arXiv:2603.01946v1 [math.AG] 2 Mar 2026

向量丛奇异模空间上的交理论：抛物方法

CAMILLA FELISETTI 与 OLGA TRAPEZNIKOVA

摘要。我们给出黎曼曲面上秩为 r、次数为 0 的半稳定丛的模空间 $\mathcal{M}_0(r)$ 的交叉上同调中交配对的显式公式。关键思想是将此交叉上同调实现为抛物丛光滑模空间的上同调的一个典范子空间，其中该配对可通过 Hecke 对应与 Jeffrey–Kirwan 迭代留数公式来计算。该方法为 Jeffrey–Kirwan–Kiem–Woolf 的爆破构造提供了一种更简单的替代，从而对任意 r 给出 $\mathcal{M}_0(r)$ 上交配对的公式，并具有清晰的几何解释。

1. 引言

设 C 为亏格为 $g \geqslant 2$ 的紧黎曼曲面。对于一对整数 r 与 d，令 $\mathcal{M}_d(r)$ 表示 C 上秩为 r、次数为 d 且具有固定行列式的半稳定全纯向量丛的模空间。当 r 与 d 互素时，稳定性与半稳定性条件一致，且 $\mathcal{M}_d(r)$ 为光滑射影簇。这些空间的交叉理论在过去数十年中已得到广泛研究 [1, 2, 3, 4, 5]。

相比之下，当 r 与 d 不互素时——尤其是对于 $d = 0$ ——模空间$\mathcal{M}_0(r)$会因严格半稳定丛而产生奇点。在这种情况下，普通上同调不再满足庞加莱对偶，而应由交叉上同调取代。由 Goresky 和 MacPherson [6, 7], 引入的交叉上同调群 $IH^*(\mathcal{M}_0(r)$、$\mathbb{Q})$恢复了这一对偶，并为推广 Atiyah 和 Bott [1]的基础性结果提供了自然框架。

对这些奇异模空间的交叉理论的研究有着悠久的历史。经典方法通常通过显式奇点解消或等变方法来处理奇点。这一方向的早期结果由 Kiem [8], 得到，他计算了秩为 $r = 2$ 的半稳定丛的模空间 $\mathcal{M}_0(2)$ 上的交庞加莱–Verdier 配对。随后，Jeffrey、Kirwan、Kiem 和 Woolf [9], 将其推广，给出了任意秩 $r \geqslant 2$ 时 $\mathcal{M}_0(r)$上交配对的公式。

[9] 的方法基于 Atiyah 和 Bott 的无穷维观点，在该观点下，模空间 $\mathcal{M}_0(r)$ 被实现为几何不变理论商 $M/\!\!/G$。作者运用 [10], 中发展的技术，通过一系列爆破构造部分奇点消解$\sim M /\!\!/ G$ ，从而得到 $\mathcal{M}_0(r)$的部分解消。他们构造的一个关键特点是，交叉上同调 $IH^*(\mathcal{M}_0(r), \mathbb{Q})$ 自然嵌入$\widetilde{}$普通上同调 $H^*(M/\!\!/G, \mathbb{Q})$中，并且可以从解消空间上的配对恢复 $IH^*(\mathcal{M}_0(r), \mathbb{Q})$ 上的交配对。尽管

这种方法是显式的，但随着秩的增加，使用起来会愈发困难：解消的分层变得更加复杂，而且在实践中难以对$\sim H^*(M/\!\!/G,\mathbb{Q})$进行显式计算，尤其是对于$r>2$。

本文旨在完整且明确地描述任意秩r下$IH^*(\mathcal{M}_0(r)、\mathbb{Q})$上的交配对。我们通过利用稳定抛物丛模空间的几何性质，避开了经典的奇点消解；这些模空间为$\mathcal{M}_0(r)$提供了一个自然的有限维光滑模型。更具体地说，按照[11],，我们考虑稳定抛物丛的光滑模空间$\mathcal{P}_0(r)$以及遗忘抛物结构的真态射$\pi\colon \mathcal{P}_0(r)\to\mathcal{M}_0(r)$。不同于[9],中的爆破解，该映射将$\mathcal{M}_0(r)$与一个光滑空间联系起来，而无需对其奇点进行显式解消。

基于反常层理论以及 Beilinson、Bernstein、Deligne 和 Gabber 的分解定理[12],，关键观察是：交叉上同调$IH^*(\mathcal{M}_0(r)、\mathbb{Q})$可以与普通上同调$H^*(\mathcal{P}_0(r)、\mathbb{Q})$的一个典范子空间相识别。因此，奇异模空间$\mathcal{M}_0(r)$上的庞加莱 – 韦尔迪耶配对可以通过将光滑空间$\mathcal{P}_0(r)$上通常的交配对限制到该子空间来计算。

通过[13]中建立的典范Hecke对应，这一描述得以具体化。借助这一几何构造，空间$\mathcal{P}_0(r)$可以实现为光滑模空间$\mathcal{M}_1(r)$上的射影丛。随后，射影丛公式将$\mathcal{P}_0(r)$上交数的计算归结为$\mathcal{M}_1(r)$上交数的计算，而后者可利用 Jeffrey 和 Kirwan 的迭代留数公式[2]求得。

1.1. 备注。 我们的有限维方法为深入理解奇异模空间$\mathcal{M}_0(r)$提供了一个有用的框架。特别是，利用将$IH^*(\mathcal{M}_0(r)、\mathbb{Q})$识别为上同调环$H^*(\mathcal{P}_0(r)、\mathbb{Q})$的子空间这一结果（见命题 3.7），应当能够明确描述$\mathcal{M}_0(r)$的交上同调基本类。这将是以稳定抛物丛模空间$\mathcal{P}_0(r)$上的万有类构造$IH^*(\mathcal{M}_0(r)、\mathbb{Q})$的完整基的第一步——迄今为止，这样的基仅在秩为$2$[8]时得到过明确描述。

将这些结果与现代枚举框架（例如 Donaldson–Thomas 不变量）进行比较也很有趣，以探究$H^*(\mathcal{P}_0(r)、\mathbb{Q})$的典范子空间（命题 3.7 中对此有描述）是否捕捉了与$\mathcal{M}_0(r)$的虚基本类相同的几何信息，从而建立拓扑交理论与导出枚举几何之间的联系。

