arXiv:2603.01939v1 [math.AP] 2 Mar 2026

满足弱零条件的张量拟线性波动方程系统的色散估计

Sari Ghanem

摘要

我们证明了三维空间中一类一般耦合张量拟线性双曲波动方程系统的小数据解的整体存在性和衰减性质。该系统涵盖动力学爱因斯坦方程与一类满足 Christodoulou 和 Klainerman 零条件的非线性物质源项的耦合，其 *not* 满足零条件，并且比 Lindblad-Rodnianski 研究的情形具有 *new different non-linearities* ，对于后者，他们著名的开创性 L^∞估计 *not* 有效；据我们所知。对于满足 *weak-null condition, with small initial data*的 *general* 拟线性波动方程，解的整体存在性在当前仍大体上 *open problem* 。目前尚无已知理论能够证明本文所研究的这类非线性双曲偏微分方程的衰减。我们提出一种基于高阶能量估计的新颖 *decoupling* 的技术，在 *Lie derivatives* 的 *tangential components*的 L^2-范数层面进行估计，而不涉及其他所有分量，并允许出现某种良性因子。这将我们先前的结果推广到包含新的非线性项；这些非线性项并不存在于洛伦兹规范下的爱因斯坦-杨–米尔斯系统中。

1 引言

我们研究三维空间中一类一般的张量型拟线性双曲波动方程，其形式为

$$\begin{cases} \text{For all} \quad l \in \{1,2,\dots,N \in \mathbb{N}\}\,,\ k_l \in \mathbb{N}\,, \\ g^{\alpha\beta}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\alpha\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\beta\Phi^{(l)}_{V_1V_2\dots V_{k_l}} = S^{(l)}_{V_1V_2\dots V_{k_l}}(\mathbf{g}\,,\nabla^{(\mathbf{m})}\mathbf{g}\,,\Phi^{(1)}\,,\dots,\Phi^{(N)}\,,\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(1)}\,,\dots,\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(N)})\,, \\ g^{\alpha\beta}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\alpha\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\beta g_{UV} = S^{(0)}_{UV}(\mathbf{g}\,,\nabla^{(\mathbf{m})}\mathbf{g}\,,\Phi^{(1)}\,,\dots,\Phi^{(N)}\,,\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(1)}\,,\dots,\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(N)})\,. \end{cases} \tag{1.1}$$

我们将在 (1.19)–(1.20) 中更精确地说明动力系统 (1.1) 及其非线性项， $S^{(l)}$ 和 $S^{(0)}$。这里，度量 $\mathbf{g}$ 是动力时空流形$\mathcal{M}$, `上的一个动力学未知洛伦兹度规，该流形先验未知； $\Phi^{(l)}$ 则是任意阶张量物质场，在演化问题中与度规和时空耦合。我们约定，场 $\Phi^{(l)}$ 是任意阶的 k_l-张量。向量 $U,V,V_1,V_2\dots V_{k_l}$ 属于未知流形 $\mathcal{M}$ 的切丛。度量m 及其协变导数 $\nabla^{(\mathbf{m})}$ 定义如下。

定义 1.0.1。 设 (x^0,x^1,x^2,x^3) 为一个固定坐标系，我们有时也将其记作$x^0=t$。我们定义 m 为该固定坐标系中的闵可夫斯基度规 $(-1,+1,+1,+1)$。继而定义 $\nabla^{(\mathbf{m})}$ 为与度量 m相联系的协变导数。

换言之，在我们的固定坐标系 $\{x^0,x^1,x^2,x^3\}$ 中，我们有

$$m_{00} \;=\; -1\,, \qquad m_{ii}=1 \quad for \quad i=1\,,2\,,3\,, \quad and \quad m_{\mu\nu}=0 \quad for \quad \mu\neq\nu\,. \tag{1.2}$$

and

$$\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}=0\,. \tag{1.3}$$

定义 1.0.2. 在我们的固定坐标系 (t,x^1,x^2,x^3) 中，我们定义

$$\Phi^{(0)}_{\mu\nu} := g_{\mu\nu}-m_{\mu\nu}\,.$$

因此，我们将度量扰动记为 $\Phi^{(0)}$，于是， $k_0 = 2$ 因为度量是一个二阶张量。因此，我们可以将扰动度量纳入场 $\Phi^{(l)}$，并用 $\Phi^{(l)}$, $l \in \{0, 1, \ldots, N\}$ 重新表述整个系统。

为使表述清晰，我们先以示意形式写出本文要处理的非线性项的结构。为凸显新意，我们首先写出一个仅包含新的困难项的系统，并尽可能减少符号，将其他项保留在"..."之下；我们将在后文的 (1.19)-(1.20) 中说明所讨论问题的完整结构。我们考虑一个示意形式如下的系统:

$$g^{\alpha\beta}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\alpha}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\beta}\Phi^{(l)}_{\mathcal{U}\ldots\mathcal{U}} = \overbrace{\underbrace{\sum_{l_i, l_j \in \{0,\ldots,N\}} \Phi^{(l_i)} \cdot \Phi^{(l_j)}}_{\text{new terms not present for Einstein-Yang-Mills}} + \sum_{l_i, l_j \in \{0,\ldots,N\}} \Phi^{(l_i)} \cdot \nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l_j)}}^{\text{new "bad" troublesome terms}} + \ldots , \tag{1.4}$$

对所有 $l \in \{0, \ldots, N\}$ 均成立。这里， $g^{\alpha\beta}$ 是 $\Phi^{(0)}$ 的函数，因为 $g_{\alpha\beta} = \Phi^{(0)}_{\alpha\beta} + m_{\alpha\beta}$。

注 1.0.3. 我们实际考虑的度量上的波动方程，并非 $\Phi^{(0)}_{\mu\nu}$ 上的波动方程，而是 $\Phi^{(0)}_{\mu\nu} - h^0_{\mu\nu}$ 上的波动方程，其中 $h^0_{\mu\nu}$ 是球对称史瓦西部分，在第 *1.3* 小节中定义，并且具有无穷能量。不过，我们仍写出了 $\Phi^{(0)}_{\mu\nu}$ 上的波动方程，因为这并非本段讨论此时的重点；我们目前要展示的是本文所处理的新非线性项。

然而，我们知道，若没有关于此类非线性项具体如何进入的额外结构，这样的系统 **(1.4)** 不可能具有全局适定性和衰减性质，因为存在大量反例。为了展示我们希望研究的非线性项结构，我们首先利用固定坐标系 (t, x^1, x^2, x^3) 构造如下标架。

定义 1.0.4. 在时空中的一点 p 处，令

$$L = \partial_t + \partial_r = \partial_t + \frac{x^i}{r}\partial_i , \tag{1.5}$$

$$\underline{L} = \partial_t - \partial_r = \partial_t - \frac{x^i}{r}\partial_i , \tag{1.6}$$

并设 $\{e_1, e_2\}$ 是 $\mathbb{S}^2$上的一个正交归一标架。我们定义集合

$$\mathcal{T} = \{L, e_1, e_2\} , \tag{1.7}$$

$$\mathcal{U} = \{\underline{L}, L, e_1, e_2\} . \tag{1.8}$$

我们称整个集合 $\mathcal{U}$ 为零标架。我们称集合 $\mathcal{T}$ 为切向标架。

定义 1.0.5. 我们定义集合 $\mathcal{S}^l_i$、 $l \in \{0, 1, \ldots, N\}$、 $i \in \{1, \ldots, k_l\}$，其中 k_l 是张量 $\Phi^{(l)}$的阶数，这些集合或者是 $\mathcal{T}$，或者是 $\mathcal{U}$，即

$$\mathcal{S}^l_i := \begin{cases} \mathcal{T} & or \\ \mathcal{U} . \end{cases}$$

定义 1.0.6. 我们将 $\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})}$ 定义为沿任意向量 $V \in \mathcal{T}$ 的导数，即

$$\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})} := \nabla^{(\mathbf{m})}{}_V , \quad with\ V \in \mathcal{T} . \tag{1.9}$$

现在，我们考察一个动力耦合系统，使得对所有 $l \in \{0, 1, \ldots, N\}$，

$$g^{\alpha\beta}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\alpha}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\beta}\Phi^{(l)}_{\mathcal{U}\ldots\mathcal{U}} = \overbrace{\underbrace{\sum_{l_i,l_j\in\{0,\ldots,N\}} \Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}} \cdot \Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}}_{\text{爱因斯坦-杨-米尔斯理论中不存在的新项}} + \sum_{l_i,l_j\in\{0,\ldots,N\}} \Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}} \cdot \nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}}^{\text{新的“坏”麻烦项}} + \ldots, \tag{1.10}$$

and

$$g^{\alpha\beta}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\alpha}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\beta}\Phi^{(l)}_{\mathcal{S}_1^{l}\ldots\mathcal{S}_{k_l}^{l}} = \sum_{l_i,l_j\in\{0,\ldots,N\}} \nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{U}\ldots\mathcal{U}} \cdot \nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{U}\ldots\mathcal{U}} + \ldots. \tag{1.11}$$

注 1.0.7. 这里，“.....”表示我们可以加入更多非线性项，以便使我们的系统与一类涵盖爱因斯坦真空、爱因斯坦-杨-米尔斯方程及更多非线性项的一般偏微分方程相匹配。不过，在这个阶段，我们简化了系统，以便尽早展示本文所处理的非线性项的新颖之处；据我们所知，先前的方法无法很好地处理这些非线性项。

我们注意到，在 $\Phi^{(l)}_{L\ldots L}$ 上的式 (1.10) 中那个棘手的波动方程里，存在一些新的“坏”项，一方面是 $\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}} \cdot \Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}$，另一方面是 $\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}} \cdot \nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}$。

据我们所知，在 Lindblad-Rodnianski 的开创性工作中 [51], 他们的 L^∞-估计无法处理这些 新项，其类型为 Φ^2 和 $\Phi \cdot \partial\Phi$，与类型为 $(\partial\Phi)^2$ 的项不同，后者已在 [51]中得到处理。本文的目标是证明定理 1.1。

1.1 本研究的新颖性性及与以往研究的比较 es

1.1.1 新颖性

本文研究的方程系统，即 (1.19)-(1.20)，不满足 Christodoulou（[13]）和 Klainerman（[44]）的零条件，其非线性项也有所不同，与 Lindblad 和 Rodnianski（[51]）研究的非线性项不同，因此带来了自身的挑战和诸多复杂问题。它涵盖的范围也比洛伦兹规范下的爱因斯坦-杨-米尔斯方程更广泛， [28]。我们的目标是推进对非线性双曲偏微分方程结构的研究。

话虽如此，我们还是要指出，在 Lindblad-Rodnianski 的开创性工作 [51], 中，他们基于方程的零标架分解证明了闵可夫斯基时空在波坐标下的非线性稳定性，并由此揭示了弱零结构。他们这项广为称颂的工作开创了先河，并证明了一个此前未被认为能在调和规范下成立的结果。

然而，Lindblad-Rodnianski 的原始方法 [51], 基于一个 L^∞-估计，据我们所知，该估计对本文所处理的耦合系统并不适用。因此，为了能够纳入这些新的非线性项，例如我们在 (1.10) 中指出的那些，有必要提供一种新的替代方法，以取代 Lindblad-Rodnianski 的 L^∞-估计。Lindblad-Rodnianski 在 [50]-[51], 中以及 Lindblad-Tohaneanu 在[53], 中尝试这种新方法时遇到了困难，他们试图将张量解各分量的能量估计分离开来，而这一问题在那里并未得到解决。

在我们的新方法中，我们通过建立所需的张量各分量的高阶能量范数的能量估计的分离解决了该问题，这使我们能够取代 Lindblad-Rodnianski 的 L^∞-估计， [51], 并以一种允许我们纳入这些新的非线性项的方式进行，例如 (1.10) 中的那些；据我们所知，他们的 L^∞-估计对这些非线性项并不适用。

我们克服了关于解耦 高阶能量 估计中切向分量的困难，方法是证明标架中的每个分量 上张量 场解的适当界，这些解属于动态 耦合的非线性波动方程系统 (1.10)。这部分是通过建立一个新 估计来实现的，该估计针对场的李导数的交换子项，并且对切向

分量是解耦的，直至某个良好因子，(2.11)。这也通过将该系统改写为协变 的张量双曲波动方程系统来实现，尽管我们固定了坐标系，但该方法是完全协变的。这使我们能够在标架中的每个分量 上，对动态耦合非线性波动方程系统的张量场解建立适当的界；再结合我们新颖的解耦交换子估计 （针对切向分量），便可以在标架分解中对张量解的每个分量解耦高阶能量估计，(4.0.2)。据我们所知，这取代了 Lindblad-Rodnianski 的 L^∞-估计，后者对 (1.10) 中出现的非线性项并不适用，从而使我们能够纳入这些新非线性结构。

更准确地说，我们证明了定理 1.1，确立了一般一类动态耦合拟线性波动方程在外部区域的衰减。这类方程包含形如 Φ^2 和$\Phi\cdot\partial\Phi$ 的新型非线性项；据我们所知，文献中已有的方法无法处理这些非线性项。为克服处理这些非线性项 Φ^2 和 $\Phi\cdot\partial\Phi$时遇到的困难，我们部分地解耦切向分量的高阶能量估计，并针对动态耦合非线性波动方程系统(5.2)-(5.3)的张量场解在标架分解中的各个分量证明了适当的界。这些关于高阶能量 L^2-范数的能量估计专门用于处理形如 Φ^2 和 $\Phi\cdot\partial\Phi$的新型非线性项。这些非线性项由于缺乏导数，带来了独特的挑战和困难。不过，我们利用了这样一个事实： Φ^2 和 $\Phi\cdot\partial\Phi$ 中涉及的分量都是“良”分量，并满足具有良好非线性结构的良波动方程。因此，我们的解耦能量估计使我们能够利用这些分量所满足的良好非线性结构来控制这些新型非线性项。

1.1.2 相关工作

众所周知，对于一大类满足弱零条件且具有小初值的拟线性波动方程，整体存在性与衰减仍是一个开放问题，例如参见 Keir 的工作 [41]-[42] 以及 Luk-Oh-Yu 的工作 [56], ，其中对此进行了重要讨论。此外，本文研究的 Φ^2 和 $\Phi\cdot\partial\Phi$这类非线性项，由于缺少导数，已知是“坏”项，例如参见 Kadar 的工作 [40]。

弱零条件源于 H¨ormander 研究非线性波动方程渐近系统的计划，参见 [34]-[35]-[36] ，另见 [48]。随后，Lindblad-Rodnianski 在开创性工作 [49]中首次明确识别了这一条件。他们证明，采用波坐标的 Einstein 真空方程满足弱零条件的某个特定子类，其中非线性项以 $(\partial\Phi)^2$ 的形式出现。此后，在他们的开创性工作 [50]-[51], 中，他们证明了调和规范下 Einstein真空方程在渐近平坦小初值下解的整体存在性与衰减，而此前人们认为该系统是不稳定的。

事实上，众所周知，波动方程的非线性项可能导致有限时间爆破，例如参见 John 在 [38]-[39] 中的结果。在 [13] 和 [44], 中，Christodoulou 和 Klainerman 独立发现了一种强条件，即零条件，它能确保小初值对应的解整体存在。然而，尽管这一条件是充分条件，却远非必要条件，例如参见 Lindblad 在 [46]-[47] 中颇具影响力的研究，以及 Alinhac 在 [1] 中的工作。随后，人们发现弱零条件 [49], 是一类违反零条件的非线性项的例子，但这类非线性项或许仍能使小初值对应的解整体存在，尚待研究。要找出拟线性波动方程的非线性结构满足何种充要条件才能确保小初值对应的解整体存在，仍是一个悬而未决的问题。迄今为止，即使在满足弱零条件的结构这一类中，这个问题也仍未解决。在本文中，我们确定了一类满足弱零条件的一般拟线性张量波动方程；对于小的渐近平坦初值，该方程能确保解整体存在，并在外部区域衰减。

对于无源项的爱因斯坦真空方程，闵可夫斯基时空的稳定性已在 [21], [14], [7], [8], [9], [50]-[51], [37], [33], [32], [62]-[63]-[64]中得到证明。在外部区域，爱因斯坦真空方程的这一结果也已在 [45], [64] 中得到证明；对于类空特征初值，相关结果则见 [30]。

这些不同结果所采用的方法运用了各种技术。例如，在 Christodoulou-Klainerman 著名的开创性工作中，使用了向量场方法 。在 Hintz-Vasy [33], 、H¨afner-Hintz-Vasy 在 [31], 以及 Hintz 在 [32], 的开创性工作中，他们运用了微局部分析技术。在一项开创性工作中， [17], Dafermos-Rodnianski 引入了 r^p-加权能量

估计，并被用于撰写新的证明，证明爱因斯坦真空方程的闵可夫斯基时空稳定性，例如 Shen 在 [63], 中的工作，以及 Keir 在 [41]-[42]中的重要工作，都运用了这一方法，以证明满足弱零条件的一般类拟线性波动方程的整体存在性。在那里，沿着 r^p-加权能量估计 使用了 Dafermos-Rodnianski 的方法 [17]。这些方法也应用于 [4]-[5]。我们在此采用的方法则有所不同：我们使用背景叶状结构以及背景对称向量场，如 [51]中所述，另见 [16] 和 [18]。

然而，对于由爱因斯坦方程与一般类别的非线性物质耦合而支配的闵可夫斯基时空，其稳定性问题仍是一个尚未解决的问题。关于由杨-米尔斯场所描述的物质，据我们所知，爱因斯坦方程与杨-米尔斯场耦合时，闵可夫斯基时空外部稳定性的唯一已知完整结果是作者的结果， [28]-[29], 该结果研究了洛伦兹规范下的爱因斯坦-杨-米尔斯系统。此外还有 Mondal-Yau 的结果， [59]-[60], 但其中没有关于规范的估计，只有关于规范不变量的估计。在 [26]-[27], 中还有作者关于高维情形的结果，以及针对三个空间维度的单独能量估计；这些结果被用于 [28]-[29], 给出洛伦兹规范下动力学闵可夫斯基时空在三个空间维度中的外部稳定性的完整证明。对于德西特时空的扰动，有 Friedrich 在 [22] 中的结果；对于高维情形，则有 Liu-Oliynyk-Wang 在 [54]中的结果。据我们所知，关于固定曲背景上的杨-米尔斯场衰减的唯一结果，是作者与 H¨afner 在 [25]中的结果。关于固定曲时空上的整体存在性（不涉及衰减），请参见 [15], 中的 Chru´sciel-Shatah 结果以及作者在 [23]中的结果。关于平直时空，请参见 Eardley-Moncrief 在 [19]-[20] 中的整体存在性结果，以及 Choquet-Bruhat 和 Christodoulou 在 [12]中的结果。[66],中有 Wei-Yang-Yu 关于固定闵可夫斯基时空的衰减结果。此外，Mondal-Athanasiou-Yau 在 [6]中还给出了大初值下俘获面的形成结果。

关于爱因斯坦方程与线性物质耦合，已有若干研究结果，涉及爱因斯坦-麦克斯韦方程，例如 Bieri-Chen-Yau 的工作 [10], 以及 Zipser 在 [67]-[68]中的工作。Loizelet 在 [55] 中，以及 Speck 在 [65] 中，也利用波坐标为一类电磁场证明了相关结果。对于固定背景，则有 Andersson-Blue 在 [2]-[3], 中的结果、作者在 [24], 中的工作、Metcalfe-Tataru-Tohaneanu 在 [58], 中的结果、Pasqualotto 在 [61] 中的结果，以及 Ma 在 [57]中的工作。

关于闵可夫斯基时空与物质耦合的稳定性，也有其他若干结果，例如 [52],[11], 等。我们注意到，与本文所研究的非线性项最相关的工作，是关于爱因斯坦方程与满足非线性物质耦合且满足弱零条件的研究；关于本文所研究的张量拟线性波动方程系统的精确表述，见下文第1.2小节。

1.2 张量拟线性波动方程的耦合动力系统

现在，我们希望更精确地描述本文所研究的拟线性波动方程系统，以便给出定理 1.1 的精确陈述。为此，我们需要以下定义。

定义1.2.1. 设 $\Phi^{(l)}$, $l \in \{0, 1, \dots, N\}$ 是 (1.10) 中的一族张量。设 K 是一个张量，且它或者是 $\Phi^{(l)}$，或者是 $\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l)}$。设 $P_n^l(\Phi^{(l)})$、$R_n^l(\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l)})$ 是次数为 n 的多项式张量（或恒等于零），而 $Q_1(K)$ 是一个次数为1 的多项式张量，使得 $Q_1(0) = 0$ 和 $Q_1 \neq 0$ 的系数分别是度量 $\boldsymbol{m}$ 和逆度量 $\boldsymbol{m}^{-1}$ 的分量，它们定义见定义 *1.0.1*；其变量分别是协变张量 $\Phi^{(l)}$、$\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l)}$ 和 K 的分量，并留有若干自由指标，使得下列乘积构成一个张量，我们将其定义为，

$$O_{\mu_1\dots\mu_k}(K) \;:=\; Q_1(K)\cdot\sum_{l=0}^{N}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(P_n^l(\Phi^{(l)}) + R_n^l(\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l)})\Big)\,. \tag{1.12}$$

类似地，对于固定的向量 $V_1, \dots, V_k$，我们定义

$$O_{\mu_1\dots\mu_k}(K_{V_1\dots V_k}) \;:=\; Q_1(K_{V_1\dots V_k})\cdot\sum_{l=0}^{N}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(P_n^l(\Phi^{(l)}) + R_n^l(\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l)})\Big)\,. \tag{1.13}$$

其中此处 $Q_1(K_{V_1,\dots,V_k})$ 是一个张量，它是次数为 1 的多项式，使得 $Q_1(0) = 0$ 且 $Q_1 \neq 0$，其系数是度量 $\boldsymbol{m}$ 与逆度量$\boldsymbol{m}^{-1}$的分量，其变量为 $K_{V_1,\dots,V_k}$。

