arXiv:2603.01943v1 [stat.ME] 2 Mar 2026

比较有序结局建模推断性质的模拟研究：支持（简洁而稳健的）比例优势模型

Stefan Inerle[1],Markus Pauly[1,2],Moritz Berger[3]

[1]统计系，多特蒙德工业大学[2]可信数据科学与安全研究中心，鲁尔大学联盟（UA Ruhr）[3]生物统计核心平台，中央精神卫生研究所，曼海姆医学院，海德堡大学，曼海姆，德国

作者说明

Stefan Inerle https://orcid.org/0009-0002-7259-4760
MarkusPauly https://orcid.org/0000-0002-0976-7190
Moritz Berger https://orcid.org/0009-0002-0656-5286

关于本文的通信请联系 Stefan Inerle，统计系，多特蒙德工业大学，Vogelpothsweg 87，44221 多特蒙德，德国。电子邮箱：stefan.inerle@tu-dortmund.de

摘要

ordinal 测量常见于心理学以及社会科学和行为科学研究的结局。为此类数据选择合适的回归模型是一项艰巨的任务。本文旨在通过呈现一项广泛模拟研究的结果，帮助定量研究者做出建模决策。该研究考察了常见有序回归模型的推断性质：比例优势模型、类别特异优势模型、位置平移模型、位置尺度模型，以及错误地将有序结局视为度量数据的线性模型。模拟基于每一种有序模型所对应的不同数据生成过程进行，并在各模型类别中采用不同的参数配置。我们考察了参数估计值的偏差，以及与相应模型对应的统计参数检验程序的 I 类错误率（α-错误）和功效。研究结果揭示了若干重要发现。就参数估计值而言，当真实数据生成过程的结果分布具有较大的参数值和较高的偏度时，累积有序回归模型会出现较大的偏差。在统计假设检验方面，比例优势模型和线性模型表现出最可靠的结果。鉴于比例优势模型对有序结局具有更好的拟合度和可解释性，除非存在相关禁忌因素，否则我们建议使用该模型。

关键词：有序回归、回归模型、优势比、估计偏差、 α-误差、功效

1 引言

在心理学（例如 Joshi 等人，2015 年）以及医学（例如 Sullivan 和 Artino，2013 年）等其他学科中，处理有序数据是一项常见挑战。对于本文研究的回归问题而言，这一点尤为明显。一个关键挑战是选择合适的模型和方法来分析有序结局。为此，我们首先需要决定是否要将结局视为度量变量。

许多作者建议使用有序模型，以强调将有序结局视为度量变量可能导致解释上的问题（例如 Brunner 等人，2018年）或推断错误（例如 Liddell & Kruschke，2018年），例如当均值接近有序尺度的端点时。如果我们选择使用有序模型，下一步就是决定采用哪一种。Tutz（2022a）对有序回归模型进行了全面综述，而 Bürkner 和 Vuorre（2019）则从理论出发，建议根据有序模型对数据中理论假定关系的反映程度来选择模型。

相比之下，Knief & Forstmeier（2021）认为，高斯模型具有惊人的稳健性，即使面对分类数据也是如此。他们还强调，更复杂的方法可能存在一些固有风险，而定量研究者未必能充分理解或意识到这些风险。此外，许多应用研究者更青睐简单的高斯线性模型。Liddell & Kruschke（2018）所呈现的文献综述也反映了这一点：其中所有涉及有序结局的研究都使用度量模型进行分析。

为了更深入地探讨这一问题，并为撰写本文做准备，我们利用 PubPsych 进行了文献综述。我们的目标是更清楚地了解实证研究中哪些有序模型被用于有序结局。为此，我们在 PubPsych（https://pubpsych.zpid.de/pubpsych/）中使用“regression”以及“ordinal”或“ordered”作为搜索词，并且只纳入了发表于 2014 至 2023 年、且我们能够获取全文的研究。排除所有未明确报告使用有序模型的论文后，最终得到 458 篇论文。其中，6 篇论文使用了两种不同的方法，另有 1 篇论文使用了 4 种不同的方法。11 篇论文未明确说明有序模型的使用方式或应用位置。50 篇论文采用了某种形式的混合模型，另有 4 篇使用了贝叶斯方法；这两类方法均超出本研究的范围。在剩余的 396 篇论文中，最常见的模型是比例优势模型（McCullagh，1980；Tutz，2011），共见于 205 篇（52%）论文。其他发现的模型包括部分比例优势模型（Peterson 和 Harrell，1990），见于 14 篇（3.5%）论文；以及类别特异优势模型（Peterson 和 Harrell，1990；Tutz，2011），见于 2 篇（0.5%）论文。其他论文使用了不同于Logit链接的链接函数：我们发现 12 篇论文使用 Probit链接，5 篇使用负对数-对数链接。23 篇论文未明确说明链接函数。136 篇（34.3%）论文使用了 Logit链接函数，但未明确说明

使用了哪种模型。在这些论文中，105 篇报告了每个协变量对应一个优势比，14 篇报告了每个协变量对应一个回归权重，7 篇两者均有报告，另有 10 篇均未报告。总之，我们的文献综述表明，许多实证研究并未说明所采用的有序模型。在明确说明模型的研究中，比例优势模型是最常用的 ordinal 回归方法。

虽然这类理论和实证讨论很有价值，但模拟研究能够提供更深入的见解，并指导实践者为有序结局分析选择最合适的模型。尽管已有多项模拟研究比较了各种有序回归模型的预测性能（例如 Janitza 等人，2016年；Hornung，2020年；Tutz，2022b；Buczak 等人，2024年；Buczak，2025年），但针对推断分析的模拟研究仍然少见。弥补这一空白，为有序结局的参数有序回归模型推断提供具体建议，是本文的首要目标。为保持研究重点明确并确保可比性，我们排除了包含正则化的模型（例如通过混合建模或贝叶斯方法实现的模型；详情见 Friedrich 等人，2023年）。下一节将正式介绍所选的比较模型，包括比例优势模型（McCullagh，1980年；Tutz，2011）、类别特异优势模型（Peterson 和 Harrell，1990；Tutz，2011）、位置平移模型（Tutz & Berger，2017）以及位置尺度模型（McCullagh，1980年）。位置平移模型是相对较新的发展（Tutz & Berger，2017），这或许解释了它为何未出现在我们的文献综述中。该模型作为位置尺度模型的一种替代方案而提出，并已在 R 中实现（Berger，2020）。对于所有这些模型，我们都考察参数估计值（偏差）和检验（α-误差和功效）。为参与关于选择度量模型是否会导致较差结果的讨论，我们还将线性模型纳入参数检验的考察。

2 方法

我们的模拟研究比较参数估计值的偏差，以及统计检验的 α-误差和功效。本节概述所考虑的不同模型，并介绍我们的实验设计。我们用 $Y \in \{1, \ldots, k\}$ 表示具有 k 个类别的有序结局变量，并用 $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)^\top$ 表示协变量向量。

2.1 回归模型

将 Y 视为度量时，具有线性预测函数的高斯模型 （线性模型）（例如 Hastie 等人，2009）可表示为

$$Y = \beta_0 + \sum_{j=1}^{p} X_j \beta_j + \varepsilon = \beta_0 + \mathbf{X}^\top \boldsymbol{\beta} + \varepsilon\,, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2)\,, \tag{1}$$

其中， $\beta_0 \in \mathbb{R}$ 为截距系数， $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p$ 为实值回归系数向量， $\sigma^2 \in \mathbb{R}_{>0}$ 表示误差方差。

将 Y 视为ordinal时，一种广泛使用的工具是累积回归模型（McCullagh，1980年；Tutz，2011）。它源自一个潜在连续变量 Y^* ，该变量遵循回归模型 $Y^* = -\mathbf{X}^\top \boldsymbol{\beta} + \varepsilon$，其中 ε 是一个服从连续分布函数 $F(\cdot)$的噪声变量。我们观察到的不是 Y^*，而只是由$(Y = r) \Leftrightarrow (\theta_{r-1} < Y^* \leq \theta_r)$，确定的较粗略的类别型版本 Y，其中 $-\infty = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_k = \infty$ 是潜在尺度上的阈值。由此得到累积模型

$$\mathrm{P}(Y \leq r \mid \mathbf{X}) = \mathrm{F}(\theta_r + \mathbf{X}^\top \boldsymbol{\beta})\,, \quad r = 1, \ldots, k-1\,.$$

由于 $P(Y \leq k|\mathbf{X}) = 1$，我们并不显式地对它建模。根据我们的文献综述， $F(\cdot)$ 最常用的选择是逻辑斯蒂分布函数，从而得到比例优势模型 （比例优势）

$$\mathrm{P}(Y \leq r \mid \mathbf{x}) = \frac{\exp\left(\theta_r + \mathbf{X}^\top \boldsymbol{\beta}\right)}{1 + \exp\left(\theta_r + \mathbf{X}^\top \boldsymbol{\beta}\right)}\,, \quad r = 1, \ldots, k-1\,. \tag{2}$$

它对所有类别使用相同的全局线性预测函数 r ，并允许对回归系数作简单解释：令 $\gamma(r|\mathbf{X}) = \mathrm{P}(Y \leq r \mid \mathbf{X})/\mathrm{P}(Y > r \mid \mathbf{X})$ 表示累积优势。˜则两组协变量 $\mathbf{X}$ 与$\mathbf{X}$ 的累积优势之比由下式给出

$$\frac{\gamma(r|\mathbf{X})}{\gamma(r|\tilde{\mathbf{X}})} = \exp\left((\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}})^\top \boldsymbol{\beta}\right)\,,$$

它不依赖于类别 r。因此，若 X_j 增加一个单位，累积优势将按因子 $\exp(\beta_j)$ 变化。

比例优势模型可以通过假设每个类别都有各自独特的回归系数向量，扩展为包含类别特异性效应（ Peterson 和 Harrell，1990；Tutz，2011）。这

从而得到类别特异优势模型 (CSO)

$$\mathrm{P}(Y \leq r \mid \mathbf{X}) = \frac{\exp\left(\theta_r + \mathbf{X}^\top \boldsymbol{\beta}_r\right)}{1 + \exp\left(\theta_r + \mathbf{X}^\top \boldsymbol{\beta}_r\right)}, \quad r = 1, \ldots, k-1, \tag{3}$$

其中包含参数向量 $\boldsymbol{\beta}_r^\top = (\beta_{1r}、\ldots\ldots、\beta_{pr})$，这些参数可能随类别而异。式（3）中的模型也称为非比例优势比模型。该模型具有很高的灵活性，但假定 $\theta_r + \mathbf{X}^\top \boldsymbol{\beta}_1 \leq \ldots \leq \theta_{k-1} + \mathbf{X}^\top \boldsymbol{\beta}_{k-1}$ 对$\mathbf{X}$的所有取值都成立。这严格限制了协变量可能的取值，也是导致我们的模拟出现问题的主要原因之一。

如果式（3）中的参数并非全部都随类别变化，我们会观察到两类协变量：具有全局效应的协变量，其满足 $\beta_{j1} = \ldots = \beta_{j,\ k-1} = \beta_j$；以及具有类别特异性效应的协变量。Peterson 和 Harrell（1990）将该模型称为部分比例优势模型。要区分具有全局效应和类别特异性效应的协变量，需要采用一种选择策略。在文献综述中，我们发现一些研究者会使用 STATA 中实现的选择算法，基于 Wald检验的 p值，通过向后选择过程逐步合并类别特异性效应。

比例优势模型的另一种替代模型是位置平移模型 (LSH)，由 Tutz & Berger (2017年) 提出。该模型允许总体中的不同亚组具有不同的变异性，即所谓的离散度效应。令 $\boldsymbol{Z} = (Z_1, \ldots, Z_q)^\top$ 为一个额外的协变量向量，并假设这些协变量具有离散度效应。那么，位置平移模型的形式为

$$\mathrm{P}(Y \leq r \mid \mathbf{X}) = \frac{\exp\left(\theta_r + \mathbf{X}^\top \boldsymbol{\beta} + (r - k/2)\, \mathbf{Z}^\top \boldsymbol{\gamma}\right)}{1 + \exp\left(\theta_r + \mathbf{X}^\top \boldsymbol{\beta} + (r - k/2)\, \mathbf{Z}^\top \boldsymbol{\gamma}\right)}, \quad r = 1, \ldots, k-1, \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_q) \in \mathbb{R}^q$ 是离散参数向量。式 (4) 中的模型还包含缩放移位项 $(r - k/2)\mathbf{Z}^\top \boldsymbol{\gamma}$，它决定阈值的移动，并反映对较低或较高类别的倾向。尺度因子 $(r - k/2)$ 是一个额外的权重，它使阈值的移动与其距中间阈值的距离成正比，因此所有阈值之间的间隔都会以相同的值扩大。位置平移模型可以看作一种具有特定约束的类别特异优势模型：令 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Z}$，则有 $\theta_r + \mathbf{X}^\top \boldsymbol{\beta} + (r - k/2)\mathbf{X}^\top \boldsymbol{\gamma} = \theta_r + \mathbf{X}^\top \left(\boldsymbol{\beta} + (r - k/2)\, \boldsymbol{\gamma}\right) = \theta_r + \mathbf{X}^\top \boldsymbol{\beta}_r$。由于比例优势模型是位置平移模型的子模型，因此存在以下嵌套结构

$$\text{proportional odds model} \subset \text{location-shift model} \subset \text{category-specific odds model},$$

具体内容详见 Tutz & Berger (2022)。

一种用以解释额外离散度效应的替代方法，可通过假设 $Y^* = -\mathbf{X}^\top \boldsymbol{\beta} + \tau_{\boldsymbol{Z}} \varepsilon$ 适用于潜在回归模型而得到，其中 $\tau_{\boldsymbol{Z}}$ 是依赖于 $\boldsymbol{Z}$的方差参数。然后，累积

模型被称为位置尺度模型 （LSC），其形式为（McCullagh，1980年）

$$\mathrm{P}(Y \leq r \mid \mathbf{X}) = \exp\left(\frac{\theta_r + \mathbf{X}^\top \boldsymbol{\beta}}{\tau_{\boldsymbol{Z}}}\right) \cdot \left(1 + \exp\left(\frac{\theta_r + \mathbf{X}^\top \boldsymbol{\beta}}{\tau_{\boldsymbol{Z}}}\right)\right)^{-1}, \quad r = 1, \ldots, k-1\,, \tag{5}$$

其中 $\tau_{\boldsymbol{Z}} = \exp(\boldsymbol{Z}^\top \boldsymbol{\gamma})$。该模型是非线性的，因此无法纳入多元广义线性模型的框架中。如果 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Z}$ 不同，则对于位置平移模型和位置尺度模型而言， $\boldsymbol{X}$ 变量按累积优势进行的解释与上述比例优势模型中的解释相同。

在我们的模拟研究中，我们纳入了以下五种模型：线性模型（LM）、比例优势模型（PO）、类别特异优势模型（CSO）、位置平移模型（LSH）和位置尺度模型（LSC）。然而，像部分比例优势模型中那样选择具有全局效应和类别特异性效应的协变量，不在本文的讨论范围内。

2.2 模拟

本研究从比例优势模型、类别特异优势模型、位置平移模型和位置尺度模型生成数据。该模拟研究的观测数量设为 $n \in \{250, 500, 1000\}$；我们在一项试点研究中发现，较小的样本量无法产生相对稳定的模型，而较大的样本量在许多应用中可能并不现实。此外，将 250 个观测值设为最低数量，可确保每种情形下的观测值都多于待估参数。我们设置了 5 个或 35 个协变量，其中真正具有信息性（系数不为零）的协变量数量为 0、1 或 4。ordinal 结局的类别数量 k 设为 3、5 或 7。所有协变量均相互独立，且服从均值为零、标准差为 0.5 的正态分布。对于位置参数 β为常数的模型，我们为所有类别采用参数值 0（非信息性）以及 0.1、0.2、0.5、1、2（信息性）。这些值也用于离散参数 γ。所有 β 值均与 γ 值 0 和 1 组合，所有 γ值均与 β 值 0 和 1 组合。采用这一方案是为了涵盖以下情形：位置和离散度均无真实效应；其中一方分别具有真实效应；以及两者均具有大于零的真实效应。对于类别特异优势模型，我们还将值 β_r 设为 0、0.1、0.2、0.5、1 和 2，但让符号有所变化，以避免仅产生恒定效应。对于五个类别，我们选择 $\boldsymbol{\beta} = (-u, u, u, -u)$；对于七个类别$\boldsymbol{\beta} = (-u, 0, u, u, 0, -u)$。当有三个协变量时，类别特异模型可转换为位置平移模型。因此，对于 $k = 3$，未使用类别特异模型生成数据。当有四个信息性协变量时，它们的回归权重均设为相同。

当没有任何协变量具有信息性时，阈值 $\boldsymbol{\theta}$ 决定结局变量的分布。因此，我们设定了三个不同的 $\boldsymbol{\theta}$ 向量。

在第一个设置（均匀）中，结局变量的概率在不受协变量影响的情况下呈均匀分布。在第二个设置（偏斜）中，选择真实分布，使每个类别中至少有百分之六的观测值。此外，较高的值比低值呈指数级地更有可能出现。对于七个类别，这得出的值为$\boldsymbol{\theta} = (-2.74,\ -1.96,\ -1.45,\ -1.00,\ -0.50,\ 0.29)^T$，分布如图1所示。在第三个设置（非结构化）中，对于 $\boldsymbol{\theta}$，我们选择了一种分布，其中间类别和最低类别出现的可能性始终略高于其他所有类别的两倍，而其他类别的可能性相同。当引入不为零的 β 或 γ 效应时，条件结局分布会发生变化；尽管如此，为 $\boldsymbol{\theta}$ 保留了相同的值，以提高不同模拟设置之间的可比性。考虑所有变化模拟参数的组合后，我们得到了 4032 种不同的模拟设置。