1.2. 本文结构。本文安排如下。第 §2 节回顾交叉上同调和交配对的基本性质，这些内容将在全文中用到。特别地，我们将以适用于本文论证的形式表述分解定理。

在 §3 中，我们引入抛物丛的光滑模空间$\mathcal{P}_0(r)$，它通过真态射$\pi\colon \mathcal{P}_0(r)\to\mathcal{M}_0(r)$映射到奇异模空间$\mathcal{M}_0(r)$。利用[11],的结果，我们进而将交叉上同调$IH^*(\mathcal{M}_0(r),\mathbb{Q})$识别为上同调环$H^*(\mathcal{P}_0(r),\mathbb{Q})$的一个典范子空间（见命题 3.7）。命题 3.8

进一步表明， $\mathrm{IH}^*(\mathcal{M}_0(r),\mathbb{Q})$ 上的庞加莱–韦尔迪耶配对的计算可归结为 $\mathrm{H}^*(\mathcal{P}_0(r),\mathbb{Q})$ 上交配对的计算。接下来的两节将专门进行后一项计算。

在命题 3.3 和 3.1 中，我们证明模空间 $\mathcal{P}_0(r)$ 可通过 Hecke 对应实现为光滑模空间$\mathcal{M}_1(r)$上的射影丛。因此， $\mathrm{H}^*(\mathcal{P}_0(r),\mathbb{Q})$ 中的交数可利用射影丛公式，根据 $\mathrm{H}^*(\mathcal{M}_1(r),\mathbb{Q})$ 上的交配对计算。后者的配对通过 Jeffrey 和 Kirwan 的公式 [2], 计算，我们将在 §4 中回顾这些公式。

在 §5 中，我们引入 $\mathrm{H}^*(\mathcal{P}_0(r),\mathbb{Q})$ 中的万有上同调类（见定理 5.4），并用这些类描述 $\mathrm{H}^*(\mathcal{P}_0(r),\mathbb{Q})$ 的上同调环。在定理 5.5 中，我们利用 §4 的结果计算这些类在 $\mathcal{P}_0(r)$ 上的积分，从而得到 $\mathrm{H}^*(\mathcal{P}_0(r),\mathbb{Q})$中的显式交数。

最后，在 §6 中，我们结合这些结果得出主要结论，即定理 6.3：关于 $\mathrm{IH}^*(\mathcal{M}_0(r)$、$\mathbb{Q})$ 上庞加莱–韦尔迪耶配对的显式公式。本文最后在 §6.3 中将我们的结果与 Kiem 对 $\mathrm{IH}^*(\mathcal{M}_0(2)$、 $\mathbb{Q})$ [8] 上交配对的计算进行比较（另见 [9]）。

致谢。 作者衷心感谢 András Szenes 的指导与鼓励。C.F. 的研究得到 INδAM GNSAGA 以及摩德纳与雷焦艾米利亚大学“组合几何与几何拓扑中的离散方法”项目的支持。O.T. 的研究得到奥地利科学基金（FWF）10.55776/ESP2557325 的支持。

2. 交叉上同调与分解定理

2.1. 交叉上同调。 我们先回顾交叉上同调的一些基本定义和性质。交叉上同调是 Goresky 和 MacPherson [6, 7] 引入的一种拓扑不变量，旨在将庞加莱对偶和交叉理论推广到奇异簇。更多细节和证明请参见 [14, 7]。

约定：本文通篇中，所有（交叉）上同调群均取有理系数。

设 Y 为一个复的（可能奇异的）拟射影代数簇。 Y 的有理交叉上同调群构成一个分次向量空间 $\mathrm{IH}^*(Y)=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{IH}^i(Y)$，它保留了光滑簇之上同调的许多基本特征。特别地，交叉上同调满足硬 Lefschetz 定理，携带 Hodge 结构，并具有非退化庞加莱–维尔交叉配对。

正如通常的上同调可以描述为移位常值层的超上同调，

$$\mathrm{H}^i(Y)=\mathbb{H}^{i-\dim Y}(Y,\mathbb{Q}_Y[\dim(Y)]),$$

交叉上同调定义为一个上同调可构造复形的超上同调，该复形称为交叉上同调层 IC_Y:

$$\mathrm{IH}^i(Y):=\mathbb{H}^{i-\dim(Y)}(Y,\mathrm{IC}_Y).$$

复形 IC_Y 在光滑轨迹 Y_{reg} 上限制为移位常值层:

$$\mathrm{IC}_Y\big|_{Y_{\mathrm{reg}}}=\mathbb{Q}_{Y_{\mathrm{reg}}}[\dim(Y)],$$

因此，可以将其视为从Y 的光滑部分延拓到整个簇的常值层。

更一般地，有一种称为中间延拓的典范构造，它将任意局部闭非奇异子簇$Z \subset Y$ 上的局部系统 $\mathcal{L}$ 与一个支撑在闭包 $\overline{Z}$上的可构造复形 $\mathrm{IC}(Z, \mathcal{L})$ 对应起来。该复形以最小的方式延拓 $\mathcal{L}$ ，即

$$\mathrm{IC}(\overline{Z}, \mathcal{L})|_Z = \mathcal{L},$$

并且满足某些支撑条件和余支撑条件（见 [7]）。对于这样的一对 $(Z, \mathcal{L})$，我们定义

$$\mathrm{IH}^i(\overline{Z}, \mathcal{L}) := \mathbb{H}^{i-\dim(Y)}(\overline{Z}, \mathrm{IC}(\overline{Z}, \mathcal{L})).$$

交叉上同调理论中最有力的工具之一是分解定理 [12], ，我们将在下一小节中对其进行表述。

2.2. **分解定理**。 为了以适合我们目的的形式陈述分解定理，我们先回顾倾斜滤过的一些基本事实。本节中，我们采用以下设定。

- 设 $f\colon X \to Y$ 是射影簇之间的一个真满射态射，其中 X 是维数为 N的非奇异簇。

对于态射 f ，可以在 $H^*(X)$ 上关联一个称为倾斜滤过的典范递增滤过。该滤过源自反常层理论，并可通过导出范畴 $D^b_c(Y)$中有界可构造复形的倾斜截断函子来定义，参见例如 [15, 16, 14, 17]。

尽管这一构造说明了倾斜滤过的典范性，但直接处理它往往很困难。然而，在我们假设 Y 是射影的这一简化条件下，倾斜滤过可以用底空间上的丰沛类给出更具体的描述，参见 [16, 命题 5.2.4]。

定义 2.1。 取 Y 上的一个丰沛类 $\beta \in H^2(Y)$ ，并考虑幂零算子 or

$$A\colon H^*(X) \to H^{*+2}(X)$$

由与 $f^*\beta \in H^2(X)$ 作杯积定义。 $H^d(X)$ 上的倾斜滤过 $P_\bullet$ 定义如下： [1]

$$P_k H^d(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{i \geqslant 1} \left(\ker(A^{N+k+i-d}) \cap \mathrm{im}(A^{i-1})\right) \cap H^d(X).$$