对于一族张量 $K^{(1)},..,K^{(m)}$，其中每个张量 $K^{(j)}$ 同样要么是 $\Phi^{(j)}$，要么是 $\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(j)}$，我们定义

$$O_{\mu_1\dots\mu_k}(K^{(1)}\cdot\ldots\cdot K^{(m)}) \;:=\; \prod_{j=1}^{m} Q_1^j(K^{(j)})\cdot\sum_{l=0}^{N}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(P_n^l(\Phi^{(l)})+R_n^l(\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l)})\Big)\,. \tag{1.14}$$

其中同样，$P_n^l(\Phi^{(l)})$ 与 $P_n^l(\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l)})$ 是次数为 n 的多项式张量（或恒为零），而 $Q_1^j(K^{(j)})$ 是次数为 1 的多项式张量，且 $Q_1^j(0)=0$ 与 $Q_1^j\neq 0$，其系数是度量 m 及逆度量 m^{-1} 的分量，其变量分别是协变张量 $\Phi^{(l)}$、$\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l)}$ 与 $K^{(l)}$ 的分量，并保留若干自由指标，从而最终整个乘积 $\prod_{j=1}^{m}Q_1^j(K^{(j)})\cdot\sum_{l=0}^{N}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(P_n^l(\Phi^{(l)})+R_n^l(\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l)})\Big)$ 给出一个张量，我们将其定义为 $O_{\mu_1\dots\mu_k}(K^{(1)}\cdot\ldots\cdot K^{(m)})$。为简化记号，我们有时会略去指标，而仅写作 $O(K^{(1)}\cdot\ldots\cdot K^{(m)})$。

类似地，对于固定的向量族 $V_1^l,\dots,V_{k_l}^l$，

$$O_{\mu_1\dots\mu_k}(K^{(1)}_{V_1^1\dots V_{k_1}^1}\cdot\ldots\cdot K^{(m)}_{V_1^m\dots V_{k_m}^m}) \;:=\; \prod_{j=1}^{m} Q_1^j(K^{(j)}_{V_1^j\dots V_{k_j}^j})\cdot\sum_{l=0}^{N}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(P_n^l(\Phi^{(l)})+R_n^l(\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l)})\Big)\,. \tag{1.15}$$

其中，同样地，$Q_1^j(K^{(j)}_{V_1^j\dots V_{k_j}^l})$ 是一个次数为 1 的多项式张量，使得 $Q_1^j(0)=0$ 和 $Q_1^j\neq 0$，其系数为度量 $\boldsymbol{m}$ 及逆度量$\boldsymbol{m}^{-1}$的分量，变量则为 $K^{(j)}_{V_1^j\dots V_{k_j}^j}$。

注 1.2.2. 每个大 O 都不相同，也就是说，每个 O 在其构造中使用的多项式都不同。

定义 1.2.3. 设 $m^{\mu\nu}$ 是 $m_{\mu\nu}$的逆。我们定义

$$(\Phi^{(0)})^{\mu\nu} \;:=\; m^{\mu\mu'}m^{\nu\nu'}\Phi^{(0)}_{\mu'\nu'} \tag{1.16}$$

$$H^{\mu\nu} \;:=\; g^{\mu\nu}-m^{\mu\nu}\,. \tag{1.17}$$

那么，众所周知，可以证明

$$H^{\mu\nu}=-(\Phi^{(0)})^{\mu\nu}+O^{\mu\nu}((\Phi^{(0)})^2)\,. \tag{1.18}$$

对于所有 $l\in\{0,1,\dots,N\}$，我们研究以下张量型非线性波动方程耦合系统,

$$\begin{aligned}
&\big[-(\Phi^{(0)})^{\alpha\beta}+O^{\alpha\beta}((\Phi^{(0)})^2)+m^{\alpha\beta}\big]\cdot\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\alpha}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\beta}\Phi^{(l)}_{\mathcal{U}\dots\mathcal{U}}\\
=\;&\sum_{l_i\,,\,l_j\in\{0,1,\dots,N\}}\big[\,O(\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\dots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}\cdot\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\dots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}})+O(\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\dots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}\cdot\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\dots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}})\,,\\
&+O(\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\dots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}\cdot\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\dots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}})+\sum_{l_s\in\{1,\dots,N\}}O(\Phi^{(l_i)}\cdot\Phi^{(l_j)}\cdot\Phi^{(l_s)})\\
&+O(\Phi^{(l_i)}\cdot\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l_j)})+O(\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l_j)}\cdot(\Phi^{(l_i)})^2)+O(\Phi^{(l_i)}\cdot(\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l_j)})^2)\\
&+O(\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l_i)}\cdot\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l_j)})\,\big]\,,
\end{aligned} \tag{1.19}$$

and

$$\begin{aligned}
&\big[-(\Phi^{(0)})^{\alpha\beta}+O^{\alpha\beta}((\Phi^{(0)})^2)+m^{\alpha\beta}\big]\cdot\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\alpha}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\beta}\Phi^{l}_{\mathcal{S}_1^{l}\dots\mathcal{S}_{k_l}^{l}}\\
=\;&\sum_{l_i\,,\,l_j\in\{0,1,\dots,N\}}\big[\sum_{l_s\in\{1,\dots,N\}}O(\Phi^{(l_i)}\cdot\Phi^{(l_j)}\cdot\Phi^{(l_s)})+O(\Phi^{(l_i)}\cdot\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l_j)})\\
&+O(\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l_j)}\cdot(\Phi^{(l_i)})^2)+O(\Phi^{(l_i)}\cdot(\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l_j)})^2)+O(\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l_i)}\cdot\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l_j)})\,\big]\,.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

注 1.2.4. 我们将要研究的度量上的张量波动方程，实际上定义在 $(\Phi^{(0)}-h^0)_{\mu\nu}$ 上，其中 h^0 是具有无穷能量的球对称史瓦西部分，其定义见定义 *1.3.2*。因此，我们所考虑的度量上的波算子，即 $(\Phi^{(0)}-h^0)$，为

$$\begin{aligned} & \big[-(\Phi^{(0)})^{\alpha\beta}+O^{\alpha\beta}((\Phi^{(0)})^2)+m^{\alpha\beta}\big]\cdot\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\alpha}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\beta}(\Phi^{(0)}-h^0)_{\mu\nu} \\ = & \big[-(\Phi^{(0)})^{\alpha\beta}+O^{\alpha\beta}((\Phi^{(0)})^2)+m^{\alpha\beta}\big]\cdot\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\alpha}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\beta}\Phi^{(0)}_{\mu\nu} \\ & -\big[-(\Phi^{(0)})^{\alpha\beta}+O^{\alpha\beta}((\Phi^{(0)})^2)+m^{\alpha\beta}\big]\cdot\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\alpha}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\beta}h^0_{\mu\nu}\,, \end{aligned}$$

其中，最后一个等式中的第一项由(1.19) 和(1.20) 给出，而最后一项由定义 *1.3.2* 规定。

记号 1.2.5。 这里，根据定义，(1.19)右端有

$$O(\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\dots\mathcal{S}_{k_l}^{l_i}}\cdot\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\dots\mathcal{S}_{k_l}^{l_j}}) \;:=\; \sum_{V_1^{l_i}\in\mathcal{S}_1^{l_i},\dots,V_{k_{l_i}}^{l_i}\in\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}} \;\sum_{W_1^{l_j}\in\mathcal{S}_1^{l_j},\dots,V_{k_{l_j}}^{l_j}\in\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}} O(\Phi^{(l_i)}_{V_1^{l_i}\dots V_{k_l}^{l_i}}\cdot\Phi^{(l_j)}_{W_1^{l_j}\dots W_{k_l}^{l_j}})\,,$$

其余所有大 O 也依此类推。由于这些都是大 O，这意味着并非所有这些项都必须出现，但它们可以出现；而且它们可以是混合项，因为 $V_k^{l_i}$ 不一定等于 $W_k^{l_j}$。然而，根据方程(1.20)左端的定义，当我们写作 $\Phi^l_{\mathcal{S}_1^l\dots\mathcal{S}_{k_l}^l}$ 时，方程对所有 $\Phi^l_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}$ 都成立，其中 $V_1^l\in\mathcal{S}_1^l$，*.....*，$V_{k_l}^l\in\mathcal{S}_{k_l}^l$。

换言之，集合中的所有元素都应满足方程(1.20)，即使它们并非全部出现在(1.19)中。换句话说，如果集合 $V_{k_l}^l\in\mathcal{S}_{k_l}^l$ 中的一个元素出现在(1.19)中，这就意味着集合 $\mathcal{S}_{k_l}^l$ 中的所有元素都应满足(1.20)。这是因为，对于高阶能量，我们只能在场的李导数层面，将交换子项解耦为 $\mathcal{U}$ 或 $\mathcal{T}$ 这类集合，而不能针对集合中的每个元素分别解耦。请回想定义 *1.0.5*，其中集合 $\mathcal{S}_i^l$ 的定义是：它们要么是 $\mathcal{U}$，要么是 $\mathcal{T}$。

1.3 初始数据集与范数

我们假设给定一个初始数据集 $(\Sigma,\ \Phi^{(l)},\ \partial_t\Phi^{(l)},\ l\in\{0,1,\dots,N\})$，其中 Σ 与 $\mathbb{R}^3$ 微分同胚，且 $\Phi^{(0)}$ 是定义在 Σ所有点上的洛伦兹度规、二阶张量；$\Phi^{(l)}$ 则是定义在 Σ 上的任意阶、任意类型的张量。

注 1.3.1. 我们注意到，这样的初始数据集可以由耦合物质场的爱因斯坦方程的柯西表述构造而来。在这种表述中，只指定了限制在 Σ 上的张量，而不包括涉及 t的分量；之后可以利用爱因斯坦约束方程和规范固定补全这些分量。构造这样的初始数据集并非本文的目的。我们知道，可以在满足爱因斯坦约束方程的同时构造这样的初始数据集；这也需要作出选择，因为爱因斯坦方程的柯西表述并未指定 $\partial_t\Phi^{(l)}$。不过，尽管如此，爱因斯坦方程的度量将包含一个球对称史瓦西部分，这便引出了下面的定义。

回想一下，度量 $m_{\mu\nu}$ 在定义 1.0.1 中被定义为我们固定坐标系（$x^0:=t,\ x^1,\ x^2,\ x^3$）中的闵可夫斯基度规。

定义 1.3.2。首先，我们定义

$$r:=\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}\,. \tag{1.21}$$

然后，令 χ 为一个光滑函数，例如

$$\chi(r):=\begin{cases}1 & for \quad r\geq\frac{3}{4}\,,\\ 0 & for \quad r\leq\frac{1}{2}\,.\end{cases} \tag{1.22}$$

对于 $M \geq 0$，我们定义 h^0，使得对于 $t > 0$，

$$h^0_{\mu\nu} := \chi(r/t) \cdot \chi(r) \cdot \frac{M}{r} \delta_{\mu\nu} \, , \tag{1.23}$$

且对于 $t = 0$,

$$h^0_{\mu\nu}(t = 0) := \chi(r) \cdot \frac{M}{r} \cdot \delta_{\mu\nu} \, . \tag{1.24}$$

因此，根据定义 *1.0.2* 中 $\Phi^{(0)}$ 的定义，我们有

$$\Phi^{(0)}_{\mu\nu} - h^0_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} - m_{\mu\nu} - h^0_{\mu\nu} \, . \tag{1.25}$$

注 1.3.3. 我们将考虑 $\Phi^{(0)} - h^0_{\mu\nu}$ 上的波动方程，因为 $h^0_{\mu\nu}$ 将具有无穷能量，参见注 *1.2.4*。

定义 1.3.4. 我们定义权重 w 为

$$w_\gamma(r - t) := \begin{cases} (1 + |r - t|)^{1+2\gamma} \quad when \quad r - t > 0 \, , \\ 1 \quad when \quad r - t < 0 \, , \end{cases} \tag{1.26}$$

对于某个稍后将确定的 $\gamma > 0$ 。

定义 1.3.5. 我们将张量 $E_{\mu\nu}$ 定义为固定坐标系中的欧几里得度量，

$$E_{\mu\nu} := m(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}) + 2m(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial t}) \cdot m(\frac{\partial}{\partial x^\nu}, \frac{\partial}{\partial t}) \, .$$

对于任意阶张量，比如 $K_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$ ，我们定义

$$|K|^2 = E^{\alpha_1\beta_1} \ldots E^{\alpha_k\beta_k} < K_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}, K_{\beta_1 \ldots \beta_k} > \, .$$

因此，我们有

$$|K|^2 \quad = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \{t, x^1, \ldots, x^n\}} |K_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}|^2 \, ,$$

此外，我们有

$$|K|^2 \quad \sim \sum_{U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}} |K_{U_1 \ldots U_k}|^2 \, ,$$

对于任意给定的向量族 $V_1, \ldots, V_k$，我们定义

$$|\nabla^{(\mathbf{m})} K_{V_1 \ldots V_k}|^2 \quad = \sum_{\mu \in \{t, x^1, x^2, x^3\}} |\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\mu K_{V_1 \ldots V_k}|^2 \, .$$

我们将切向协变导数的范数定义为

$$|\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})} K|^2 \quad := \sum_{U \in \mathcal{T}} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \{t, x^1, x^2, x^3\}} |\nabla^{(\mathbf{m})}{}_U K_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}|^2 \, ,$$

其中，$\mathcal{T}$ 在定义 *1.0.4* 中给出。

定义 1.3.6. 令 $x_\beta = m_{\mu\beta} x^\mu$、 $Z_{\alpha\beta} = x_\beta \partial_\alpha - x_\alpha \partial_\beta$ 和 $S = t\partial_t + \sum_{i=1}^n x^i \partial_i$. 为闵可夫斯基向量场，它们是以下集合中的向量

$$\mathcal{Z} := \left\{ Z_{\alpha\beta} \, , \; S \, , \; \partial_\alpha \mid \alpha \, , \; \beta \in \{0, 1, 2, 3\} \right\} . \tag{1.27}$$

属于 $\mathcal{Z}$ 的向量将记作 Z。

定义 1.3.7. 我们定义

$$Z^I := Z^{\iota_1} \dots Z^{\iota_k} \quad for \quad I = (\iota_1, \dots, \iota_k), \tag{1.28}$$

其中 ι_i 是一个11维整数指标，满足 $|\iota_i| = 1$，而 Z^{ι_i} 分别表示族 $\mathcal{Z}$ 中的一个向量场。对于任意阶的张量 T，无论是标量还是取值于李代数，我们将李导数定义为

$$\mathcal{L}_{Z^I} T := \mathcal{L}_{Z^{\iota_1}} \dots \mathcal{L}_{Z^{\iota_k}} T \quad for \quad I = (\iota_1, \dots, \iota_k). \tag{1.29}$$

定义 1.3.8. 设 $\mathcal{K}$ 是给定柯西超曲面 Σ 中的一个紧集。我们将 Σ^{ext} 定义为在固定坐标系中，Σ 在 $\mathcal{K}$ 的因果补集未来方向上的时间演化 t 。我们将 Σ_t^{ext} 定义为固定时间 t 的切片。

1.4 固定坐标系上的条件

我们假设固定坐标系 $(t,\ x^1,\ x^2,\ x^3)$ 中的度量满足以下条件；波坐标满足此条件，参见例如 [28],

$$|\nabla^{(\mathbf{m})}(\mathcal{L}_{Z^J}\Phi^{(0)}_{\mathcal{TL}})| \lesssim \sum_{|K|\le|J|} |\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})}(\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(0)})| + \sum_{|K|+|M|\le|J|} O(|\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(0)}| \cdot |\nabla^{(\mathbf{m})}(\mathcal{L}_{Z^M}\Phi^{(0)})|)\,. \tag{1.30}$$

于是，根据 (1.18)，我们还有

$$|\nabla^{(\mathbf{m})}(\mathcal{L}_{Z^J}H_{\mathcal{TL}})| \lesssim \sum_{|K|\le|J|} |\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})}(\mathcal{L}_{Z^K}H)| + \sum_{|K|+|M|\le|J|} O(|\mathcal{L}_{Z^K}H| \cdot |\nabla^{(\mathbf{m})}(\mathcal{L}_{Z^M}H)|)\,.$$

注 1.4.1. 事实上，一般而言，由于(1.18)，本文中对 $\Phi^{(0)}$ 成立的每个估计对 H 也成立。然而，对于 $\Phi^{(0)} - h^0$ 必须谨慎，因为 h^0 在(1.23)中已经具有给定的指定形式。

1.5 定理陈述

本文将证明以下定理。

定理 1.1。 我们在满足条件 (1.30) 的某个坐标系中，考虑作用于动力学未知量 $\Phi^{(l)}$, $l \in \{0, 1, \dots, N\}$, $N \in \mathbb{N}$ 的耦合拟线性波动方程动力学张量系统 (1.19)-(1.20)；波坐标便是满足该条件的情形。我们假设初始数据集渐近平坦，如第 *1.3* 小节所述，其中 M 是度量初始数据的质量，如定义 *1.3.2* 所述。我们考虑定义 *4.0.1* 和 *5.0.1* 中定义的能量，其权重如定义 *2.4.2* 所述。

设 $\delta \in \mathbb{R}$，其中 $0 < \delta < \frac{1}{4}$，且设 $\gamma' = 1 + 2\delta$。设 $\gamma \in \mathbb{R}$ 满足 $0 < 5\delta \le \gamma < \frac{1}{2} + 2\delta = \gamma' - \frac{1}{2}$。那么，存在一个足够大的 $K \in \mathbb{N}$ 和一个足够小的 ϵ，使得若

$$M + \mathcal{E}_K^{full,\gamma}(0) + \mathcal{E}_K^{good,\gamma'}(0) < \epsilon^2\,,$$

那么，对于所有时间 t，在整个外部区域内，

$$\mathcal{E}_K^{full,\gamma}(t) \le C \cdot \epsilon \cdot (1+t)^{c\cdot\epsilon}\,.$$

此外，对于所有 $|I| \le K - 2$，在外部区域中，我们对场有以下估计，对所有 $l \in \{1, \dots, N\}$,

$$
\begin{aligned}
|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}(t,x)| + |\nabla^{(\mathbf{m})}(\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(0)} - h^0)(t,x)| &\lesssim \frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{1-c\cdot\epsilon}\cdot(1+|q|)^{1+\gamma}}\,,\\
|\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}(t,x)| + |\mathcal{L}_{Z^I}(\Phi^{(0)} - h^0)(t,x)| &\lesssim \frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{1-c\cdot\epsilon}\cdot(1+|q|)^{\gamma}}\,,
\end{aligned}
$$

对于 $\Phi^{(0)}$,

$$
\begin{aligned}
|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(0)}(t,x)| &\lesssim \frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{1-c\cdot\epsilon}\cdot(1+|q|)^{1+c\cdot\epsilon}}\,,\\
|\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(0)}(t,x)| &\lesssim \frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{1-c\cdot\epsilon}\cdot(1+|q|)^{c\cdot\epsilon}}\,.
\end{aligned}
$$

2 证明策略

2.1 连续性论证

我们定义如下高阶能量范数。

定义 2.1.1. 我们定义能量范数如下

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}_k(t) \qquad\qquad (2.1)\\
:=\ &\sum_{|J|\le k}\Big[\|w_\gamma^{1/2}\nabla^{(\mathbf{m})}(\mathcal{L}_{Z^J}(\Phi^{(0)}-h^0)(t,\cdot))\|^2_{L^2(\Sigma_t^{ext})} + \sum_{l\in\{1,\dots,N\}}\|w_\gamma^{1/2}\nabla^{(\mathbf{m})}(\mathcal{L}_{Z^J}\Phi^{(l)}(t,\cdot))\|^2_{L^2(\Sigma_t^{ext})}\Big]\,,
\end{aligned}
$$

其中，积分是在 $\Sigma_t^{ext}(\mathcal{K})$ 上相对于勒贝格测度 $dx_1dx_2dx_3$进行的，权重 w_γ 则由定义 *1.3.4* 给出。

我们将对带权重 w_γ的高阶能量 (2.1) 进行自举论证，并利用能量随时间 t连续增长这一事实。我们假设高阶能量满足以下界：对于任意区间 $[0,T]$ 中的所有时刻 t，其中 $T>0$，

$$
\mathcal{E}_k(t) \le E(k)\cdot\epsilon\cdot(1+t)^{\delta}\,, \tag{2.2}
$$

对于稍后待定的某个 $\epsilon>0$ 和 $\delta>0$ 。

记号 2.1.2. 这里我们始终将常数 $E(k):=1$ 对任意 $k\in\mathbb{N}$取定，但该常数将在我们的估计中用来标明我们使用自举假设(2.2)时所涉及的导数个数。

然后，我们将证明：当 $k=K$ 充分大时，这一 `先验界蕴含一个严格更好的界，即它蕴含

$$
\mathcal{E}_K(t) \le \frac{1}{2}\cdot E(K)\cdot\epsilon\cdot(1+t)^{\delta}\,. \tag{2.3}
$$

因此，由 $\mathcal{E}_K(t)$的连续性，以及我们从满足该界的初始数据 $\mathcal{E}_K(0)$出发这一事实，再借助方程(1.19)-(1.20)在外部区域中的适定性，可知界(2.2)在整个时间区间 $[0,\infty)$上确为真实成立的界。