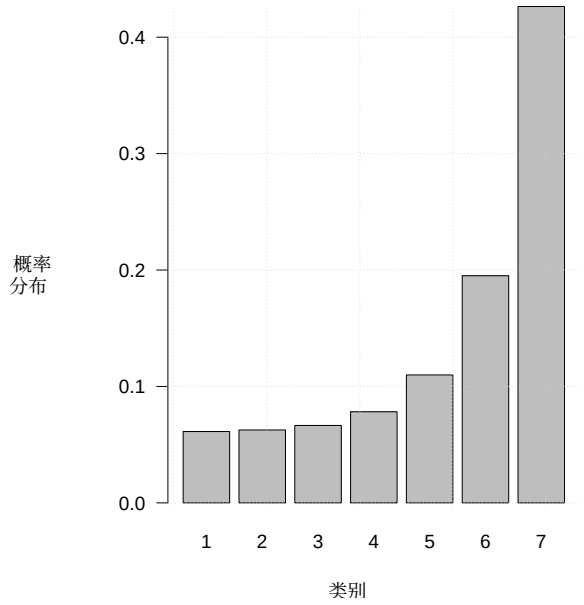

图1：七个类别的结局变量概率分布，以及在设置 $\boldsymbol{\theta} = (-2.74,\ -1.96,\ -1.45,\ -1.00,\ -0.50,\ 0.29)^T$（偏斜设置）时协变量无效。

在每种设定下，我们进行了 2000 次重复试验，并拟合了比例优势模型、类别特异性优势比模型、位置平移模型和位置尺度模型。对于这些模型，我们计算了参数估计值的偏差。此外，我们还纳入了线性模型，并计算了每个单独参数的显著参数检验所占比例，以估计α-误差（考虑零效应）以及相应 Wald 型检验在 $\alpha = 0.05$（考虑非零效应）下的功效。

模拟中的问题从有序回归模型中抽取数据时，出现了若干问题。如果抽取的数据集中某个结局类别的观测值少于五个，则舍弃该数据集并重新抽取。在离散度较大、观测数量较少、结局类别较多以及分布偏斜的设定下，这种情况尤为常见。

如上一节所述，对于累积有序回归模型，条件 $P(Y \leq r|\mathbf{X}) \leq P(Y \leq r+1|\mathbf{X})$ 必须对所有 r 成立。如果生成的观测值不满足这一标准，则会将其舍弃并重新抽取。当从高 β 值且包含四个信息性协变量的类别特异模型中抽取数据时，这一条件往往无法满足。

对于类别特异模型，有 382 种模拟设置中至少 20% 的模型未能收敛，另有 639 种模拟设置中至少 5% 的模型未能收敛。对于位置尺度模型，相应的数量分别为 807 和 1150 种模拟设置。类别特异模型未收敛的情况相对常见于协变量数量较多、观测数量较少且离散效应较大的情形。位置尺度模型则在协变量数量较多、观测数量较少、响应类别较少且离散效应较大时出现收敛困难。当数据来自具有较大离散度和较低 β 值的位置尺度模型时，位置平移模型偶尔会出现未收敛的情况：有 3 种设置中至少 20% 的模型未能收敛，另有 105 种设置中至少 5% 的模型未能收敛。有关这些收敛问题的更多详情，请参见附录B。

下文仅报告至少有 100 次（即 5%）模拟重复试验（共 2000 次）收敛的设置所对应的结果。

2.3 R软件包

所有计算均使用 R 4.4.0 版完成（R Core Team，2024）。比例优势模型和类别特异优势模型使用 VGAM 1.1-11 版软件包（Yee，2010）；位置平移模型使用 ordDisp 2.1.1 版（Berger，2020）；位置尺度模型则使用 ordinal 2023.12-4 版（Christensen，2023）。

使用 scales 软件包 1.3.0 版（Wickham等人，2023）实现图表中的透明度。

3 结果

本节首先介绍参数估计值的偏差，然后给出相应 Wald检验的结果 α-误差和功效。

3.1 偏差评估

本节报告比例优势模型、类别特异优势模型、位置平移模型和位置尺度模型在所有已收敛模拟重复中的平均偏差。此处，我们报告与真实数据生成模型相对应的拟合模型，以确保回归参数的真实值已知。

位置参数 β 当根据比例优势模型生成数据时，所有关注的累积模型的位置参数相同，因此具有可比性。因此，图2展示了以比例优势模型作为数据生成过程时四个模型位置参数的偏差。结果展示了在汇总所有其他模拟参数后，对偏差影响最大的因素。

图2表明，协变量数量增加会导致所有模型的偏差增大，并使偏差的离散度增大。具体而言，信息性协变量数量较多会增加类别特异优势模型的负偏倚，并在较小程度上增加位置平移模型的负偏倚。相反，它们会增加比例优势模型和位置尺度模型的正偏倚。更多信息性协变量会导致类别特异模型的偏差离散度增大。对位置偏差影响最大的是位置参数的真实值，真实值越高，绝对偏差越大，偏差离散度也越大，尤其是在类别特异优势模型和位置平移模型中。

总体而言，我们观察到，比例优势模型和位置尺度模型的估计值略微偏向高于真实值。另一方面，对于类别特异模型和位置平移模型，我们观察到估计值略低于真实值。我们观察到，对于所有模型，分布 θ 对偏差都没有明显影响。除类别特异模型外，类别数量对所有模型都没有影响；对于类别特异模型，类别数量增加会使负偏倚略微增大。正如预期，所有偏差都随着观测数量增加而减小。不过，即使有 1000 个观测值，仍存在一些偏差。

使用位置平移模型生成数据时，我们观察到位置参数呈现出与之前相同的模式，但真实位置参数值较大时，负偏倚略大，且估计值的离散度也更大（见附录 C）。类似地，使用位置尺度模型生成数据时，也出现了上述相同模式，不过估计值的离散度略大（见附录 C）。较大的离散参数值还会增大位置平移模型和位置尺度模型的位置参数的偏差及其离散度。

同样地，当数据由类别特异优势模型生成，并计算相应的位置参数估计值时，我们观察到与上述相似的模式，但估计值的离散程度略高（见附录 C）。

离散参数 γ 本段分别在各自的数据生成过程中评估位置平移模型和位置尺度模型。这样可以确保我们知道参数的真实值，并能比较这两种方法在离散参数偏差方面的表现。

在我们的模拟设置中，位置平移模型对离散参数的估计低于真实值，而位置尺度模型的估计略高于真实值。我们观察到，对于这两种模型，分布参数 θ 对偏差没有显著影响。从协变量数量来看，位置平移模型的负偏倚略有增加，而位置尺度模型的正偏倚略有增加。随着观测数量增加，两种模型的偏差都略有下降。不过，即使有 1000 个观测值，偏差仍然存在。其他所有模拟参数的影响见图 3。我们观察到，类别数量增加会增大位置平移模型负偏倚的绝对值，但对位置尺度模型的偏差没有显著影响。信息性协变量数量增加时也会出现相同的效应。此外，我们发现，随着位置参数真实值增加，位置平移模型中离散参数偏差的绝对值会增大，而位置尺度模型中则不会。最后，我们发现，两种模型中 γ 的真实值增加都会使偏差的绝对值增大，而且这种现象在位置平移模型中更为明显。

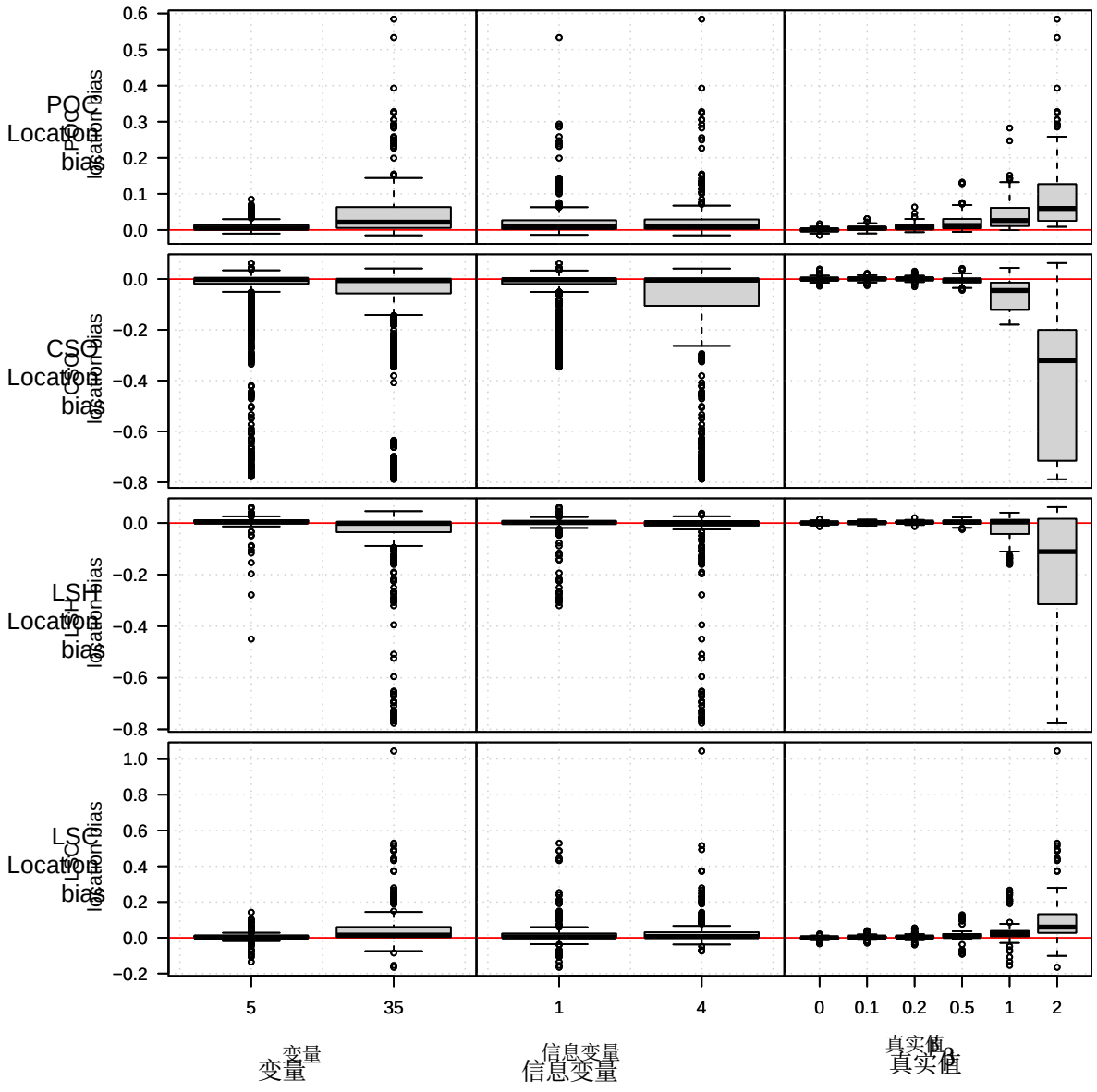

图2：在所有 n、 k 以及所有分布设置下汇总，采用比例优势模型抽样时，模拟设置对偏差的影响。除各自对应的列外，箱线图均汇总了所有协变量数量、信息变量数量和真实位置参数值。

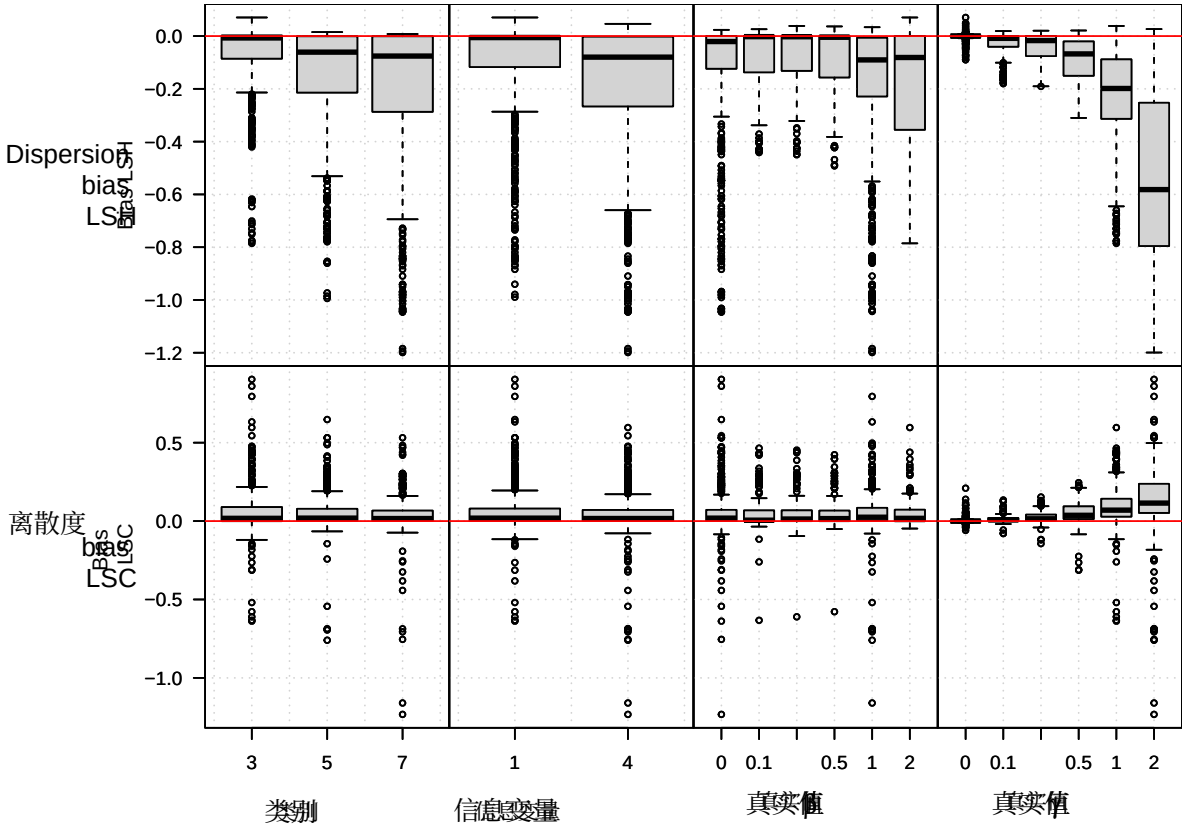

图 3：使用相应模型进行抽样时，模拟设置对离散度偏差的影响；其中包括对所有 n、协变量数量及所有分布设置下的离散度进行汇总。除各自对应的列外，箱线图均汇总了所有类别数量 k、信息变量数量、真实位置参数值及真实离散参数值。

在图4中，我们可以看到位置平移模型和位置尺度模型中位置参数偏差与离散参数偏差之间的关系。位置平移模型中这两种偏差的相关系数为 0.45，而位置尺度模型中为 -0.17，这表明位置平移模型中的偏差呈正相关。

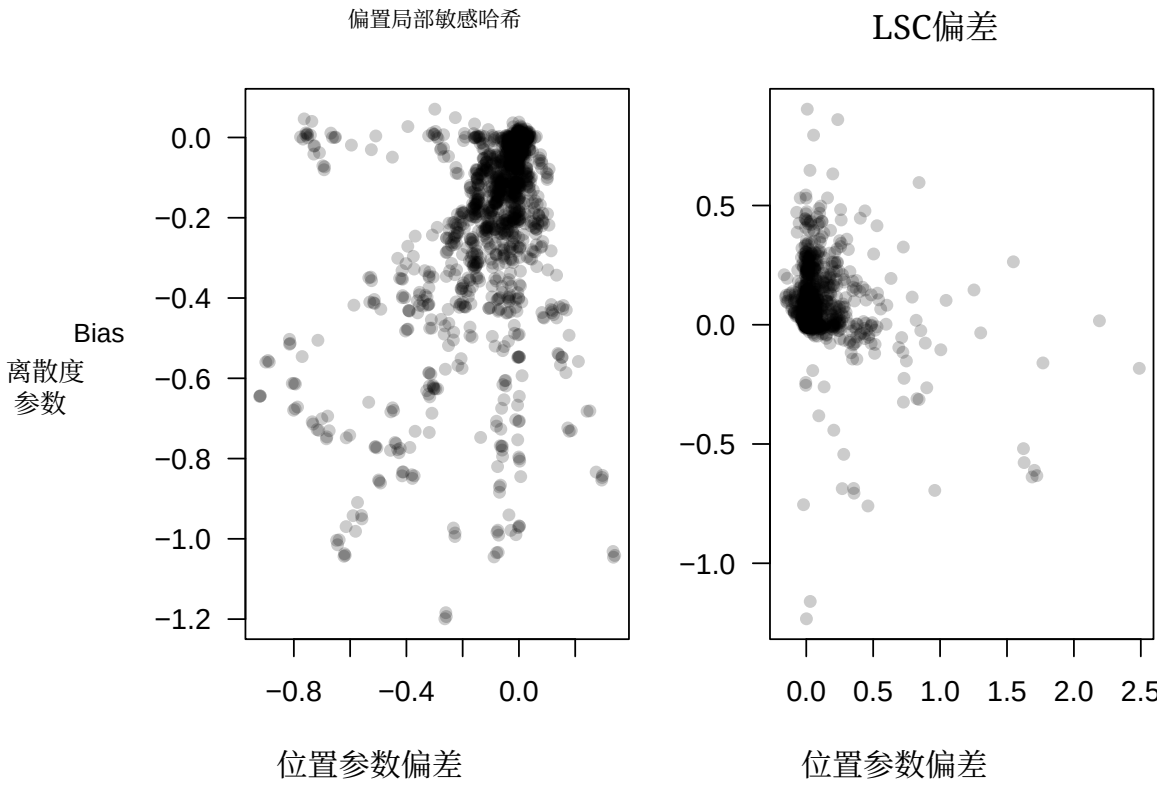

图4：位置平移模型和位置尺度模型中位置参数偏差与离散参数偏差之间的关系。

3.2 α-误差

对于相关参数为零的假设检验，会评估 α-误差；此时真实的回归参数也均为零。

α-从比例优势模型抽样时的误差 接下来，我们选择了包含 $p = 5$ 个协变量、 $k = 3$ 个类别和均匀分布，且数据从比例优势模型中抽取的模拟设置，其中 $\beta = 0$ （即没有信息性协变量），并以 $\gamma = 0$ 作为基准模型。随后，我们展示了该模型以及该设置各变体的 α误差。我们在图5中看到，在基线设置下，随着观测数量增加，每个模型的参数都逐渐接近符合 α水平。位置平移模型的离散参数总体 α误差最高，在250个观测值时约为0.08。此外，与其他模型的参数相比，位置尺度模型的两个参数均显示出相对较高的 α误差。