我们将相应的分次部分记为

$$H^d_k(X) := P_k H^d(X)/P_{k-1}H^d(X),$$

并称它们为反常上同调群。

Beilinson、Bernstein、Deligne 和 Gabber 的以下基本结果 [12]表明， X 的上同调可分解为反常上同调群。

[1]我们采用移位，使得 $P_\bullet$ 的取值范围从 0 到 f的（实）相对维数。

定理 2.2 (分解定理)。 设 $f : X \to Y$ 是从维数为 N 的光滑射影簇 X 到射影簇 Y的真代数映射。用$r(f) := \text{维数}(X \times_Y X) - \text{维数}(X)$ 表示 f的半小性缺陷。

(i) 在导出范畴 $\mathbf{D}_c^b(Y)$ 中存在一个同构[2] :

$$Rf_*\mathbb{Q}_X[N - r(f)] \simeq \bigoplus_{i=0}^{2r(f)} {}^p\mathcal{H}^i[-i], \tag{1}$$

其中的层 ${}^p\mathcal{H}^i := {}^p\mathcal{H}^i(Rf_*\mathbb{Q}_X[N - r(f)])$ 称为倾斜上同调层。

(ii) 对 (1) 两边取超上同调，得到同构

$$H^d(X) \cong \bigoplus_{i=0}^{2r(f)} H^{d-N+r(f)-i}(Y, {}^p\mathcal{H}^i), \ \textit{for all } 0 \leqslant d \leqslant 2N. \tag{2}$$

(iii) 在同构 (2) 下，倾斜滤过可描述为

$$P_k H^d(X) = \mathrm{Im}\left\{ H^{d-N+r(f)}(Y, \bigoplus_{i=0}^{k} {}^p\mathcal{H}^i[-i]) \to H^d(X) \right\},$$

因此

$$H_k^d(X) \simeq H^{d-N+r(f)-k}(Y, {}^p\mathcal{H}^k).$$

(iv) 存在一个适配于 f 的 Y 分层 $Y = \sqcup_\alpha Y_\alpha$ ，使得对于每个$, \dots, 2r(f)$，反常上同调层都分解为交叉上同调层的直和

$${}^p\mathcal{H}^i \cong \bigoplus_\alpha \mathrm{IC}(\overline{Y}_\alpha, \mathcal{L}_\alpha^i). \tag{3}$$

这里的 $\mathcal{L}_\alpha^i$ 是定义在 Y_α上的（移位）局部系统，其定义为

$$\mathcal{L}_\alpha^i = \mathcal{H}^{-\dim(Y_\alpha)}(Y_\alpha, i_\alpha^* {}^p\mathcal{H}^i)[\dim(Y_\alpha) - i], \ \ i_\alpha : Y_\alpha \hookrightarrow Y.$$

记号： 若分层 Y_α 在${}^p\mathcal{H}^i$ 的分解式 (3) 中对应的直和项$\mathrm{IC}(Y_\alpha, \mathcal{L}_\alpha^i)$ 非零，我们就说它作为支撑出现 。

注意，由局部系统 $\mathcal{L}_\alpha^i$的构造可知，对于任意点 $y \in Y_\alpha$ ，茎$(\mathcal{L}_\alpha^i)_y$ 都是 $H^{\dim(X)-\dim(Y_\alpha)+i-r(f)}(f^{-1}(y))$的子空间。因此，我们得到以下结论。

推论 2.3. 若 $r(f)$ 与 f的相对维数相同，则只有当满足下述条件时，分层 Y_α 才能作为支撑出现在 ${}^p\mathcal{H}^i$ 的分解(3) 中

$$\mathrm{codim}(Y_\alpha \subset Y) + i \leqslant 2\dim(f^{-1}(y)), \ \ \textit{for } \ y \in Y_\alpha.$$

[2]在 [18], 中，De Cataldo 和 Migliorini 证明，一旦固定一个相对于 f 相对丰沛的类$\eta \in H^2(X)$ ，则 (1) 和 (2) 中的分裂是典范的。

2.3. **反常上同调群**。 我们以回顾反常层和反常上同调群的若干关键性质结束本节，这些性质将在后文中用到。

设 $\eta \in H^2(X)$ 是关于 f相对丰沛的类，并设 $k \in \mathbb{N}$。在导出范畴 $D_c^b(X)$中，类 η^k 对应于一个态射 $\mathbb{Q}_X \to \mathbb{Q}_X[2k]$。应用导出推前函子 Rf_* 并转到反常上同调，我们得到诱导态射

$$ {}^p\mathcal{H}^i \to {}^p\mathcal{H}^{i+2k}, \quad \text{for } i \in \mathbb{Z}. $$

相对硬 Lefschetz 定理指出，这些态射在适当次数上是同构。

定理 2.4 （相对硬 Lefschetz）。 对每个整数 $k \geqslant 0$:

(i) 在反常上同调中，与 η^k 作杯积所诱导的映射是一个同构:

$$ {}^p\mathcal{H}^{r(f)-k} \xrightarrow{\simeq} {}^p\mathcal{H}^{r(f)+k}. \tag{4} $$

(ii) 同构 (4) 与分解 (3)相容。特别地，作为 ${}^p\mathcal{H}^{r(f)-k}$分解中支撑出现的分层集合 Y_α ，与作为 ${}^p\mathcal{H}^{r(f)+k}$分解中支撑出现的分层集合相同。

(iii) 对式 (4) 两边取超上同调，得到同构

$$ \cup\eta^k \colon H^d_{r(f)-k}(X) \xrightarrow{\simeq} H^{d+2k}_{r(f)+k}(X), \ \textit{for all } d \geqslant 0. $$

接下来，我们回顾 $H^*(X)$ 上的庞加莱对偶如何与分解定理 2.2 相互作用。

定理 2.5 (庞加莱–韦尔迪耶对偶**)**。 在同构 (2)下， $H^*(X)$ 上的庞加莱对偶对所有 k, $d \in \mathbb{Z}$诱导出同构

$$ H^{N-d}_{r(f)-k}(X) \xrightarrow{\simeq} H^{N+d}_{r(f)+k}(X). $$

注 2.6。 尽管反常上同调上的庞加莱–韦尔迪耶对偶与硬 Lefschetz 诱导的对偶先验上性质不同，但我们所处的特殊情形有一个关键特点：对于某些特定的反常度数，它们彼此一致。这一辨识将在我们计算$IH^*(\mathcal{M}_0(r))$上的交配对时发挥核心作用。