2.2 Gr¨onwall型不等式的递归公式

我们将通过证明一类 Gr¨onwall 型不等式的递归公式，来证明不等式 (2.2) 的严格改进，使得当初始数据足够小时，可以借助 Gr¨onwall 引理来改进 (2.2)。更确切地说，我们的目标是对 $k\in\mathbb{N}$ 证明如下类型的不等式，而且最关键的是，在高于某个足够大的 $k=K$ 的导数上不使用自举假设 (2.2),

$$\mathcal{E}_k(t) \lesssim \epsilon \cdot (1+t)^{c_0 \cdot \epsilon} + \epsilon \cdot \mathcal{E}_k(0) + \int_0^t \frac{\epsilon}{(1+\tau)^{1-c\cdot\epsilon}} \cdot \mathcal{E}_{k-1}(\tau) \cdot d\tau + \int_0^t \frac{\epsilon}{(1+\tau)} \cdot \mathcal{E}_k(\tau) \cdot d\tau \,. \tag{2.4}$$

这里当 $k = 0$ 时有 $\mathcal{E}_{k-1} = 0$。因此，通过选取 ϵ 并使初始数据 $\mathcal{E}_k(0)$ 足够小，我们便能够对某个足够大的 k 改进 (2.2)，而无需在高于 k 的导数上使用假设 (2.2)。为了闭合自举（即不涉及比我们所改进的更多的导数），我们反复使用的论证之一是：对乘积求导时，其中一项所获得的导数不超过一半，于是我们可以对该项使用自举假设，仅用到一半的导数以及一定的导数损失。

我们注意到，在含有最高阶导数的主项前保留因子 $\frac{1}{(1+\tau)}$ 至关重要，即 $\mathcal{E}_k(\tau)$。对于衰减率有 ϵ 损失的因子，即 $\frac{\epsilon}{(1+\tau)^{1-c\cdot\epsilon}}$，只有在低阶导数 $\mathcal{E}_{k-1}(\tau)$ 中才是可以容忍的，这样我们就可以改进自举假设 (2.2)。此外，对于其他常数，拥有一个 ϵ，或能够任意选小的量，也很重要，因为这正是我们能够改进的方式。我们将证明，在 (2.2) 中存在某个 $\delta > 0$，其将在稍后确定，并且存在某个可任意选小的 $\epsilon > 0$，使得对于$k \geq K$，(2.4) 成立，而无需在超过 k 个导数上使用自举假设 (2.2)。因此，当 ϵ 足够小时，并且初始数据 $\mathcal{E}_k$ 足够小时，就可以改进 (2.2)。然而，至关重要的是，存在K，使得对于所有 $k \geq K$，(2.4) 都成立，而无需对高于k阶导数的增长作出假设。这通常称为闭合自举论证。

2.3 证明思路

事实上，我们建立 (2.4) 的策略是使用自举假设以及第 2.4 小节中的新解耦能量估计，将 (2.2) 中的 ϵ 因子转化为一个能够控制能量增长的幂次，也就是说，首先证明 (2.2) 蕴含一个更好的估计，即

$$\mathcal{E}_k(t) \leq E(k+k_0) \cdot \epsilon \cdot (1+t)^{c\cdot\epsilon} \,. \tag{2.5}$$

但会损失 k_0 个导数，因此尚未完成自举论证。这里的常数 $E(k+k_o) := 1$只是一种记号，表示我们使用自举假设 (2.2) 时至多涉及 $k+k_0$ 个导数；因此，这样的估计还不能算作提升，因为我们使用的导数比要提升的导数更多，也就是 (2.5) 左端的 k 个导数。我们通过首先在使用比要提升的导数更多的情况下证明一种形式为 (2.4) 的 Gr¨onwall 不等式来实现这一点。然后，我们将利用这种带有 k_0 导数损失的˙先验改进衰减，真正完成自举论证。换言之，我们将利用 (2.5) 证明

$$\mathcal{E}_K(t) \leq \frac{1}{2} \cdot E(K) \cdot \epsilon \cdot (1+t)^{c\cdot\epsilon} \,. \tag{2.6}$$

当 K 足够大时，从而可以完成自举论证。因此，务必仔细追踪我们在哪些导数阶数上使用了自举假设 (2.2)。

为了证明第一个改进的 `先验界，即 (2.5)，我们将首先以高于自举假设w_γ 中所用权重的某个权重 $w_{\gamma'}$，提升若干良分量的能量，然后利用这一提升，以权重 w_γ 得到 (2.5)。为此，回想一下，Gr¨onwall 引理可以将一个因子转化为幂，因此，如果我们能证明一个适当的 Gr¨onwall 不等式，其中能量里的 ϵ 作为因子出现，就能改进自举假设，从而证明 (2.6)。接下来，我们将利用方程的结构，以及一个关键事实：对乘积求导时，其中一项所含的导数不会超过总导数的一半，从而证明 (2.5) 蕴含 (2.6)。

2.4 解耦的高阶能量估计

我们将通过使用加权和解耦能量估计来证明 (2.4)。为此，我们需要给出以下权重的定义。

定义 2.4.1. 令 $q:=r-t$，其中 t 和 r 是基于我们的固定坐标系定义的 .

回顾一下，在定义 1.3.4 中，我们针对某个 $\gamma>0$ 定义了权重 w。

定义 2.4.2. 我们定义权重 $w_{\gamma'}$，如下：

$$w_{\gamma'}(q):=\begin{cases}(1+|r-t|)^{1+2\gamma'} & when \quad q>0\,,\\ 1 & when \quad q<0\,,\end{cases} \tag{2.7}$$

对于某个稍后将确定的 $\gamma'>0$。

定义 2.4.3. 我们定义 $\widehat{w}_{\gamma'}$ 如下

$$\widehat{w}_{\gamma'}(q) \quad := \quad \begin{cases}(1+|q|)^{1+2\gamma'} & when \quad q>0,\\ (1+|q|)^{2\mu} & when \quad q<0,\end{cases}$$

对于 $\gamma'>0$ 和 $\mu<0$。于是有

$$\widehat{w}'_{\gamma'}(q):=\frac{\partial\widehat{w}_{\gamma'}}{\partial q}(q)\sim\frac{\widehat{w}_{\gamma'}(q)}{(1+|q|)}\,. \tag{2.8}$$

我们重述以下两个引理，出自 [27]-[28]。

引理 2.4.4。对于

$$|H|<\frac{1}{3}\,, \tag{2.9}$$

其中，H 在定义 *1.17* 中定义；对于 $\gamma'>0$ 和 $\mu<0$，以及在空间无穷远处充分快地衰减的 $\Phi^{(l)}_{V^l_1\dots V^l_{k_l}}$，对于某个固定向量族 $V^l_1\dots V^l_{k_l}$，我们有以下能量估计

$$\begin{aligned}
&\int_{\Sigma^{ext}_t}|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V^l_1\dots V^l_{k_l}}|^2\ \cdot w_{\gamma'}(q)\cdot d^3x+\int_0^t\int_{\Sigma^{ext}_\tau}|\not\nabla^{(\mathbf{m})}{}_t\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V^l_1,\dots,V^l_{k_l}}|^2\cdot d\tau\cdot\widehat{w}'_{\gamma'}(q)d^3x\\
\lesssim\ &\int_{\Sigma^{ext}_0}|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V^l_1,\dots,V^l_{k_l}}|^2\ \cdot w_{\gamma'}(q)\cdot d^3x\\
&+\int_0^t\int_{\Sigma^{ext}_\tau}\Big(|H_{LL}|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V^l_1,\dots,V^l_{k_l}}|^2+|H|\cdot|\not\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V^l_1,\dots,V^l_{k_l}}|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V^l_1,\dots,V^l_{k_l}}|\Big)\cdot d\tau\cdot\widehat{w}'_{\gamma'}(q)d^3x\\
&+\int_0^t\int_{\Sigma^{ext}_\tau}\Big((|\nabla^{(\mathbf{m})}H_{LL}|+|\not\nabla^{(\mathbf{m})}H|)\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V^l_1,\dots,V^l_{k_l}}|^2\\
&\qquad+|\nabla^{(\mathbf{m})}H|\cdot|\not\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V^l_1,\dots,V^l_{k_l}}|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V^l_1,\dots,V^l_{k_l}}|\Big)\cdot d\tau\cdot w_{\gamma'}(q)d^3x\\
&+\int_0^t\int_{\Sigma^{ext}_\tau}|g^{\mu\alpha}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\mu\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\alpha\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V^l_1,\dots,V^l_{k_l}}|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}{}_t\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V^l_1,\dots,V^l_{k_l}}|\cdot d\tau\cdot w_{\gamma'}(q)d^3x\,.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

引理 2.4.5。对于任意向量族 $V^l_1\in\mathcal{S}^l_1$、.....、$V^l_{k_l}\in\mathcal{S}^l_{k_l}$，其中我们回顾一下，这些集合被定义为 $\mathcal{T}$ 或 $\mathcal{U}$，我们有

$$\begin{aligned}
&|g^{\lambda\mu}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\lambda\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\mu\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V^l_1\dots V^l_{k_l}}-\mathcal{L}_{Z^I}(g^{\lambda\mu}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\lambda\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\mu\Phi^{(l)}_{V^l_1\dots V^l_{k_l}})|\\
\lesssim\ &\sum_{|K|\le|I|-1}|g^{\lambda\mu}\cdot\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\lambda\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\mu\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l)}_{V^l_1\dots V^l_{k_l}}|\\
&+\frac{1}{(1+t+|q|)}\cdot\sum_{|K|\le|I|,\ \ |J|+(|K|-1)_+\le|I|}|\mathcal{L}_{Z^J}H|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l)}_{V^l_1\dots V^l_{k_l}}|\\
&+\underbrace{\frac{1}{(1+|q|)}}_{bad\ factor}\cdot\sum_{|K|\le|I|,\ \ |J|+(|K|-1)_+\le|I|}|\mathcal{L}_{Z^J}H_{LL}|\cdot\underbrace{\Big(\sum_{V'_1\in\mathcal{S}^l_1,\dots,V'_{k_l}\in\mathcal{S}^l_{k_l}}|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V'_1\dots V'_{k_l}}|\Big)}_{decoupled\ tangential\ components}\,,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

其中，当 $|K|\ge1$ 时，$(|K|-1)_+=|K|-1$，而当 $|K|=0$ 时，$(|K|-1)_+=0$。

我们能够分别控制每个分量 $\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}$ 上的 L^2-范数，这一点对于处理项 $\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\dots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}\cdot\Phi^{(l_j)}$ $\mathcal{S}_1^{l_j}\dots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}$ 和 $\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\dots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}\cdot\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l_j)}$ $\mathcal{S}_1^{l_j}\dots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}$ 是必要的。然而，要成功实现这一点，我们关键需要处理这样一个事实：交换子估计无法解耦，也就是说，项上的估计

$$|g^{\alpha\beta}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\alpha\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\beta\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}-\mathcal{L}_{Z^I}(g^{\alpha\beta}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\alpha\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\beta\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l})|\,, \tag{2.12}$$

包含涉及不同于 $\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}$ 的其他分量的项。我们给出了（2.11）中一个新的合适的交换子估计，该估计是我们在 [28]上证明的。事实上，与爱因斯坦真空方程的情形不同，也与爱因斯坦-麦克斯韦系统的情形不同，对于这类与非线性物质耦合的新爱因斯坦方程，我们需要有一个解耦的估计，针对每个分量的交换子项（2.12）。

我们通过在 [28], 证明一个合适的交换子估计（2.11）解决了该问题，其中我们相对于集合 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{U}$对分量进行了解耦。借助这一新估计（2.11），我们注意到带有坏因子^{1} $_{(1+|q|)}$ 的项只与切向分量一同出现。事实上，这正是交换子项估计中的坏项，它是随后证明中一个被强加的棘手Gr¨onwall不等式的根源，需要单独处理。文献中先前使用的估计对因子^{1} $_{(1+|q|)}$ 包含所有分量，并且不允许我们解耦高阶能量估计。

相反，借助下面的不等式，我们得以在 [28], 中建立这一新的估计 (2.11)。对于任意张量 Ψ、任意向量 $U\in\mathcal{U}$ 以及任意向量族 $V_1\in\mathcal{S}_1,\dots,V_k\in\mathcal{S}_k$，其中每个集合 $\mathcal{S}_l$ 都是 $\mathcal{T}$ 或 $\mathcal{U}$，我们有

$$|\nabla^{(\mathbf{m})}\Psi_{UV_1\dots V_k}|\lesssim\sum_{|I|\le1}\frac{1}{(1+t+|q|)}\cdot|\mathcal{L}_{Z^I}\Psi|+\sum_{U'\in\mathcal{U},V_1'\in\mathcal{S}_1,\dots,V_k'\in\mathcal{S}_k}\frac{1}{(1+|q|)}\cdot|\mathcal{L}_{Z^I}\Psi_{U'V_1'\dots V_k'}|\,. \tag{2.13}$$

而 (2.11) 中包含完整分量的项带有良因子 ^{1} $_{(1+t+|q|)}$。因此，我们可以对高阶能量的交换子项进行估计，其中带有弱因子的项不受那些令我们困扰的不良分量 L 的影响。因此，若分量 L 不满足良波动方程 (1.20)，我们就可以将良切向分量的高阶能量估计解耦。若分量 L 属于满足良波动方程的集合，则该集合无需解耦。这就是良波动方程 (1.20) 所对应的集合为 $\mathcal{T}$ 或 $\mathcal{U}$ 的原因。

然而，要使能量估计成功，不等式右侧时空被积函数中的界至关重要，必须取正确的界。我们的界满足这一要求，因为我们有如下

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Sigma_\tau^{ext}}\overbrace{|H_{LL}|}^{\text{good component}}\cdot\overbrace{|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|^2}^{\text{decoupled bad derivatives}}\cdot d\tau\cdot\widetilde{w}'(q)d^3x\\
&+\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Sigma_\tau^{ext}}\overbrace{|H|}^{\text{bad component}}\cdot\Big(\overbrace{|\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|}^{\text{good derivative}}\cdot\overbrace{|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|}^{\text{decoupled bad derivative}}\Big)\cdot d\tau\cdot\widetilde{w}'(q)d^3x\,.\\
&+\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Sigma_\tau^{ext}}\Big(\overbrace{|\nabla^{(\mathbf{m})}H_{LL}|}^{\text{good component}}+\overbrace{|\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})}H|}^{\text{good derivative}}\Big)\cdot\overbrace{|\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|^2}^{\text{decoupled bad derivatives}}\cdot d\tau\cdot\widetilde{w}(q)d^3x\\
&+\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Sigma_\tau^{ext}}\underbrace{|\nabla^{(\mathbf{m})}H|}_{\text{bad derivative}}\cdot\underbrace{|\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|}_{\text{good derivative}}\cdot\underbrace{|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|}_{\text{decoupled bad derivative}}\Big)\cdot d\tau\cdot\widetilde{w}(q)d^3x\,.
\end{aligned}\tag{2.14}$$

此外，在交换子估计 (2.11) 中，对于 $V_1^l\in\mathcal{S}_1^l$，……，$V_{k_l}^l\in\mathcal{S}_{k_l}^l$，其中各集合的定义如定义 1.0.5 所述，我们有

$$\overbrace{\frac{1}{(1+t+|q|)}}^{\text{good factor}}\cdot\sum_{|K|\le|I|,}\sum_{|J|+(|K|-1)_+\le|I|}\overbrace{|\mathcal{L}_{Z^J}H|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}(\mathcal{L}_{Z^K}\Phi)|}^{\text{bad components}}$$
$$+\underbrace{\frac{1}{(1+|q|)}}_{\text{bad factor}}\cdot\sum_{|K|\le|I|,}\sum_{|J|+(|K|-1)_+\le|I|}\underbrace{|\mathcal{L}_{Z^J}H_{LL}|}_{\text{good component}}\cdot\underbrace{\Big(\sum_{V_1'\in\mathcal{S}_1^l,\dots,V_{k_l}'\in\mathcal{S}_{k_l}^l}|\nabla^{(\mathbf{m})}(\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l)}_{V_1'\dots V_{k_l}'})|\Big)}_{\text{decoupled tangential components}}.\tag{2.15}$$

`3 场的先验逐点衰减

我们还回顾克莱因曼-索博列夫不等式，见 [43], 该不等式与我们的能量估计结合使用至关重要，因为它能够将场的导数的 `能量层面的 $L^2$ 先验界转化为场的 `先验点态界。事实上，带权 版本的克莱因曼-索博列夫嵌入给出，见 [26], 对于任意阶数的张量

$$|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi|\cdot(1+t+|q|)\cdot\big[(1+|q|)\cdot w_{\gamma'}(q)\big]^{1/2}\le C\cdot\sum_{|K|\le|I|+2}\|\big(w_{\gamma'}(q)\big)^{1/2}\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}\Phi(t,\cdot)\|_{L^2(\Sigma_t^{ext})}\,,\tag{3.1}$$

其中， γ' 是一般的，即任意的，因此当 γ' 等于 γ时也可以使用该不等式。加权 Klainerman–Sobolev 不等式使我们能够将能量的先验界转化为场的先验界。

我们还有以下估计

$$(1+t+|q|)\cdot|\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})}\Psi|+(1+|q|)\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\Psi|\ \lesssim\ \sum_{|I|\le1}|\mathcal{L}_{Z^I}\Psi|\,.\tag{3.2}$$

引理 3.0.1。 对于所有 $|I|\le K$，都有

$$|\mathcal{L}_{Z^I}h^0(t,x)|\ \lesssim\ \frac{M}{(1+t+|q|)}\,.$$

and

$$|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}h^0(t,x)|\ \lesssim\ \frac{M}{(1+t+|q|)^2}\,.$$

设 $M\le\epsilon$，则对于所有 $|I|\le K$，都有

$$|\mathcal{L}_{Z^I}(g^{\lambda\mu}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\lambda\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\mu h^0)|\ \lesssim\ E(|I|+2)\cdot\begin{cases}c(\gamma)\cdot\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{4-\delta}(1+|q|)^\delta}, & q>0\,,\\ \frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^3}, & q<0\,.\end{cases}$$

基于自举假设 (2.2)、加权 Klainerman–Sobolev 不等式 (3.1) 以及 (3.2)，我们得到场的以下先验逐点衰减。

引理 3.0.2。 设 $M\le\epsilon$、 $\gamma>\delta>0$ 和 $0<\delta\le1$。对于所有 $|I|\le K$，在整个外部区域内，

对于所有 $l \in \{1, \dots, N\}$，有以下估计：

$$
\begin{aligned}
|\nabla^{(\mathbf{m})} \mathcal{L}_{Z^I} \Phi^{(0)}(t,x)| &\leq E(|I|+2) \cdot \frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{1-\delta} \cdot (1+|q|)^{1+\delta}}, \\
|\nabla^{(\mathbf{m})} \mathcal{L}_{Z^I} \Phi^{(l)}(t,x)| + |\nabla^{(\mathbf{m})} (\mathcal{L}_{Z^I} \Phi^{(0)} - h^0)(t,x)| + &\leq E(|I|+2) \cdot \frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{1-\delta} \cdot (1+|q|)^{1+\gamma}}, \\
|\mathcal{L}_{Z^I} \Phi^{(0)}(t,x)| &\leq E(|I|+2) \frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{1-\delta} \cdot (1+|q|)^{\delta}}, \\
|\mathcal{L}_{Z^I} \Phi^{(l)}(t,x)| + |\mathcal{L}_{Z^I} (\Phi^{(0)} - h^0)(t,x)| &\leq E(|I|+2) \cdot \frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{1-\delta} \cdot (1+|q|)^{\gamma}}, \\
|\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})} \mathcal{L}_{Z^I} \Phi^{(0)}(t,x)| &\leq E(|I|+3) \cdot \frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{2-\delta} \cdot (1+|q|)^{\delta}}, \\
|\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})} \mathcal{L}_{Z^I} \Phi^{(l)}(t,x)| + |\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})} (\mathcal{L}_{Z^I} \Phi^{(0)} - h^0)(t,x)| &\leq E(|I|+3) \cdot \frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{2-\delta} \cdot (1+|q|)^{\gamma}}.
\end{aligned}
$$

根据注 *1.4.1*，关于 $\Phi^{(0)}$ 的估计对 H 也成立。

证明。使用权重为 w_γ 的加权 Klainerman–Sobolev 不等式，我们得到关于 `的 $\nabla^{(\mathbf{m})} \mathcal{L}_{Z^I} \Phi^{(l)}$ 和 $\nabla^{(\mathbf{m})} \mathcal{L}_{Z^I} (\Phi^{(0)} - h^0)$ 的先验逐点估计；通过积分，我们得到关于 `的 $\mathcal{L}_{Z^I} \Phi^{(l)}$ 或 $\mathcal{L}_{Z^I} (\Phi^{(0)} - h^0)$ 的先验逐点估计。利用 (3.2)，我们得到关于 $\nabla\!\!\!/(\mathbf{m}) \mathcal{L}_{Z^I} \Phi^{(l)}$ 的估计。利用引理 3.0.1，我们得到关于 $\nabla^{(\mathbf{m})} \mathcal{L}_{Z^I} \Phi^{(0)}$ 和 $\mathcal{L}_{Z^I} \Phi^{(0)}$ 的估计。然后，再利用引理 3.0.1，我们得到关于 h^0 的估计，进而得到关于 $\nabla^{(\mathbf{m})} \mathcal{L}_{Z^I} (\Phi^{(0)}$ 和 $\mathcal{L}_{Z^I} \Phi^{(0)}$ 以及 $\nabla\!\!\!/(\mathbf{m}) \mathcal{L}_{Z^I} \Phi^{(0)}$ 的估计。详情见 [28]。

□

基于我们由引理 3.0.2 得到的 `先验衰减估计，以及关于我们度量的条件 (1.30)，我们得到如下关于度量某些分量的改进的 `先验衰减估计。

引理 3.0.3. 设 $M \leq \epsilon$。在关于 $\epsilon \leq 1$、 $\gamma > \delta > 0$ 以及 $0 < \delta \leq \frac{1}{4}$ 的自举假设下，我们在内部区域和外部区域均有，

$$
\frac{1}{(1+|q|)} \cdot |\mathcal{L}_{Z^I} h_{\mathcal{TL}}| + \frac{1}{(1+|q|)} \cdot |\mathcal{L}_{Z^I} H_{\mathcal{TL}}| \lesssim E(|I|+3) \cdot \frac{\epsilon}{(1+t+|q|)}.
$$