图5还显示了在数据生成过程中改变一个模拟参数如何改变α误差。当增加协变量数量时，线性模型、类别特异优势模型的检验以及位置平移模型位置参数的检验略微变得更加保守，而比例优势模型的参数检验则略微变得更加宽松。位置平移模型的离散参数显示出相当更高的数值，在250个观测值时约为0.15。位置尺度模型受协变量数量的影响最大，其两个参数的检验都变得过于宽松，导致500个观测值时的 α 误差约为0.16。对于250个观测值，2000个位置尺度模型中仅有12个收敛。

与基线设置相比，增加类别数量对各模型的相对表现影响很小。不过，类别特异优势模型变得越来越宽松，尤其是在观测数量较少时。对于七个类别，需要估计六个参数；在观测数量为 250 时，这些参数的 α- 误差均约为 0.15。

将分布从均匀分布改为偏斜分布，会使位置平移模型、位置-尺度模型和类别特异优势模型的 α-误差大幅增加，尤其是在观测数量较少时。观测数量为 250 时，位置平移模型的离散参数检验的 α-误差约为 0.5。非结构化分布的表现与基准模型相近。

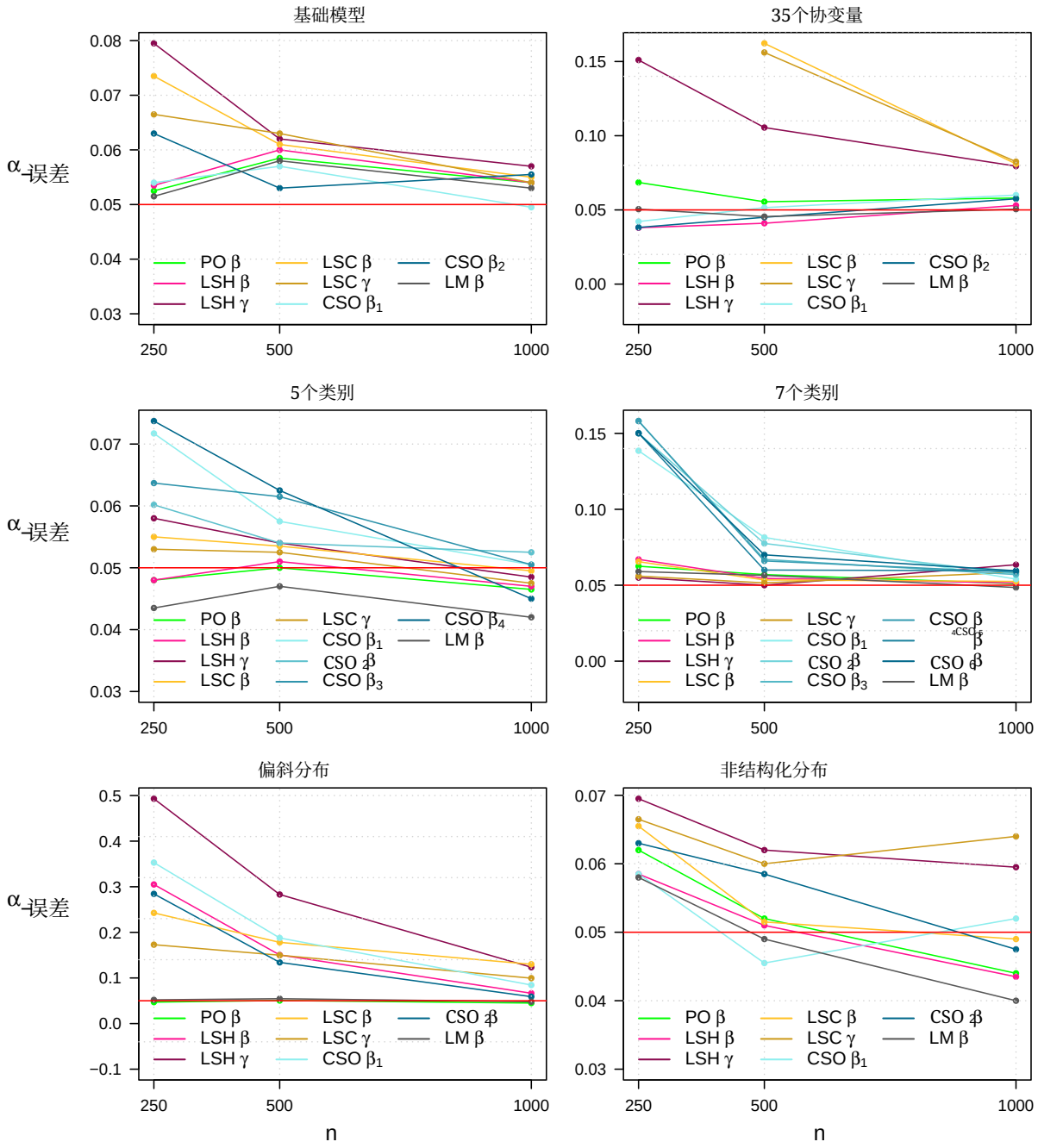

图5：使用比例优势模型进行抽样时，各模型的 α误差。所选基础模型包含 $p = 5$个协变量、一个信息性协变量、 $k = 3$ 个类别，并采用均匀分布设置。

α-带离散效应的模型抽样时的误差 图6和图7分别展示了位置平移模型和位置尺度模型的数据生成过程中 α-误差。所有信息性协变量的真实参数均设为 $\gamma = 1$ 和 $\beta = 1$ 。为比较所有模型，我们考察了一个非信息性协变量。类别数量为 $k = 5$ 的设置大多介于类别数量为 $k = 3$ 的基准设置和类别数量为 $k = 7$的设置之间，因此不展示这些结果。

与使用比例优势模型进行数据生成相比，在所有设置下，位置平移模型和类别特异优势参数检验的 α-误差都更高。

在基准设置下，位置平移模型的离散参数检验的 α-误差严重膨胀，约为0.2。最接近维持 α水平的两个模型是线性模型和比例优势模型。

增加协变量数量会使位置-尺度模型的两个参数出现更严重的膨胀 α-误差。位置平移模型的离散参数仍然存在膨胀，而位置参数则变得更加保守。对于较小的 n，比例优势模型的α-误差略有膨胀。然而，随着 n增加，这种效应消失了。总体而言，线性模型最接近 α-水平。增加类别数量会使类别特异优势模型和位置平移模型的所有参数出现严重膨胀的 α-误差。采用位置-尺度模型进行抽样时，膨胀的错误率似乎会随着 n增加而上升，尤其是位置平移模型的参数。在使用4个信息性协变量而非1个的设置中，位置平移模型的离散参数再次始终表现出最高的 α-误差。采用位置-尺度模型进行抽样时，两个参数的 α-误差也有所增加，但仅限于 $n \in \{250, 500\}$；采用位置平移模型进行抽样时，对于较小的 n，类别特异优势模型参数的 α-误差则出现特定的增加。将分布从均匀分布改为偏斜分布，会使位置平移模型和类别特异优势模型的所有参数出现严重膨胀的α-误差。位置-尺度模型的参数也有类似情况，但受影响较小。唯有线性模型和比例优势模型这两个模型接近维持α-水平。这两个模型在非结构化分布下也最接近维持 α-误差。采用位置平移模型从非结构化分布中抽样时，位置-尺度模型和类别特异优势模型参数的 α-误差膨胀程度相对较低，位置平移模型的位置参数也是如此。离散参数仍然始终表现出较高的错误率。在位置-尺度模型中使用非结构化分布，会使位置平移模型和类别特异优势模型的所有参数出现膨胀的 α-误差，而且这种误差还会随着 n增加而加剧。位置-尺度模型、比例优势模型和线性模型的参数都接近维持 α-水平。

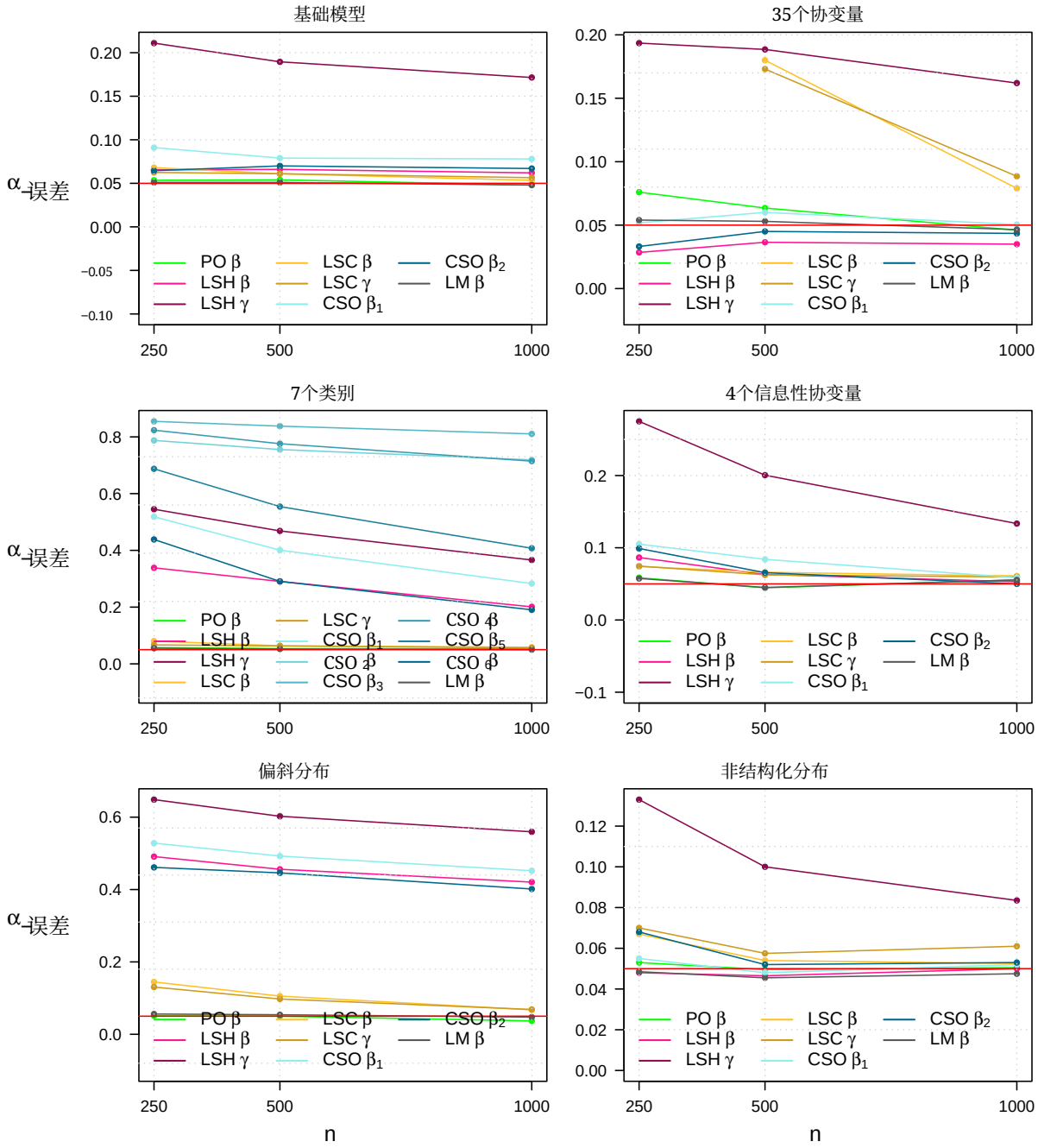

图 6：模拟设置对模型中非信息性协变量的 α-误差的影响。数据取自位置平移模型，其中 $\beta = 1$ 和 $\gamma = 1$。所选基础模型包含 $p = 5$ 个协变量、 $k = 3$ 个类别、1 个信息性协变量，并采用均匀分布设置。

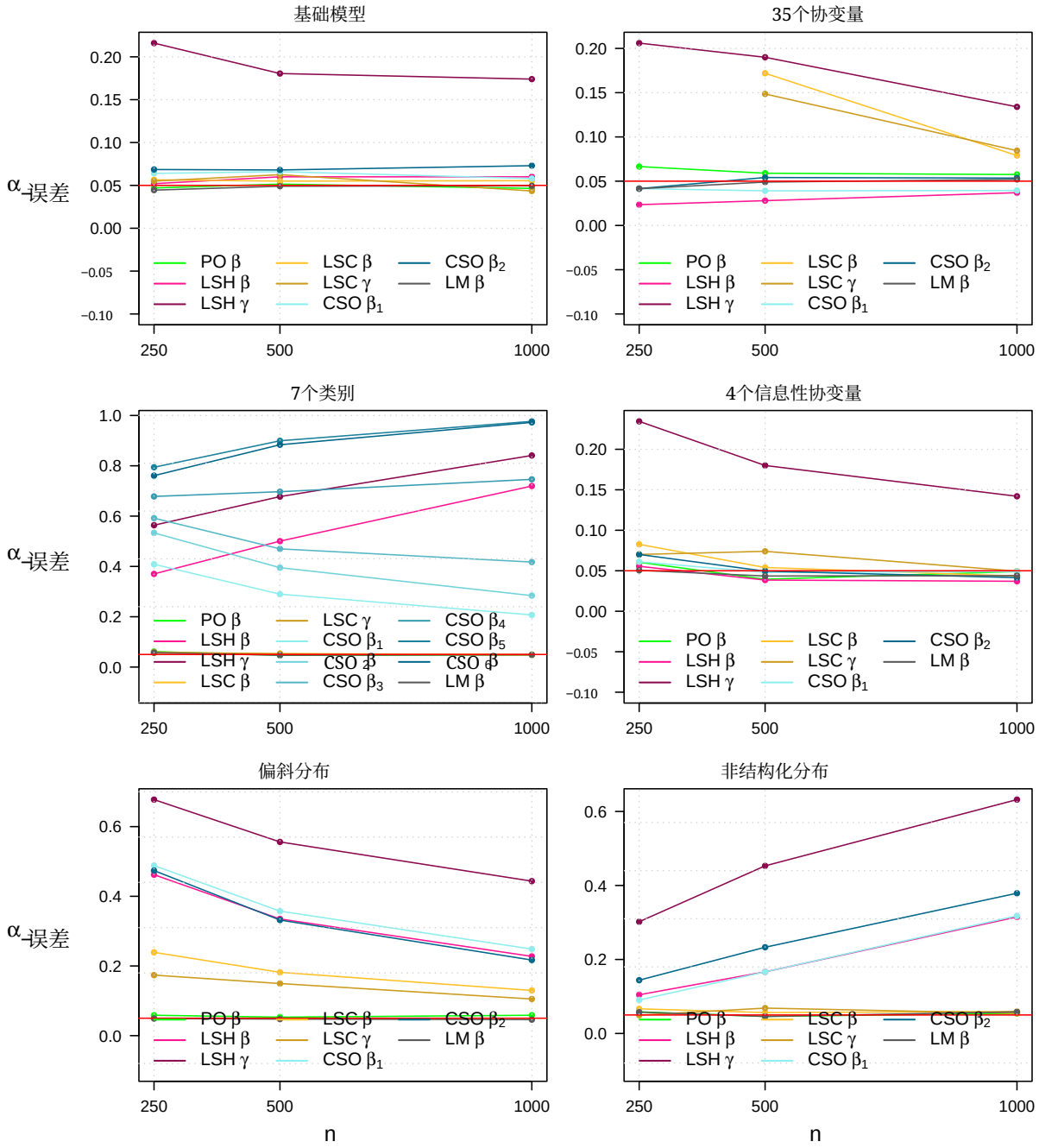

图7：模拟设置对模型中非信息性协变量的 α误差的影响。数据来自位置尺度模型，其中 $\beta = 1$ 和 $\gamma = 1$。所选基础模型具有 $p = 5$ 个协变量、 $k = 3$ 个类别、1个信息性协变量以及均匀分布设置。

关于离散参数为 $\gamma = 1$ 且位置参数为$\beta = 0$ 时的数据生成的更多结果，请参见附录 D。

图 18 和图 19 分别展示了从位置平移模型和位置尺度模型生成数据时，所有模型对无信息变量的 α 误差。总体而言，我们发现，比例优势模型和线性模型的表现最接近 α 误差。

