具有同构的F-符号，则它们幺半等价。若 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 此外还是编织的，并且具有同构的 F-符号与 R-符号，则它们编织幺半等价。

设 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 是酉的。我们称$\{\phi^{k}_{i,j}\}_{i,j,k\in\operatorname{Irr}\mathcal{C}}$ 保持正交直和分解，如果对任意i、 $j\in$不可约对象 $\mathcal{C}$，以及 $i\otimes j$分解为简单对象的任意正交直和分解$(\pi_\kappa\colon i\otimes j\to k_\kappa)$，$(\phi^{k_\kappa}_{i,j}(\pi_\kappa)\colon i\otimes j\to k_\kappa)$ _ 都是 $i\otimes j$的正交直和分解。若情况如此，且$\{\phi^{k}_{i,j}\}_{i,j,k\in\operatorname{Irr}\mathcal{C}}$是 F-符号的同构，则存在酉幺半等价 $\mathcal{C}\simeq\mathcal{D}$。若 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 此外还是酉编织的，并且 $\{\phi^{k}_{ij}\}$也与 R-符号相容，则存在编织酉幺半等价 $\mathcal{C}\simeq\mathcal{D}$。

请注意，如果 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是配备典范球面迹的酉融合范畴，那么它们的态射空间就是配备迹内积的希尔伯特空间。因此，等价的酉性可以由 $\phi^{k}_{i,j}$ 的酉性来确定。

A.2 半单范畴的函子及其自然变换

回顾一下，半单范畴 $\mathcal{C}$ 具有直和分解。也就是说，若 $\operatorname{Irr}\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$的简单对象代表集，那么每个对象 $a\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ 都存在有限组态射$\pi_\kappa\colon a\to i_\kappa$和 $\iota_\kappa\colon i_\kappa\to a$，其中 $\kappa=1,\cdots,n$，它们与简单对象 $i_\kappa\in\operatorname{Irr}\mathcal{C}$之间相互映射，使得

$$\pi_\lambda\circ\iota_\kappa=\delta_{\lambda,\kappa}\,\mathrm{id}_{i_\kappa}\qquad\text{and}\qquad\sum_\kappa\iota_\kappa\circ\pi_\kappa=\mathrm{id}_a.$$

如果 $\mathcal{C}$ 是酉的，那么直和分解可以取为正交的，也就是说，对于所有 κ，都有 $\iota_\kappa=\pi_\kappa^\dagger$。映射集 $(\pi_\kappa,\iota_\kappa)_\kappa$ 称为 a的（正交）直和分解。半单范畴中的任意对象都可分解为简单对象，这一事实意味着，半单范畴的函子及其自然变换由它们在简单对象上的取值决定。这依赖于如下事实：态射由其复合决定，而这一点由米田引理表述。本小节旨在回顾这些事实。

给定一个线性范畴 $\mathcal{C}$ 以及任意对象 $c\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}$，我们得到一个函子 $\mathcal{C}(c\to-)\colon\mathcal{C}\to\mathsf{Vec}$，它将对象 a 映射到向量空间 $\mathcal{C}(c\to a)$，并将态射 $f\colon a\to b$ 映射到线性变换 $\mathcal{C}(c\to a)\to\mathcal{C}(c\to b)$，该变换由与 f 的后复合给出。类似地，我们得到一个函子 $\mathcal{C}(-\to c)\colon\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Vec}$，它将态射映射为与它们的前复合。

这些映射给出了米田嵌入

$$\text{ɣ}^{\mathrm{op}}_{\mathcal{C}}:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Fun}(\mathcal{C}\to\mathsf{Vec}),\quad\text{ɣ}_{\mathcal{C}}:\mathcal{C}\to\mathsf{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Vec})$$

它们分别将 $\mathcal{C}$ 中的态射映射为由前复合和后复合给出的自然变换。根据米田引理（例如参见 [44, 引理 2.9.1]），这些将态射映射为自然变换的映射是可逆的：

引理 A.2（米田引理）。设 $F\colon \mathcal{C}\to \mathsf{Vec}$ 是一个线性函子。对于每个 $c\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$，映射

$$\mathsf{Nat}(\mathcal{C}(c\to -)\implies F)\to F(c):\eta\mapsto \eta_c(\mathrm{id}_c)$$

是一个同构。同样地，如果 $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Vec}$ 是一个线性函子，那么

$$\mathsf{Nat}(\mathcal{C}(-\to c)\implies F)\to F(c):\eta\mapsto \eta_c(\mathrm{id}_c)$$