3. $IH^*(\mathcal{M}_0(r))$ 到 $H^*(\mathcal{P}_0(r))$的典范嵌入

本节的主要目标是将交叉上同调 $IH^*(\mathcal{M}_0(r))$识别为某个抛物丛模空间的上同调环 $H^*(\mathcal{P}_0(r))$ 中的一个典范子空间；参见命题 3.7。随后，我们在命题 3.8 中证明，$IH^*(\mathcal{M}_0(r))$ 上的交配对可以用 $H^*(\mathcal{P}_0(r))$上的交配对来表示。

3.1. 抛物丛模空间。 现在我们介绍相关的稳定抛物丛模空间，并回顾其基本性质。定义及更多细节请参见 [13, 11]。

设 $c_1 = 1/2r,\, c_2 = (1-r)/2r$；我们将

$$\mathcal{P}_0(r) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}_0((c_1, c_1, ..., c_1, c_2))$$

记为秩为 r、次数为 0 的抛物丛模空间，其中抛物权重为 $(c_1, c_1, ..., c_1, c_2)$，且这些抛物丛是稳定的。此模空间的维数为 $(r^2-1)(g-1)+r-1$；对于丛 $W \in \mathcal{P}_0(r)$，其抛物结构由纤维 W_p 中的一条直线 F_1 确定。

类似地，我们定义

$$\mathcal{P}_1(r) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}_1((c_2+1, c_1, ..., c_1))$$

为秩为 r、次数为 1 的抛物丛模空间，其中抛物权重为 $(c_2+1, c_1, ..., c_1)$，且这些抛物丛是稳定的。在这种情况下，丛 $W \in \mathcal{P}_1(r)$ 的抛物结构由 W_p 中的余维一子空间 F_{r-1} 确定，并且此模空间与 $\mathcal{P}_0(r)$ 维数相同。

模空间 $\mathcal{P}_0(r)$ 和 $\mathcal{P}_1(r)$ 满足以下性质，这些性质很容易证明。

命题 3.1. *(i)* 设 $(W, F_1 \subset W_p)$ 是一个稳定抛物丛，表示 $\mathcal{P}_0(r)$中的一个点。那么向量丛 W 是半稳定的，且相应的映射

$$\pi\colon \mathcal{P}_0(r) \to \mathcal{M}_0(r) \tag{5}$$

是代数簇之间的真态射。

(ii) 设 $(W, F_{r-1} \subset W_p)$ 是一个稳定抛物丛，表示$\mathcal{P}_1(r)$中的一个点。那么向量丛 W 是稳定的，因此表示 $\mathcal{M}_1(r)$中的一个点。此外， $\mathcal{P}_1(r)$同构于以下射影化

$$\mathbf{P}(\mathcal{U}|_{\mathcal{M}_1(r)\times\{p\}}) \xrightarrow{f} \mathcal{M}_1(r)$$

的限制万有丛 $\mathcal{U}$ 在 $\mathcal{M}_1(r) \times C$上的射影化，其中我们用记号 $\mathbf{P}(E) \simeq \mathbb{P}(E^*)$ 表示 E的一维商 空间。

注 3.2. 射影丛 $\mathbf{P}(\mathcal{U}|_{\mathcal{M}_1(r)\times\{p\}})$ 与 $\mathcal{M}_1(r) \times C$上的万有丛 $\mathcal{U}$ 的选取无关。

在 [13, §7]中，我们介绍了不同次数和抛物权重的抛物丛模空间之间的典范Hecke对应。特别是，Hecke 对应给出了上述两个模空间之间的同构。

命题 3.3。 [13, 命题 7。1] 设 $\mathcal{P}_1(r)$ 和 $\mathcal{P}_0(r)$ 分别为上文定义的次数为 *1* 和次数为 *0* 的抛物丛模空间。那么，典范的 *Hecke* 对应给出一个同构 $\mathcal{H}\colon \mathcal{P}_1(r) \to \mathcal{P}_0(r)$。

3.2. 分解定理在 $\pi\colon \mathcal{P}_0(r) \to \mathcal{M}_0(r)$ 中的应用。 正如我们将要说明的，通过将定理 2.2 的分解定理应用于命题 3.1 中引入的态射 $\pi\colon \mathcal{P}_0(r) \to \mathcal{M}_0(r)$，可以将交叉上同调 $IH^*(\mathcal{M}_0(r))$识别为上同调环 $H^*(\mathcal{P}_0(r))$ 的一个子空间。为准备这一应用，我们将描述适用于 π 的 $\mathcal{M}_0(r)$ 的分层。更多细节请参见 [11]。

我们用 $\rho = [r_1、\ r_2、\ \ldots\ldots、\ r_k] \vdash r$ 表示整数 r 的一个分拆，这意味着

$$r_1 + \ldots + r_k = r \quad \text{and} \quad r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_k > 0.$$

对每个 $V \in \mathcal{M}_0(r)$，我们按如下方式关联一个分拆 $\rho(V) \vdash r$。

回想一下，经由 Jordan–Hölder滤过，模空间 $\mathcal{M}_0(r)$ 的点对应于 多重稳定 丛的同构类。对 $V \in \mathcal{M}_0(r)$，设 $\mathrm{Gr}(V) \simeq V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$ 为伴随分次分解，其中每个 V_i 都是次数为 0 的稳定丛。我们用 $\rho(V)$ 表示由直和项 V_i 的秩给出的 r 的分拆。

这一构造诱导了 $\mathcal{M}_0(r)$ 分解为局部闭子集的不交并：

$$\mathcal{M}_0(r) = \bigsqcup_{\rho \vdash r} M_\rho,$$

其中，对 $\rho = [r_1,\ \ldots\ldots,\ r_k] \vdash r$,

$$M_\rho = \{V_1 \oplus \ldots \oplus V_k \in \mathcal{M}_0(r) \mid V_j - \text{stable},\ \mathrm{rk}(V_j) = r_j,\ \deg(V_j) = 0,\ j = 1, \ldots, k\}/\cong .$$

上述分解并非通常意义上的分层，因为多项式稳定丛 $V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ 的自同构群取决于某些稳定直和项是否同构。这促使我们给出以下定义。

定义 3.4. 若多项式稳定丛 $V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$ 的任意两个直和项均不同构，则称其为阿贝尔的。

这一概念将每个 M_ρ、$\rho \vdash r$ 以及 $\mathcal{M}_0(r)$ 分解为阿贝尔部分和非阿贝尔部分：

$$\mathcal{M}_0(r) = \mathcal{M}_0(r)^{ab} \sqcup \mathcal{M}_0(r)^{nab} \quad \text{and} \quad M_\rho = M_\rho^{ab} \sqcup M_\rho^{nab}.$$