图 20 和图 21 分别展示了从位置平移模型或位置尺度模型生成数据时，信息变量的位置参数的 α 误差，其中离散参数为 $\gamma = 1$ ，位置参数为 $\beta = 0$ 。

在位置平移情形下，对于均匀分布，线性模型始终保持了 α 水平，而比例优势模型接近 α 水平。对于许多协变量，位置平移模型的位置参数也保持了 α 水平。分布改为偏斜分布时，所有位置参数都显示出膨胀的 α 误差，且这种情况不会随 n 增大而改善；其中线性模型最接近 α 水平。对于非结构化分布，只有位置平移模型保持了 α 水平。

使用位置-尺度模型进行抽样时，位置-尺度模型、比例优势模型和线性模型的位置参数总体上通常至少接近维持 α-误差。位置偏移模型仅对35个协变量维持了 α水平。在这种情况下，对于偏斜分布，我们发现位置-尺度模型的位置参数显示出更高的 α-误差膨胀。然而，对于偏斜分布，所有其他模型的 α-误差都高得多，约为1。对于非结构化分布，只有位置-尺度参数维持了 α水平；比例优势模型的 α-误差略有增加，线性模型的 α-误差有所增加，而位置偏移模型的 α-误差则大幅增加。

α-误差：从类别特异模型中抽样时图8显示了在所有信息性协变量均为 $u = 1$ 和 $\gamma = 0$的条件下，采用CSO模型进行数据生成过程时的 α-误差。选择 $k = 5$ 个类别作为基线，因为这样一来，与含两个参数的离散模型相比，CSO模型应能受益于拥有更多参数（4个）。

在所有数据取自 CSO 模型的情形中，CSO 模型参数检验的 α误差都被严重放大；随着 n增加，整体误差也随之增加。对于 35 个协变量，位置尺度模型中两个参数的 α误差在 $n = 250$下都被严重放大。然而，随着 n增加，这些误差有所减小。在大多数具有 $n = 250$ 观测值的情形中，位置平移模型的 α误差都被放大，并随着 n增加而减小。线性模型和比例优势模型最接近维持 α水平。

附录 D 中的图22展示了数据取自 CSO 模型时，类别特异优势模型参数的 α误差结果。我们展示了具有 $u = 1$的一个信息性协变量的结果，因此在有 7 个协变量的情况下， $\beta_2 = \beta_6 = 0$。我们观察到，对于每种参数设定，β_2 和 β_6 的 α误差都被严重放大，最低的 α误差为 0.6。

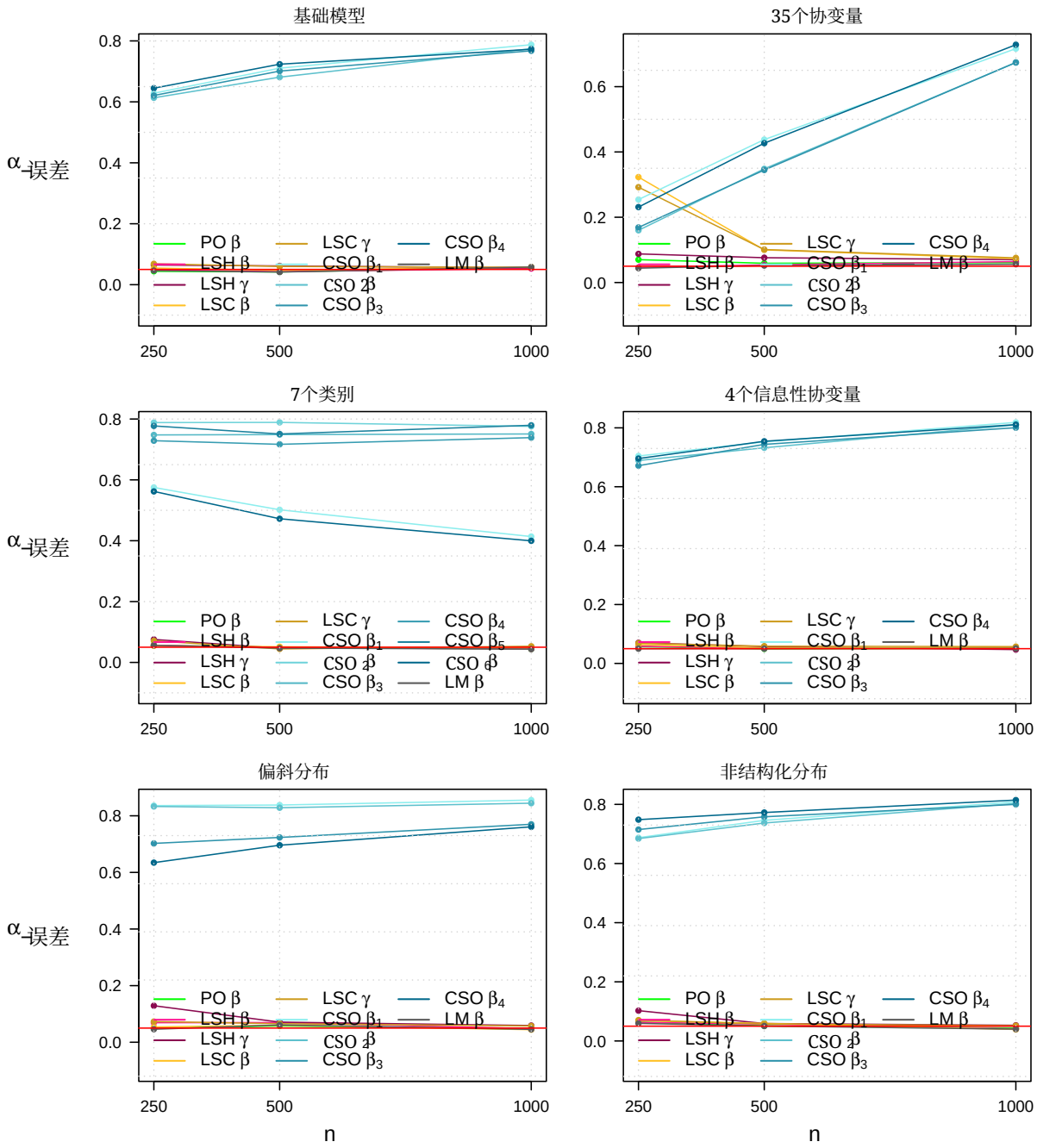

图8：使用 CSO 模型进行抽样时各模型的 α误差。选定的基础模型包含 $p = 5$个协变量，其中一个为信息性协变量，有 $u = 1$、 $k = 5$ 个类别，并采用均匀分布设置。

3.3 功效

功效评估针对相关参数为零的假设检验进行，其中真实参数取所有预先设定的值。在功效曲线上真实参数值为 0 的位置，曲线显示 α-误差。所有信息性协变量的真实参数值都相同。

从比例优势模型抽样时位置参数的功效以下我们选择了这一模拟设置作为基准模型：包含 $p = 5$ 个协变量（其中一个为信息性协变量）、 $k = 3$ 个类别、$n = 250$ 个观测值，采用均匀分布，并从比例优势模型中抽取数据，且 β 值各不相同。图9展示了该基准设置以及仅改变一个参数的各变体所对应的功效曲线。

在 $\beta = 0$ 的基线设置中，大多数模型的起始值接近 α 水平，并随着 β 增大而提高功效。比例优势模型、位置平移模型和位置尺度模型的位置参数，以及线性模型，对于中等大小的 β 值，其功效均略高于类别特异优势模型参数的检验。

由于信息性协变量的数量对功效曲线的影响最小，因此后续不再考虑这一因素。

将协变量数量增加到 35 并未显著改变功效曲线，不过整体而言，这些检验略微更加保守。位置-尺度模型大多未能收敛，因此无法在此处进行考察。

增加类别数量只明显影响了类别特异优势模型。类别数量越多， α-误差越大，功效曲线也越平缓。

随着观测数量增加，所有功效曲线都变得更加陡峭。然而，类别特异优势模型的参数检验表现始终与其他模型持平或更差。

将分布从均匀改为偏斜会带来显著变化：位置-尺度模型的位置参数呈现出非常平缓的功效曲线，而位置平移模型、位置-尺度模型和类别特异优势模型中的所有参数都表现出严重膨胀的 α-误差。只有线性模型和比例优势模型的 α-误差处于可接受范围，并且在相对较高的 β 值下，仍达到了与其他模型相近的功效。对于非结构化分布，其功效曲线与均匀分布设定下的相似。

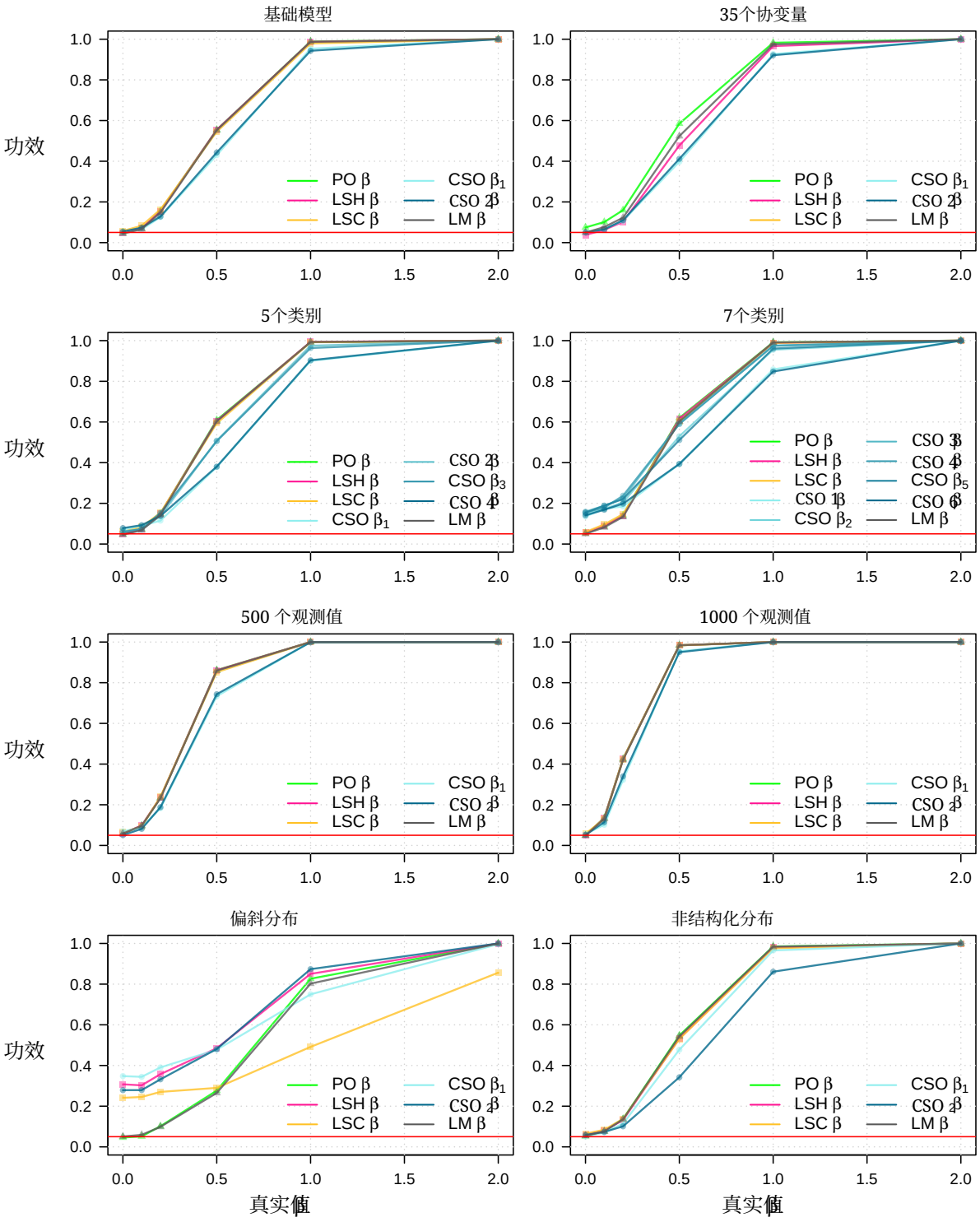

图9：与选定基础模型相比，具有 $p = 5$ 个协变量（其中一个具有信息性）、 $k = 3$ 个类别、250个观测值以及均匀 θ 设置的模型功效。数据由比例优势模型生成。对于 $\beta = 0$ ，图表显示 α误差。

从存在离散效应的模型中抽样时离散参数的功效 图10展示了位置平移模型和位置尺度模型的离散参数检验的功效曲线。为确保已知真实离散值，位置平移模型是基于位置平移模型生成的数据计算的，而位置尺度模型是基于位置尺度模型生成的数据计算的。选作基础模型的模拟设置包括 $p = 5$ 个协变量，其中一个具有信息性， $k = 3$ 个类别、250个观测值、均匀的 θ 设置，以及 $\beta = 0$。

在基准设置中，我们观察到离散参数检验几乎保持在 α水平，并随着真实 γ增大而上升。位置尺度模型的离散参数功效曲线稍显陡峭。

我们还考虑了包含K$\beta = 1$的设置，但结果与基础模型非常相似，为简洁起见，此处不再列出。

随着类别数量增加，两种模型的功效曲线都变得更加陡峭。位置平移模型的离散参数受益于较多的类别，在类别数量为7且 γ 值较小至中等时，其功效高于位置尺度模型。

在考察基准设置但采用35个协变量时，我们发现大多数位置尺度模型都未能收敛。位置平移模型的离散参数未遵循 α水平。增加观测数量会使功效曲线变得更陡，同时位置尺度模型的离散参数检验仍是功效略高的检验。

当选择4个而非1个协变量时，我们发现，对于较低的 γ值，位置平移模型优于位置-尺度模型。

将分布从均匀分布改为偏斜分布会导致 α误差大幅膨胀，尤其对于位置平移模型而言，并产生相对平坦的功效曲线。同样，采用非结构化分布的设置看起来与均匀分布相对相似。然而，对于位置平移模型中的离散参数检验，功效略低。

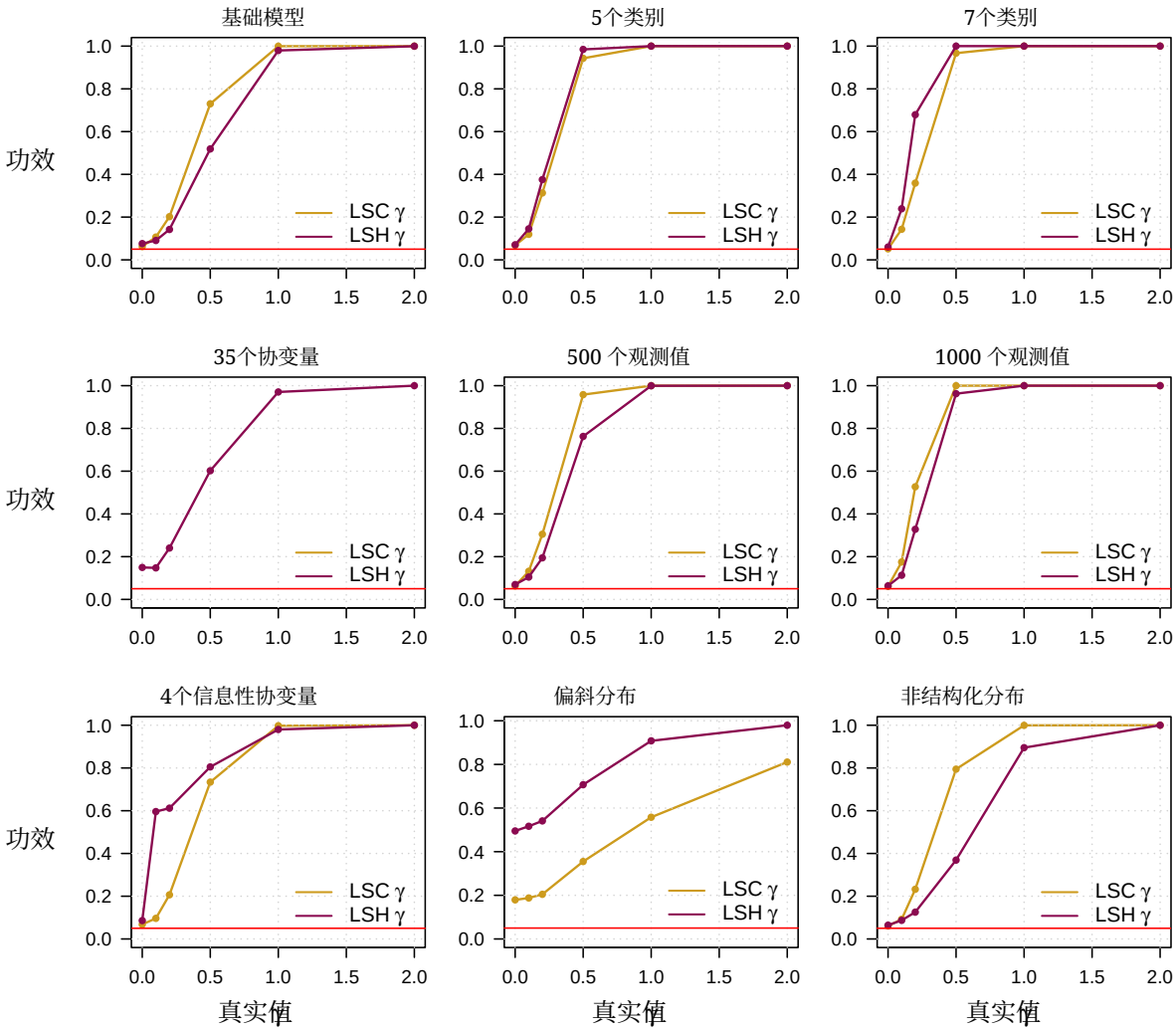

图10：具有离散度估计的模型与所选基础模型的功效比较，模型含有 $p = 5$个协变量，其中一个具有信息性， $k = 3$ 个类别，250个观测值，均匀 θ 设定以及$\beta = 0$。位置尺度模型的离散参数根据位置尺度模型的数据生成过程计算，位置平移模型的离散参数则根据位置平移模型计算。对于 $\gamma = 0$，图表显示α误差。