在外部区域，我们有

$$
|\mathcal{L}_{Z^I} h_{\mathcal{TL}}| + |\mathcal{L}_{Z^I} H_{\mathcal{TL}}| \lesssim E(|I|+3) \cdot \frac{\epsilon}{(1+t+|q|)}.
$$

证明. 我们在固定坐标系中关于度量的条件 (1.30) 控制了 $|\nabla^{(\mathbf{m})}{}_L (\mathcal{L}_{Z^J} H_{\mathcal{TL}})|$，并且鉴于对所有 $U \in \mathcal{U}$，我们有 $\nabla^{(\mathbf{m})}{}_L V = 0$，这进而控制了 $|\partial_L (\mathcal{L}_{Z^J} H_{\mathcal{TL}})|$。通过沿$q$的积分，如 [26], 中那样，我们可以据此将这些转化为关于 $\mathcal{L}_{Z^J} H_{\mathcal{TL}}$和 $\mathcal{L}_{Z^J} h_{\mathcal{TL}}$ 的估计，如下所示

$$
|\partial \mathcal{L}_{Z^I} h_{\mathcal{TL}}| \lesssim \sum_{|J| \leq |I|} |\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})} \mathcal{L}_{Z^J} h| + \sum_{|K|+|M| \leq |I|} O(|\mathcal{L}_{Z^K} h| \cdot |\nabla^{(\mathbf{m})} (\mathcal{L}_{Z^M} h)|), \tag{3.3}
$$

and

$$
|\partial \mathcal{L}_{Z^I} H_{\mathcal{TL}}| \lesssim \sum_{|J| \leq |I|} |\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})} \mathcal{L}_{Z^J} H| + \sum_{|K|+|M| \leq |I|} O(|\mathcal{L}_{Z^K} H| \cdot |\nabla^{(\mathbf{m})} (\mathcal{L}_{Z^M} H)|). \tag{3.4}
$$

现在，我们可以运用引理 3.0.2，得到关于 $M \leq \epsilon$ 和 $\delta \leq \frac{1}{4}$ 的所需结果，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1+|q|)} \sum_{|I| \leq |J|} |\mathcal{L}_{Z^I} H_{LL}| &\lesssim E(|J|+3) \cdot \begin{cases} \frac{\epsilon}{(1+t+|q|)(1+|q|)}, & \text{when} \quad q > 0, \\ \frac{\epsilon}{(1+t+|q|)(1+|q|)^{\frac{1}{2}-2\delta}}, & \text{when} \quad q < 0, \end{cases} \\
&\leq E(|J|+3) \cdot \frac{\epsilon}{(1+t+|q|)}.
\end{aligned}
$$

□

注 3.0.4. 在应用解耦能量估计，为特定的耦合系统 (1.19)-(1.20)证明色散估计时，我们只需要外部区域的估计，因为我们将要处理的耦合控制系统 (1.19)-(1.20)中的新非线性项在内部区域不衰减。不过，我们在此给出了内部区域度量的估计，以说明高阶能量估计的解耦在内部区域同样适用。只有在处理新非线性项时，该论证在内部区域才不适用；能量估计本身的解耦并非如此。

4 切向分量的解耦能量估计

我们首先将使用解耦的切向分量能量估计（利用 (2.10) 和 (2.11)），来证明 (1.20) 的解耦能量估计。更确切地说，本节的目标是证明命题 4.0.2。

定义 4.0.1. 对于满足方程 (1.20) 的良分量，我们将其解耦（或分别的）高阶能量范数定义如下，其中 $l \in \{1, \dots, N\}$，

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_k^{good,\gamma'}(\Phi^{(l)})(t) &:= \sum_{|J|\le k} \sum_{V_1^l \in \mathcal{S}_1^l, \dots, V_{k_l}^l \in \mathcal{S}_{k_l}^l} \|w_{\gamma'}^{1/2} \nabla^{(\mathbf{m})} \mathcal{L}_{Z^J} \Phi^{(l)}_{V_1^l \dots V_{k_l}^l}(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Sigma_t^{ext})}, \\
\mathcal{E}_k^{good,\gamma'}(\Phi^{(0)} - h^0)(t) &:= \sum_{|J|\le k} \sum_{V_1^0 \in \mathcal{S}_1^0, V_2^0 \in \mathcal{S}_2^0} \|w_{\gamma'}^{1/2} \nabla^{(\mathbf{m})} \mathcal{L}_{Z^J} (\Phi^{(0)} - h^0)_{V_1^0 V_2^0}(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Sigma_t^{ext})},
\end{aligned} \tag{4.1}$$

并将完整分量的能量定义为

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_k^{full,\gamma'}(\Phi^{(l)})(t) &:= \sum_{|J|\le k} \sum_{V_1^l \in \mathcal{U}, \dots, V_{k_l}^l \in \mathcal{U}} \|w_{\gamma'}^{1/2} \nabla^{(\mathbf{m})} \mathcal{L}_{Z^J} \Phi^{(l)}_{V_1^l \dots V_{k_l}^l}(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Sigma_t^{ext})} \cdot \\
\mathcal{E}_k^{full,\gamma'}(\Phi^{(0)} - h^0)(t) &:= \sum_{|J|\le k} \sum_{V_1^0 \in \mathcal{U}, V_2^0 \in \mathcal{U}} \|w_{\gamma'}^{1/2} \nabla^{(\mathbf{m})} \mathcal{L}_{Z^J} (\Phi^{(0)} - h^0)_{V_1^0 V_2^0}(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Sigma_t^{ext})} \cdot
\end{aligned} \tag{4.2}$$

命题 4.0.2。令 $M \le \epsilon$, $\gamma \ge 3\delta$, $0 < \delta \le \frac{1}{4}$和 $\gamma' < 1 + \gamma - \delta$。当 μ 足够小时，当 δ 足够小且依赖于 μ 时，对于足够小的 ϵ，我们对所有$l \in \{1, \dots, N\}$得到以下解耦能量估计，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_k^{good,\gamma'}(\Phi^{(l)})(t) + \sum_{V_1^l \in \mathcal{S}_1^l, \dots, V_{k_l}^l \in \mathcal{S}_{k_l}^l} \sum_{|I|\le k} \int_0^t \int_{\Sigma_\tau^{ext}} |\nabla^{(\mathbf{m})}{}_t \mathcal{L}_{Z^I} \Phi^{(l)}_{V_1^l, \dots, V_{k_l}^l}|^2 \cdot d\tau \cdot \frac{\widehat{w}_{\gamma'}(q)}{(1+|q|)} d^3x \\
\lesssim\ & E(k+3) \cdot \Big[\mathcal{E}_k^{good,\gamma'}(\Phi^{(l)})(0) + \epsilon^2 \\
&+ \sum_{V_1^l \in \mathcal{S}_1^l, \dots, V_{k_l}^l \in \mathcal{S}_{k_l}^l} \sum_{|I|\le k} \int_0^t \int_{\Sigma_\tau^{ext}} \frac{(1+\tau)}{\epsilon} \cdot |\mathcal{L}_{Z^I}(g^{\mu\alpha} \nabla^{(\mathbf{m})}{}_\mu \nabla^{(\mathbf{m})}{}_\alpha \Phi^{(l)}_{V_1^l \dots V_{k_l}^l})|^2 \cdot w_{\gamma'}(q) \cdot d^3x \cdot d\tau \\
&+ \int_0^t \frac{\epsilon}{(1+\tau)} \cdot \underbrace{\mathcal{E}_k^{good,\gamma'}(\Phi^{(l)})(\tau)}_{decoupled\ energy} d\tau \Big],
\end{aligned} \tag{4.3}$$

and

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}_k^{full,\gamma'}(\Phi^{(l)})(t)+\sum_{V_1^l\in\mathcal{U},\dots,V_{k_l}^l\in\mathcal{U}}\ \sum_{|I|\le k}\int_0^t\int_{\Sigma_\tau^{ext}}|\nabla^{(\mathbf{m})}{}_t\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l,\dots,V_{k_l}^l}|^2\cdot d\tau\cdot\frac{\widehat{w}_{\gamma'}(q)}{(1+|q|)}d^3x\\
\lesssim\ & E(k+3)\cdot\big[\mathcal{E}_k^{full,\gamma'}(\Phi^{(l)})(0)+\epsilon^2\\
&+\sum_{V_1^l\in\mathcal{U},\dots,V_{k_l}^l\in\mathcal{U}}\sum_{|I|\le k}\int_0^t\int_{\Sigma_\tau^{ext}}\frac{(1+\tau)}{\epsilon}\cdot|\mathcal{L}_{Z^I}(g^{\mu\alpha}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\mu\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\alpha\Phi^{(l)}_{V_1^l,\dots,V_{k_l}^l})|^2\cdot w_{\gamma'}(q)\cdot d^3x\cdot d\tau\\
&+\int_0^t\frac{\epsilon}{(1+\tau)}\cdot\mathcal{E}_k^{full,\gamma'}(\Phi^{(l)})(\tau)d\tau\big]\ .
\end{aligned}\tag{4.4}
$$

类似地，对于 $\Phi^{(0)}-h^0$，这次使用（4.9），我们也得到

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}_k^{good,\gamma'}(\Phi^{(0)}-h^0)(t)+\sum_{V_1^0\in\mathcal{S}_1^0,V_2^0\in\mathcal{S}_2^0}\ \sum_{|I|\le k}\int_0^t\int_{\Sigma_\tau^{ext}}|\nabla^{(\mathbf{m})}{}_t\mathcal{L}_{Z^I}(\Phi^{(0)}-h^0)_{V_1^0V_2^0}|^2\cdot d\tau\cdot\frac{\widehat{w}_{\gamma'}(q)}{(1+|q|)}d^3x\\
\lesssim\ & E(k+3)\cdot\big[\mathcal{E}_k^{good,\gamma'}(\Phi^{(l)})(0)+\epsilon^2\\
&+\sum_{V_1^0\in\mathcal{S}_1^0,V_2^0\in\mathcal{S}_2^0}\sum_{|I|\le k}\int_0^t\int_{\Sigma_\tau^{ext}}\frac{(1+\tau)}{\epsilon}\cdot|\mathcal{L}_{Z^I}(g^{\mu\alpha}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\mu\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\alpha\Phi^{(0)}_{V_1^0V_2^0})|^2\cdot w_{\gamma'}(q)\cdot d^3x\cdot d\tau\\
&+\int_0^t\frac{\epsilon}{(1+\tau)}\cdot\underbrace{\mathcal{E}_k^{good,\gamma'}(\Phi^{(0)}-h^0)(\tau)}_{decoupled\ energy}d\tau\big]\ ,
\end{aligned}\tag{4.5}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}_k^{full,\gamma'}(\Phi^{(0)}-h^0)(t)+\sum_{V_1^0\in\mathcal{U},V_2^0\in\mathcal{U}}\ \sum_{|I|\le k}\int_0^t\int_{\Sigma_\tau^{ext}}|\nabla^{(\mathbf{m})}{}_t\mathcal{L}_{Z^I}(\Phi^{(0)}-h^0)_{V_1^0V_2^0}|^2\cdot d\tau\cdot\frac{\widehat{w}_{\gamma'}(q)}{(1+|q|)}d^3x\\
\lesssim\ & E(k+3)\cdot\big[\mathcal{E}_k^{full,\gamma'}((\Phi^{(0)}-h^0))(0)+\epsilon^2\\
&+\sum_{V_1^0\in\mathcal{U},V_2^0\in\mathcal{U}}\sum_{|I|\le k}\int_0^t\int_{\Sigma_\tau^{ext}}\frac{(1+\tau)}{\epsilon}\cdot|\mathcal{L}_{Z^I}(g^{\mu\alpha}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\mu\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\alpha\Phi^{(0)}_{V_1^0V_2^0})|^2\cdot w_{\gamma'}(q)\cdot d^3x\cdot d\tau\\
&+\int_0^t\frac{\epsilon}{(1+\tau)}\cdot\mathcal{E}_k^{full,\gamma'}(\Phi^{(0)}-h^0)(\tau)d\tau\big]\ .
\end{aligned}\tag{4.6}
$$

注 4.0.3. 我们再次提醒，$E(k+3)\colon=1$ 在这里仅仅是为了提醒我们，我们使用了关于场的 $k+3$ 阶导数的自举假设 (2.2)，其权重为 w_γ。

注 4.0.4. 事实上，我们将 $w_{\gamma'}$ 用作辅助权重，之后它将帮助我们更新权重为 w_γ 时的能量界。

注 4.0.5. 正如我们将看到的，$E(k+3)$ 中损失 *3* 阶导数，而非采用 $E(k)$，是由交换子估计导致的（见第 *4.1* 小节）。

注 4.0.6。 在外部区域中，可以改进对 $0<\delta\le\frac{1}{4}$ 的限制。该限制源于引理 *3.0.3*，使得度量的良分量在内部区域和外部区域中均满足相应的估计，从而解耦能量估计也能够在内部区域和外部区域中成立。

为实现这一点，首先我们使用 (2.10)，

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Sigma_t^{ext}} |\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\cdots V_{k_l}^l}|^2 \cdot w_{\gamma'}(q)\cdot d^3x + \int_0^t \int_{\Sigma_\tau^{ext}} |\not\nabla^{(\mathbf{m})}{}_t\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\cdots V_{k_l}^l}|^2 \cdot d\tau\cdot \widehat{w}'_{\gamma'}(q)d^3x \\
\lesssim\ & \int_{\Sigma_0^{ext}} |\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\cdots V_{k_l}^l}|^2 \cdot w_{\gamma'}(q)\cdot d^3x \\
&+\sum_{|I|\le k}\Big[\int_0^t\int_{\Sigma_\tau^{ext}} \Big(|H_{LL}|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\cdots V_{k_l}^l}|^2 + |H|\cdot|\not\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\cdots V_{k_l}^l}|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\cdots V_{k_l}^l}|\Big)\cdot d\tau\cdot\widehat{w}'_{\gamma'}(q)d^3x \\
&+\int_0^t\int_{\Sigma_\tau^{ext}} \Big((|\nabla^{(\mathbf{m})}H_{LL}|+|\not\nabla^{(\mathbf{m})}H|)\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\cdots V_{k_l}^l}|^2 \\
&\qquad +|\nabla^{(\mathbf{m})}H|\cdot|\not\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\cdots V_{k_l}^l}|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\cdots V_{k_l}^l}|\Big)\cdot d\tau\cdot w_{\gamma'}(q)d^3x \\
&+\int_0^t\int_{\Sigma_\tau^{ext}} |g^{\mu\alpha}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\mu\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\alpha\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\cdots V_{k_l}^l}|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}{}_t\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\cdots V_{k_l}^l}|\cdot d\tau\cdot w_{\gamma'}(q)d^3x\,.\Big]\,.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

对于 $l\in\{1,\dots,N\}$，我们对式 (4.7) 中的最后一项作如下估计，

$$
\begin{aligned}
&|g^{\mu\alpha}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\mu\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\alpha\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\cdots V_{k_l}^l}|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}{}_t\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\cdots V_{k_l}^l}| \\
\lesssim\ & (1+\tau)\cdot|g^{\mu\alpha}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\mu\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\alpha\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\cdots V_{k_l}^l}|^2 + \frac{1}{(1+\tau)}|\nabla^{(\mathbf{m})}{}_t\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\cdots V_{k_l}^l}|^2 \\
\lesssim\ & (1+\tau)\cdot|\mathcal{L}_{Z^I}(g^{\mu\alpha}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\mu\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\alpha\Phi^{(l)}_{V_1^l\cdots V_{k_l}^l})|^2 \\
&+\frac{(1+\tau)}{\epsilon}\cdot|g^{\alpha\beta}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\alpha\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\beta\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\cdots V_{k_l}^l} - \mathcal{L}_{Z^I}(g^{\alpha\beta}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\alpha\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\beta\Phi^{(l)}_{V_1^l\cdots V_{k_l}^l})|^2 \\
&+\frac{\epsilon}{(1+\tau)}|\nabla^{(\mathbf{m})}{}_t\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\cdots V_{k_l}^l}|^2\,.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

交换子项由此进入，这也是我们在 (2.4) 中最高阶李导数前得到正确因子$\epsilon\ (1+\tau)$ 的原因之一。

我们得到最高阶李导数前正确因子$1\ (1+\tau)$ 的另一种方式是：在能量估计中，度量的良分量在零阶李导数层级上的衰减更快，如 (2.14) 所示；而其他衰减不够快的分量，则作为场的低阶李导数的因子出现。

然而，对于 $l=0$，由于我们考虑的波动方程是关于 $(\Phi^{(0)}-h^0)_{\mu\nu}$ 的方程，见注 1.2.4，因此源项中有一个额外项，即 $-g^{\alpha\beta}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\alpha\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\beta h^0_{\mu\nu}$，所以我们改为按如下方式对 $(\Phi^{(0)}-h^0)_{\mu\nu}$ 进行分解

$$
\begin{aligned}
&|g^{\mu\alpha}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\mu\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\alpha\mathcal{L}_{Z^I}(\Phi^{(0)}-h^0)_{V_1^0V_2^0}|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}{}_t\mathcal{L}_{Z^I}(\Phi^{(0)}-h^0)_{V_1^0V_2^0}| \\
\lesssim\ & |g^{\mu\alpha}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\mu\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\alpha\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(0)}_{V_1^0V_2^0}|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}{}_t\mathcal{L}_{Z^I}(\Phi^{(0)}-h^0)_{V_1^0V_2^0}| \\
&+|g^{\mu\alpha}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\mu\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\alpha\mathcal{L}_{Z^I}h^0_{V_1^0V_2^0}|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}{}_t\mathcal{L}_{Z^I}(\Phi^{(0)}-h^0)_{V_1^0V_2^0}|\,.
\end{aligned}
$$

对于第一项，我们按照上文（4.8）中的描述，使用由 $\Phi^{(0)}$ 我们的耦合波动方程组（1.19）–（1.20）给出的源项。对于第二项，我们利用以下事实：对 $M\le\epsilon^2\le\epsilon\le 1$，有（参见 [28]），

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{\Sigma_\tau^{ext}} |\mathcal{L}_{Z^I}\big(g^{\alpha\beta}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\alpha \nabla^{(\mathbf{m})}{}_\beta h^0\big)| \cdot |\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}(\Phi^{(0)}-h^0)_{V_1^0V_2^0}| w_{\gamma'}(q)\, d^3x d\tau \\
\leq\ & E(|I|)\cdot\epsilon^2 + E(|I|)\cdot\epsilon^2 \cdot \sum_{|K|\leq |I|} \int_0^t \frac{1}{(1+\tau)} \int_{\Sigma_\tau^{ext}} |\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}(\Phi^{(0)}-h^0)_{V_1^0V_2^0}|^2 \cdot w_{\gamma'}(q)\cdot d^3x d\tau\,,
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

这就是我们如何为该项得到正确的因子 ^{1} ~~$(1+\tau)$~~。

现在，我们剩下需要考察的是当 $l \in\{1,\dots,N\}$ 时的项 $|g^{\mu\alpha}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\mu\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\alpha\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}{}_t\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|$；对于度量，类似地考察项 $|g^{\mu\alpha}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\mu\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\alpha\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(0)}_{V_1^0V_2^0}|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}{}_t\mathcal{L}_{Z^I}(\Phi^{(0)}-h^0)_{V_1^0V_2^0}|$。我们回顾一下，交换子项可以利用针对切向分量解耦的交换子估计 (2.11) 进行估计，因此得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{(1+t)}{\epsilon}\cdot|g^{\lambda\mu}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\lambda\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\mu\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l} - \mathcal{L}_{Z^I}(g^{\lambda\mu}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\lambda\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\mu\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l})|^2 \\
\lesssim\ & \sum_{|K|\leq|I|-1}\frac{(1+\tau)}{\epsilon}\cdot|g^{\lambda\mu}\cdot\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\lambda\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\mu\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|^2 \\
&+\frac{(1+t)}{\epsilon\cdot(1+t+|q|)^2}\cdot\sum_{|K|\leq|I|,\ \ |J|+(|K|-1)_+\leq|I|}|\mathcal{L}_{Z^J}H|^2\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|^2 \\
&+\frac{(1+t)}{\epsilon\cdot\underbrace{(1+|q|)^2}_{\text{bad factor}}}\cdot\sum_{|K|\leq|I|,\ \ |J|+(|K|-1)_+\leq|I|}|\mathcal{L}_{Z^J}H_{LL}|^2\cdot\underbrace{\Big(\sum_{V_1'\in\mathcal{V}_1^l,\dots,V_{k_l}'\in\mathcal{V}_{k_l}^l}|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1'\dots V_{k_l}'}|^2\Big)}_{\text{decoupled tangential components}}\,,
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

其中

$$
\mathcal{V}_k^l=\begin{cases}\mathcal{T} & \text{when}\quad V_k^l\in\mathcal{T},\\ \mathcal{U} & \text{when}\quad V_k^l\in\mathcal{U}\,,\end{cases}
$$