是一个同构。在这两种情况下，逆映射 $v\in F(c)$ 将自然变换映射为 $\eta_a(f)=F(f)\big(v\big)$。

对 $F=\mathcal{C}(b\to -)$（分别对 $F=\mathcal{C}(-\to b)$）应用米田引理可知，米田嵌入是全忠实的（例如参见 [44, 推论 2.9.3]）。

引理 A.3。设 $\mathcal{C}$ 是半单范畴，其简单对象代表集为 不可约对象$\mathcal{C}$。任意态射$f\colon a\to b$ 完全由其通过前复合在空间 $\mathcal{C}(b\to i)$ 上的作用决定，其中$i\in$ 不可约对象$\mathcal{C}$。

证明：由于米田嵌入是忠实的，f 由其在通过前复合给出的态射空间上的作用决定。由于 $\mathcal{C}$ 是半单的，与 f前复合在任意 $\mathcal{C}(b\to c)$ 上的作用，完全由其在 $\mathcal{C}(b\to i)$ 上的作用决定，其中 $i\in$ 不可约对象$\mathcal{C}$。事实上，设 $(\iota_\kappa,\pi_\kappa)$ 是 c 的一个直和分解。那么对于任意 $g\in\mathcal{C}(b\to c)$，我们有

$$g\circ f=\mathrm{id}_c\circ g\circ f=\sum_\kappa \pi_\kappa\circ(\iota_\kappa\circ g)\circ f.$$

□

引理 A.4. 设 F、G：$\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 为半单范畴 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$之间的线性函子。设 不可约对象 $\mathcal{C}$为 $\mathcal{C}$的简单对象代表集。任意一组态射 $\{\eta_i\colon F(i)\to G(i)\}_{i\in\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}}$ 唯一确定一个自然变换 $\eta\colon F\implies G$，其公式为

$$\eta_a=\sum_\kappa G(\iota_\kappa)\circ\eta_{i_\kappa}\circ F(\pi_\kappa)$$

对将 a 分解为简单对象 $i_\kappa\in$不可约对象$\mathcal{C}$ 的任意直和分解 $(\pi_\kappa,\iota_\kappa)$ 成立。

若诸 $\{\eta_i\}_{i\in\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}}$ 可逆，则 η 为自然同构。若 F 与 G 为伴随函子且诸 $\{\eta_i\}_{i\in\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}}$ 为酉，则 η 为酉自然同构。

证明：首先注意，诸 η_i 彼此满足自然性条件。也就是说，对任意 $f\colon i\to j$，我们有

$$\begin{array}{ccc} F(i) & \xrightarrow{\eta_i} & G(i) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(j) & \xrightarrow{\eta_j} & G(j) \end{array} \tag{54}$$

交换。事实上，若 $i\neq j$，则 $f=0$，且该图交换。若 $i=j$，则对某个 $\lambda\in\mathbb{C}$ 有 $f=\lambda\mathrm{id}_i$，且图中的两个复合均给出 $\lambda\eta_i$。

对于 e 对于每个 $a\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$，固定一个直和分解 $(\pi^a_\kappa,\iota^a_\kappa)_\kappa$，分解为简单对象 $i^a_\kappa\in$不可约对象 $\mathcal{C}$。W e 定义

$$\eta_a:=\sum_\kappa G(\iota^a_\kappa)\circ\eta_{i^a_\kappa}\circ F(\pi^a_\kappa)$$

对于所有 $a \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$。现在我们验证这确实定义了一个自然变换。对于 $f\colon\ a \to b$，我们有

$$\begin{aligned} G(f)\circ\eta_a &= \sum_\kappa G(f)\circ G(\iota_\kappa^a)\circ\eta_{i_\kappa^a}\circ F(\pi_\kappa^a) \\ &= \sum_{\kappa,\lambda} G(\iota_\lambda^b)\circ G(\pi_\lambda^b\circ f\circ\iota_\kappa^a)\circ\eta_{i_\kappa^a}\circ F(\pi_\kappa^a) \\ &= \sum_{\kappa,\lambda} G(\iota_\lambda^b)\circ\eta_{i_\lambda^b}\circ F(\pi_\lambda^b\circ f\circ\iota_\kappa^a)\circ F(\pi_\kappa^a) \\ &= \eta_b\circ F(f) \end{aligned}$$

其中第三步用到了等式 (54)。

还需验证 η_a 与直和分解的选择无关。这可通过类似于验证自然性时所用的计算得出，留给读者完成。

最后，若 $\{\eta_i\}$ 可逆，则 $\sum_\kappa F(\iota_\kappa^a)\circ\eta_{i_\kappa^a}^{-1}\circ G(\pi_\kappa^a)$ 是 η_a 的逆。同样，若 F 和 G 是伴随函子，且 $\{\eta_i\}$ 是酉的，则可利用 a 的正交直和分解 $\iota_\kappa^a = (\pi_\kappa^a)^\dagger$，得出 $\eta_a^\dagger = \sum_\kappa F(\iota_\kappa^a)\circ\eta_{i_\kappa^a}^\dagger\circ G(\pi_\kappa^a)$ 是 η_a 的逆。□