从类别特异模型抽样时的功效 图11展示了采用类别特异优势模型进行抽样时的功效曲线。对于五个类别，这意味着真实参数向量为 $\boldsymbol{\beta} = (-u,\ u,\ u,\ -u)$；对于七个类别，则为 $\boldsymbol{\beta} = (-u,\ 0,\ u,\ u,\ 0,\ -u)$。我们始终在 x 轴上显示 u 的值。基准设置为 $p = 5$ 个协变量（其中一个为信息性协变量）、$k = 5$ 个类别、250 个观测值，以及均匀 θ 分布。

对于类别特异优势模型，我们发现，β_2 和 β_3 （参数值为正）的功效曲线略陡，α误差也略低于 β_1 和 β_4 （参数值为负）。信息性协变量的数量对结果的影响最小，因此未予展示。

查看 35 个协变量的结果时，我们发现 α误差高于五个类别时的误差，尤其是β_1。当 u 值为 2 时，这些参数的功效仍最高可达 0.7。

对于七个类别，数据生成所用的真实回归系数向量为 $\boldsymbol{\beta} = (-u,\ 0,\ u,\ u,\ 0,\ -u)$，这意味着在这些结果中，图11展示了 β_2 和 β_5的 α-误差。然而，这一点在图中并不明显，因为随着 u增加，β_2 和 β_5的 α-误差不断增大，直到 $u = 2$达到约 0.8，与 β_1 和 β_6相当。针对 β_3 和 β_4的检验，其功效曲线更陡，在 $u = 2$时几乎达到 1，与基础模型相似。

对于 1000 个观测值，所有参数的 $u = 0$ 的 α-水平大致都得到了维持，并且我们看到 CSO 参数的功效曲线陡峭上升。

将分布改为偏斜设置时，类别特异优势模型的 β_1、β_2和 β_3 表现出明显膨胀的 α-误差，而 β_4 的 α-误差略有膨胀。非结构化分布设置看起来与均匀设置相似。

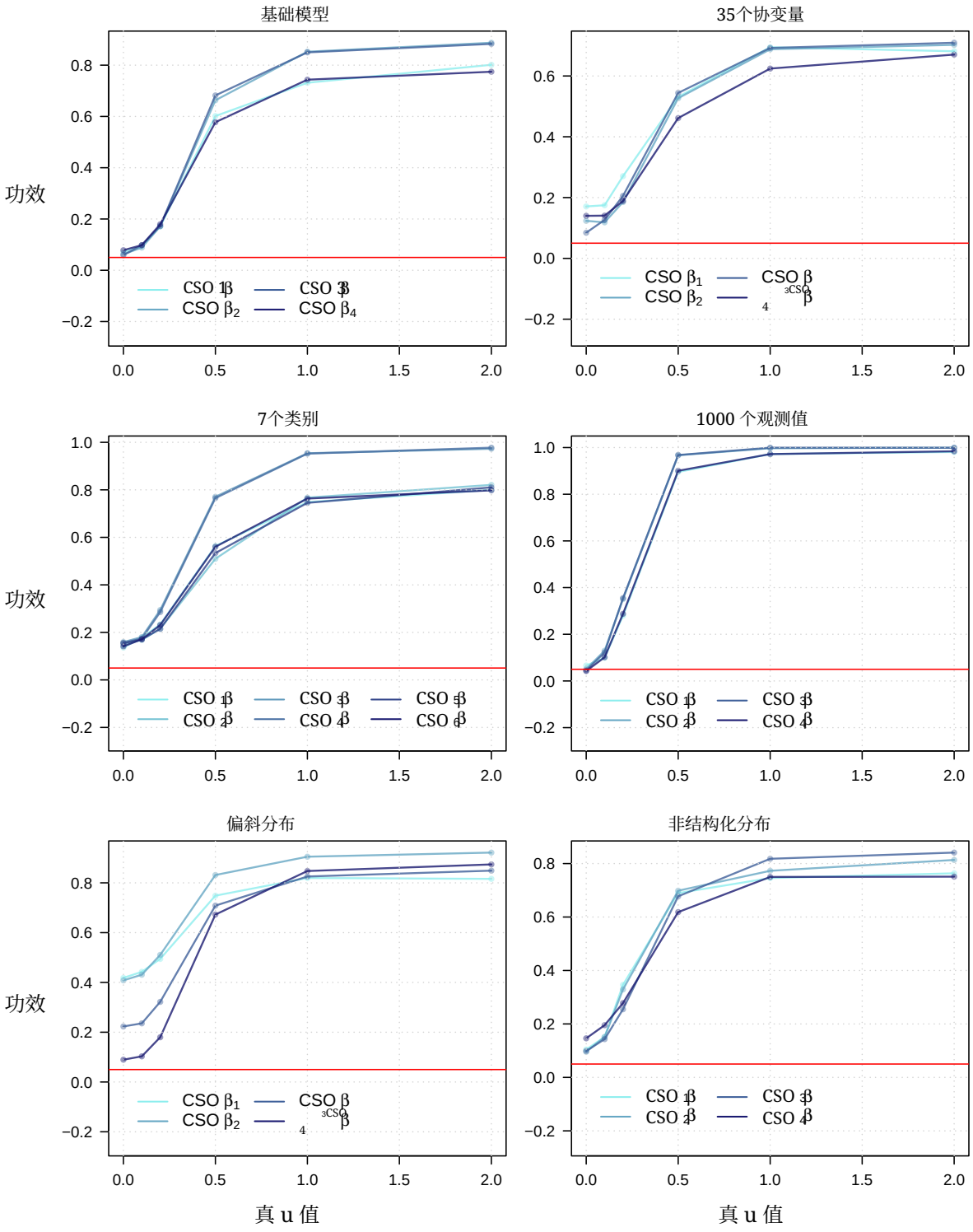

图11：使用CSO模型进行抽样时，CSO参数检验的功效与所选基础模型的比较。设置 $p = 5$ 个协变量，其中一个为信息性协变量， $k = 5$ 个类别，250个观测值，并采用均匀 θ 设置。对于七个类别，真实 β_2 和 β_5 被设为零。当 u 的真实值为零时，图表显示了所有模型的 α-误差。

4 讨论

本文通过模拟研究考察了比例优势模型（POM）、类别特异优势模型（CSO）、位置平移模型（LSH）和位置尺度模型（LSC）的参数估计值的性质。鉴于关于在实际情境中是否可以接受对 ordinal 数据进行正态近似的讨论仍在持续（Knief & Forstmeier, 2021），以及是否应使用更复杂模型的讨论（Liddell & Kruschke, 2018），本文还纳入了线性模型（LM）。

进行模拟时，我们观察到，与所有其他受考察模型相比，位置尺度模型更容易出现收敛问题，尤其是在协变量较多、观测值较少且类别数量较少的情况下。

首先，我们考察了POM、CSO、LSH和LSC参数估计的偏差。就偏差而言，CSO和LSH倾向于低估真实参数，而LSC和POM则倾向于高估真实参数。对于所有模型的位置参数，当真实参数值较高时，我们观察到的偏差尤其大。对于离散参数，较高的值会导致位置平移模型出现较大的偏差，而位置尺度模型的偏差较小。位置平移模型的位置参数与离散参数的偏差呈正相关。类别数量和信息变量主要会增大位置平移模型离散参数的负偏差，并略微增大类别特异模型位置参数的负偏差，但不会影响其他模型的偏差。

随后，我们考察了 POM、CSO、LSH、LSC 和 LM 的参数检验中的 α误差。当数据由 POM 生成时，线性模型和比例优势模型最接近预设的 α水平。尤其是在选择偏斜分布时，所有其他模型的误差都显著膨胀。使用带有离散参数的模型生成数据时，线性模型和比例优势模型再次最能维持 α水平。只有在存在35个协变量时，POM 的 α误差才有所膨胀。对于由类别特异优势模型生成的数据，我们发现，在所有设定下，CSO 的 α误差都出现了尤为严重的膨胀，而线性模型和比例优势模型则将误差维持在相对接近 α水平的范围内。

同样，我们报告了相应的功效曲线；对于不同的数据生成设定，线性模型和 POM 再次表现出最适用。尤其是在选择偏斜分布时，位置尺度模型两个参数的参数检验以及位置平移模型离散参数检验的功效曲线都非常平缓。

Liddell & Kruschke（2018年）指出，当观测值的均值接近量表端点时，度量模型可能会产生误差。我们选择偏斜分布来考察这种情况；至少对于

我们模拟研究中的线性模型而言，与所考察的大多数其他模型相比，误差严重程度较低。

总之，在所考察的模型中，线性模型和比例优势模型在我们的模拟研究中展现了最佳的总体推断性质。它们在几乎所有模拟设置中都维持了 α水平，并且在按比例优势模型抽样时显示出相对较陡的功效曲线。在有序模型中，比例优势模型的强劲表现与先前研究结果一致（Buczak 等人，2024年；Tutz，2022a）。线性模型的良好表现支持了如下论断：当样本量相当大时（如本研究中的$n \geq 250$），线性模型对正态性假设的违背相当稳健（Knief & Forstmeier，2021）。然而，其解释更具挑战性，因为有序类别不能被视为等距数据点。基于我们的结果，我们因此总体上建议在存疑时使用更简单的回归模型，尤其是比例优势模型，而非更复杂的替代方案。仅当存在非常相关的禁忌因素、不宜只使用一个位置参数时，才应使用带有离散参数的模型；而 CSO 的推断性质使我们总体上不建议使用该模型。

4.1 局限性

在本模拟研究中，所有信息性协变量对目标变量的影响始终采用相同的回归权重进行模拟。这样可以确保随着回归参数值增大，所有信息性协变量的影响均以相似的幅度增强；模型属性受到的影响并非源于不同协变量的回归参数值不同，而是源于回归参数本身的值。尽管如此，也可以提出这样的观点：在包含四个信息性协变量的情境中，改变回归参数值应只影响关注变量的参数，并可能导致功效分析得出不同结果。

数据生成过程设定为协变量服从均值为零、标准差为 0.5 的正态分布，以减少出现负概率的情况。此外，若出现负概率，则舍弃相应观测值。实际上，这类数据确实存在，但在我们的模拟研究中被忽略了。未来的模拟可能需要采用不同的分布，并探索处理负概率的合理方法。

由于共有 4032 种模拟设置和 2000 次模拟重复，因此许多模型在 R 中都显示了警告。在本次模拟研究中，我们忽略了这些警告。在实际应用场景中，我们自然会建议不要忽略此类警告，因为它们可能意味着存在影响结果

可靠性的问题。这可能导致更复杂的模型表现较差，例如类别特定模型、位置平移模型和位置尺度模型。

在这项模拟研究中，我们着重关注推断性质。不过，评估模型性能还有多种其他方法。未来的研究可以探讨这些模型的预测表现。这也使我们能够将比较范围扩展到其他有序回归模型，例如基于树的模型（Hornung，2020年；Buczak 等人，2024年；Buczak，2025年）。

最后，我们在模拟中使用了Wald型检验。这些检验简单易用，已应用于许多软件包中（例如Yee，2010）。然而，它们可能并不完全适用于有序结局，并且在观测数量较多时表现得更为可靠。采用重抽样方法可以避免这些缺点，这种方法已被用于析因设计中的非参数分析（例如Umlauft等，2017年；Dobler等，2020年）。

声明

资助 本研究未获得任何资助。

利益冲突 作者声明，本文内容不存在需要披露的竞争性利益。

伦理批准 不适用。

参与知情同意 不适用。

发表知情同意 不适用。

数据和材料的可用性 本研究仅使用人工生成的（模拟）数据，不涉及个人数据。

代码可用　性 代码和所有模拟数据集将作为补充材料发布。

开放实践

代码和所有模拟数据集将作为补充材料发布。本研究本身未经预注册。

参考文献

Berger, M. (2020年)。 *ordDisp*：有序回归模型中的位置与离散度分离。 检索自 https://CRAN.R-project.org/package=ordDisp

Brunner, E., Bathke, A.C., &Konietschke, F. (2018年)。 析因设计中独立观测的秩程序与伪秩程序。 Springer。

Buczak, P.（2025年）。频率调整边界有序森林：一种用于有序预测的新型树集成方法。《英国数学与统计心理学杂志》， *78*（2），594–616。

Buczak, P.、Horn、D. 和 Pauly、M.（2024年）。旧方法是经典，还是新方法更亮眼？比较有序预测的树集成与经典参数方法。开放科学中心：OSF预印本。检索自 https://osf.io/v7bcf doi: 10.31219/osf.io/v7bcf

Bürkner, P.-C., & Vuorre, M. (2019). 心理学中的有序回归模型：教程。心理科学方法与实践进展, *2*(1), 77–101. doi: 10.1177/2515245918823199

Christensen, R.H.B. (2023). 有序数据回归模型。取自`https://CRAN.R-project.org/package=ordinal`

Dobler, D., Friedrich, S., & Pauly, M. (2020). 有意义效应的非参数多元方差分析。统计数学研究所年刊, *72*(4), 997–1022.

Friedrich, S., Groll, A., Ickstadt, K., Kneib, T., Pauly, M., Rahnenführer, J., & Friede, T. (2023). 临床生物统计学中的正则化方法：方法及其应用综述。医学研究中的统计方法, *32*(2), 425–440.

Hastie, T., Tibshirani, R., & Friedman, J. (2009). 统计学习要素：数据挖掘、推断与预测（第2版）。纽约：Springer。

Hornung, R. (2020年). 有序森林。分类学杂志， *37*(1)， 4–17。取自 http://link.springer.com/10.1007/s00357-018-9302-x doi: 10.1007/s00357-018-9302-x

Janitza, S., Tutz, G., & Boulesteix, A.-L. (2016年). 用于有序响应的随机森林：预测与变量选择。计算统计学与数据分析， *96*， 57–73。取自 https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0167947315002601 doi: 10.1016/j.csda.2015.10.005

Joshi, A., Kale, S., Chandel, S., & Pal, D. (2015). 李克特量表：探索与阐释。英国应用科学与技术杂志, *7*(4)，396–403。取自 https://journalcjast.com/ index.php/CJAST/article/view/381 doi: 10.9734/BJAST/2015/14975

Knief, U., & Forstmeier, W. (2021). 违反正态性假设或许是两害相权取其轻。行为研究方法， *53*(6), 2576–2590。取自 https://link.springer.com/ 10.3758/s13428-021-01587-5 doi: 10.3758/s13428-021-01587-5

Liddell, T. M., & Kruschke, J. K. (2018). 使用度量模型分析有序数据：究竟会出什么问题？《实验社会心理学杂志》， *79*， 328–348。取自 https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022103117307746 doi: 10.1016/j.jesp.2018.08.009

McCullagh, P.（1980）。《有序数据回归模型》。《英国皇家统计学会杂志：*B*辑（方法论）》, *42*(2)，109–142。doi：10.1111/j.2517-6161.1980.tb01109.x

Peterson, B., & Harrell, F. E.（1990）。有序响应变量的部分比例优势模型。皇家统计学会期刊：*C*辑（应用统计），*39*(2)，205–217。取自 https://www.jstor.org/stable/10.2307/2347760?origin=crossref doi：10.2307/2347760

R Core Team.（2024年）。R：统计计算的语言与环境 [计算机软件手册]。维也纳，奥地利。检索自 https://www.R-project.org/

Sullivan, G. M., & Artino, A. R.（2013）。分析与解读来自李克特式量表的数据。研究生医学教育杂志，*5*（4），541–542。检索自 https://meridian.allenpress .com/jgme/article/5/4/541/34037/Analyzing-and-Interpreting-Data-From-LikertType doi: 10.4300/JGME-5-4-18

Tutz, G.（2011）。分类数据回归 （第34卷）。剑桥大学出版社。

Tutz, G.（2022a）。有序回归：综述与模型分类体系。*WIREs*计算统计，*14*（2），e1545。检索自 https://wires.onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/ wics.1545 doi: 10.1002/wics.1545

Tutz, G. (2022b). 有序树与随机森林：无评分递归划分与改进的集成。分类学杂志，*39*(2), 241–263. 获取自 https://link.springer.com/ 10.1007/s00357-021-09406-4 doi: 10.1007/s00357-021-09406-4

Tutz, G., & Berger, M. (2017). 在有序回归模型中分离位置与离散度。计量经济学与统计学，*2*, 131–148. 获取自 https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/ pii/S245230621630003X doi: 10.1016/j.ecosta.2016.10.002

Tutz, G., & Berger, M. (2022). 基于参数与加性位置偏移方法的更稀疏的有序回归模型。国际统计评论, *90*(2), 306–327. 获取自 https:// onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/insr.12484 doi: 10.1111/insr.12484

Umlauft, M., Konietschke, F., & Pauly, M. (2017年). 用于非参数析因设计的基于秩的置换方法。《英国数学与统计心理学杂志》, *70*(3), 368–390.