并且，当 $|K|\geq 1$ 时，$(|K|-1)_+=|K|-1$；当 $|K|=0$ 时，$(|K|-1)_+=0$。

引理 4.0.7。对于 $\gamma\geq 3\delta$ 和 $0<\delta\leq\frac{1}{4}$，在外部区域中，以下估计对 $M\leq\epsilon$ 成立，并且对所有 $|I|\leq K$ 也成立，

$$
\begin{aligned}
&|H_{LL}|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|^2+|H|\cdot|\not\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}| \\
\lesssim\ & E(3)\cdot\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)}\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|^2+E(3)\cdot\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{1-\delta}}\cdot|\not\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|^2\,,
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&(|\nabla^{(\mathbf{m})}H_{LL}|+|\not\nabla^{(\mathbf{m})}H|)\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|^2+|\nabla^{(\mathbf{m})}H|\cdot|\not\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi_V|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}| \\
\lesssim\ & E(3)\cdot\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)\cdot(1+|q|)}\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|^2+E(3)\cdot\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{1-\delta}\cdot(1+|q|)}\cdot|\not\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|^2\,.
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

证明。为证明 (4.11)，我们使用自举假设所蕴含且引理 3.0.2 中给出的 `先验衰减估计，以及引理 3.0.3 中关于固定坐标系下度量条件的估计，从而得到

$$
\begin{aligned}
&|H_{LL}|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|^2+|H|\cdot|\not\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi_V|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|\\
\lesssim\quad & E(3)\cdot\frac{\epsilon\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|^2}{(1+t+|q|)}+E(2)\cdot\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{1-\delta}}\cdot|\not\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|\,.
\end{aligned}
$$

我们对不等式右侧的第二项作如下估计，

$$
\begin{aligned}
&E(2)\cdot\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{1-\delta}}\cdot|\not\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|\\
=\quad & E(2)\cdot\frac{\sqrt{\epsilon}\cdot\sqrt{(1+t+|q|)}}{(1+t+|q|)^{1-\delta}}\cdot|\not\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|\cdot\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{(1+t+|q|)}}\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|\\
\lesssim\quad & E(3)\cdot\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{1-\delta}}\cdot|\not\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|^2+E(3)\cdot\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)}\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|^2\,.
\end{aligned}
$$

现在我们证明 (4.12)。利用引理 3.0.2 和引理 3.0.3，我们得到

$$
\begin{aligned}
&(|\nabla^{(\mathbf{m})}H_{LL}|+|\not\nabla^{(\mathbf{m})}H|)\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|^2+|\nabla^{(\mathbf{m})}H|\cdot|\not\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|\\
\lesssim\quad & E(3)\cdot\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)\cdot(1+|q|)}\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|^2\\
&+E(3)\cdot\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{1-\delta}\cdot(1+|q|)}\cdot|\not\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|\,.
\end{aligned}
$$

完全沿用我们估计不等式右侧第二项 (4.11) 时所用的论证，即可得到所述结果。

□

4.1 交换子项

现在，我们也可以先利用这样一个事实来估计 (4.10) 中的乘积：对乘积求导时，其中一项所含的导数阶数不会超过总导数阶数的一半。这对于得到解耦能量估计至关重要，因为这种估计所用的导数阶数不能超过提升正则性所需的阶数。然而，在目前阶段，这一点还不重要，因为我们估计波动方程源项的李导数时，无论如何都会用到比提升正则性所需更多的导数。为了推导 `先验估计，我们别无选择，只能利用自举假设对涉及的所有导数进行估计，从而估计波动方程的源项。因此，目前我们可以暂且利用自举假设对所有导数进行估计，以估计交换子项。之后，我们将在第6.1小节重新讨论交换子项，并利用只涉及一半导数的自举假设对其进行估计，尽管我们原本也可以直接这样做。我们希望这也能使论证更加清晰。

引理 4.1.1. 对于 $0<\delta\le\frac{1}{4}$ 和 $\gamma'<1+\gamma-\delta$，对所有 $l\in\{1,\dots,N\}$，我们有：

$$
\int_0^t\int_{\Sigma_\tau^{ext}}\frac{(1+\tau)\cdot w_{\gamma'}(q)}{\epsilon\cdot(1+\tau+|q|)^2}\cdot\sum_{|K|\le|J|}\Big(\sum_{|J'|+(|K|-1)_+\le|J|}|\mathcal{L}_{Z^{J'}}H|^2\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}(\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l)})|^2\Big)r^2drd\tau\quad\lesssim\quad E(|J|+2)\cdot\epsilon^2\,,
$$

and

$$
\int_0^t\int_{\Sigma_\tau^{ext}}\frac{(1+\tau)\cdot w_{\gamma'}(q)}{(1+\tau+|q|)^2}\cdot\sum_{|K|\le|J|}\Big(\sum_{|J'|+(|K|-1)_+\le|J|}|\mathcal{L}_{Z^{J'}}H|^2\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}(\mathcal{L}_{Z^K}(\Phi^{(0)}-h^0)|^2\Big)r^2drd\tau\quad\lesssim\quad E(|J|+2)\cdot\epsilon^2\,.
$$

证明。由引理 3.0.2 可知，对所有 $|J'|,\ |K|\le|J|$,

$$
|\mathcal{L}_{Z^{J'}}H|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}(\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l)})|\quad\le\quad E(|J|+2)\cdot\frac{\epsilon^2}{(1+t+|q|)^{2-2\delta}(1+|q|)^{1+\gamma+\delta}}\,.
$$

因此，在外部区域中，我们有

$$\begin{aligned} & w_{\gamma'}(q)\cdot|\mathcal{L}_{Z^{J'}}H|^2\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}(\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l)})|^2 \\ \leq\ & E(|J|+2)\cdot\frac{\epsilon^4\cdot(1+|q|)^{1+2\gamma'}}{(1+t+|q|)^{4-4\delta}(1+|q|)^{2+2\gamma+2\delta}}\leq E(|J|+2)\cdot\frac{\epsilon^4}{(1+t+|q|)^{4-4\delta}(1+|q|)^{1+2\delta+2(\gamma-\gamma')}}\,. \end{aligned}$$

因此，

$$\frac{(1+t)\cdot w_{\gamma'}(q)}{\epsilon\cdot(1+t+|q|)^2}\cdot|\mathcal{L}_{Z^{J'}}H|^2\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}(\mathcal{L}_{Z^K}A)|^2\ \leq\ E(|J|+2)\cdot\frac{\epsilon^3}{(1+t+|q|)^{5-4\delta}(1+|q|)^{1+2\delta+2(\gamma-\gamma')}}\,.$$

由于

$$r^2\leq(1+t+|q|)^2\,, \tag{4.13}$$

我们得到

$$\begin{aligned} & \int_0^t\int_{\Sigma_\tau^{ext}}\frac{(1+t)\cdot w_{\gamma'}(q)}{\epsilon\cdot(1+t+|q|)^2}\cdot|\mathcal{L}_{Z^{J'}}H|^2\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}(\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l)})|^2\Big)r^2drd\tau \\ \lesssim\ & \int_0^t\int_{\Sigma_\tau^{ext}}E(|J|+2)\cdot\frac{\epsilon^3}{(1+t+|q|)^{3-4\delta}(1+|q|)^{1+2\delta+2(\gamma-\gamma')}}dr \\ \lesssim\ & E(|J|+2)\int_0^t\frac{\epsilon^3}{(1+t)^{1+\epsilon'}}\cdot\int_{\Sigma_\tau^{ext}}\frac{\epsilon^3}{(1+t+|q|)^{2-4\delta-\epsilon'}(1+|q|)^{1+2\delta+2(\gamma-\gamma')}}dr \\ \lesssim\ & E(|J|+2)\int_0^t\frac{\epsilon^3}{(1+t)^{1+\epsilon'}}\cdot\int_{\Sigma_\tau^{ext}}\frac{\epsilon^3}{(1+|q|)^{3-2\delta-\epsilon'+2(\gamma-\gamma')}}dr\,. \end{aligned}$$

对于 $\gamma'<1+\gamma-\delta$，当 ϵ' 足够小时，我们有 $3-2\delta-\epsilon'+2(\gamma-\gamma')>1$。因此，

$$\begin{aligned} & \int_0^t\int_{\Sigma_\tau^{ext}}\frac{(1+t)\cdot w_{\gamma'}(q)}{\epsilon\cdot(1+t+|q|)^2}\cdot|\mathcal{L}_{Z^{J'}}H|^2\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}(\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l)})|^2\Big)r^2drd\tau \\ \lesssim\ & E(|J|+2)\cdot\epsilon^3\,. \end{aligned}$$

同理，我们得到关于 $\Phi^{(0)}-h^0$ 的结果。 □

注 4.1.2. 我们注意到，如果在引理 *4.1.1* 中，将 $\frac{1}{(1+\tau+|q|)^2}$ 不等式左侧的因子替换为 $\frac{1}{(1+|q|)^2}$，，那么这些积分将不可积，这促使我们引入以下引理 *4.1.3*。

引理 4.1.3. 对于 $M\leq\epsilon$ 和 $0<\delta\leq\frac{1}{4}$，以及对任意 γ'，对所有 $l\in\{1,\dots,N\}$，我们有

$$\begin{aligned} & \int_0^t\int_{\Sigma_\tau^{ext}}\frac{(1+\tau)\cdot w_{\gamma'}(q)}{\epsilon\cdot(1+|q|)^2}\cdot\sum_{|K|\leq|J|}\Big(\sum_{|J'|+(|K|-1)_+\leq|J|}|\mathcal{L}_{Z^{J'}}H_{LL}|^2\cdot\sum_{V_1^l\in\mathcal{S}_1^l,\dots,V_{k_l}^l\in\mathcal{S}_{k_l}^l}|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|^2\Big)r^2drd\tau \\ \lesssim\ & \int_0^t\int_{\Sigma_\tau^{ext}}E(|J|+3)\cdot\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)}\cdot\sum_{|K|\leq|J|}\sum_{V_1^l\in\mathcal{S}_1^l,\dots,V_{k_l}^l\in\mathcal{S}_{k_l}^l}|\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|^2\cdot w_{\gamma'}(q)r^2drd\tau\,, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} & \int_0^t\int_{\Sigma_\tau^{ext}}\frac{(1+\tau)\cdot w_{\gamma'}(q)}{\epsilon\cdot(1+|q|)^2}\cdot\sum_{|K|\leq|J|}\Big(\sum_{|J'|+(|K|-1)_+\leq|J|}|\mathcal{L}_{Z^{J'}}H_{LL}|^2\cdot\sum_{V_1^0\in\mathcal{S}_1^0,V_2^0\in\mathcal{S}_2^0}|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}(\Phi^{(0)}-h^0)_{V_1^0V_2^0}|^2\Big)r^2drd\tau \\ \lesssim\ & \int_0^t\int_{\Sigma_\tau^{ext}}E(|J|+3)\cdot\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)}\cdot\sum_{|K|\leq|J|}\sum_{V_1^0\in\mathcal{S}_1^0,V_2^0\in\mathcal{S}_2^0}|\nabla^{(\mathbf{m})}(\Phi^{(0)}-h^0)_{V_1^0V_2^0}|^2\cdot w_{\gamma'}(q)r^2drd\tau\,. \end{aligned}$$

证明. 对于 $l \in \{1, \dots, N\}$，我们将下列和式分解为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\epsilon \cdot (1+|q|)^2} \cdot \sum_{|K| \le |J|} \Big(\sum_{|J'|+(|K|-1)_+ \le |J|} |\mathcal{L}_{Z^{J'}} H_{LL}|^2 \cdot \sum_{V_1^l \in \mathcal{S}_1^l, \dots, V_{k_l}^l \in \mathcal{S}_{k_l}^l} |\nabla^{(\mathbf{m})} \Phi^{(l)}_{V_1^l \dots V_{k_l}^l}|^2 \Big) \\
\lesssim \quad & \sum_{|I| \le |J|} |\mathcal{L}_{Z^I} H_{LL}|^2 \cdot \sum_{|K| \le |J|} \sum_{V_1^l \in \mathcal{S}_1^l, \dots, V_{k_l}^l \in \mathcal{S}_{k_l}^l} |\nabla^{(\mathbf{m})} \mathcal{L}_{Z^K} \Phi^{(l)}_{V_1^l \dots V_{k_l}^l}|^2 \, .
\end{aligned}$$

根据引理 3.0.3，对于 $M \le \epsilon$ 以及对于 $\delta \le \frac{1}{4}$，我们有

$$\frac{1}{(1+|q|)^2} \sum_{|I| \le |J|} |\mathcal{L}_{Z^I} H_{LL}|^2 \quad \lesssim \quad E(|J|+3) \cdot \frac{\epsilon^2}{(1+t+|q|)^2} \, .$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\frac{(1+t) \cdot w_{\gamma'}(q)}{\epsilon \cdot (1+|q|)^2} \cdot \sum_{|K| \le |J|} \Big(\sum_{|I| \le |J|} |\mathcal{L}_{Z^I} H_{LL}|^2 \cdot \sum_{V_1^l \in \mathcal{S}_1^l, \dots, V_{k_l}^l \in \mathcal{S}_{k_l}^l} |\nabla^{(\mathbf{m})} \Phi^{(l)}_{V_1^l \dots V_{k_l}^l}|^2 \Big) \\
\le \quad & E(|J|+3) \cdot \frac{\epsilon}{(1+t+|q|)} \cdot \sum_{|K| \le |J|} \sum_{V_1^l \in \mathcal{S}_1^l, \dots, V_{k_l}^l \in \mathcal{S}_{k_l}^l} |\nabla^{(\mathbf{m})} \Phi^{(l)}_{V_1^l \dots V_{k_l}^l}|^2 \cdot w_{\gamma'}(q) \, .
\end{aligned}$$

类似地，我们得到关于 $\Phi^{(0)} - h^0$ 的估计。

□

4.2 切向导数的时空积分

我们注意到，当使用引理 4.0.7 处理 (4.7) 时，会得到带有一个看似不利因子的导数，从而阻碍我们在形如 (2.4) 的所需不等式中得到形如 $\frac{1}{(1+t)}$ 的正确因子。然而，这些看似错误的衰减率并不是作用于任意导数的因子，而是作用于切向导数的因子；对于切向导数，我们在解耦的高阶能量估计中可以控制其时空积分。因此，我们将证明，当 δ 足够小且取决于 μ 时，可以将这些积分吸收到能量估计 (4.7) 的左端，从而它们不会出现在形如 (2.4) 的所需不等式中。

我们注意到，出现在切向导数的时空积分前面的权重实际上是 $\widehat{w}'_{\gamma'}(q)$；根据权重的定义 (2.8)，它实际上是 $\widehat{w}_{(q)\,(1+|q|)}$。

而在能量估计 (4.7) 中出现在 (4.12) 前面的权重实际上是 $w_{\gamma'}(q)$。因此，对于项 (4.12)，我们需要将一个由以下所规定的时空积分吸收到左端

$$\int_0^t \int_{\Sigma_\tau^{ext}} E(3) \cdot \frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{1-\delta} \cdot (1+|q|)} \cdot |\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})} \Phi_V|^2 \cdot w_{\gamma'}(q) \cdot d^n x \ \cdot d\tau \, .$$

一方面，对于 $q < 0$，我们知道 $\widehat{w}_{\gamma'(q)\,(1+|q|)} = \frac{1}{(1+|q|)^{1-2\mu}}$、$\mu < 0$，以及 $\widehat{w}_{\gamma'(q)\,(1+|q|)} = \frac{1}{(1+|q|)}$。因此，我们期望吸收右端的时空积分

$$\int_0^t \int_{\Sigma_\tau^{ext}} E(3) \cdot \frac{\epsilon}{(1+|q|)^{2-\delta}} \cdot |\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})} \Phi_V|^2 \cdot d^n x \ \cdot d\tau \tag{4.14}$$

将其转化为左侧的时空积分，如下所示，其中 $\mu < 0$，

$$\int_0^t \int_{\Sigma_\tau^{ext}} \frac{\widehat{w}_{\gamma'}(q)}{(1+|q|)} \cdot |\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})} \Phi_V|^2 \quad = \quad \frac{1}{(1+|q|)^{1-2\mu}} \cdot |\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})} \Phi_V|^2 \cdot d^n x \ \cdot d\tau \, . \tag{4.15}$$

我们可以取 μ 足够小，并取 δ 足够小，使其依赖于 μ，从而当 ϵ 足够小时，时空积分 (4.14) 可以吸收到能量估计 (4.7) 中左侧的时空积分 (4.15) 里。

另一方面，对于 $q>0$，我们有 $w_{\gamma'}(q)=\widehat{w}_{\gamma'}(q)$，因此当 ϵ 足够小时，例如取 $\delta\le 1$ 时，它可以吸收到左侧。

类似地，我们处理项 (4.11)。此时，权重与 (4.7) 左端控制切向导数的权重相同；此外，由自举假设带来的因子 ϵ 可以被吸收到 (4.7) 的左端，只要 ϵ足够小。

因此，如上所述，考虑到 (4.7) 中权重的行为，(4.11) 和 (4.12) 中仅剩下以下各项

$$\int_0^t\int_{\Sigma_\tau^{ext}} E(3)\cdot\frac{\epsilon}{(1+\tau+|q|)\cdot(1+|q|)}\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi_V|^2\cdot w_{\gamma'}(q)d^3x\cdot d\tau\,,$$

这些项具有所需的良好因子 $^{1}{}_{(1+\tau)}$。——

4.3 结论

重新考察解耦能量估计 (4.7)，并考虑我们按照 (4.8) 处理源项的方式、引理 4.0.7、4.1.1 和 4.1.3，以及第 4.2 小节中的讨论，可得命题 4.0.2。

5 关于能量的改进 `先验界

在本节中，我们可以首先利用命题 4.0.2 中的解耦能量估计，并结合切向分量的解耦交换子估计 (2.11)，将自举假设 (2.2) 从 δ 次幂提升到 $c.\epsilon$ 次幂，但同时要求对多于我们所提升对象的导数施加 `先验自举假设，因此它尚未 构成真正的提升。实现这一点的方法是对 k 使用归纳法来证明

$$\mathcal{E}_k(t)\le E(k+5)\cdot\epsilon\cdot(1+t)^{c\cdot\epsilon}\,,\tag{5.1}$$

通过要求自举假设 (2.2) 对 $k+5$ 个导数成立，因此尚未闭合自举论证。这一点在稍后阶段将被转化为场上的逐点衰减，并且仅应用于大约一半的导数，从而闭合自举论证。

定义 5.0.1. 我们回顾定义 *4.0.1*，然后定义包含场在内的完整系统的解耦高阶能量范数如下

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_k^{good,\gamma'}(t) &:= \sum_{l\in\{1,\dots,N\}}\mathcal{E}_k^{good,\gamma'}(\Phi^{(l)})(t)+\mathcal{E}_k^{good,\gamma'}(\Phi^{(0)}-h^0)(t)\,,\\ \mathcal{E}_k^{full,\gamma'}(t) &:= \sum_{l\in\{1,\dots,N\}}\mathcal{E}_k^{full,\gamma'}(\Phi^{(l)})(t)+\mathcal{E}_k^{full,\gamma'}(\Phi^{(0)}-h^0)\,.\end{aligned}$$

本节的目标是证明以下命题。

Pr命题 5.0.2. 设 $M\le\epsilon$、$\gamma\ge 5\delta$ 和 $0<\delta\le\frac14$。那么，对于 $\gamma'<1+4\delta$，我们有

$$\mathcal{E}_k^{good,\gamma'}(t)\lesssim E(k+3)\cdot\epsilon\cdot(1+t)^{c\cdot\epsilon}\,,\tag{5.2}$$

对于 $\mathcal{E}^{good}{}_{,k}{}^{\gamma'}(0)<\epsilon^2$，这是一种如我们证明策略中所概述的(2.5) 类型的估计（因此，这还不算改进，因为导数存在损失）。此外，如果我们再使用(5.2) 和 $a\gamma'>\frac12+\gamma$，那么我们有

$$\mathcal{E}_k^{full,\gamma}(t)\lesssim E(k+5)\cdot\epsilon\cdot(1+t)^{c\cdot\epsilon}\,.\tag{5.3}$$

对于 $\mathcal{E}^{full}{}_{,k}{}^{\gamma}(0)<\epsilon^2$。因此，这要求初始数据满足 $\mathcal{E}^{good}{}_{,k}{}^{\gamma'}(0)<\epsilon^2$，其中 γ'满足 $\frac12+\gamma<\gamma'<1+4\delta$，由此在权重 w_γ下根据自举假设可得（5.3）。因此，对于满足 $0<5\delta\le\gamma<\frac12+4\delta$ 的任意 γ，我们得到引理 *5.3.1* 中场的改进点态先验界 `。

注 5.0.3。 回顾一下，自举假设仅采用了权重 γ 。我们的最终目标是改进（5.2），使其中对于足够大的 k，用 $E(k)$ 替代 $E(k+5)$ 。这将是下一节的目标。

5.1 良分量能量的改进先验界

引理 5.1.1. 设 $M \leq \epsilon$、 $\gamma \geq 3\delta$ 和 $0 < \delta < \frac{1}{2}$。对于 $\gamma' < 1 + 4\delta$，在外部区域中，良分量的源项满足以下估计，对所有 $l \in \{0, 1, \ldots, N\}$，

$$\int_0^t \int_{\Sigma_\tau^{ext}} \frac{(1+\tau)}{\epsilon} \cdot |\mathcal{L}_{Z^I}\Big(g^{\alpha\beta}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\alpha \nabla^{(\mathbf{m})}{}_\beta \Phi^{(l)}_{\mathcal{S}_1^l \ldots \mathcal{S}_{k_l}^l}\Big)|^2 r^2 \cdot w_{\gamma'}(q) dr d\tau \quad \lesssim \quad E(|I|+3) \cdot \epsilon^3 .$$