引理 A.5. 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是半单的。给定一个映射 f：不可约对象 $\mathcal{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$，存在一个线性函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，它在典范自然同构意义下唯一，并且在对象上延拓 f。此外，若 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是酉范畴，则 F 可取为 *dagger* 函子。无论哪种情况，若 f: 不可约对象 $\mathcal{C} \to$ 不可约对象 $\mathcal{D}$ 是一个双射，则 F 是一个等价。

证明：对于每个对象 $a \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$，固定一个直和分解 $(\pi_\kappa^a, \iota_\kappa^a)$，将 a 分解为简单对象 $i_\kappa^a \in \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$，并定义

$$F(a) = \bigoplus_\kappa f(i_\kappa^a),$$

其中右侧是 $\mathcal{D}$ 中对象 $f(i_\kappa^a)$ 的任意直和选择，由直和分解 $(\tilde\pi_\kappa^a, \tilde\iota_\kappa^a)$ 给出。由函子性，F 在态射 $f\colon\ a \to b$ 上的取值由下式确定：

$$F(f) = \sum_{\kappa,\lambda} \tilde\iota_\kappa^b\circ F(\pi_\kappa^b\circ f\circ\iota_\lambda^a)\circ\tilde\pi_\lambda^a, \tag{55}$$

这里注意到，$\pi_\kappa^b\circ f\circ\iota_\lambda^a$ 要么为零，要么是恒等态射的倍数。按照这种方式定义态射上的作用后，容易验证 $F(\mathrm{id}_a) = \mathrm{id}_{F(a)}$，并且当 g 和 f 可复合时，$F(g)\circ F(f) = F(g\circ f)$。设 G 是另一个在线性函子，它在对象上的作用扩张了 f。那么由引理 A.4，对于所有 $i \in \mathrm{Irr}\ \mathcal{C}$，恒等映射 $\eta_i := \mathrm{id}_{F(i)}\colon\ F(i) \to G(i)$ 确定了一个典范自然同构 $\eta\colon F \implies G$。

对于酉情形，注意酉半单范畴允许所有正交直和。因此我们可以假设上述构造中的所有直和分解都是正交的。于是，F 是一个 dagger 函子可由注意到 $F(\pi_\kappa^b\circ f\circ\iota_\lambda^a)^\dagger = F(\pi_\lambda^a\circ f^\dagger\circ\iota_\kappa^b)$ 得出，因为该态射的 dagger 由复共轭给出。验证 F 是忠实的，并且若 f: 不可约对象 $\mathcal{C} \to$ 不可约对象 $\mathcal{D}$ 是一个双射，则 F 是本质满且满的，这是一个简单的练习。□

A.3 张量约束的构造

在命题 A.1 的假设下，引理 A.5 给出了线性等价 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，使得对于每个 $i \in$ 不可约对象 $\mathcal{C}$，都有 $F(i) = f(i)$；当 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 为酉态射时，我们可以将其取为酉等价。

根据引理 A.4，给定的 F-符号 $\{\phi_{ij}^k\}_{i,\ j,\ k\in\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}}$ 的同构唯一确定了一个自然变换

$$\phi_{i,j}^{-}:\mathcal{C}(i\otimes j\to -)\implies \mathcal{D}(F(i)\otimes F(j)\to F(-))$$

对于每一对 $i,\ j\in$ 不可约对象$\mathcal{C}$。分量态射由下式给出

$$\phi_{i,j}^{c}(\alpha)=\sum_{\kappa}F(\iota_\kappa)\circ\phi_{i,j}^{i_\kappa}(\pi_\kappa\circ\alpha) \tag{56}$$

对于 c 的任意直和分解 $(\pi_\kappa,\ \iota_\kappa)_\kappa$，其中各项都是 $i_\kappa\in\mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ 中的简单对象。

米田引理给出一个典范同构

$$\begin{aligned}\mathsf{Nat}\left(\mathcal{C}(i\otimes j\to -)\implies \mathcal{D}(F(i)\otimes F(j)\to F(-))\right)&\xrightarrow{\simeq}\mathcal{D}(F(i)\otimes F(j)\to F(i\otimes j))\\ \rho&\mapsto\ \rho_{i\otimes j}(\mathrm{id}_{i\otimes j}).\end{aligned}$$