Wickham, H., Pedersen, T., & Seidel, D. (2023). *scales*：用于可视化的比例尺函数。取自 https://CRAN.R-project.org/package=scales

Yee, T. W. (2010). 用于分类数据分析的 VGAM 软件包。《统计软件杂志》，*32*(10). doi: 10.18637/jss.v032.i10

文献综述详情

为了更清楚地了解实践中哪些模型用于有序结局，我们使用 PubPsych (https://pubpsych.zpid.de/pubpsych/) 进行了文献综述。我们使用了“回归”以及“ordinal”或“有序”作为搜索词，并且仅纳入了 2014 至 2023 年间发表的研究。

我们共获得676篇文章，其中16篇无法获取。排除所有未明确报告使用有序模型的论文后，剩下458篇。其中，6篇论文使用了两种不同的方法，另有一篇使用了4种不同的方法；具体模型见表1。

如果论文明确指出所使用的模型、给出了相应公式、列出了假设、说明该模型通过了相应的假设检验，或者在SPSS中使用Logit链接且未借助额外软件包计算该模型，我们便将其归类为使用了特定模型。据我们所知，SPSS仅实现了比例优势模型，并未实现其他有序回归模型。

有11篇论文未明确说明如何或在何处使用了有序模型，或未提供模型的相关细节。50篇论文采用了某种形式的混合模型，另有4篇使用了贝叶斯方法；这两者均超出了本研究的范围。

这项模拟研究中，文献综述提及的模型包括：205篇论文（52%）采用比例优势模型，14篇论文（3.54%）采用部分比例优势模型，2篇论文（0.5%）采用类别特异优势模型。一篇论文报告了一个位置参数和一个尺度参数。其他论文采用了不同于 Logit 链接的链接函数：我们发现12篇论文采用 Probit链接，5篇采用负对数-对数链接，1篇采用对数-对数链接。

136篇论文采用了 Logit链接函数，但未明确说明所用模型。在这些论文中，105篇报告了每个协变量对应一个优势比，14篇报告了每个协变量对应一个回归权重，7篇两者均有报告，另有10篇均未报告。23篇论文未明确说明链接函数，其中1篇报告了每个协变量对应一个优势比和一个回归参数，5篇未报告优势比但报告了每个协变量对应一个回归参数，17篇报告了优势比但未报告回归参数。详细列表见表1。

表1：文献综述结果

模型类型	数量项研究	百分比相对于总计 (1)	百分比相对于总计 (3)
混合	47	.1006	
贝叶斯	2	.0043	
贝叶斯混合	2	.0043	
不明确	11	.0236	
其他	6	.0128	.0152
Probit链接	11	.0236	.0278
Probit 混合	1	.0021	.0025
互补对数-对数链接	1	.0021	.0025
负对数对数连接	5	.0107	.0126
比例优势（PO）	205	.4390	.5177
部分比例优势（PPO）	14	.0300	.0354
类别特异性优势比（CSO）	2	.0043	.0051
位置 + 尺度参数	1	.0021	.0025
对数链接表示，无优势比表示，无参数表示	10	.0214	.0253
对数链接表示、优势比表示，无参数表示	105	.2248	.2652
对数链接表示、优势比表示，每个协变量表示对应一个参数	7	.0150	.0177
对数链接表示，无优势比表示，每个协变量表示对应一个参数	14	.0300	.0354
无链接重复表示，优势比表示，每个协变量表示对应一个参数	1	.0021	.0025
无链接重复表示、无优势比表示、每个协变量重复表示一个参数	5	.0107	.0126
无链接重复表示、有优势比表示、无参数重复表示	17	.0364	.0429
研究中的不同模型总数 (1)	467		
部分比例优势模型和比例优势	2		
互补对数-对数链接和位置 + 尺度参数	1		
估计了优势比的混合序数模型	1		
Probit链接和采用Probit链接的混合模型	1		
部分比例优势模型和CSO	1		
PPO, PO, CSO和其他模型	1		
采用有序模型的研究总数（2）	458		
不包括混合、贝叶斯和不明确项的总数（3）	396		

注。PO = 比例优势模型；PPO = 部分比例优势模型；CSO = 类别特异优势模型；OR = 优势比；rep表示已报告；

B 模拟中的问题

在数据生成过程中，如果条件 $P(Y \leq r|\mathbf{x}) \leq P(Y \leq r+1|\mathbf{x})$ 不成立，就会重新抽取数据。在我们的模拟研究中，从类别特异模型抽取数据且 β 值较高、包含四个信息性协变量时，这种情况尤为常见。在这些情况下，平均每获得一个符合条件的观测值，就需要抽取约 4-6 个观测值。其他所有设置下，这一数量都较低。

如果每个类别中观测值的观测数量少于 5，就会重新抽取整个数据集。在离散度较大、观测值数量较少、类别数量较多且采用偏斜分布的设置下，这种情况尤为常见。在其中一些情况下，最多需要重新抽取 1540 个样本。其他所有设置下，重新抽取的样本数量少于 200。

在所关注的累积模型中，类别特异优势模型、位置平移模型和位置尺度模型在某些设置下存在明显的收敛问题。在任何设置下，未收敛的比例优势模型所占比例均低于 0.01%。

类别特异模型未收敛 在 4032 种模拟设置中，有 1537 种设置下所有类别特异模型均收敛。在 382 种设置下，至少 20% 的模型未能收敛。图12展示了对模型未收敛影响最大的模拟设置。当协变量数量较多、观测数量较少且真实 γ 值较高时，类别特异模型会出现收敛问题。

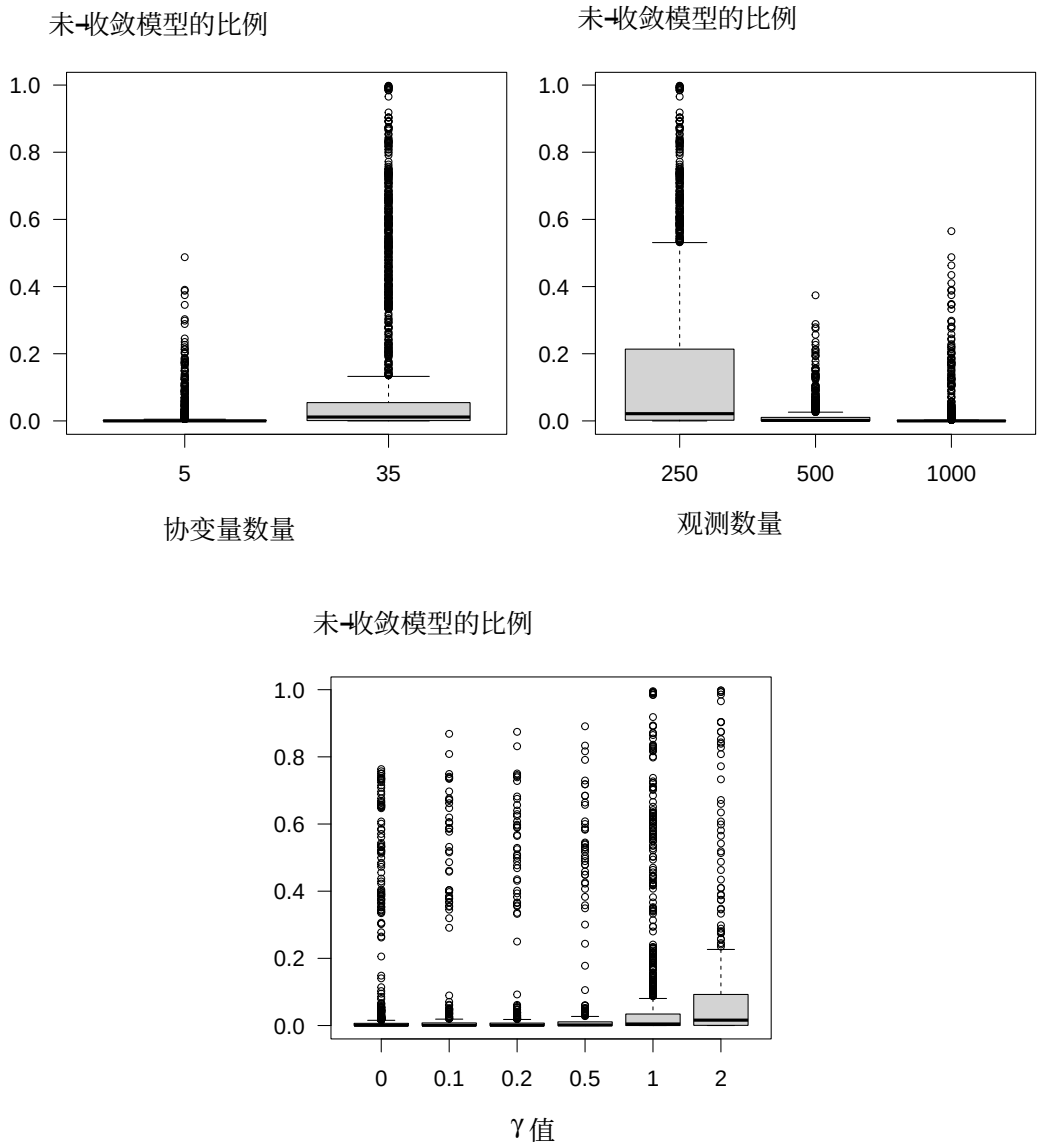

图12：影响类别特异模型收敛的相关因素。

位置平移模型未收敛 在 4032 种模拟设置中，有 2454 种设置下所有位置平移模型均收敛。在 3 种设置下，至少 20% 的模型未收敛。图13展示了对模型未收敛影响最大的模拟设置。当数据生成过程采用位置尺度模型且 γ 值较高时，位置平移模型的收敛会出现问题；此外，真实的 β 值也相当低。

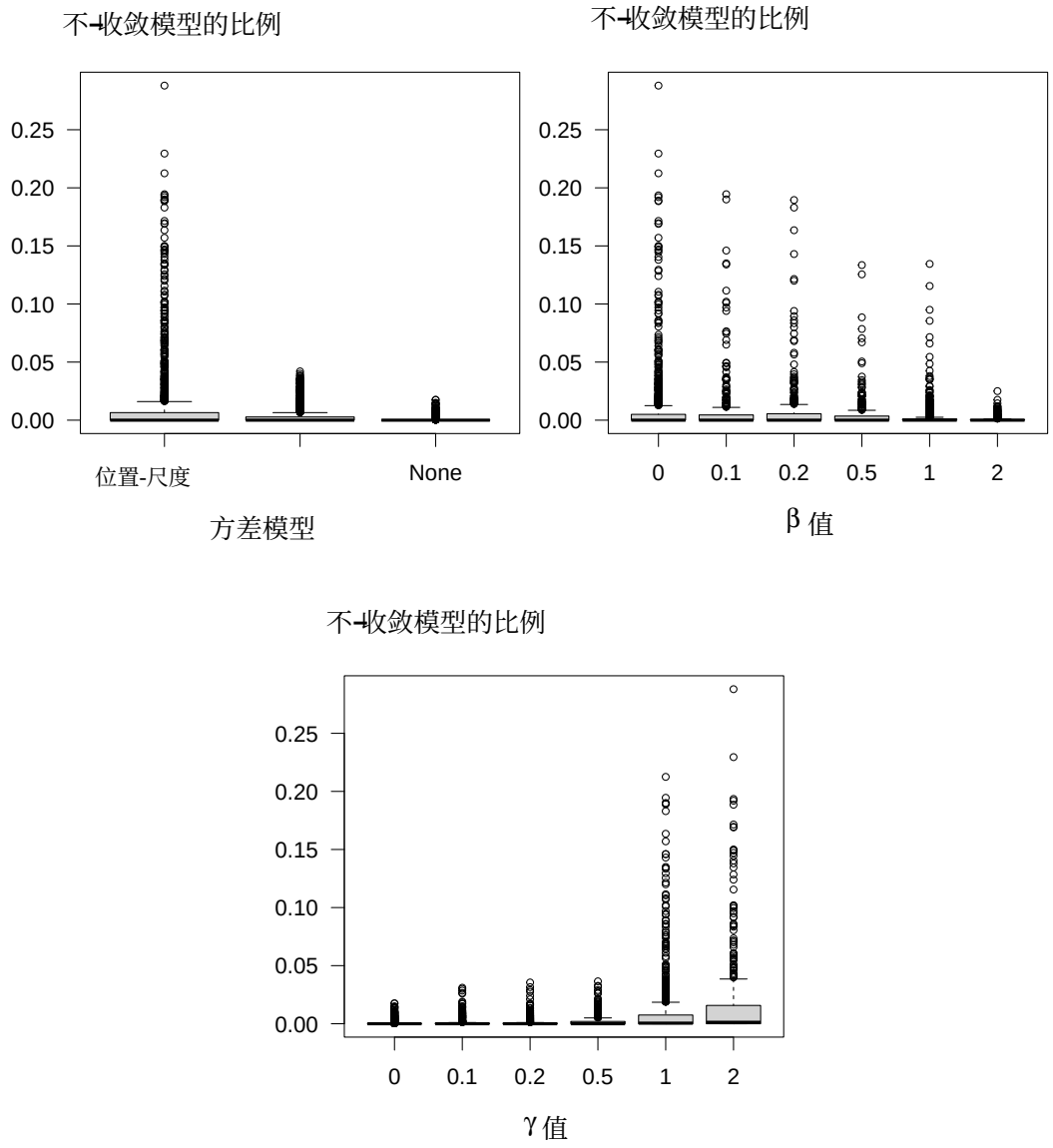

图13：与位置平移模型收敛相关的因素。

位置尺度模型未收敛 在 4032 种模拟设置中，有 1827 种设置下所有位置尺度模型均收敛。在 807 种设置下，至少 20% 的模型未收敛；在 66 种模拟设置下，没有模型收敛。图14展示了对模型未收敛影响最大的模拟设置。当数据生成过程采用位置尺度模型且 γ 值较高时，位置尺度模型的收敛会出现问题；此外，真实的 β 值也相当低。

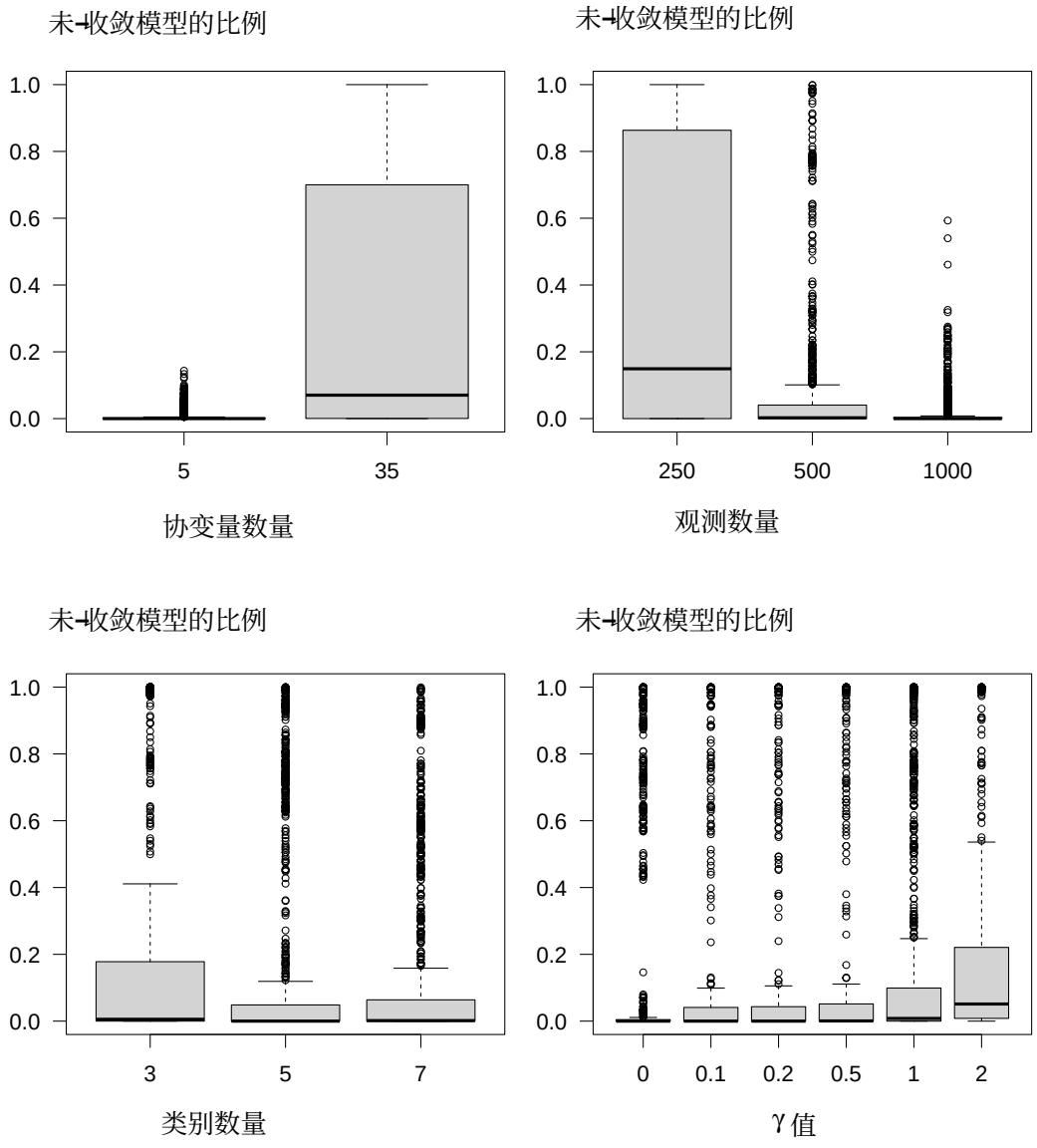

图14：影响位置尺度模型收敛的相关因素。

C 位置-尺度、位置平移和类别特异优势模型的位置参数偏差

图15展示了位置平移模型的位置参数偏差。与协变量数量较少时相比，协变量数量较多时，位置参数估计值的离散度更大。同样，类别更多、信息性协变量更多时，估计值的离散度也会增加。信息性协变量更多且分布为非结构化分布时，偏差略大。我们发现，位置参数的真实值 β 越高，位置参数估计值的（负）偏差越大；真实值较高时，估计值的离散度也更大。位置参数的（负）偏差也会随着离散度值的增大而增大；离散度值较高时，估计值的离散度也更大。