证明。 首先，我们使用引理 3.0.2 中的 `先验衰减估计，其中我们采用了权重为 w_γ 的自举假设 (2.2)。利用良波动方程 (1.20) 的结构，根据源项中是否含有 $\Phi^{(0)}$ 或 $\Phi^{(l)}$、 $l \in \{1, 2, \ldots, N\}$，可得在外部区域中

$$|\mathcal{L}_{Z^I}\Big(g^{\lambda\mu}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\lambda \nabla^{(\mathbf{m})}{}_\mu \Phi^{(l)}_{\mathcal{S}_1^l \ldots \mathcal{S}_{k_l}^l}\Big)| \leq \begin{cases} E(|I|+3) \cdot \frac{\epsilon^2}{(1+t+|q|)^{3-3\delta}(1+|q|)^{1+\gamma}} , \\ E(|I|+3) \cdot \frac{\epsilon^2}{(1+t+|q|)^{3-3\delta}(1+|q|)^{1+2\delta}} . \end{cases}$$

因此，对于所有 $l \in \{0, 1, \ldots, N\}$，我们在外部区域中有，

$$|\mathcal{L}_{Z^I}\Big(g^{\lambda\mu}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\lambda \nabla^{(\mathbf{m})}{}_\mu \Phi^{(l)}_{\mathcal{S}_1^l \ldots \mathcal{S}_{k_l}^l}\Big)| \quad \leq \quad E(|I|+3) \cdot \frac{\epsilon^2}{(1+t+|q|)^{3-3\delta}(1+|q|)^{1+\min\{2\delta,\gamma\}}} ,$$

从而，

$$\frac{(1+t)}{\epsilon} \cdot |\mathcal{L}_{Z^I}\Big(g^{\alpha\beta}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\alpha \nabla^{(\mathbf{m})}{}_\beta \Phi^{(l)}_{\mathcal{S}_1^l \ldots \mathcal{S}_{k_l}^l}\Big)|^2 \quad \lesssim \quad E(|I|+3) \cdot \frac{\epsilon^3}{(1+t+|q|)^{5-6\delta}(1+|q|)^{2+2\min\{2\delta,\gamma\}}} .$$

由于 $r^2 \lesssim (1+t+|q|)^2$, , 我们得到

$$\frac{(1+t)}{\epsilon} \cdot |\mathcal{L}_{Z^I}\Big(g^{\alpha\beta}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\alpha \nabla^{(\mathbf{m})}{}_\beta \Phi^{(l)}_{\mathcal{S}_1^l \ldots \mathcal{S}_{k_l}^l}\Big)|^2 r^2 \quad \lesssim \quad E(|I|+3) \cdot \frac{\epsilon^3}{(1+t+|q|)^{3-6\delta}(1+|q|)^{2+2\min\{2\delta,\gamma\}}} .$$

因此，

$$\begin{aligned} & \frac{(1+t)}{\epsilon} \cdot |\mathcal{L}_{Z^I}\Big(g^{\alpha\beta}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\alpha \nabla^{(\mathbf{m})}{}_\beta \Phi^{(l)}_{\mathcal{S}_1^l \ldots \mathcal{S}_{k_l}^l}\Big)|^2 \cdot r^2 \cdot w_{\gamma'}(q) \\ \lesssim \quad & E(|I|+3) \cdot \frac{\epsilon^3 \cdot (1+|q|)^{1+2\gamma'}}{(1+t+|q|)^{3-6\delta}(1+|q|)^{2+2\min\{2\delta,\gamma\}}} \\ \lesssim \quad & E(|I|+3) \cdot \frac{\epsilon^3}{(1+t+|q|)^{3-6\delta}(1+|q|)^{1-2\gamma'+2\min\{2\delta,\gamma\}}} \\ \lesssim \quad & E(|I|+3) \cdot \frac{\epsilon^3}{(1+t+|q|)^{1+\epsilon'}(1+|q|)^{3-6\delta-\epsilon'-2\gamma'+2\min\{2\delta,\gamma\}}} \end{aligned}$$

对于 $\gamma' < 1+2\min\{2\delta, \gamma\}$，则有 $3-2\gamma'+2\min\{2\delta,\gamma\} > 1$，并且通过选取足够小的 ϵ' 和 δ，我们有 $3-6\delta-\epsilon'-2\gamma'+2\min\{2\delta,\gamma\} > 1$，因而在 $|q|$ 上可积。对于 $\gamma \geq 3\delta$，我们有 $\min\{2\delta,\gamma\} = 2\delta$，因此关于 γ 的条件转化为条件 $\gamma' < 1 + 4\delta$。

□

推论 5.1.2. 设 $M \leq \epsilon$、 $\gamma \geq 5\delta$ 和 $0 < \delta \leq \frac{1}{4}$。对于- $\gamma' < 1 + 4\delta$， 我们有

$$\mathcal{E}_k^{good,\gamma'}(t) \lesssim E(k+3) \cdot \epsilon \cdot (1+t)^{c\cdot\epsilon} , \tag{5.4}$$

for 满足以下条件的初始数据： $\mathcal{E}^{good}{}_{,k}{}^{\gamma'}(0) < \epsilon$，并且满足自举假设 (2.2)-(2.1) .

证明。 我们可以将引理 5.1.1 中关于良分量源项的估计代入命题 4.0.2 中关于场的良分量的估计，即 (4.3) 和 (4.5)。对 k 使用归纳法，即可得到所需结果。

然而，我们注意到引理 5.1.1 要求 $\gamma' < 1 + 4\delta$，其中 $\gamma \geq 3\delta$。我们由命题 4.0.2 得到的解耦能量估计要求 $\gamma' < 1 + \gamma - \delta$，其中 $\gamma \geq 3\delta$。这两个条件彼此相容。事实上，通过选取 $\gamma \geq 5\delta$，我们可以将这两个条件简单地合并为$\gamma' < 1 + 4\delta$。我们还取 $\delta \leq \frac{1}{4}$。

□

因此，我们得以改进良分量能量的 `先验界，即$\mathcal{E}^{good}{}_{,k}{}^{\gamma'}(t)$，其中权重 $\gamma'$满足某一条件。进而，我们希望利用这一“改进”（这还不是真正的改进，因为我们使用的导数多于所要改进的对象）来为完整分量建立类似的 `先验“改进”。

5.2 对完整分量能量的改进 `先验界

我们先估计“坏”项 $\Phi^{(l_i)}{}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}} \cdot \Phi^{(l_j)}{}^{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}$。

引理 5.2.1. 设 $M \leq \epsilon$、 $\gamma \geq 5\delta$ 和 $0 < \delta < \frac{1}{2}$。那么，对于 $\gamma' > \frac{1}{2} + \gamma$，且在推论 *5.1.2* 的条件下，即 $\gamma' < 1 + 4\delta$，我们在外部区域有

$$\int_0^t \int_{\Sigma_\tau^{ext}} \frac{(1+t)}{\epsilon} \cdot |\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}|^2 \cdot |\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}|^2 \cdot w_\gamma(q) r^2 dr d\tau \lesssim E(|I|+5) \cdot \epsilon \cdot (1+t)^{c\cdot\epsilon} .$$

因此，对于$\frac{1}{2} + \gamma < \gamma' < 1 + 4\delta$，该估计成立。

证明. 一旦我们从推论 5.1.2 得到对 $\mathcal{E}^{good}{}_{,k}{}^{\gamma'}(t)$ 的 `先验控制，就可以使用加权 Klainerman–Sobolev 不等式，

$$\begin{aligned} |\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}| \cdot (1+t+|q|) \cdot \big[(1+|q|)\cdot w_{\gamma'}(q)\big]^{1/2} &\leq C \cdot \sum_{|K|\leq|I|+2} \|\big(w_{\gamma'}(q)\big)^{1/2}\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}(t,\cdot)\|_{L^2(\Sigma_t^{ext})} \\ &\lesssim E(k+5)\cdot\sqrt{\epsilon}\cdot(1+t)^{c\cdot\epsilon} . \end{aligned} \tag{5.5}$$

这尤其意味着可以控制 $|\nabla^{(\mathbf{m})}{}_L\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l_i)}{}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}|$；并且由于对所有 $U \in \mathcal{U}$，都有$\nabla^{(\mathbf{m})}{}_L V = 0$，我们在外部区域得到，

$$|\partial_{\underline{L}}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}| \lesssim E(|I|+5)\cdot\frac{\sqrt{\epsilon}}{(1+t+|q|)^{1-c\cdot\epsilon}\cdot(1+|q|)^{1+\gamma'}} .$$

沿着 q积分，详见 [26] ，可得

$$|\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}| \lesssim E(|I|+5)\cdot\frac{\sqrt{\epsilon}}{(1+t+|q|)^{1-c\cdot\epsilon}\cdot(1+|q|)^{\gamma'}} .$$

因此，

$$|\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}|^2 \cdot |\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}|^2 \lesssim E(|I|+5)\cdot\frac{\epsilon^2}{(1+t+|q|)^{4-c\cdot\epsilon}\cdot(1+|q|)^{4\gamma'}} ,$$

and

$$\frac{(1+t)}{\epsilon}\cdot|\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}|^2 \cdot |\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}|^2 \cdot w_\gamma(q) \lesssim E(|I|+5)\cdot\frac{\epsilon\cdot w_\gamma(q)}{(1+t+|q|)^{3-c\cdot\epsilon}\cdot(1+|q|)^{4\gamma'}} .$$

由于 $r^2 \lesssim (1+t+|q|)^2$, , 我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\Sigma_\tau^{ext}} \frac{(1+t)}{\epsilon} \cdot |\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}|^2 \cdot |\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}|^2 w_\gamma(q) r^2 dr \\
\lesssim &\int_{\Sigma_\tau^{ext}} E(|I|+5) \cdot \frac{\epsilon \cdot (1+|q|)^{1+2\gamma}}{(1+t+|q|)^{1-c\cdot\epsilon} \cdot (1+|q|)^{4\gamma'}} dr \\
\lesssim &\frac{1}{(1+t)^{1-c\cdot\epsilon}} \cdot \int_{\Sigma_\tau^{ext}} E(|I|+5) \cdot \frac{\epsilon}{(1+|q|)^{-1-2\gamma+4\gamma'}} dr \, .
\end{aligned}$$

当 $\gamma' > \frac{1}{2} + \gamma$ 时，我们有 $-1-2\gamma+4\gamma' > 1$，因此 r 中的积分是可积的。然而，我们所用的推论 5.1.2 要求 $\gamma' < 1+4\delta$。因此，对于 $\frac{1}{2}+\gamma < \gamma' < 1+4\delta$，我们有如下估计。

□

Now, we estimate the other "bad" terms, $\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}} \cdot \nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}$ and $\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}} \cdot \nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}$.

引理 5.2.2. 设 $M \le \epsilon$、 $\gamma \ge 5\delta$ 和 $0 < \delta < \frac{1}{2}$。那么，在推论 *5.1.2* 的条件下，即 $\gamma' < 1+4\delta$，对于 $\gamma' > \frac{\gamma}{2}$，在外部区域内有 $\quad -$

$$\int_0^t \int_{\Sigma_\tau^{ext}} \frac{(1+t)}{\epsilon} \cdot |\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}|^2 \cdot |\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}|^2 \cdot w_\gamma(q) r^2 dr d\tau \quad \lesssim \quad E(|I|+5) \cdot \epsilon \cdot (1+t)^{c\cdot\epsilon} \, ,$$

并且对于 $\gamma' > -\frac{1}{2} + \gamma$，在外部区域内有

$$\int_0^t \int_{\Sigma_\tau^{ext}} \frac{(1+t)}{\epsilon} \cdot |\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}|^2 \cdot |\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}|^2 \cdot w_\gamma(q) r^2 dr d\tau \quad \lesssim \quad E(|I|+5) \cdot \epsilon \cdot (1+t)^{c\cdot\epsilon} \, .$$

证明。 我们按照引理 5.2.1 的证明进行推导，得到

$$|\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}| \cdot |\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}| \lesssim E(|I|+5) \cdot \frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{2-c\cdot\epsilon} \cdot (1+|q|)^{1+2\gamma'}} \, .$$

因此,

$$|\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}|^2 \cdot |\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}|^2 \lesssim E(|I|+5) \cdot \frac{\epsilon^2}{(1+t+|q|)^{4-c\cdot\epsilon} \cdot (1+|q|)^{2+4\gamma'}} \, .$$

按照引理 5.2.1 的证明中的方法继续推导，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\Sigma_\tau^{ext}} \frac{(1+t)}{\epsilon} \cdot |\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}|^2 \cdot |\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}|^2 \cdot w_\gamma(q) r^2 dr \\
\lesssim &\int_{\Sigma_\tau^{ext}} E(|I|+5) \cdot \frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{1-c\cdot\epsilon} \cdot (1+|q|)^{1-2\gamma+4\gamma'}} dr \, .
\end{aligned}$$

我们有 $1-2\gamma+4\gamma' > 1$，当 $\gamma' > \frac{\gamma}{2}$ 时它是可积的。然而，推论 5.1.2 要求$\gamma' < 1+4\delta$。因此，对于 $\frac{\gamma}{2} < \gamma' < 1+4\delta$，我们得到该估计。
而对于导数的平方，我们得到

$$|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}|^2 \cdot |\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}|^2 \lesssim E(|I|+5) \cdot \frac{\epsilon^2}{(1+t+|q|)^{4-c\cdot\epsilon} \cdot (1+|q|)^{4+4\gamma'}} \, .$$

再次按照引理 5.2.1 的证明过程，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{\Sigma_\tau^{ext}} \frac{(1+t)}{\epsilon}\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}|^2\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}|^2\cdot w_\gamma(q)r^2dr\\ \lesssim\ &\int_{\Sigma_\tau^{ext}} E(|I|+5)\cdot\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{1-c\cdot\epsilon}\cdot(1+|q|)^{3-2\gamma+4\gamma'}}dr\,.\end{aligned}$$

当 $\gamma'>-\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}$ 时，我们有 $3-2\gamma+4\gamma'>1$，它是可积的。

□

引理 5.2.3. 设 $M\le\epsilon$、$\gamma\ge 5\delta$ 和 $0<\delta<\frac{1}{2}$。那么，应用推论 *5.1.2* 并取 γ'，使得 $\frac{1}{2}+\gamma<\gamma'<1+4\delta$，对于所有场 $l\in\{0,1,\ldots,N\}$，我们在外部区域得到完整分量源项的以下估计：

$$\int_0^t\int_{\Sigma_\tau^{ext}}\frac{(1+\tau)}{\epsilon}\cdot|\mathcal{L}_{Z^I}\Big(g^{\alpha\beta}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\alpha\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\beta\Phi^{(l)}_{\mathcal{U}_1\ldots\mathcal{U}_{k_l}}\Big)|^2r^2\cdot w_\gamma(q)drd\tau\ \lesssim\ E(|I|+5)\cdot\epsilon\cdot(1+t)^{c\cdot\epsilon}\,,$$

其中权重为 w_γ，即我们在自举假设 (2.1)-(2.2) 中使用的权重。

证明. 引理 5.2.1 5.2.2 $\gamma'<1+4\delta$ $\gamma'>\frac{1}{2}+\gamma>$.. $-\frac{1}{2}+\gamma$ $\gamma'>\frac{\gamma}{2}$ $\gamma'<1+4\delta$ $\{\frac{\gamma}{2},\frac{1}{2}+\gamma\}\equiv\frac{1}{2}+\gamma$ γ' 和 .. 要求 . 它们还要求下界 和 . 然而，对于，max . 因此，对 的条件是 $\frac{1}{2}+\gamma<\gamma'<1+4\delta$，以便估计坏波动方程 (1.19) 中新的非线性项。(1.19) 中的其他非线性项已在引理 5.1.1 中估计，该引理对γ'施加了更高的上界，即 $\gamma'<1+4\delta$。

□

推论 5.2.4。设 $M\le\epsilon$、$\gamma\ge 5\delta$ 和 $0<\delta\le\frac{1}{4}$。设 γ' 为 $\frac{1}{2}+\gamma<\gamma'<1+4\delta$，满足 $\mathcal{E}^{good}_{k}{}^{\gamma'}(0)<\epsilon^2$。那么，我们有

$$\mathcal{E}_k^{full,\gamma}(t)\lesssim E(k+3)\cdot\epsilon\cdot(1+t)^{c\cdot\epsilon}\,,\tag{5.6}$$

对于 $\mathcal{E}^{full}{}_{k}{}^{\gamma}(0)<\epsilon^2$。

证明。 我们将引理 5.2.3 中的估计代入命题 4.0.2 中的解耦能量估计。然后对 k 使用归纳法，并应用 Grönwall 引理，得到所述的能量界。

□

注 5.2.5。 γ' 的上界，即 $\gamma'<1+4\delta$，源自引理 *5.1.1*；结合 γ' 的下界来估计引理 *5.2.1* 中的坏项，这两者共同要求 $\gamma<\frac{1}{2}+4\delta$。然而， γ 的这个上界仅仅是因为引理 *5.1.1* 中的源项涉及度量 $\Phi^{(0)}$，其衰减率受到限制；而实际的良好估计针对的是 $\Phi^{(0)}-h^0$，因此 h^0 阻碍了 $\Phi^{(0)}$ 的衰减率。 γ' 的下界源于这些新的非线性项 $\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}\cdot\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}$ 不会

衰减 `先验快速到足以.....因此它们需要为 $\mathcal{E}^{good}{}_{k}{}^{\gamma'}(0)$ 添加额外权重，其中 $\gamma'>\frac{1}{2}+\gamma$。如果度量 $\Phi^{(0)}-h^0$中不存在这些新的非线性项，那么 γ' 就不会有依赖于 γ的下界，因此 γ 也就没有上界，进而 γ 可以自由选取。

5.3 场的改进先验逐点衰减

引理 5.3.1。 令 $M\le\epsilon$、$\gamma\ge 5\delta$ 和 $0<\delta\le\frac{1}{4}$。令 γ' 满足 $\frac{1}{2}+\gamma<\gamma'\prec 1+4\delta$，并且满足 $\mathcal{E}^{good}{}_{k}{}^{\gamma'}(0)<\infty$。那么，在采用权重 w_γ 的自举假设 (2.1)-(2.2) 下，通过选取 $0<5\delta\le\gamma<\frac{1}{2}+4\delta$，对于整个外部区域中的所有 $|I|\le K$，我们对所有 $l\in\{1,\ldots,N\}$ 有如下估计，

$$
\begin{aligned}
|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}(t,x)|+|\nabla^{(\mathbf{m})}(\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(0)}-h^0)(t,x)| &\lesssim E(|I|+7)\cdot\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{1-c\cdot\epsilon}\cdot(1+|q|)^{1+\gamma}}\,,\\
|\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}(t,x)|+|\mathcal{L}_{Z^I}(\Phi^{(0)}-h^0)(t,x)| &\lesssim E(|I|+7)\cdot\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{1-c\cdot\epsilon}\cdot(1+|q|)^{\gamma}}\,,\\
|\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}(t,x)|+|\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})}(\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(0)}-h^0)(t,x)| &\lesssim E(|I|+8)\cdot\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{2-c\cdot\epsilon}\cdot(1+|q|)^{\gamma}}\,.
\end{aligned}
$$

对于 $l=0$，我们在外部区域中有如下估计，

$$
\begin{aligned}
|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}H(t,x)|+|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(0)}(t,x)| &\lesssim E(|I|+7)\cdot\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{1-c\cdot\epsilon}\cdot(1+|q|)^{1+c\cdot\epsilon}}\,,\\
|\mathcal{L}_{Z^I}H(t,x)|+|\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(0)}(t,x)| &\lesssim E(|I|+7)\cdot\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{1-c\cdot\epsilon}\cdot(1+|q|)^{c\cdot\epsilon}}\,,\\
|\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}H(t,x)|+|\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(0)}(t,x)| &\lesssim E(|I|+8)\cdot\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{2-c\cdot\epsilon}\cdot(1+|q|)^{c\cdot\epsilon}}\,.
\end{aligned}
$$

证明。 根据推论 5.2.4，我们已经更新了带权重 $\gamma<\frac{1}{2}+4\delta$ 的 $\mathcal{E}^{full}_{\cdot,k}{}^{\gamma}(t)\lesssim E(|I|+5)\cdot\epsilon\cdot(1+t)^{c\cdot\epsilon}$ 的估计。使用权重为 w_γ 的加权 Klainerman–Sobolev 不等式，我们可以像之前一样，将其转化为 $\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}$ 和 $\mathcal{L}_{Z^I}(\Phi^{(0)}-h^0)$ 的逐点衰减，但要多损失两个导数。因此，利用引理 3.0.1 给出的 h^0 的已知衰减率，进而可得到 $\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(0)}$ 的衰减；根据注 1.4.1，也可得到 $\mathcal{L}_{Z^I}H$ 的衰减。 □

6 使用升级后的 `先验界结束自举

现在，我们希望利用能量的 `先验界以及 $0<5\delta\le\gamma<\frac{1}{2}+4\delta$。这些界是我们在命题 4.0.2 中通过对比升级后更多的导数作自举假设，并选取足够小的 $0\le\delta<\frac{1}{2}$ 得到的。我们还将利用引理 5.3.1 给出的场的逐点 `先验界，来获得适当的 Gr¨onwall 能量不等式；该能量估计不要求对比我们升级的更多导数作自举假设，只需取某个足够大的 $k=K$，便可结束自举论证。事实上，一旦我们升级了解耦能量的 `先验界和场的 `逐点先验界，利用波动方程源项的结构来结束自举论证便是标准做法。下面我们将概述如何结束这一论证。

6.1 重新审视交换子项

在第 4.1 小节，也就是引理 4.1.1 和 4.1.3 中，我们估计交换子项时使用了比场中涉及的导数更多的导数，因此无法据此闭合自举论证。在第 4.1 小节中，这样做是允许的，因为我们当时只想导出允许导数损失的 `先验估计，还不需要闭合自举论证。然而，现在我们已经在引理 5.3.1 中得到了 `先验估计，此时需要闭合自举论证，以证明这些确实是估计，前提是对足够多个李导数作出自举假设。