将此应用于自然变换ϕ_{ij}^{-}，得到态射

$$\tau_{i,j}:=\phi_{i,j}^{i\otimes j}(\mathrm{id}_{i\otimes j}):F(i)\otimes F(j)\to F(i\otimes j). \tag{57}$$

由米田同构（或 $\phi_{i}^{-},\ _j$ 的自然性）可得

$$F(g)\circ\tau_{i,j}=\phi_{i,j}^{k}(g) \tag{58}$$

对于所有 $g\in\mathcal{C}(i\otimes j\to k)$。

根据引理 A.4，映射 $\{\tau_{i,j}\}_{i,j\in\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}}$ 唯一确定一个自然变换 n

$$\tau:F(-)\otimes F(-)\implies F(-\otimes -).$$

我们将证明，这个 τ 可以作为张量约束，使等价 F 具备幺半等价的结构。

引理 A.6. 对于所有$a,b,c\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$，自然变换 τ 满足以下交换图：

$$\begin{array}{ccc}(F(a)\otimes F(b))\otimes F(c) & \xrightarrow{{}^{\mathcal{D}}\alpha_{F(a),F(b),F(c)}} & F(a)\otimes(F(b)\otimes F(c))\\ \downarrow{\scriptstyle \tau_{a,b}\otimes\mathrm{id}_{F(c)}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{F(a)}\otimes\tau_{b,c}}\\ F(a\otimes b)\otimes F(c) & & F(a)\otimes F(b\otimes c)\\ \downarrow{\scriptstyle \tau_{a\otimes b,c}} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{a,b\otimes c}}\\ F((a\otimes b)\otimes c) & \xrightarrow{F({}^{\mathcal{C}}\alpha_{a,b,c})} & F(a\otimes(b\otimes c))\end{array} \tag{59}$$

证明：从左上到右下的两条路径是自然变换的分量 $(F(-)\otimes F(-))\otimes F(-)\implies F(-\otimes(-\otimes -))$；根据引理 A.4，它们完全由其简单分量决定。因此，只需证明对于简单对象，(59) 可交换。这将由以下假设推出：$\{\phi_{i,j}^k\}$ 给出了 F-符号的一个同构。

令 $i,\ j,\ k \in$ 不可约对象 $\mathcal{C}$，并注意到，根据引理 A.3，当且仅当下式中的顶部方块

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D}\big((F(i)\otimes F(j))\otimes F(k)\to F(l)\big) & \xleftarrow{-\circ^{\mathcal{D}}\alpha_{\underline{i},\underline{j},\underline{k}}} & \mathcal{D}\big(F(i)\otimes(F(j)\otimes F(k))\to F(l)\big) \\
\uparrow{\scriptstyle -\circ\tau_{i\otimes j,k}\circ(\tau_{i,j}\otimes\mathrm{id}_{\underline{k}})} & & \uparrow{\scriptstyle -\circ\tau_{i,j\otimes k}\circ(\mathrm{id}_{\underline{i}}\otimes\tau_{j,k})} \\
\mathcal{D}\big(F((i\otimes j)\otimes k)\to F(l)\big) & \xleftarrow{-\circ F(^{\mathcal{C}}\alpha_{i,j,k})} & \mathcal{D}\big(F(i\otimes(j\otimes k))\to F(l)\big) \\
\uparrow{\scriptstyle F} & & \uparrow{\scriptstyle F} \\
\mathcal{C}\big((i\otimes j)\otimes k\to l\big) & \xleftarrow{-\circ^{\mathcal{C}}\alpha_{i,j,k}} & \mathcal{C}\big(i\otimes(j\otimes k)\to l\big)
\end{array} \tag{60}$$

对所有 $l\in\mathrm{Irr}\ \mathcal{C}$ 均成立。底部的方块由 F 的函子性保证交换。设 $l\in\mathrm{Irr}\ \mathcal{C}$，并注意，对于任意 n, $m\in\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$、任意 $\eta\colon i\otimes j\to m$ 和 $\xi\colon m\otimes k\to l$，我们有

$$\begin{aligned}
F(\xi\circ(\eta\otimes\mathrm{id}_k))\circ\tau_{i\otimes j,k}\circ(\tau_{i,j}\otimes\mathrm{id}_k) &= F(\xi)\circ\tau_{m,k}\circ(F(\eta)\otimes\mathrm{id}_{\underline{k}})\circ(\tau_{i,j}\otimes\mathrm{id}_{\underline{k}}) \\
&= \phi^l_{m,k}(\xi)\circ\big(\phi^m_{i,j}(\eta)\otimes\mathrm{id}_{\underline{k}}\big),
\end{aligned}$$