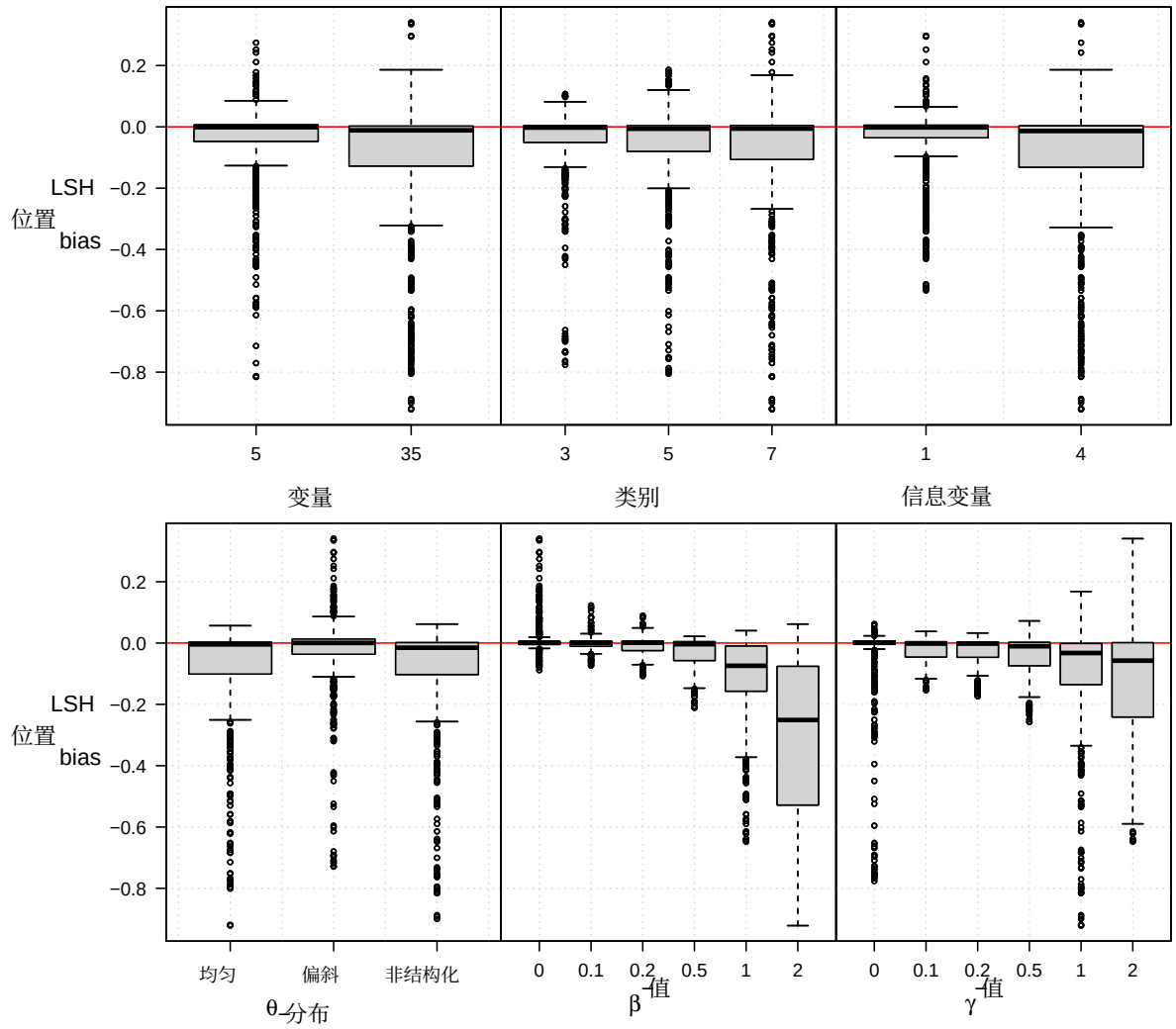

图15：采用位置平移模型进行抽样时，模拟设置对位置平移模型偏差的影响，结果汇总自所有 n_o。除各自对应的列外，箱线图均汇总了所有协变量数量、类别数量、信息变量数量、真实位置和尺度参数值以及分布设置。

图16展示了位置尺度模型的位置参数偏差。与协变量数量较少时相比，协变量数量较多时，位置参数估计值的离散度更大。同样，类别较少且分布为偏斜分布时，估计值的离散度略有增加。我们发现，位置参数的真实值 β 越高，位置参数估计值的偏差越大；真实值较高时，估计值的离散度也更大。位置参数的偏差也会随着离散度值的增大而增大；离散度值较高时，估计值的离散度也更大。

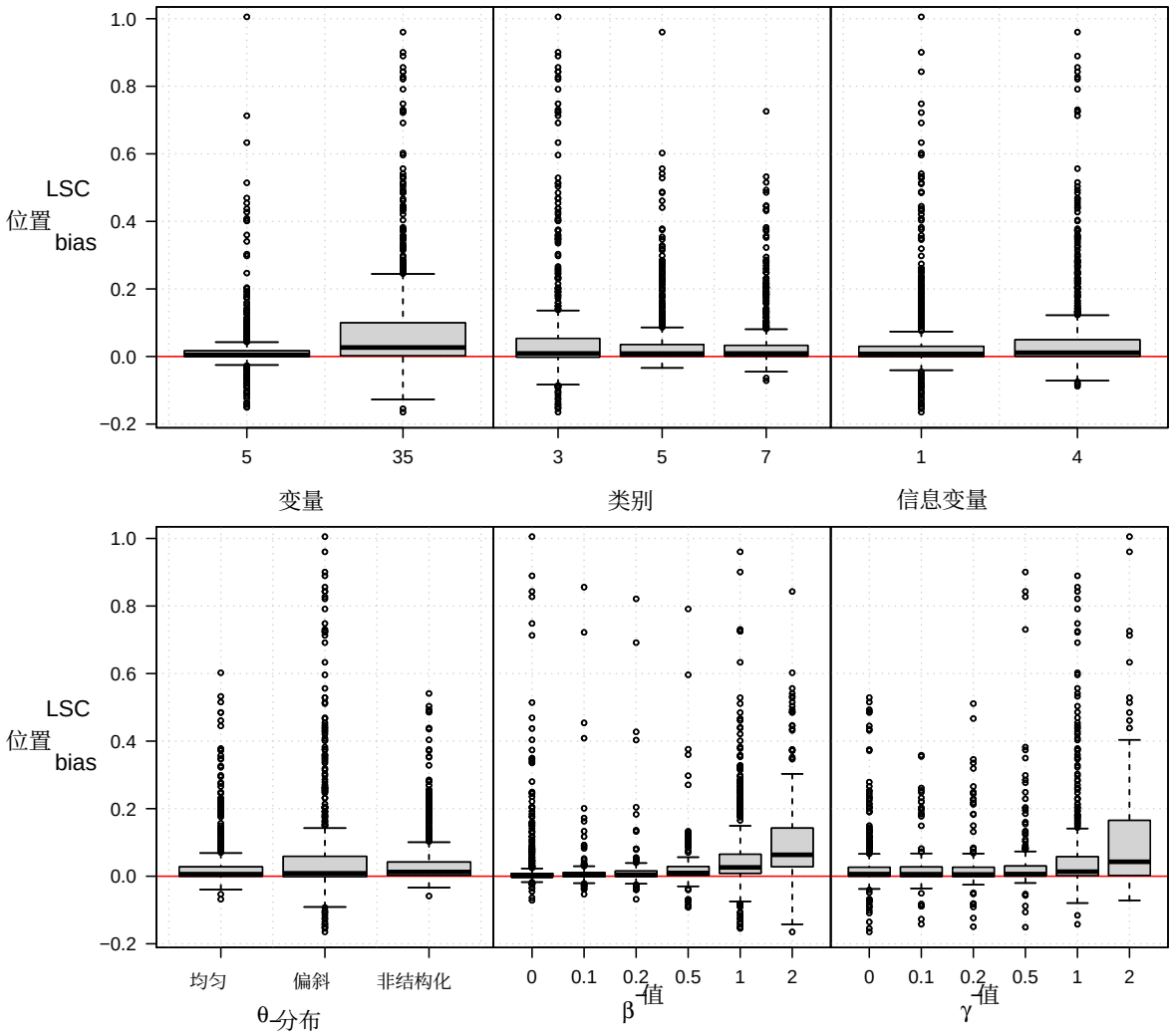

图16：模拟设置对位置尺度模型偏差的影响，即使用位置尺度模型抽样并在所有 n上汇总时。除各自特定列外，箱线图在所有协变量数量、类别数量、信息变量数量、真实位置和尺度参数值以及分布设置上汇总。为清晰显示箱体，已从图中排除1.04至2.49范围内的12个值。

图17展示了类别特异优势模型的位置参数偏差。如方法部分所述，位置平移模型可以表示为类别特异优势模型。因此，偏差计算也纳入了这些模型，导致真实的 β 值与模拟设置中选定的值不同，因为离散参数需要用位置参数表示。

位置参数的估计值表明，信息变量数量越多，离散度越大。估计值的离散度似乎随类别增多而增大，但这是因为当偏差项取自位置偏移模型时，类别更多的设定中 β值更大。我们看到，位置参数 β的真实值越高，所估计位置参数的偏差就越高，高值还伴随着估计值更高的离散度。变量数量、观测值以及分布并未起到相关作用。