为此，我们希望仅利用场中大约一半导数所满足的自举假设来估计交换子项。具体步骤如下。

引理 6.1.1. 对于 $M\le\epsilon$ 和 $\gamma>\delta>0$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{(1+t)}{\epsilon}\cdot|g^{\lambda\mu}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\lambda}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\mu}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\ldots V_{k_l}^l}-\mathcal{L}_{Z^I}(g^{\lambda\mu}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\lambda}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\mu}\Phi^{(l)}_{V_1^l\ldots V_{k_l}^l})|^2\\
\lesssim\ &\sum_{|K|\le|I|-1}|g^{\lambda\mu}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\lambda}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\mu}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\ldots V_{k_l}^l}|^2\\
&+E(\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor+2)\cdot\Big(\sum_{|K|\le|I|}\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{3-2\delta}\cdot(1+|q|)^{2+2\gamma}}\cdot|\mathcal{L}_{Z^K}H|^2\\
&+\sum_{|K|\le|I|}\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{3-2\delta}}\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l)}_{V_1^l\ldots V_{k_l}^l}|^2+\sum_{|K|\le|I|}\frac{\epsilon\cdot|\mathcal{L}_{Z^K}H_{LL}|^2}{(1+t+|q|)^{1-\delta}\cdot(1+|q|)^{4+2\gamma}}\Big)\\
&+\sum_{|K|\le|I|}E(\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor+3)\cdot\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)}\cdot\sum_{V_1'\in\mathcal{V}_1^l,\ldots,V_{k_l}'\in\mathcal{V}_{k_l}^l}|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1'\ldots V_{k_l}'}|^2,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\mathcal{V}_k^l=\begin{cases}\mathcal{T} & when\quad V_k^l\in\mathcal{T},\\ \mathcal{U} & when\quad V_k^l\in\mathcal{U},\end{cases}
$$

并且当 $|K|\ge 1$ 时，$(|K|-1)_+=|K|-1$；当 $|K|=0$ 时，$(|K|-1)_+=0$。用 $\Phi^{(l)}$ 代替 $\Phi^{(0)}-h^0$，同样的估计仍然成立。

证明。回顾由 (4.10) 可知，对于所有 $l\in\{1,\ldots,N\}$，我们有:

$$
\begin{aligned}
&\frac{(1+t)}{\epsilon}\cdot|g^{\lambda\mu}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\lambda}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\mu}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\ldots V_{k_l}^l}-\mathcal{L}_{Z^I}(g^{\lambda\mu}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\lambda}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\mu}\Phi^{(l)}_{V_1^l\ldots V_{k_l}^l})|^2\\
\lesssim\ &\sum_{|K|\le|I|-1}\frac{(1+\tau)}{\epsilon}\cdot|g^{\lambda\mu}\cdot\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\lambda}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\mu}\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l)}_{V_1^l\ldots V_{k_l}^l}|^2\\
&+\frac{(1+t)}{\epsilon\cdot(1+t+|q|)^2}\cdot\sum_{|K|\le|I|,\ \ |J|+(|K|-1)_+\le|I|}|\mathcal{L}_{Z^J}H|^2\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l)}_{V_1^l\ldots V_{k_l}^l}|^2\\
&+\frac{(1+t)}{\epsilon\cdot(1+|q|)^2}\cdot\sum_{|K|\le|I|,\ \ |J|+(|K|-1)_+\le|I|}|\mathcal{L}_{Z^J}H_{LL}|^2\cdot\Big(\sum_{V_1'\in\mathcal{V}_1,\ldots,V_{k_l}'\in\mathcal{V}_{k_l}}|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1'\ldots V_{k_l}'}|^2\Big).
\end{aligned}
$$

我们用良性因子 ^{1} $(1+t+|q|)$ 来估计第一项，如下: ———

$$
\begin{aligned}
&\sum_{|K|\le|I|,\ \ |J|+(|K|-1)_+\le|I|}|\mathcal{L}_{Z^J}H|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l)}_{V_1^l\ldots V_{k_l}^l}|\\
\le\ &\sum_{|K|\le\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor,\,|J|\le|I|}|\mathcal{L}_{Z^J}H|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l)}_{V_1^l\ldots V_{k_l}^l}|+\sum_{|J|\le\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor,\,|K|\le|I|}|\mathcal{L}_{Z^J}H|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l)}_{V_1^l\ldots V_{k_l}^l}|.
\end{aligned}
$$

Bas根据我们的自举假设，由引理 3.0.2 可知，对所有 $|K|\le\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor$，—

$$
|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l)}|\ \le\ E(\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor+2)\cdot\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{1-\delta}\cdot(1+|q|)^{1+\gamma}},
$$

and

$$
|\mathcal{L}_{Z^K}H|\ \le\ E(\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor+2)\cdot\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{1-\delta}\cdot(1+|q|)^{\delta}}.
$$

代入后，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{|K|\le|I|,\ \ |J|+(|K|-1)_+\le|I|}\ \sum\ |\mathcal{L}_{Z^J}H|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|\\
\le\ & E(\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor+2)\cdot\Big(\sum_{|K|\le|I|}\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{1-\delta}\cdot(1+|q|)^{1+\gamma}}\cdot|\mathcal{L}_{Z^K}H|\\
&+\sum_{|K|\le|I|}\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{1-\delta}\cdot(1+|q|)^{\delta}}\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|\Big).
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(1+t+|q|)}\cdot\sum_{|K|\le|I|,\ \ |J|+(|K|-1)_+\le|I|}\ \sum\ |\mathcal{L}_{Z^J}H|\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|\\
\le\ & E(\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor+2)\cdot\Big(\sum_{|K|\le|I|}\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{2-\delta}\cdot(1+|q|)^{1+\gamma}}\cdot|\mathcal{L}_{Z^K}H|\\
&+\sum_{|K|\le|I|}\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{2-\delta}\cdot(1+|q|)^{\delta}}\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l)}_{V_1^l\dots V_{k_l}^l}|\Big).
\end{aligned}$$

现在我们来考察 含有坏因子（随时间 t 不衰减）的第二项，即 $^{1}{}_{(1+|q|)}$。我们有 —— e

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(1+|q|)}\cdot\sum_{|K|\le|I|,\ \ |J|+(|K|-1)_+\le|I|}\ \sum\ |\mathcal{L}_{Z^J}H_{LL}|\cdot\sum_{V_1'\in\mathcal{V}_1,\dots,V_{k_l}'\in\mathcal{V}_{k_l}}|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1'\dots V_{k_l}'}|\\
\le\ &\sum_{|J|\le\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor,\,|K|\le|I|}\frac{1}{(1+|q|)}\cdot|\mathcal{L}_{Z^J}H_{LL}|\cdot\sum_{V_1'\in\mathcal{V}_1,\dots,V_{k_l}'\in\mathcal{V}_{k_l}}|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1'\dots V_{k_l}'}|\\
&+\sum_{|K|\le\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor+1,\ \ }\ \sum_{|J|\le|I|}\frac{1}{(1+|q|)}\cdot|\mathcal{L}_{Z^J}H_{LL}|\cdot\sum_{V_1'\in\mathcal{V}_1,\dots,V_{k_l}'\in\mathcal{V}_{k_l}}|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1'\dots V_{k_l}'}|.
\end{aligned}$$

由引理 3.0.3 可得，对所有 $|J|\le\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor$，—

$$\frac{1}{(1+|q|)}\cdot|\mathcal{L}_{Z^J}H_{LL}|\ \lesssim\ E(\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor+3)\cdot\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)}.$$

根据引理 3.0.2 的 ˋ先验估计，我们有，对所有 $|K|\le\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor+1$，—

$$|\nabla^{(\mathbf{m})}(\mathcal{L}_{Z^K}\Phi)|\ \le\ E(\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor+2)\cdot\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{1-\delta}\cdot(1+|q|)^{1+\gamma}}.$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(1+|q|)}\cdot\sum_{|K|\le|I|,\ \ |J|+(|K|-1)_+\le|I|}\ \sum\ |\mathcal{L}_{Z^J}H_{LL}|\cdot\sum_{V_1'\in\mathcal{V}_1,\dots,V_{k_l}'\in\mathcal{V}_{k_l}}|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1'\dots V_{k_l}'}|\\
\lesssim\ &\sum_{|K|\le|I|}E(\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor+3)\cdot\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)}\cdot\sum_{V_1'\in\mathcal{V}_1,\dots,V_{k_l}'\in\mathcal{V}_{k_l}}|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1'\dots V_{k_l}'}|\\
&+\sum_{|K|\le|I|}E(\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor+2)\cdot\frac{\epsilon\cdot|\mathcal{L}_{Z^K}H_{LL}|}{(1+t+|q|)^{1-\delta}\cdot(1+|q|)^{2+\gamma}}.
\end{aligned}$$

最后，我们得到

$$
\begin{aligned}
& |g^{\lambda\mu}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\lambda}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\mu}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1^l\ldots V_{k_l}^l} - \mathcal{L}_{Z^I}(g^{\lambda\mu}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\lambda}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\mu}\Phi^{(l)}_{V_1^l\ldots V_{k_l}^l})| \\
\lesssim & \sum_{|K|<|I|} |g^{\lambda\mu}\cdot\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\lambda}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_{\mu}\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l)}_{V_1^l\ldots V_{k_l}^l}| \\
& + E(\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor+2)\cdot\Big(\sum_{|K|\le|I|}\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{2-\delta}\cdot(1+|q|)^{1+\gamma}}\cdot|\mathcal{L}_{Z^K}H| \\
& + \sum_{|K|\le|I|}\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{2-\delta}}\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l)}_{V_1^l\ldots V_{k_l}^l}|\Big) \\
& + \sum_{|K|\le|I|} E(\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor+3)\cdot\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)}\cdot\sum_{V_1'\in\mathcal{V}_1,\ldots,V_{k_l}'\in\mathcal{V}_{k_l}}|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l)}_{V_1'\ldots V_{k_l}'}| \\
& + \sum_{|K|\le|I|} E(\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor+2)\cdot\frac{\epsilon\cdot|\mathcal{L}_{Z^K}H_{LL}|}{(1+t+|q|)^{1-\delta}\cdot(1+|q|)^{2+\gamma}}\,.
\end{aligned}
$$

对 $\Phi^{(l)}-h^0$ 也同样如此。因此，我们得到了该结果。

□

6.2 解耦能量估计再探

借助引理 6.1.1 中对交换子项的新估计，我们可以像先前那样推导命题 4.0.2；只不过现在，由于我们仅在 $\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor+3$ 导数上的自举假设下估计了交换子项，即记号 $E(\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor+3)$ 所蕴含的内容，并且在引理 4.0.7 中估计解耦能量估计 (4.7) 的其余项时只涉及 $E(3)$，因此我们可以在命题 4.0.2 中将常数 $E(k+3)$ 替换为 $E(\lfloor\frac{k}{2}\rfloor+3)$，这将使我们能够闭合自举；然而，引理 6.1.1 的交换子估计中还有如下附加项

$$
\int_0^t\int_{\Sigma_\tau^{ext}}\sum_{|K|\le|I|}\Big(\frac{\epsilon\cdot|\mathcal{L}_{Z^K}H|^2}{(1+t+|q|)^{3-2\delta}\cdot(1+|q|)^{2+2\gamma}}+\frac{\epsilon\cdot|\mathcal{L}_{Z^K}H_{LL}|^2}{(1+t+|q|)^{1-\delta}\cdot(1+|q|)^{4+2\gamma}}\Big)\cdot w_{\gamma'}(q)\cdot r^2drd\tau\,. \tag{6.1}
$$

然而，这些可以利用下述Hardy型不等式来估计，该不等式我们复述自[28]。

引理 6.2.1. 假设 $\Phi_{V_1\ldots V_k}$ 对所有时间 t在空间无穷远处衰减得足够快。设 $\gamma'\neq0$ 与$0\le a\le2$，则我们在外部区域有如下估计，

$$
\int_{\Sigma_\tau^{ext}}\frac{1}{(1+t+r)^a}\cdot\frac{w_{\gamma'}(q)}{(1+|q|)^2}\cdot|\Phi_{V_1\ldots V_k}|^2r^2drd\sigma^2 \quad\le\quad c(\gamma')\cdot\int_{\Sigma_\tau^{ext}}\frac{w_{\gamma'}(q)}{(1+t+r)^a}\cdot|\partial_r\Phi_{V_1\ldots V_k}|^2r^2drd\sigma^2\,. \tag{6.2}
$$

我们注意到，(6.1)中的项 $|\mathcal{L}_{Z^K}H|^2$ 以 t 中正确的衰减进入，因此我们可以利用引理 6.2.1 的Hardy型不等式将其估计为$|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}H|^2$，随后利用(1.18)将其估计为 $|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(0)}|^2$，最后利用引理 3.0.1 中 h^0 的衰减率将其估计为 $|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}(\Phi^{(0)}-h^0)|^2$。这将导出形如在 t 中具有正确衰减的导数的项，其方式适合于一个良好的Gr¨onwall不等式。

而对于 (6.1) 中的项$|\mathcal{L}_{Z^K}H_{LL}|^2$ ，我们注意到它在 t 中的衰减不够快，即 $\frac{1}{(1+t+|q|)^{1-\delta}}$。然而，利用引理 6.2.1 的 Hardy型不等式，可以将其估计为$|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}H_{LL}|^2$。现在，利用我们对度量的假设，即 (1.30)，我们可以将 $|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}H_{LL}|^2$

进一步估计为 $|\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}H|$，以及其他衰减更快的项。这些项又可以估计为$|\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(0)}|$，因此也可以估计为 $|\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})}(\mathcal{L}_{Z^K}(\Phi^{(0)}-h^0)|$，再加上衰减良好的项以及 $|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}h^0|$。最后，我们还需处理 $|\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})}(\mathcal{L}_{Z^K}(\Phi^{(0)}-h^0)|$，它在 $|q|$ 中衰减良好，因此可以将其吸收到能量估计 (4.7) 的左端，就像我们在第 4.2 小节中所做的那样；也就是说，将它吸收到能量估计 (4.11) 和 (4.12) 左端的那一项中，该项的形式为

$$\int_0^t\int_{\Sigma_\tau^{ext}} E(3)\cdot\frac{\epsilon}{(1+t+|q|)^{1-\delta}\cdot(1+|q|)}\cdot|\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})}(\Phi^{(0)}-h^0)|^2\cdot w_{\gamma'}(q)\cdot d^nx\ \cdot d\tau\,. \tag{6.3}$$

然而，当我们对良分量应用解耦能量估计时，该阶段对形如 (6.3) 的切向导数进行能量估计时，所控制的仅是良分量；而由 (6.1) 结合 Hardy型不等式所产生的切向导数涉及完整分量，因此无法立即通过对良分量应用解耦能量估计将其吸收到左端。相反，这些项需要始终保留，以便在最后对完整分量应用能量估计时将其吸收到左端。类似地，对于含有良衰减因子的项，即 $|\mathcal{L}_{Z^K}H|^2$，虽然无需将其吸收，但应用 Hardy型不等式后，我们将其估计为$|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}(\Phi^{(0)}-h^0)|^2$；由于其中包含完整分量，因此也应始终保留，以便它出现在针对完整分量的 Gr¨onwall 型不等式中。应将这些时空积分视为需要保留的项，以便在最后对完整分量应用能量估计时处理。

总之，我们得到了一种命题 4.0.2 类型的能量估计，只使用 $E(\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor+3)$，也就是说，自举假设中仅涉及 $\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor+3$ 阶导数；右侧的时空积分涉及 $\nabla\!\!\!/^{(\mathbf{m})}H$，其在 $|q|$ 中带有一个良好因子，因此在对完整分量应用能量估计时，最终可将其吸收到左侧；此外，还有关于 $\nabla^{(\mathbf{m})}H$ 的时空积分，其在 t 中具有良好的衰减，最终将在 $\nabla^{(\mathbf{m})}(\Phi^{(0)}-h^0)$上给出一个良好的 Gr¨onwall 不等式。这些积分项需要保留到我们对完整分量应用能量估计时再处理，以便届时建立一个合适的 Gr¨onwall 型不等式。

注 6.2.2. 这也意味着，对完整分量应用能量估计时，我们需要处理单独出现的 $\mathcal{L}_{Z^K}h^0$ 项，因为当右侧出现形如 $|\nabla^{(\mathbf{m})}(\mathcal{L}_{Z^K}H)|$的项，也就是 $|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(0)}|$ 时，我们展开了能量估计右侧的 $|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(0)}|\le|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}(\Phi^{(0)}-h^0)|+|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}h^0|$，以便控制 $\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}(\Phi^{(0)}-h^0)$，因此留下了单独的 $\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}h^0$（我们回顾一下，$\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(0)}$ 具有无穷能量）。于是，我们需要单独处理 $\mathcal{L}_{Z^K}h^0$，而根据引理 *3.0.1*，它的衰减率有限。至于在 h^0上的波动方程项，则已在 (4.9) 中处理。

6.3 作为乘积的源项

为了控制良分量的波动方程的源项，即（1.20）右端，从而将该控制代入我们的解耦能量估计（4.7）中，我们需要使用引理 5.3.1 中改进后的 `先验衰减估计；在那里，我们将自举假设（2.1）—（2.2）中的 $\delta$ 替换为 $c\cdot\epsilon$，但同时要求对比我们所提升的更多导数作出自举假设（因此我们没有闭合自举论证）。现在，我们希望仅对一半导数使用这些改进后的 `先验估计，以提升更高阶导数，从而使我们能够对足够高阶的某个导数阶数闭合该论证。

为此，当我们估计“良”波动方程（1.20）的源项的导数时，为了控制

$$(1+\tau)\cdot|\mathcal{L}_{Z^I}(g^{\mu\alpha}\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\mu\nabla^{(\mathbf{m})}{}_\alpha\Phi^{(l)}_{V_1^l\cdots V_{k_l}^l})|^2 \tag{6.4}$$

在 (4.8) 中，我们认为，求导时其他项所含的导数不会超过一半。换言之，对于一个项的乘积，例如 $S_1\cdot S_2\cdot S_3$，李导数的乘积 $\mathcal{L}_{Z^I}$ 可以分解如下

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{L}_{Z^I}(S_1\cdot S_2\cdot S_3)| \;\leq\; & \sum_{|K|+|J|+|M|\leq |I|} |(\mathcal{L}_{Z^K}S_1)\cdot(\mathcal{L}_{Z^J}S_2)\cdot(\mathcal{L}_{Z^M}S_3)| \\
\leq\; & \sum_{|J|\,,|M|\leq \lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor\,,\,|K|\leq |I|} |\mathcal{L}_{Z^K}S_1|\cdot|\mathcal{L}_{Z^J}S_2|\cdot|\mathcal{L}_{Z^M}S_3| \\
& + \sum_{|K|\,,|M|\leq \lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor\,,\,|J|\leq |I|} |\mathcal{L}_{Z^K}S_1|\cdot|\mathcal{L}_{Z^J}S_2|\cdot|\mathcal{L}_{Z^M}S_3| \\
& + \sum_{|K|\,,|J|\leq \lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor\,,\,|M|\leq |I|} |\mathcal{L}_{Z^K}S_1|\cdot|\mathcal{L}_{Z^J}S_2|\cdot|\mathcal{L}_{Z^M}S_3|\,. \qquad (6.5)
\end{aligned}
$$

这将使我们能够通过能量估计 (4.7)-(4.8)，对 $\frac{1}{2}+\gamma<\gamma'<1+4\delta$ 的良分量的 $w_{\gamma'}$-加权L^2-范数进行控制；其中的体积分项是时空积分，必须全部纳入对完整分量的能量估计中。这样，当含有切向导数的项在$|q|$方面具有良因子时，这些项就可以被吸收到能量估计的不等式左边；而当这些项在 t 方面具有良因子时，则可对完整分量得到 Gr¨onwall 不等式。

现在轮到对完整分量应用能量估计了，权重应使用 w_γ，而不是对良分量使用的 w'_γ。对于“坏”方程 (1.19) 的源项中与之前相同的项，我们完全采用相同的步骤，但新增加的项除外

$$
O(\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}\cdot\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}})+O(\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}\cdot\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}})+O(\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}\cdot\nabla^{(\mathbf{m})}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}})\,, \qquad (6.6)
$$

对于这些项，我们需要对“良”分量使用解耦能量估计来进行控制。我们将利用这样一个事实：式 (6.6) 中涉及的项都是良分量，也就是说，它们都是满足良波动方程的项；对于这些方程，我们已在上文 (6.5) 中应用相应步骤，控制了它们的良解耦能量。至于完整波动方程 (1.19) 的源项中除式 (6.6) 以外的其他项，则可以使用 (6.5) 进行估计，因为这样会得到形式正确的项。

事实上，为了在能量估计 (4.8) 中处理 (6.4) 的源项里的 (6.6) 项，我们按如下方式进行。对于所有 $l\in\{0,1,\ldots,N\}$,

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{L}_{Z^I}(\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}\cdot\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}) \\
\lesssim\; & \sum_{|K|+|J|\leq |I|} |\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}|\cdot|\mathcal{L}_{Z^J}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}| \\
\leq\; & \sum_{|J|\leq\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor,\,|K|\leq|I|} |\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}|\cdot|\mathcal{L}_{Z^J}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}| + \sum_{|J|\leq\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor,\,|K|\leq|I|} |\mathcal{L}_{Z^J}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}|\cdot|\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}|\,.
\end{aligned} \qquad (6.7)
$$

使用能量估计时，我们需要区分 $l=0$ 的情形，因为此时应对 $\Phi^{(0)}-h^0$ 应用能量估计，这与 $\Phi^{(l)}$ 不同。不过，对于所有 $|J|\leq\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor$，加权 Klainerman-Sobolev 不等式对 $\frac{1}{2}+\gamma<\gamma'<1+4\delta$ 给出了 $l_i\in\{1,\ldots,N\}$ 的控制，

$$
\begin{aligned}
& |\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^J}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}|\cdot(1+t+|q|)\cdot\big[(1+|q|)\cdot w_{\gamma'}(q)\big]^{1/2} \\
\lesssim\; & \sum_{|K|\leq\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor+2} \|\big(w_{\gamma'}(q)\big)^{1/2}\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}(t,\cdot)\|_{L^2(\Sigma_t^{ext})} \lesssim \sqrt{\mathcal{E}^{good,\,\gamma'}_{\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor+2}(t)}
\end{aligned}
$$