其中第一步用到了 τ 的自然性，最后一步用到了式 (58)。这表明下图交换：

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_m \mathcal{D}\big(F(m)\otimes F(k)\to F(l)\big) & & \\
\quad\otimes\mathcal{D}\big(F(i)\otimes F(j)\to F(m)\big) & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{D}\big((F(i)\otimes F(j))\otimes F(k)\to F(l)\big) \\
\uparrow{\scriptstyle \bigoplus_m \phi^l_{m,k}\otimes\phi^m_{i,j}} & & \uparrow{\scriptstyle -\circ\tau_{i\otimes j,k}\circ(\tau_{i,j}\otimes\mathrm{id}_{\underline{k}})} \\
 & & \mathcal{D}\big(F((i\otimes j)\otimes k)\to F(l)\big) \\
 & & \uparrow{\scriptstyle F} \\
\bigoplus_m \mathcal{C}(m\otimes k\to l)\otimes\mathcal{C}(i\otimes j\to m) & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{C}\big((i\otimes j)\otimes k\to l\big).
\end{array} \tag{61}$$

类似的计算表明下图交换：

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D}\big(F(i)\otimes(F(j)\otimes F(k))\to F(l)\big) & \xleftarrow{\simeq} & \bigoplus_n \mathcal{D}\big(F(i)\otimes F(n)\to F(l)\big) \\
 & & \quad\otimes\mathcal{D}\big(F(j)\otimes F(k)\to F(n)\big) \\
\uparrow{\scriptstyle -\circ\tau_{i,j\otimes k}\circ(\mathrm{id}_{\underline{i}}\otimes\tau_{j,k})} & & \uparrow{\scriptstyle \bigoplus_n \phi^l_{i,n}\otimes\phi^n_{j,k}} \\
\mathcal{D}\big(F(i\otimes(j\otimes k))\to F(l)\big) & & \\
\uparrow{\scriptstyle F} & & \\
\mathcal{C}\big(i\otimes(j\otimes k)\to l\big) & \xleftarrow{\simeq} & \bigoplus_n \mathcal{C}(i\otimes n\to l)\otimes\mathcal{C}(j\otimes k\to n).
\end{array} \tag{62}$$

将图示 (61) 和 (62) 放在图 (60) 的两侧，我们发现后者可交换

当且仅当下图中的外层方块可交换时：

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D}\big((F(i)\otimes F(j))\otimes F(k)\to F(l)\big) & \xleftarrow{-\circ{}^{\mathcal{D}}\alpha_{\underline{i},\underline{j},\underline{k}}} & \mathcal{D}\big(F(i)\otimes(F(j)\otimes F(k))\to F(l)\big) \\
\uparrow\simeq & & \uparrow\simeq \\
\bigoplus_m \mathcal{D}\big(F(m)\otimes F(k)\to F(l)\big) & \xleftarrow{{}^{\mathcal{D}}F^{l}_{\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{k}}} & \bigoplus_n \mathcal{D}\big(F(i)\otimes F(n)\to F(l)\big) \\
\quad\otimes\mathcal{D}\big(F(i)\otimes F(j)\to F(m)\big) & & \quad\otimes\mathcal{D}\big(F(j)\otimes F(k)\to F(n)\big) \\
\uparrow\oplus_m\,\phi^{l}_{m,k}\otimes\phi^{m}_{i,j} & & \uparrow\oplus_n\,\phi^{l}_{i,n}\otimes\phi^{n}_{j,k} \\
\bigoplus_m \mathcal{C}(m\otimes k\to l)\otimes\mathcal{C}(i\otimes j\to m) & \xleftarrow{{}^{\mathcal{C}}F^{l}_{i\,j\,k}} & \bigoplus_n \mathcal{C}(i\otimes n\to l)\otimes\mathcal{C}(j\otimes k\to n) \\
\downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\
\mathcal{C}\big((i\otimes j)\otimes k\to l\big) & \xleftarrow{-\circ{}^{\mathcal{C}}\alpha_{i,j,k}} & \mathcal{C}\big(i\otimes(j\otimes k)\to l\big)
\end{array}$$

但此处，上下两个方块是 F-符号的定义，而中间方块的交换性恰恰就是 $\{\phi^k_{i,j}\}$ 与 F-符号相交织这一假设。□

引理 A.7. 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 都配备了编织 ${}^{\mathcal{C}}\beta$、${}^{\mathcal{D}}\beta$，且映射 $\{\phi^k_{i,j}\}$ 给出了相应 R-符号之间的同构。那么，自然变换 τ 满足下列交换图，其中对所有 a、$b\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$均成立：

$$\begin{array}{ccc}
F(a)\otimes F(b) & \xrightarrow{{}^{\mathcal{D}}\beta_{F(a),F(b)}} & F(b)\otimes F(a) \\
{\scriptstyle\tau_{a,b}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau_{b,a}} \\
F(a\otimes b) & \xrightarrow{F({}^{\mathcal{C}}\beta_{a,b})} & F(b\otimes a)
\end{array}\tag{63}$$