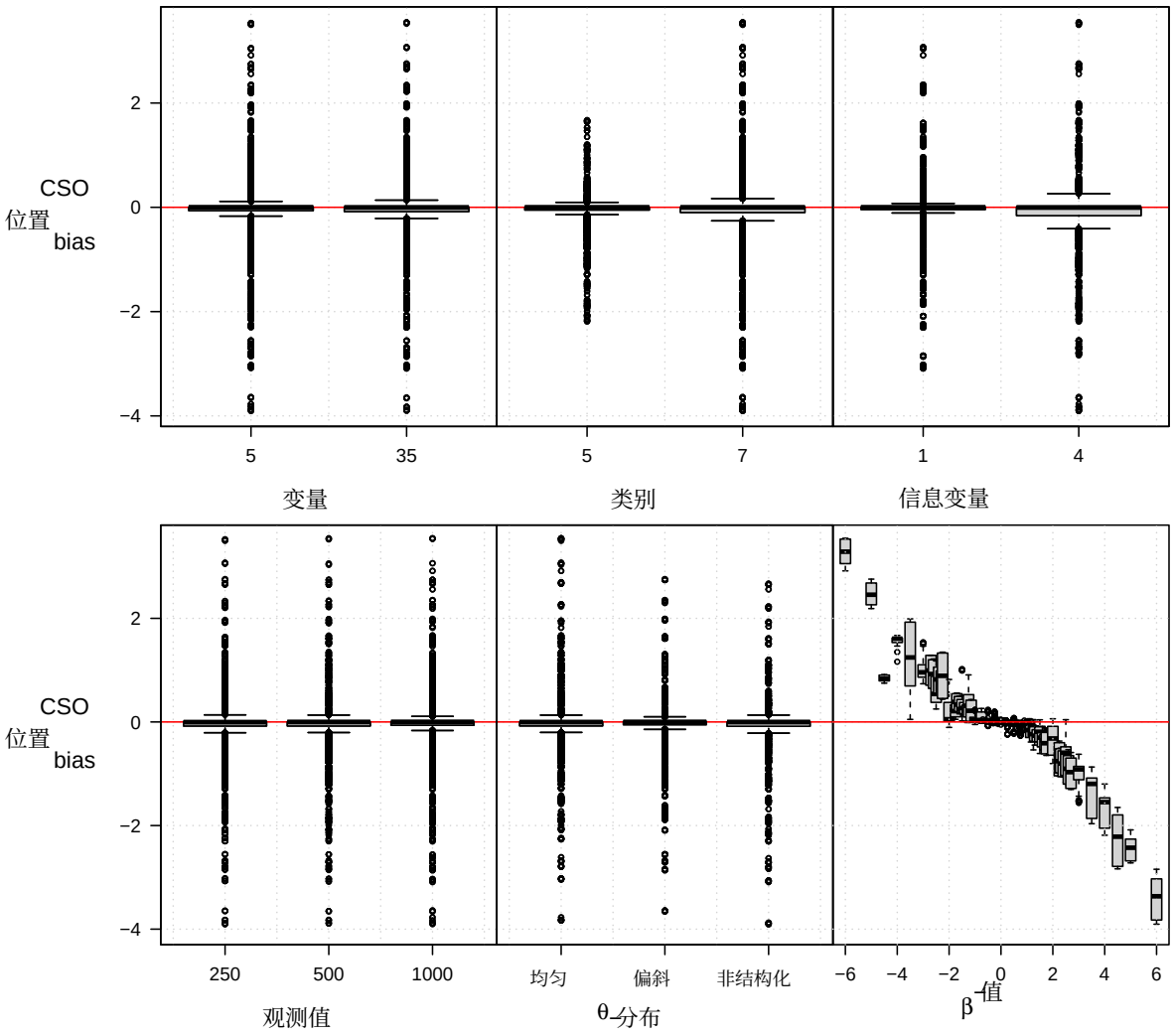

图17：模拟设置对类别特异优势模型及其嵌套模型偏差的影响。除特定列外，箱线图均汇总了不同观测数量、协变量、类别、信息变量数量、分布和真实位置参数值下的结果。

D α误差的进一步结果

图18显示了在以位置-进行抽取时，所有模型中一个无信息变量的 α误差 $\gamma = 1$ 和 $\beta = 0$的偏移模型。

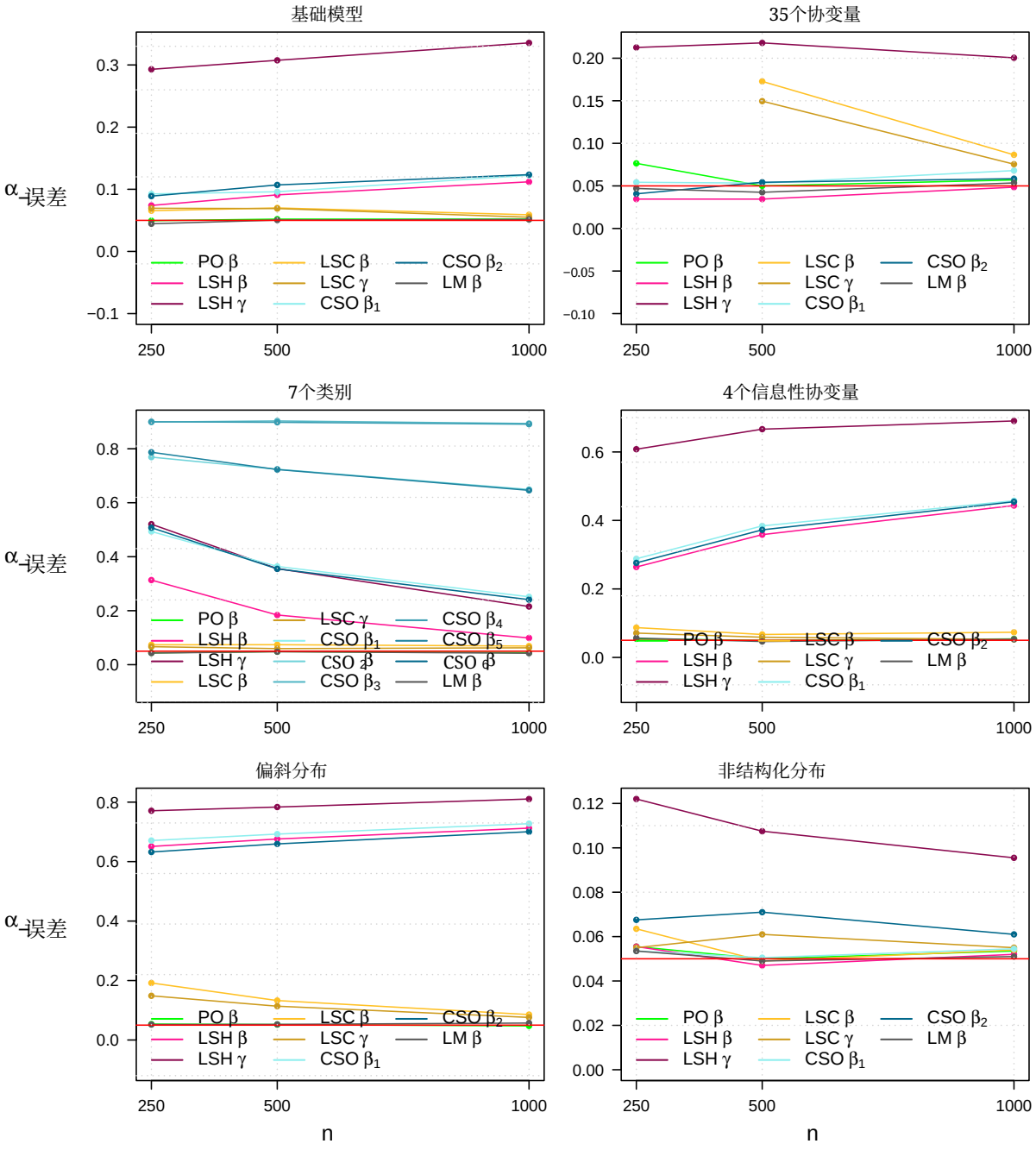

图18: 模拟设置对模型 α误差的影响。数据取自 the 位置平移模型，其中 $\gamma = 1$ 和 $\beta = 0$

图19显示了从位置-量表模型中抽样时，所有模型中无信息变量的 α误差，该模型具有 $\gamma = 1$ 和 $\beta = 0$。

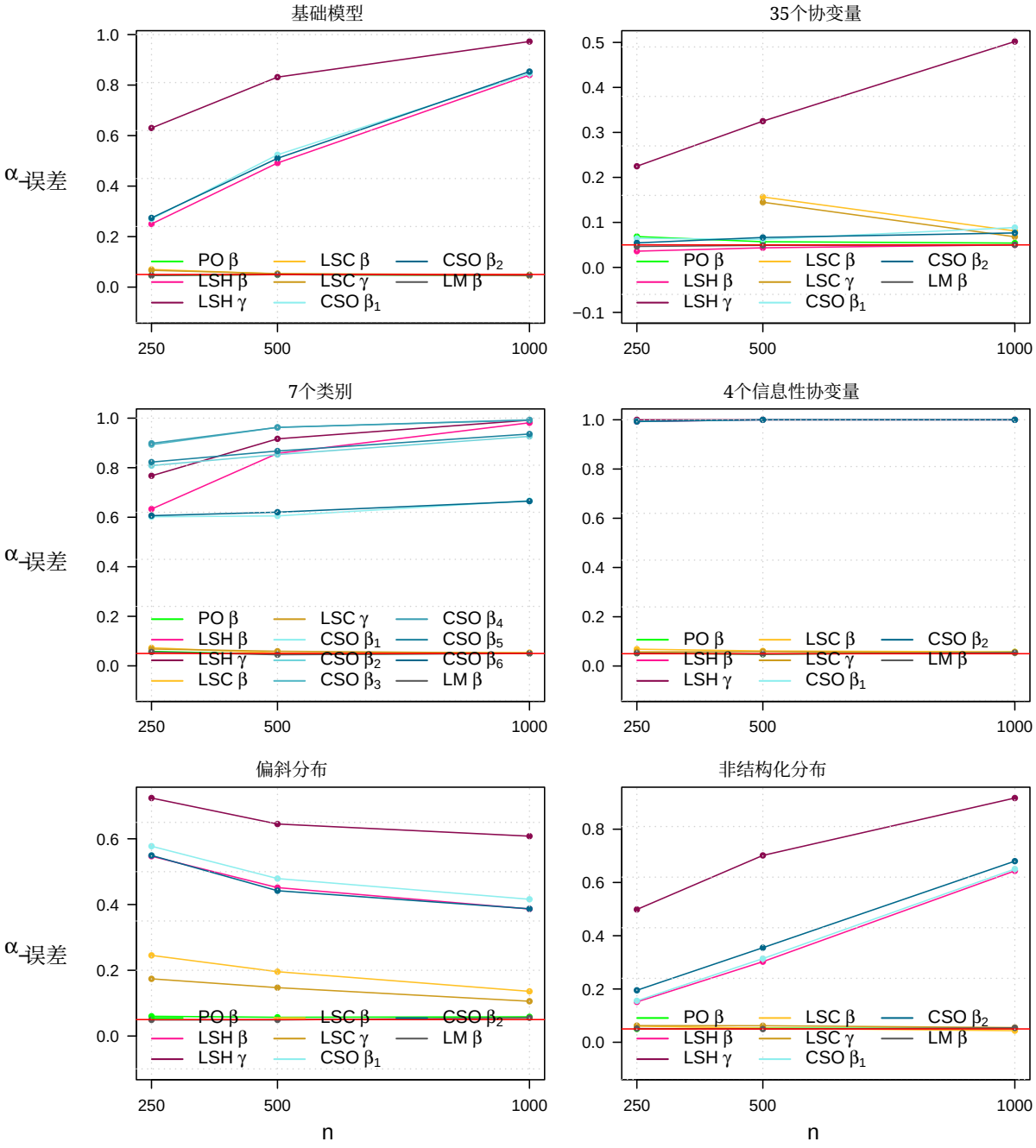

图19：模拟设置对模型 α误差的影响。数据取自位置尺度模型，其中 $\gamma = 1$ 和 $\beta = 0$

图20展示了从位置平移模型中抽样时，信息变量的线性模型、比例优势模型和两种离散模型的位置参数的 α-误差，其中 $\gamma = 1$ and $\beta = 0$。未纳入CSO模型，因为位置参数能够对离散度进行建模，因此CSO的真实 β 值不为零。

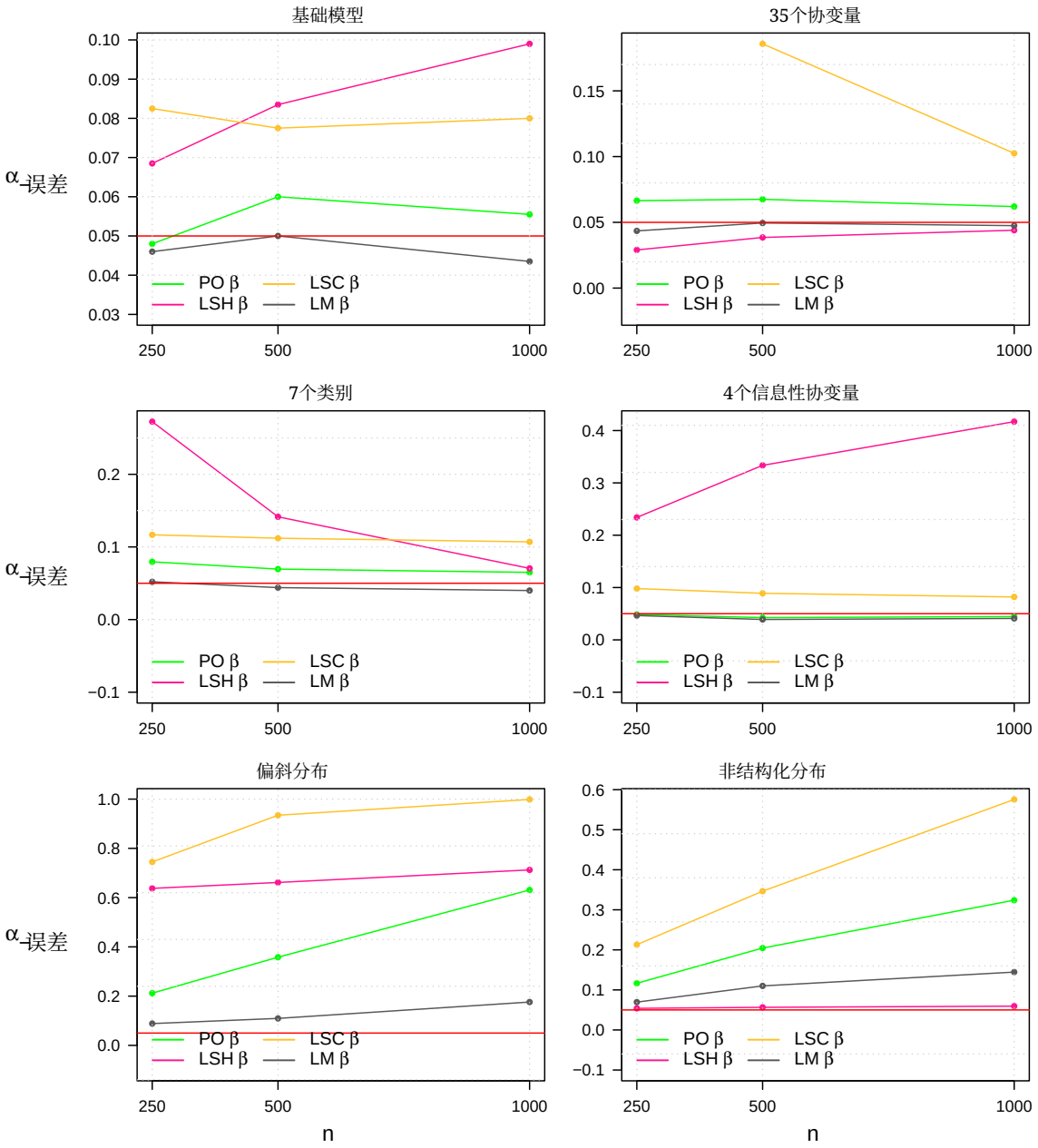

图20：模拟设置对模型位置参数的 α误差的影响。数据抽取自位置平移模型，其中 $\beta = 0$ 和 $\gamma = 1$。所选基础模型具有$p = 5$ 个协变量、 $k = 3$ 个类别、一个信息性协变量以及均匀分布设置。

图21展示了从位置尺度模型中抽样时，信息变量的线性模型、比例优势模型和两种离散模型的位置参数的 α-误差，其中 $\gamma = 1$ and $\beta = 0$。未纳入CSO模型，因为与位置平移模型的情况一样，位置参数能够对离散度进行建模，因此CSO的真实 β 值可能不为零。

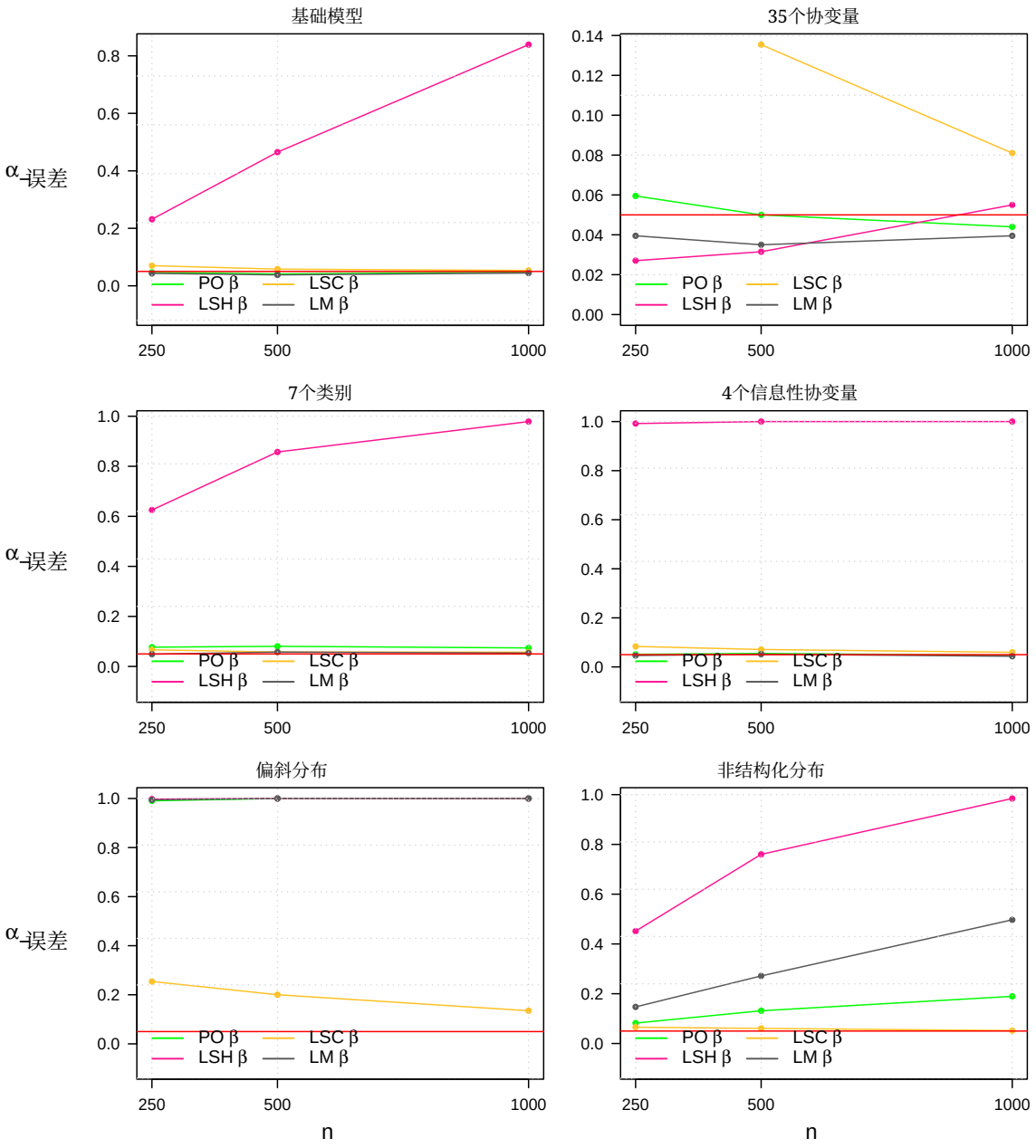

图21：模拟设置对模型位置参数的 α误差的影响。数据来自位置-尺度模型，采用 $\beta = 0$ 和 $\gamma = 1$。所选基础模型具有$p = 5$ 个协变量、 $k = 3$ 个类别、一个信息性协变量，并采用均匀分布设置。

图22展示了从CSO模型抽取的数据中，类别特异优势模型参数的 α误差结果。我们展示了一个信息性协变量为 $u = 1$的结果，因此在有7个协变量的情况下 $\beta_2 = \beta_6 = 0$。

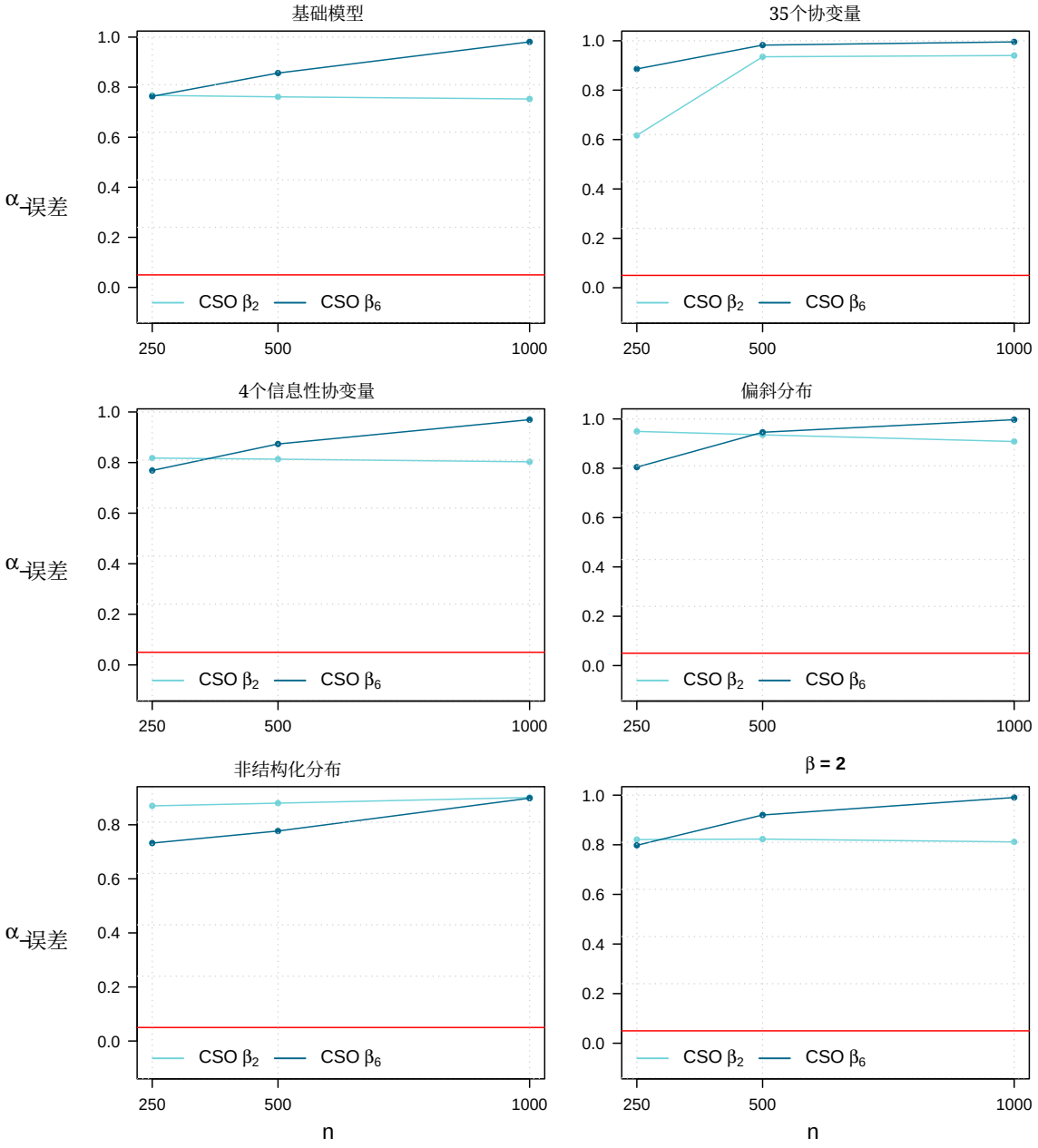

图22：模拟设置对模型位置参数的 α误差的影响。数据抽取自位置尺度模型，其中包含 $\beta = 0$ 和 $\gamma = 1$。所选基础模型具有$p = 5$ 个协变量、 $k = 3$ 个类别、一个信息性协变量以及均匀分布设置。