对于 $\rho \vdash r$，子集 M_ρ^{ab} 是光滑拟射影簇，它们构成模空间 $\mathcal{M}_0(r)$ 的部分分层，并满足 $M_\rho^{ab} = M_\rho$ （见 [11, 注 3.3]）。注意，当 $\rho = \overline{[r]}$ 为平凡分拆时，对应的分层 $M_{[r]}^{ab} = M_{[r]}$ 与 $\mathcal{M}_0(r)$ 的光滑轨迹重合，该轨迹由稳定丛组成。

利用这一部分分层，我们可以总结在 [11], 中证明的、本文将用到的结果。

定理 3.5。 设 $\pi : \mathcal{P}_0(r) \to \mathcal{M}_0(r)$ 是命题 *3.1* 中描述的遗忘映射，并设 $\rho = [r_1,\ r_2,\ \ldots\ldots,\ r_k] \vdash r$ 是 r的一个分拆。

(i) 设 $V \in M_\rho^{ab}$，则纤维 $\pi^{-1}(V)$ 是由迭代射影丛塔组成的并，且

$$\dim(\pi^{-1}(V)) = \sum_{i<j} r_i r_j (g-1) + r - k.$$

特别地，当 V 稳定（即 $V \in M_{[r]}$）时，纤维是一个单独的射影空间：$\pi^{-1}(V) \simeq \mathbb{P}(V_p) \simeq \mathbb{P}^{r-1}$。

(ii) π 的半小性缺陷（见定理 *2.2*）为 $r(\pi) = r - 1$。非阿贝尔分层不会作为 π的支撑出现，而 π 的分解定理给出一个同构

$$\mathrm{R}\pi_*\mathbb{Q}_{\mathcal{P}_0(r)}[(r^2-1)(g-1)] = \bigoplus_{i=0}^{2r-2} \bigoplus_{\rho \vdash r} \mathrm{IC}\left(\overline{M_\rho^{ab}}, \mathcal{L}_\rho^i\right)[-i], \tag{6}$$

其中 ρ 遍历 r的所有分拆；对于一个点 $V \in M_\rho^{ab}$，局部系统 $\mathcal{L}_\rho^i$ 在 V 处的茎是 $H^{\dim(\mathcal{M}_0(r))-\text{维数}(M_\rho)+i}(f^{-1}(V))$的子空间。*(iii)* 光滑轨迹 $M_{[r]} \subset \mathcal{M}_0(r)$ 上的局部系统 $\mathcal{L}_{[r]}^i$ 是平凡的，其茎同构于 $H^i(\mathbb{P}^{r-1})$。

注 3.6. 在 [11], 中，结果针对次数为 0、具有非固定行列式的向量丛模空间陈述，即针对态射 $\tilde{\pi}\colon \mathcal{P}_0(r) \to \mathcal{M}_0(r)$。行列式映射构成如下交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P}_0(r) & \hookrightarrow & \widetilde{\mathcal{P}}_0(r) & \xrightarrow{\det} & \mathrm{Jac}^0(C) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}} & \nearrow{\scriptstyle \det} & \\ \mathcal{M}_0(r) & \hookrightarrow & \widetilde{\mathcal{M}}_0(r) & & \end{array}$$

其中，水平箭头将固定行列式模空间与行列式映射的纤维相对应。因此，关于 $\tilde{\pi}$ 纤维的描述以及 [11]中的分解定理，逐字适用于固定行列式的情形；唯一的变化是，对于所有 $\rho \vdash r$， $\mathcal{P}_0(r)$、 $\mathcal{M}_0(r)$以及分层 M_ρ 的维数均减少 g。

3.3. **将** $\mathrm{IH}^*(\mathcal{M}_0(r))$ **典范嵌入** $H^*(\mathcal{P}_0(r))$**中**。 借助前面几个小节建立的结果，我们现在可以将交叉上同调$\mathrm{IH}^*(\mathcal{M}_0(r))$ 识别为 $H^*(\mathcal{P}_0(r))$的一个典范子空间。更具体地说，根据定理 3.5， π的半小性缺陷等于 $r-1$；因此，与 π 相关联的$H^d(\mathcal{P}_0(r))$ 上的倾斜滤过集中在从 0 到 $2r-2$的次数范围内。特别地，对于任意 $d \geqslant 0$ ，零阶倾斜部分满足

$$P_0 H^d(\mathcal{P}_0(r)) = H_0^d(\mathcal{P}_0(r)),$$

从而定义了 $H^d(\mathcal{P}_0(r))$的一个典范子空间。在下面的命题中，我们将证明该子空间自然同构于 $\mathrm{IH}^d(\mathcal{M}_0(r))$。

命题 3.7。 对于任意 $d \geqslant 0$，我们有典范同构

$$\mathrm{IH}^d(\mathcal{M}_0(r), \mathbb{Q}) \simeq H_0^d(\mathcal{P}_0(r), \mathbb{Q}). \tag{7}$$

证明。 根据推论 2.3，只有在以下条件成立时，分层 M_ρ^{ab}才能作为 ${}^p\mathcal{H}^{2r-2}$ 的分解 (3) 中的支撑：

$$\mathrm{codim}(M_\rho^{ab} \subset \mathcal{M}_0(r)) + 2r - 2 \leqslant 2\dim(\pi^{-1}(V)), \text{ for } V \in M_\rho^{ab}.$$

简单计算可知，该不等式仅在 $k \leqslant 1$ 时成立。因此，在 ${}^p\mathcal{H}^{2r-2}$ 中作为支撑出现的唯一层，以及由此根据相对硬 Lefschetz 定理 2.4(ii) 也在 ${}^p\mathcal{H}^0$ 中出现的唯一层，是一个光滑轨迹 $M_{[r]}$。

因此我们有

$$^{\mathfrak{p}}\mathcal{H}^0 \simeq \mathrm{IC}(\overline{\mathcal{M}_{[r]}}, \mathcal{L}^0_{[r]}) = \mathrm{IC}(\mathcal{M}_0(r), \mathbb{Q}_{\mathcal{M}_{[r]}}),$$

其中最后一个等式由定理 3.5(iii) 得出。取次数 $d-(r^2-1)(g-1)$ 的超上同调，即得同构 (7)。□

记号： 我们用 $i\colon \mathrm{IH}^*(\mathcal{M}_0(r)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{H}^*_0(\mathcal{P}_0(r))$ 表示命题 3.7 所给出的等同。