证明： 图 (63) 中从左上到右下的两条路径，是自然变换 $F(-)\otimes F(\bullet)\implies F(\bullet\otimes -)$ 的分量；根据引理 A.4，这些自然变换完全由其简单分量决定。因此，只需证明当 $a=i$, $b=j\in$不可约对象$\mathcal{C}$为简单对象时，(63) 交换。在这种情况下，并利用引理 A.3，(63) 的交换性等价于下列顶部方块的交换性

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D}\big(F(i)\otimes F(j)\to F(k)\big) & \xleftarrow{-\circ{}^{\mathcal{D}}\beta_{F(i),F(j)}} & \mathcal{D}\big(F(j)\otimes F(i)\to F(k)\big) \\
{\scriptstyle -\circ\tau_{i,j}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle -\circ\tau_{j,i}} \\
\mathcal{D}\big(F(i\otimes j)\to F(k)\big) & \xleftarrow{-\circ F\left({}^{\mathcal{C}}\beta_{i,j}\right)} & \mathcal{D}\big(F(j\otimes i)\to F(k)\big) \\
{\scriptstyle F}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle F} \\
\mathcal{C}(i\otimes j\to k) & \xleftarrow{-\circ{}^{\mathcal{C}}\beta_{i,j}} & \mathcal{C}(j\otimes i\to k)
\end{array}\tag{64}$$

对所有 $i,j,k\in$不可约对象 $\mathcal{C}$ 都成立。底部方块因 F 的函子性而交换。

由式 (58) 可知，此图中的纵向复合恰好是映射$\phi^k_{i,j}$ 和 $\phi^k_{j,i}$。进一步回想， R-符号由与编织作前复合来定义，因此图 (64) 交换，恰好说明 $\{\phi^k_{i,j}\}$ 与 R-符号相互交织。□

它仍 有待证明 τ 是一个自然同构；在酉情形下，还需证明 τ 是酉的 y.

引理 A.8. 自然变换 τ 是自然同构。

证明： 我们必须检查所有分量 $\tau_{a,\ b}$ 是否可逆。根据引理 A.4，只需验证简单分量 $\{\tau_{i,j}\}_{i,\ j\in \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}}$ 是否可逆。

根据假设，映射 $\phi^k_{i,\ j}$ 可逆。函子 F 是一个等价，尤其是在 Hom 空间上作用可逆。结合式 (58)，我们得出，对于任意 $k\in$ 不可约对象 $\mathcal{C}$，前复合 $\tau_{i,\ j}$ 在 $\mathcal{D}(F(i\otimes j)\ \to F(k))$ 上作用可逆。由引理 A.4 可知，前复合 $\tau_{i,\ j}$ 是一个可逆的自然变换。这个自然变换恰好是米田嵌入 $よ^{\mathrm{op}}_{\mathcal{D}}(\tau_{i,\ j})$。由于米田嵌入是全忠实的，因此 $\tau_{i,\ j}$ 可逆。□

引理 A.9。 若 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是酉幺半范畴，且同构 $\{\phi^k_{i,j}\}_{i,\ j,\ k\in \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}}$保持直和分解，则 τ 是酉自然同构。

证明： 我们必须验证所有分量 $\tau_{a,\ b}$ 都是酉的。由引理 A.4，只需对简单分量 $\{\tau_{i,j}\}_{i,\ j\in \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}}$验证即可。将 $\tau_{i,\ j}$ 表示为式 (57) 的形式，其中将公式 (56) 特化到 $i\otimes j$的一个正交直和分解 (π_κ)，可得

$$\tau_{i,j}\circ\tau_{i,j}^\dagger=\sum_{\kappa,\lambda}F(\pi_\kappa^\dagger)\circ\phi_{i,j}^{i_\kappa}(\pi_\kappa)\circ\phi_{i,j}^{i_\lambda}(\pi_\lambda)^\dagger\circ F(\pi_\lambda)=\sum_{\kappa}F(\pi_\kappa^\dagger)\circ F(\pi_\kappa)=\mathrm{id}_{i\otimes j},$$

and

$$\tau_{i,j}^\dagger\circ\tau_{i,j}=\sum_{\kappa,\lambda}\phi_{i,j}^{i_\lambda}(\pi_\lambda)^\dagger\circ F(\pi_\lambda)\circ F(\pi_\kappa^\dagger)\circ\phi_{i,j}^{i_\kappa}(\pi_\kappa)=\sum_{\kappa}\phi_{i,j}^{i_\kappa}(\pi_\kappa)^\dagger\circ\phi_{i,j}^{i_\kappa}(\pi_\kappa)=\mathrm{id}_{i\otimes j},$$