因此，对所有 $|J|\leq\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor$，

$$
|\partial_{\underline{L}}\mathcal{L}_{Z^I}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}|\lesssim\frac{\sqrt{\epsilon}\cdot\sqrt{\mathcal{E}^{good,\,\gamma'}_{k}(t)}}{(1+t+|q|)\cdot(1+|q|)^{1+\gamma'}}\,.
$$

沿着 q 积分，详情请参见 [26]，我们得到对所有 $|J| \le \lfloor \frac{|I|}{2} \rfloor$。 —

$$|\mathcal{L}_{Z^J}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}| \lesssim \frac{\sqrt{\epsilon}\cdot\sqrt{\mathcal{E}^{good,\gamma'}_{\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor+2}(t)}}{(1+t+|q|)\cdot(1+|q|)^{\gamma'}}\,.$$

因此，

$$\begin{aligned}&\sum_{|J|\le\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor,\,|K|\le|I|}\frac{(1+t)}{\epsilon}\cdot|\mathcal{L}_{Z^J}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}|^2\cdot|\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}|^2\cdot w_\gamma(q)\\ \lesssim\;&\frac{\epsilon\cdot\mathcal{E}^{good,\gamma'}_{\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor+2}(t)}{(1+t+|q|)\cdot(1+|q|)^{2\gamma'}}\cdot|\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}|^2\cdot w_\gamma(q)\,,\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}&\int_{\Sigma_\tau^{ext}}\frac{(1+\tau)}{\epsilon}\cdot|\mathcal{L}_{Z^J}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}|^2\cdot|\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}|^2\cdot w_\gamma(q)\cdot r^2dr\\ \lesssim\;&\mathcal{E}^{good,\gamma'}_{\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor+2}(\tau)\cdot\int_{\Sigma_\tau^{ext}}\frac{\epsilon}{(1+\tau+|q|)\cdot(1+|q|)^{2\gamma'}}\cdot|\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}|^2\cdot w_\gamma(q)\cdot r^2dr\,.\end{aligned}\tag{6.8}$$

现在，由于 $\frac{1}{2}+\gamma<\gamma'<1+4\delta$，我们可以选择 $\gamma'\ge 1$，例如取 $\gamma'=1+2\delta$。因此，利用 $2\gamma'\ge 2$ 这一事实，我们可以在 (6.8) 中应用引理 6.2.1 的 Hardy型不等式，从而得到

$$\begin{aligned}&\int_{\Sigma_\tau^{ext}}\frac{(1+\tau)}{\epsilon}\cdot|\mathcal{L}_{Z^J}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}|^2\cdot|\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}|^2\cdot w_\gamma(q)\cdot r^2dr\\ \lesssim\;&\int_{\Sigma_\tau^{ext}}\frac{\epsilon\cdot\mathcal{E}^{good,\gamma'}_{\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor+2}(\tau)}{(1+\tau+|q|)}\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}|^2\cdot w_\gamma(q)\cdot r^2dr\\ \lesssim\;&\int_0^t\frac{\epsilon\cdot\mathcal{E}^{good,\gamma'}_{\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor+2}(\tau)}{(1+\tau)}\cdot\int_{\Sigma_\tau^{ext}}\cdot|\nabla^{(\mathbf{m})}\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}|^2\cdot w_\gamma(q)\cdot r^2drd\tau\,.\end{aligned}$$

因此，对所有 l_i，$l_j\in\{1,\ldots,N\}$，我们都有

$$\begin{aligned}&\int_{\Sigma_\tau^{ext}}\frac{(1+\tau)}{\epsilon}\cdot|\mathcal{L}_{Z^J}\Phi^{(l_i)}_{\mathcal{S}_1^{l_i}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_i}}^{l_i}}|^2\cdot|\mathcal{L}_{Z^K}\Phi^{(l_j)}_{\mathcal{S}_1^{l_j}\ldots\mathcal{S}_{k_{l_j}}^{l_j}}|^2\cdot w_\gamma(q)\cdot r^2dr\\ \lesssim\;&\int_0^t\frac{\epsilon}{(1+\tau)}\cdot\mathcal{E}^{good,\gamma'}_{\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor+2}(\tau)\cdot\mathcal{E}^{good,\gamma}_{|I|}(\tau)\cdot d\tau\,.\end{aligned}\tag{6.9}$$

同理，我们对 (6.6) 中的其他项也能得到相同的估计；由于乘积中已经包含一个导数，这些项的情形更好。至于 $l=0$ 的情形，我们写作 $\Phi^{(0)}=\Phi^{(0)}-h^0+h^0$，并将 $\Phi^{(0)}-h^0$ 上的能量纳入估计；对于含有 h^0 的项，则利用引理 3.0.1 中已知的衰减率进行处理。

因此，我们仅用 $\mathcal{E}^{good,\gamma'}_{\lfloor\frac{|I|}{2}\rfloor+2}(t)$ 和 $\mathcal{E}^{good,\gamma}_{|I|}(t)$ 就估计了所有“坏”项。然而，由于这些是良分量上的能量，且这些分量满足带有良性源项的良波动方程 (6.4)，因此，如上所述，利用 (6.5)，我们的解耦能量估计 (4.7)-(4.8) 表明，这些能量可以由场的时空积分控制，其中的因子足以使我们对整个系统的能量建立适当的 Gr¨onwall 不等式 (2.4)，并控制足够高阶的导数。

6.4 自举论证的闭合

我们来回顾一下已完成的工作。我们对整个张量型非线性波动方程耦合系统 (1.19)-(1.20) 进行了自举论证 (2.1)-(2.2)，所用能量带有权重 w_γ，且满足 γ，

使得 $0 < 5\delta \le \gamma < \frac{1}{2} + 2\delta$，这保证了 $\frac{1}{2} + \gamma < \frac{1}{2} + 2\delta < \frac{1}{2} + 4\delta$，从而我们可以应用命题 5.0.2。随后，我们选取 $\gamma' = 1 + 2\delta$，因此有 $\frac{1}{2} + \gamma < \gamma' = 1 + 2\delta(\gamma) < \frac{1}{2} + 4\delta$。此外，得益于解耦能量估计，我们可以通过命题 5.0.2 改进 (5.2) 中 $\mathcal{E}^{good}_{k}{}^{\gamma'}(t)$ 的界，以及 (5.3) 中 $\mathcal{E}^{full}_{k}{}^{\gamma}(t)$ 的界；在此过程中，我们用一个足够小的 ϵ 替换了 δ，并在引理 5.3.1 中得到了改进的点态先验界。然而，这一过程造成了导数损失，也就是说，我们必须在比所改进的导数更多的导数上使用自举假设 (2.1)-(2.2)。为了闭合自举，我们需要仅用不超过一半的导数所得到的这些先验界，建立适当的 Gr¨onwall 不等式，以便改进带有权重w_γ的整个系统的能量界。为此，我们利用这样一个事实：可以用这种方法估计 $\mathcal{E}^{good}_{k}{}^{\gamma'}(t)$，因为良波动方程源项的结构使我们能够得到关于场的时空积分，从而建立所需的 Gr¨onwall 型不等式，同时只使用如 (6.5) 中那样仅有一半导数的改进衰减。随后，我们利用对良分量能量的这一控制，控制完整系统 (6.6) 中新的不良非线性项；这是因为这些非线性项仅涉及良分量，而我们已经对其能量进行了适当控制。因此，我们能够控制带有权重 w_γ 的系统 $\mathcal{E}^{full}_{k}{}^{\gamma}(t)$ 的能量，从而得到一个形式如 (2.4) 的适当 Gr¨onwall 不等式，使我们能够在 ϵ 足够小时，对足够高阶的若干导数改进能量界。

最后，对于任意的 $0 \le \delta < \frac{1}{4}$，选取 γ 使得 $0 < 5\delta \le \gamma < \frac{1}{2} + 2\delta$ 并且 $\gamma' = 1 + 2\delta$。关于 γ 和 γ' 的这些条件满足命题 5.0.2 的条件，使我们能够改进关于能量的先验界以及场的点态界，并利用这些界对良分量的能量进行适当控制，进而控制完整系统的能量；这里用到了坏的非线性项仅涉及良分量这一事实。

利益冲突与经费资助声明：本文中的工作由作者在获得中国北京数学与应用数学研究院（BIMSA）资助期间完成。

数据可用性声明：本文所述研究未生成或分析任何数据集。

参考文献

[1] S. Alinhac，拟线性波动方程在无穷远处爆破的一个例子，Autour de l'analyse microlocale，Ast´erisque，第284期（2003），第1–91页。[2] L. Andersson，P. Blue，*Kerr* 时空上波动方程的隐藏对称性与衰减。《数学年刊》（第2辑）182（2015），第3期，787–853。[3] L. Andersson，P. Blue，缓慢旋转的 *Kerr* 黑洞外部区域中麦克斯韦场的一致能量界与渐近行为。《双曲微分方程杂志》12（2015），第4期，689–743。[4] Y. Angelopoulos，S. Aretakis，D. Gajic，极端 *Reiss-ner–Nordstr¨om* 背景上波动方程的晚期渐近行为，数学进展375，107363（2020）。[5] Y. Angelopoulos，S. Aretakis，D. Gajic，次极端 *Reissner–Nordstr¨om* 黑洞的 *Price* 定律与精确晚期渐近行为，《Henri Poincar´e 年刊》24(9)，3215–3287（2023）。[6] N. Athanasiou，P. Mondal，S-T. Yau，爱因斯坦-杨-米尔斯系统中俘获面的形成，《纯粹与应用数学杂志´ematiques Pureset Appliqu´ees，103661（2025）。[7] L. Bieri，广义相对论中闵可夫斯基空间稳定性定理的推广，博士论文。苏黎世联邦理工学院。（2007）。[8] L. Bieri，广义相对论中闵可夫斯基空间稳定性定理的推广：爱因斯坦真空方程的解，AMS-IP。《高等数学研究》。剑桥，马萨诸塞州。（2009）。

[9] *L. Bieri*，《广义相对论中闵可夫斯基空间稳定性定理的推广》，《微分几何杂志》*86*，第*1*期（*2010*），*17–70*。[10] *L. Bieri*，*P. Chen*，*S-T. Yau*，《广义相对论与引力辐射中爱因斯坦-麦克斯韦方程解的零渐近性》，《理论与数理物理进展》*15*，*4*，（*2011*）。[11] *L. Bigorgne*，*D. Fajman*，*J. Joudioux*，*J. Smulevici*，*M. Thaller*，《非紧支撑无质量弗拉索夫物质下闵可夫斯基时空的渐近稳定性》，理性力学与分析档案*242*，*1–147*，*2021*。[12] *Y. Choquet-Bruhat* 和 *D. Christodoulou*，《杨–米尔斯、希格斯与旋量场方程整体解的存在性》，$3+1$ 维，《高等师范学校科学年刊》（第*4*辑），*14(4):481–506*（*1982*），*1981*。[13] *D. Christodoulou*，《小初值下非线性双曲方程的整体解》，《纯粹与应用数学通讯》*39(2):267–282*，*1986*。[14] *D. Christodoulou*，*S. Klainerman*，《闵可夫斯基空间的全局非线性稳定性》，普林斯顿数学丛书*41*，*1993*。[15] *P. Chru´sciel*，*J. Shatah*，《整体双曲四维洛伦兹流形上杨–米尔斯方程解的整体存在性》，《亚洲数学杂志》*1*（*1997*），第*3*期，*530–548*。[16] *M. Dafermos*，*I. Rodnianski*，《黑洞时空中的红移效应与辐射衰减》，《纯粹与应用数学通讯》*62*（*2009*），*859–919*。[17] *M. Dafermos*，*I. Rodnianski*，《波动方程衰减的一种新的物理空间方法及其在黑洞时空中的应用》，载于《第十六届国际数理物理大会》，*P. Exner*（编），世界科学出版社，伦敦，*2009*，第*421–433*页。[18] *M. Dafermos*，*I. Rodnianski*，《黑洞与线性波讲义》，载于《演化方程》，克雷数学论文集，第*17*卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，*2013*，第*97–205*页[19] *D. Eardley*，*V. Moncrief*，《四维闵可夫斯基空间中杨–米尔斯–希格斯场的整体存在性。*I.* 局部存在性与光滑性》，《数学物理通讯》*83*（*1982*），第*2*期，*171–191*。[20] *D. Eardley*，*V. Moncrief*，《四维闵可夫斯基空间中杨–米尔斯–希格斯场的整体存在性。*II.* 证明的完成》，《数学物理通讯》*83*（*1982*），第*2*期，*193–212*。[21] *H. Friedrich*，《关于具有光滑渐近结构的 n-测地完备或未来完备的爱因斯坦场方程解的存在性》，《数学物理通讯》*107(4):587–609*，*1986*。[22] *H. Friedrich*，《爱因斯坦-麦克斯韦-杨–米尔斯方程解的整体存在性与渐近行为》，《微分几何杂志》*34*（*1991*），*275–345*。[23] *S. Ghanem*，《弯曲时空上杨–米尔斯曲率整体不爆破》，《双曲微分方程杂志》，第*13*卷，第*03*期，*603–631*（*2016*），*arXiv:1312.5476*。[24] *S. Ghanem*，《黑洞时空中麦克斯韦场的一致衰减》，《数理物理评论》，第*36*卷（第*06*期），（*2024*）。[25] *S. Ghanem*，*D. H¨afner*，《球对称小能量初始数据下施瓦西黑洞上 *SU(2)*杨–米尔斯场的衰减》，《几何与物理杂志》*123*（*2018*），*310–342*，*arXiv:1604.04477*。[26]*S. Ghanem*，《高维闵可夫斯基时空的全局稳定性》，*arXiv*预印本：*2310.07954*。[27]*S. Ghanem*，《爱因斯坦-杨-米尔斯场的能量估计及其应用》，*arXiv*预印本：*2310.08611*。

[28] *S. Ghanem*，爱因斯坦-杨-米尔斯方程所描述的（$1+3$）维闵可夫斯基时空解的外部稳定性，*arXiv*预印本：*2310.08196*。[29] *S. Ghanem*，洛伦兹规范下由爱因斯坦-杨-米尔斯系统支配的（$1+3$）维闵可夫斯基时空外部稳定性证明概述，*arXiv*预印本：*2501.00071*。[30] *O. Graf*，类空特征初值下闵可夫斯基空间的全局非线性稳定性，*SMF*回忆录，*184*，*2025*。[31] *D. H¨afner*，*P. Hintz*，*A. Vasy*，缓慢旋转克尔黑洞的线性稳定性，《数学发明》，*223*：*1227–1406*（*2021*）。[32] *P. Hintz*，广义调和规范下闵可夫斯基空间的外部稳定性，理性力学与分析档案 *247 (99)*，*2023*。[33] *P. Hintz* 和 *A. Vasy*，闵可夫斯基空间的稳定性与度量的多重齐次性，《*PDE*年刊》*6 (1)*：第*2*篇，*146*页，*2020*。[34] *L. H¨ormander*，非线性双曲方程经典解的存在时间，《伪微分算子》（奥伯沃尔法赫，*1986*），*214–280*，数学讲义，*1256*，*Springer*，柏林，*1987*。[35] *L. H¨ormander*，关于小初值下的完全非线性柯西问题 *II*，《微局部分析与非线性波》（明尼阿波利斯，明尼苏达州，*1988–1989*），*51–81*，*IMA*数学及其应用丛书，*30*，*Springer*，纽约，*1991*。[36] *L. H¨ormander*，《非线性双曲型微分方程讲义》，*Springer-Verlag*，柏林，*1997*。[37] *C. Huneau*，具有平移类空 *Killing* 场的闵可夫斯基时空稳定性，《*PDE*年刊》（*2018*）*4*：*12*。[38] *F. John*，三维空间中拟线性波动方程的爆破，《纯粹与应用数学通讯》*34*（*1981*），第*1*期，*29–51*。*MR 600571*。[39] *F. John*，$u_{tt} = c^2$（u_t）∇u 在三维空间中的径向解爆破，《应用数学与计算》*4*（*1985*），第*1*期，*3–18*。*MR 808321*。[40] *I. Kadar*，小数据非线性波动方程的数值规律：渐近行为的作用，《微分方程杂志》*418*（*2025*），*305–373*。*MR 4833090*[41]*J. Keir*，弱零条件与利用*p*加权能量方法证明整体存在性，*arXiv*：*1808.09982*，预印本（*2018*）。[42] *J. Keir*，具有有界稳定渐近系统的非线性波动方程组的整体存在性，*arXiv*：*1906.01649*，预印本（*2019*）。[43] *S. Klainerman*，一致衰减估计与经典波动方程的洛伦兹不变性，《纯粹与应用数学通讯》*38(3)*：*321–332*，*1985*。[44] *S. Klainerman*，零条件与非线性波动方程的整体存在性，载于《应用数学中的非线性偏微分方程组》第*1*部分（新墨西哥州圣菲，*1984*），《应用数学讲义》第*23*卷，第*293–326*页。美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，*1986*。[45] *S. Klainerman* 和 *F. Nicol`o*，《广义相对论中的演化问题》，《数学物理进展》第 *25* 卷，*2003*。[46] *H. Lindblad*，非线性波动方程的整体解，《纯粹与应用数学通讯》*45*（*1992*），第*9*期，*1063–1096*。[47] *H. Lindblad*，拟线性波动方程的整体解，《美国数学杂志》*130*（*2008*），第*1*期，*115–157*。[48] *H. Lindblad*，波坐标下爱因斯坦真空方程解的渐近行为，《数学物理通讯》*353*（*2017*），第*1*期，*135–184*。

[49] *H. Lindblad* 和 *I. Rodnianski*，爱因斯坦方程的弱零条件，巴黎科学院数学报告 *336*（*2003*），第*11*期，*901–906*。[50] *H. Lindblad*，*I. Rodnianski*，波坐标下爱因斯坦真空方程的整体存在性，《数学物理通讯》*256*：*43–110*，*2005*。[51] *H. Lindblad*，*I. Rodnianski*，调和规范下闵可夫斯基时空的全局稳定性。《数学年刊》（第*2*辑）*171*（*2010*），第*3*期，*1401–1477*。[52] *H. Lindblad* 和 *M. Taylor*，调和规范下闵可夫斯基空间对爱因斯坦–*Vlasov*系统的全局稳定性，理性力学与分析档案 *235*，*517–633*，*2020*。[53] *H. Lindblad*，*M. Tohaneanu*，*Kerr*背景上的弱零条件，分析与偏微分方程，第*17*卷（*2024*），第*8*期，*2971–2996*。[54] *C. Liu*，*T. A. Oliynyk*，*J. Wang*，时空维数为 $n \geq 4$时爱因斯坦-杨-米尔斯方程类德西特解的未来整体存在性与稳定性，《欧洲数学学会杂志》（*2024*），*10.4171/JEMS/1556*。[55] *J. Loizelet*，爱因斯坦-麦克斯韦方程的整体解，《图卢兹数学科学学院年刊》（第*6*辑），*18(3)*：*565–610*，*2009*。[56] *J. Luk*，*S-J. Oh*，*D. Yu*，满足弱零条件的标量拟线性波动方程的晚期尾部，*arXiv*预印本：*2510.22122*。[57] *S. Ma*，施瓦西时空中的近似*Price*定律与*Kerr*时空中麦克斯韦场的衰减估计，《微分方程杂志》，第*339*卷，*2022*年*12*月*5*日，第*1–89*页。[58] *J. Metcalfe*，*D. Tataru*，*M. Tohaneanu*，黑洞时空中麦克斯韦场的逐点衰减，《数学进展》，第*316*卷，第*53–93*页（*2017*）。[59] *P. Mondal* 和 *S. T. Yau*，闵可夫斯基空间的全局外部稳定性：耦合爱因斯坦-杨-米尔斯扰动，《数学物理学杂志》*65*，*042502*（*2024*），*arXiv*：*2211.03167*。[60] *P. Mondal* 和 *S. T. Yau*，双零框架下的爱因斯坦-杨-米尔斯方程，《分析与几何通讯》（*2025*）。[61] *F. Pasqualotto*，施瓦西背景下麦克斯韦–*Born–Infeld*系统的非线性稳定性，《*PDE*年刊》*5(2)*：第*19*篇，*172*页，*2019*。[62] *D. Shen*，外部区域中闵可夫斯基时空的稳定性，《纯粹与应用数学季刊》*20 (2)*，*757–868*，*2024*。[63] *D. Shen*，具有最小衰减的闵可夫斯基时空全局稳定性，*arXiv*：*2310.07483*，*2023*。[64] *D. Shen*，具有临界衰减的闵可夫斯基时空外部稳定性，*arXiv*预印本：*2405.00735*。[65] *J. Speck*，波坐标下爱因斯坦–非线性系统的闵可夫斯基时空解的全局稳定性，《分析与偏微分方程》*7*，第*4*期，*2014*。[66] *D. Wei*，*S. Yang*，*P. Yu*，杨–米尔斯–希格斯方程的全局动力学，《数学物理通讯》*405*（*2024*），第*1*期。[67] *N. Zipser*，《爱因斯坦-麦克斯韦方程平凡解的全局非线性稳定性》，博士论文，哈佛大学，*2000*。[68] *N. Zipser*，《广义相对论中闵可夫斯基空间稳定性定理的推广——爱因斯坦-麦克斯韦方程的解》，*AMS-IP*，《高等数学研究》，剑桥，马萨诸塞州（*2009*）。