3.4. 庞加莱–韦尔迪耶配对，作用于 $\mathrm{IH}^*(\mathcal{M}_0(r))$。 回顾本文的目的在于显式计算相交上同调 $\mathrm{IH}^*(\mathcal{M}_0(r))$ 上的庞加莱–韦尔迪耶配对。这一计算的关键一步由下述命题给出；该命题通过命题 3.7 中所述的、将 $\mathrm{IH}^*(\mathcal{M}_0(r))$ 等同于 $\mathrm{H}^*(\mathcal{P}_0(r))$ 之子集的等同，把上同调 $\mathrm{H}^*(\mathcal{P}_0(r))$上的通常庞加莱配对与 $\mathrm{IH}^*(\mathcal{M}_0(r))$ 上的相交配对联系起来。

命题 3.8. 设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{P}_0(r)$ 上的一个 π-丰沛线丛，使得对每个稳定丛 $V \in \mathcal{M}_0(r)$都有 $\deg(\mathcal{L}|_{\pi^{-1}(V)}) = 1$，并令 $\eta = c_1(\mathcal{L}) \in \mathrm{H}^2(\mathcal{P}_0(r))$。对任意两个满足 $\deg(\alpha)+\deg(\beta) = 2\dim(\mathcal{M}_0(r))$ 的类$\alpha, \beta \in \mathrm{IH}^*(\mathcal{M}_0(r))$，定义

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) := \int_{\mathcal{P}_0(r)} i(\alpha)\cup i(\beta)\cup \eta^{r-1}. \tag{8}$$

则 $\mathrm{B}(\cdot,\cdot)$ 与相交上同调 $\mathrm{IH}^*(\mathcal{M}_0(r))$上的非退化庞加莱–韦尔迪耶配对一致。

证明. 设 $n := (r^2-1)(g-1) = \dim(\mathcal{M}_0(r))$。我们首先证明双线性形式$\mathrm{B}(\cdot,\cdot)$ 是非退化的。假设 $\alpha \in \mathrm{IH}^{2n-k}(\mathcal{M}_0(r))$ 满足

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = 0 \quad \text{for all } \beta \in \mathrm{IH}^k(\mathcal{M}_0(r)).$$

我们需要证明 $\alpha = 0$。不失一般性，我们可以假设 $k \leqslant n$。于是对任意 $\beta \in \mathrm{IH}^k(\mathcal{M}_0(r))$，我们可以写成

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \langle i(\alpha), \eta^{r-1}\cup i(\beta)\rangle_{\mathrm{H}(P)},$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{H}(P)}$ 表示 $\mathrm{H}^*(\mathcal{P}_0(r))$ 中的庞加莱配对。

根据相对硬 Lefschetz 定理，与 η^{r-1} 的上积诱导一个同构

$$\cup\eta^{r-1}\colon \mathrm{H}^k_0(\mathcal{P}_0(r)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{k+2r-2}_{2r-2}(\mathcal{P}_0(r)).$$

因此，对所有 $i(\beta) \in \mathrm{H}^k_0(\mathcal{P}_0(r))$，$\langle i(\alpha), \eta^{r-1}\cup i(\beta)\rangle_{\mathrm{H}(P)}$ 的消失等价于 to

$$\langle i(\alpha), \beta'\rangle_{\mathrm{H}(P)} = 0 \quad \text{for all } \beta' \in \mathrm{H}^{k+2r-2}_{2r-2}(\mathcal{P}_0(r)).$$

由定理 2.4 可知，在这种情况下 $i(\alpha) = 0$，又因为 i 是单射，我们得出 $\alpha = 0$。

尚需将双线性形式 $\mathrm{B}(\cdot,\cdot)$ 与 $\mathrm{IH}^*(\mathcal{M}_0(r))$上的庞加莱–韦尔迪耶配对$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{IH}(M)}$ 等同起来。由 [18, 注记1.1.3], 只需证明这两个

非退化配对在限制到稳定向量丛的光滑轨迹 $M_{[r]} \subset \mathcal{M}_0(r)$ 时相一致。更明确地说，考虑如下图表

$$\begin{array}{ccc} H^*(\mathcal{P}_0(r)) & \xrightarrow{J^*} & H^*(\pi^{-1}(M_{[r]})) \\ \uparrow{\scriptstyle i} & & \uparrow{\scriptstyle \pi^*} \\ IH(\mathcal{M}_0(r)) & \xrightarrow{j^*} & IH^*(M_{[r]}) \simeq H^*(M_{[r]}), \end{array} \tag{9}$$

其中，$j\colon M_{[r]} \hookrightarrow \mathcal{M}_0(r)$ 和 $J\colon \pi^{-1}(M_{[r]}) \hookrightarrow \mathcal{P}_0(r)$ 表示开嵌入。由于分解定理 2.2 与限制到稠密开集相容（例如参见 [19, §9.3]），因此该图表交换。为了证明命题 3.8，只需证明对于任意类 $\alpha \in IH^{2n-k}(\mathcal{M}_0(r))$ 和 $\beta \in IH^k(\mathcal{M}_0(r))$，以下等式成立：

$$\int_{M_{[r]}} j^*(\alpha) \cup j^*(\beta) = \int_{\pi^{-1}(M_{[r]})} J^*(i(\alpha) \cup i(\beta) \cup \eta^{r-1}). \tag{10}$$

在光滑点 $V \in M_{[r]}$上，纤维 $\pi^{-1}(V)$ 同构于 $\mathbb{P}^{r-1}$，其基本类为 $\eta^{r-1}|_{\pi^{-1}(V)}$。根据关于 η的假设，我们有 $\pi_* J^*(\eta^{r-1}) = 1 \in H^0(M_{[r]})$。因此，由投影公式可得

$$\int_{M_{[r]}} j^*(\alpha) \cup j^*(\beta) = \int_{M_{[r]}} j^*(\alpha) \cup j^*(\beta) \cup \pi_* J^*(\eta^{r-1}) = \int_{\pi^{-1}(M_{[r]})} \pi^* j^*(\alpha) \cup \pi^* j^*(\beta) \cup J^*(\eta^{r-1}).$$