利用 $(\phi^k_{i,\ j}(\pi_\kappa)$ 是 $i\otimes j$ 的正交直和分解。 □

A.4 命题 A.1 的证明

证明： 由引理 A.6、A.7、A.8 和 A.9 可知，在所有情形下，τ 都是函子 F 的适当张量约束。存在一个相容的单位元同构 $\upsilon:\ \mathbb{1}\ \to F(\mathbf{1})$，且由命题 2.4.3]唯一确定。□

参考文献

[1] Pieter Naaijkens. 平面上Kitaev环面码中的局域化端同态. 《数学物理评论》, 23(04):347–373, 2011年. arXiv:1012.3857.[2] Yoshiko Ogata. 由满足近似Haag对偶性的有能隙基态导出辫状C*-张量范畴. 《数学物理杂志》, 63(1):011902, 2022年. arXiv:2106.15741.[3] Anupama Bhardwaj、Tristen Brisky、Chian Yeong Chuah、Kyle Kawagoe、Joseph Keslin、David Penneys和Daniel Wallick. 冯·诺依曼代数偏序集的超选择扇区. 《数学物理通讯》, 406(8):185, 2025年. doi:10.1007/ s00220-025-05315-4. [4] Corey Jones. 准局域代数的DHR双模与对称量子元胞自动机. 《量子拓扑》, 15(3):633–686, 2024年. arXiv:2304.00068.[5] Kyle Kawagoe、Siddharth Vadnerkar和Daniel Wallick. 对称性缺陷与分数化的算子代数方法. *arXiv*预印本, 2024年. arXiv:2410.23380.[6] Jos´e Garre Rubio和Yoshiko Ogata. SET相中的任意子对称性分数化.*arXiv*预印本, 2024年. arXiv:arXiv:2411.01210.

[7] Alex Bols和Kjær. Levin-Wen模型的扇区理论I：任意子扇区分类.*arXiv*预印本, 2025年. arXiv:2511.21521.[8] Leander Fiedler和Pieter Naaijkens. 阿贝尔群的Kitaev量子双模型的Haag对偶性. 《数学物理评论》, 27:1550021, 2015年. arXiv:1406.1084.[9] Sergio Doplicher、Rudolf Haag和John E. Roberts. 场、可观测量与规范变换. II. 《数学物理通讯》, 15:173–200, 1969 年 . URL: http://projecteuclid. org/euclid.cmp/1103841943.[10] Sergio Doplicher、Rudolf Haag和John E Roberts. 局域可观测量与粒子统计I. 《数学物理通讯》, 23:199–230, 1971年.[11] Detlev Buchholz和Klaus Fredenhagen. 局域性与粒子态的结构. 《数学物理通讯》, 84(1):1–54, 1982年.[12] J¨urg Fr¨ohlich、Fabrizio Gabbiani和Pieralberto Marchetti. 三维局域量子理论中的辫统计. 《物理、几何与拓扑》, 第15–79页, 1990年.[13] Bruno Nachtergaele、Robert Sims和Amanda Young. 量子格点系统的准局域性界. I. Lieb-Robinson界、准局域映射与谱流自同构. 《数学物理杂志》, 60(6):061101, 2019年. arXiv:1810.02428.[14] Alex Bols和Siddharth Vadnerkar. Kitaev量子双模型的任意子扇区的分类. 《数学物理通讯》, 406(8):188, 2025年. arXiv:2310. 19661.[15] Alex Bols、Mahdie Hamdan、Pieter Naaijkens和Siddharth Vadnerkar. 非阿贝尔量子双模型的任意子扇区范畴：A. bols, m. hamdan, p. naaijkens, s. vadnerkar. 《数学物理通讯》, 407(1):2, 2026年. arXiv:2503.15611.[16] Alexei Yu. Kitaev. 借助任意子实现的容错量子计算. 物理学年鉴 , 303(1):2–30, 2003 年 . arXiv:quant-ph/9707021.[17] Pieter Naaijkens. 从局域量子物理的视角看Kitaev量子双模型. 载于《代数量子场论进展》, 第365–395页. Springer, 2015年. arXiv:1508.07170.[18] Quan Chen、Roberto Hern´andez Palomares、Corey Jones和David Penneys. C^* 2-范畴的Q-系统完备化. 《泛函分析杂志》, 283(3):109524, 2022年. arXiv:2105.12010.[19] Nikita Sopenko. 由顶点算子代数在格点上得到的手征拓扑序态. *arXiv*预印本, 2023年. arXiv:2301.08697.[20]Liang Kong. Levin-Wen模型的若干泛性质. 第十七届国际数学物理大会, 第444–455页, 2014年. arXiv:1211.4644.[21] Jessica Christian、David Green、Peter Huston和David Penneys. Levin-Wen系统中凝聚的格点模型. 《高能物理学杂志》, 2023(9):1–56, 2023年. arXiv:2303.04711.[22]David Green、Peter Huston、Kyle Kawagoe、David Penneys、Anup Poudel和Sean Sanford. 富化弦网模型及其激发. 《量子》, 8:1301, 2024年. arXiv:2305.14068.