利用图 (9) 的交换性，我们将此表达式改写为

$$\int_{\pi^{-1}(M_{[r]})} J^*(i(\alpha) \cup i(\beta) \cup \eta^{r-1}),$$

从而得到 (10)。 □

注 3.9. 在 [16], 中，De Cataldo 与 Migliorini 证明，$H^*(\mathcal{P}_0(r))$ 上的倾斜滤过 $P_\bullet$ 与 $H^*(\mathcal{P}_0(r))$上的交叉形式相容。更精确地说，分次部分 $H^*_i(\mathcal{P}_0(r))$ 与 $H^*_j(\mathcal{P}_0(r))$ 之间所诱导的配对除非$i + j = 2r - 2$否则为零。利用这一正交性，可以证明命题 3.8 中相对充足类的幂可替换为态射 π的相对虚切丛的最高陈类$c_{r-1}(\mathcal{F}_1^* \otimes \mathcal{U}_p/\mathcal{F}_1)$，并乘以$1/r$。

因此，命题 3.8 将计算 $IH^*(\mathcal{M}_0(r))$ 上的庞加莱–韦尔迪耶配对的问题归结为计算 $H^*(\mathcal{P}_0(r))$上的交配对。在接下来的各节中，我们将按照§1.2中所述的策略进行这些计算。

4. $H^*(\mathcal{M}_1(r))$中的交配对杰弗里–柯万公式

本节旨在以适合后续应用的形式，给出 Jeffrey 和 Kirwan [2]关于模空间 $\mathcal{M}_1(r)$ 上交配对的迭代留数公式。结果见定理 4.7。

4.1. 上同调环的生成元 $H^*(\mathcal{M}_1(r))$。我们首先描述一个生成系，它生成光滑曲线 C 上秩为 r、次数为 1 且行列式固定的稳定向量丛的模空间 $\mathcal{M}_1(r)$ 的上同调环 $H^*(\mathcal{M}_1(r))$。按照 Atiyah和 Bott [1], 的方法，可以如下构造。

在乘积 $\mathcal{M}_1(r) \times C$ 上存在一个秩为 r 的万有向量丛 $\mathcal{U}$，它在模掉从 $\mathcal{M}_1(r)$ 拉回的线丛的张量作用后是唯一确定的。尽管万有丛本身并不唯一，但该丛

$$\widetilde{\mathcal{U}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{U} \otimes \det(\mathcal{U})^{-\frac{1}{r}}$$

$\widetilde{\ }$ 是典范的。注意到 $c_1(\mathcal{U}) = 0$，并且对于 $2 \leqslant k \leqslant r$， $1 \leqslant j \leqslant 2g$，我们引入上同调类

$$\widetilde{a}_k \in H^{2k}(\mathcal{M}_1(r)), \qquad \widetilde{b}_k^j \in H^{2k-1}(\mathcal{M}_1(r)), \qquad \widetilde{f}_k \in H^{2k-2}(\mathcal{M}_1(r)),$$

通过 Künneth 分解

$$c_k(\widetilde{\mathcal{U}}) = \widetilde{a}_k \otimes 1 + \sum_{j=1}^{2g} \widetilde{b}_k^j \otimes e_j + \widetilde{f}_k \otimes \omega \in H^*(\mathcal{M}_1(r)) \otimes H^*(C),$$

其中 $\omega \in H^2(C)$ 是曲线的基本类， $\{e_j\}$ 是 $H^1(C)$ 的一组基，使得对于 $1 \leqslant i \leqslant g$, $e_i e_{i+g} = \omega$，且所有其他交数 $e_i e_j$ 均等于 0。根据 [1, 命题 2.20], ，这些类生成上同调环 $H^*(\mathcal{M}_1(r))$。

本节旨在给出计算形如.....的所有交配对的公式

$$\int_{\mathcal{M}_1(r)} \prod_{k=2}^{r} \widetilde{a}_k^{m_k} \widetilde{f}_k^{n_k} \prod_{j_k=1}^{2g} (\widetilde{b}_k^{j_k})^{l_{k,j_k}}. \tag{11}$$

为此，我们将在接下来的小节中引入一些额外的记号。更多细节请参见 [20, 13, 21, 2]。

4.2. **记号：哈密顿基和**iBer。

• 设 $T \subset SU_r$ 为一个极大环面。我们将李代数 $\mathrm{Lie}(SU_r)$ 的 Cartan 子代数 $V = \mathrm{Lie}(T)$ 表示为如下商向量空间

$$V = \mathbb{R}^r / \mathbb{R}(1, 1, \ldots, 1).$$

V 与.....之间存在自然配对

$$V^* = \{a = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{R}^r \mid a_1 + \cdots + a_r = 0\}.$$

• 设 $x_1, x_2, \ldots, x_r$ 为 $\mathbb{R}^r$上的坐标；给定 $a \in V^*$，我们将线性函数 $\sum_i a_i x_i$ （定义在 V上）记作 $\langle a, x \rangle$。有时我们也将此函数简记为 a。• 设 Λ 为向量空间 V^*中的整数格：

$$\Lambda = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{Z}^r \mid \lambda_1 + \cdots + \lambda_r = 0\}.$$

对于 $1 \leqslant i \neq j \leqslant r$，我们定义 $\alpha^{ij} = x_i - x_j$ 中的元素 Λ。令

$$\Phi = \{ \pm\alpha^{ij} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant r\}$$

是将相反根视为相同的 A_{r-1} 根系的根集合。

• 我们的方法的一个基本对象是由 Φ中的元素组成的有序线性基$\mathbf{B}$ V^* 。我们用 $\mathcal{B}$ 表示所有此类基的集合:

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{B} = \left(\beta^{[1]}, \dots, \beta^{[r-1]} \right) \in \Phi^{r-1} |\ \mathbf{B} - \text{basis of } V^* \right\}.$$

其中，我们主要关注由置换群 Σ_r 的作用定义的一族特殊的基。

• 注意， V^* 上有 Σ_r 的自然作用，它通过置换坐标 x_j （ j =1, 2, ..., r）实现，并且该作用保持根系 Φ 不变。对于每个排列 $\sigma \in \Sigma_r$，我们定义

$$\mathbf{B}_\sigma = (\alpha^{\sigma(r-1),\sigma(r)}, \alpha^{\sigma(r-2),\sigma(r-1)}, \dots, \alpha^{\sigma(1),\sigma(2)}) \in \mathcal{B}.$$

记号： 对于任意 $m \in \{1、2,..., r\}$，我们定义 $\mathcal{H}_m = \{\mathbf{B}_\sigma |\ \sigma \in \Sigma_r, \sigma(1) = m\}$，并将集合 $\mathcal{H}_m$ 称为哈密顿基。