[23] Yanbai Zhang。从 Temperley-Lieb范畴到环面码。本科荣誉学位论文，可从 *https://tqft.net/web/research/students/YanbaiZhang/thesis.pdf* 获取，2017年。[24] Corey Jones、Pieter Naaijkens、David Penneys 和 Daniel Wallick。局域拓扑序与边界代数。arXiv 预印本，2023年。arXiv:2307.12552。[25] Yoshiko Ogata、David P´erez-Garc´ıa 和 Alberto Ruiz-de Alarc´on。二维量子自旋系统的 Haag 对偶性。arXiv 预印本，2025年。arXiv:2509.23734。[26] Alex Bols、Boris Kjær 和 Alvin Moon。无穷体积中的双半子态。Annales Henri Poincar´e，2024年。arXiv:2306.13762。[27] Richard V Kadison 和 John R Ringrose。算子代数理论基础。第二卷：高级理论。1986年原版的修订重印本。数学研究生教材，第16卷，1997年。[28] Pavel Etingof、Shlomo Gelaki、Dmitri Nikshych 和 Victor Ostrik。张量范畴，第205卷。美国数学会，2015年。[29] Vladimir Turaev 和 Alexis Virelizier。幺半范畴与拓扑场论，第322卷。Springer，2017年。[30] David Penneys。酉融合范畴讲义。课程《物质的拓扑相》的一部分。可从 *https://people.math.osu.edu/penneys.2/8800/Notes/FusionCats.pdf* 获取，2021年。[31] David Penneys。酉多张量范畴的酉对偶函子。高阶结构，4:22–56，2020年。arXiv:1808.00323。[32] Michael M¨uger。从子因子到范畴与拓扑 II：张量范畴与子因子的量子偶。纯粹与应用代数杂志，180(1):159–219，2003年。arXiv:math/0111205。[33] Andr´e Henriques、David Penneys 和 James Tener。辫子张量范畴上模张量范畴的范畴化迹。Documenta Mathematica，21:1089–1149，2016年。arXiv:1509. 02937。[34] Robert Koenig、Greg Kuperberg 和 Ben W Reichardt。使用 Turaev–Viro码进行量子计算。物理学年鉴，325(12):2707–2749，2010年。arXiv:1002.2816。[35] Alexander Kirillov Jr。Turaev–Viro不变量的弦网模型。arXiv 预印本，2011年。arXiv:1106.6033。[36] Kevin Walker。通用态和。arXiv 预印本，2021年。arXiv:2104.02101。[37]Kevin Walker。拓扑量子场论。可从 https://canyon23.net/math/tc.pdf 获取，2006年。[38]Alexander Kirillov, Jr 和 Benjamin Balsam。作为扩张TQFT的 Turaev–Viro不变量。arXiv 预印本，2010年。arXiv:1004.1533。[39] Bojko Bakalov 和 Alexander Kirillov, Jr。张量范畴与模函子讲义。美国数学会大学讲义丛书，第21卷，2001年1月。[40] Masaki Izumi。与 Longo-Rehren 包含相关的扇区结构。一般理论。《数学物理通讯》，213(1):127–179，2000年。

[41] Masaki Izumi。与 Longo-Rehren 包含相关的扇区结构 II：示例。《数学物理评论》，13(05):603–674，2001年。[42] Vladimir G Turaev 和 Oleg Ya Viro。三维流形的态求和不变量与量子 6j 符号。《拓扑学》，31(4):865–902，1992年。[43] John Barrett 和 Bruce Westbury。分片线性三维流形的不变量。《美国数学会会刊》，348(10):3997–4022，1996年。arXiv:hep-th/9311155。[44]David Penneys。半单范畴讲义。《高阶线性代数》课程的一部分。可从 *https://people.math.osu.edu/penneys.2/UQSL/ArchivedNotes/HLA/Cat.pdf* 获取，2023年。