• 给定 V^* 的一个基 $\mathbf{B} = \left(\beta^{[1]}、\dots、\beta^{[r-1]}\right) \in \mathcal{B}$ 以及一个元素 $a \in V^*$，我们将 $[a]_\mathbf{B} \in \Lambda$ 定义为 V^* 中满足下式的唯一元素

$$[a]_\mathbf{B} = a - \{a\}_\mathbf{B}, \quad \text{where} \quad \{a\}_\mathbf{B} \in \sum_{j=1}^{r-1} [0,1)\beta^{[j]}.$$

• 任意基 $\mathbf{B} \in \mathcal{B}$ 都会诱导一个同构 $V^* \simeq V$，我们用 $\check{}\alpha_\mathbf{B}$ 表示 $\alpha \in V^*$ 在该同构下的像。当不会产生歧义时，我们省略下标$\mathbf{B}$以简化记号。

• 对于定义在 V 上的全纯函数 Q 和 $\alpha \in V^*$，我们用 $Q_{\check{\alpha}_\mathbf{B}}$ 表示相应的方向导数。于是，给定 Q 和 $\mathbf{B} \in \mathcal{B}$，我们固定一个同态

$$\alpha \mapsto \exp(Q_{\check{\alpha}_\mathbf{B}})$$

从加法群 V^* 到定义在 $V \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ 上的无处为零的全纯函数所成的乘法群的同态。

准备好这些要素后，设 $\mathbf{B} = \left(\beta^{[1]}, \dots, \beta^{[r-1]}\right) \in \mathcal{B}$ 是 V^*的一组基，设 f 是定义在 $V \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ 中 0 的某个邻域内的亚纯函数，其极点包含于以下超平面的并集中

$$\bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant r} \{x |\ x_i - x_j = 0\}, \tag{12}$$

并设

$$Q(x) = \text{const} \cdot \sum_{i<j} (x_i - x_j)^2 + \textit{higher order terms}$$

是定义在 $V \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ 中 0 附近的全纯函数。于是我们定义

$$\text{iBer}_{\mathbf{B},Q}\left[f(x)\right](a) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi i)^{r-1}} \int_{Z_\mathbf{B}} \frac{f(x)\exp(Q_{\check{a}_\mathbf{B}})\ dQ_{\check{\beta}^{[1]}} \wedge \dots \wedge dQ_{\check{\beta}^{[r-1]}}}{(1-\exp(Q_{\check{\beta}^{[1]}}))\ \dots (1-\exp(Q_{\check{\beta}^{[r-1]}}))}, \tag{13}$$

其中自然定向闭链 $Z_\mathbf{B}$ 由下式给出

$$Z_\mathbf{B} = \{x \in V \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C} :\ |\langle \beta^{[j]}, x \rangle| = \varepsilon_j,\ j = 1, \dots, r-1\} \subset V \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C} \setminus \bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant r} \{x |\ x_i = x_j\}$$

对于充分小的固定实常数 $0 \leqslant \varepsilon_{r-1} \ll \cdots \ll \varepsilon_1$。注意，算子 $\mathbf{iBer}_{\mathbf{B},Q}$ 定义了一个从 $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 上极点包含于 (12) 的亚纯函数空间到 V^* 上多项式空间的线性映射。

注 4.1. 如 [13, 注 4.3], 所述，线性算子 $\mathbf{iBer}_{\mathbf{B},\ Q}$ 具有以下计算性质。对于 $i = 1, ..., r-1$，我们定义 $y_i = \langle \beta^{[i]}, x \rangle$，并用以下坐标表示 $\hat{}\ \hat{}\ \hat{}f$, $Q_{\check{\beta}^{[i]}}$和 $Q_{\check{a}}$： $f(x) = f(y)$, $Q_{\check{\beta}^{[i]}}(x) = Q_{\check{\beta}^{[i]}}(y)$, $Q_{\check{a}}(x) = Q_{\check{a}}(y)$。那么

$$\mathrm{iBer}_{\mathbf{B},Q}\left[f(x)\right](a) = \operatorname*{Res}_{y_1=0} \ldots \operatorname*{Res}_{y_{r-1}=0} \frac{\hat{f}(y)\exp(\hat{Q}_{\check{a}})\ d\hat{Q}_{\check{\beta}^{[1]}} \wedge \cdots \wedge d\hat{Q}_{\check{\beta}^{[r-1]}}}{(1-\exp(\hat{Q}_{\check{\beta}^{[1]}}))\ \ldots (1-\exp(\hat{Q}_{\check{\beta}^{[r-1]}}))},$$

其中迭代留数是指在每一步中，我们都将下标较小的变量保留为未知常数。

我们还注意到以下几个简单事实，稍后将会用到。

注 4.2. 对于来自 Λ 中整数格 V^* 的任意向量 ν，我们有：$\mathbf{iBer}_{\mathbf{B},\ Q}\left[f(x)\right](a+\nu) = \mathbf{iBer}_{\mathbf{B},\ Q}[f(x)\mathbf{exp}(Q_{\check{\nu}_{\mathbf{B}}})](a)$。

注4.3。 对于任意排列 $\sigma \in \Sigma_r$，变量替换 $x = \sigma(y)$ 给出恒等式 $\mathbf{iBer}_{\sigma\mathbf{B}}[f(x)](\sigma a - [\sigma c]_{\sigma\mathbf{B}}) = \mathbf{iBer}_{\mathbf{B}}[\sigma \cdot f(x)](a - [c]_{\mathbf{B}})$。

4.3. **记号：极大环面的上同调** $T \subset SU_r$。 由于交配对 (11) 的 Jeffrey–Kirwan 迭代留数公式要求在 T^{2g} 上积分（见定理 4.4），我们需要为 $H^*(T^{2g})$ 中的上同调类引入额外的记号。

取正交归一基 $(u_1, u_2, ..., u_{r-1}) \in \mathcal{B}$，并令 $\check{u}_1, \check{u}_2, ..., \check{u}_{r-1}$ 表示 $V = \mathrm{Lie}(T)$ 的对偶基。将 Maurer-Cartan形式 $\theta \in \Omega^1(T) \otimes \mathrm{Lie}(T)$ 在此基下写为

$$\theta = \sum_{a=1}^{r-1} \theta_a \check{u}_a.$$

分量 θ_a 因而构成了 $H^1(T)$ 的一组生成元，根据 [2, 引理 10.7], ，我们有恒等式

$$\int_T \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge ... \wedge \theta_{r-1} = \sqrt{r}.$$

接下来，我们在 T^{2g} 上定义相应的生成元。对于每个投影

$$\pi_j : T^{2g} \to T, \quad j = 1, 2, ..., 2g$$

到 j^{th} 因子上的投影，令

$$\zeta_a^j = \pi_j^* \theta_a, \quad a = 1, 2, ..., r-1.$$

这些形式 θ_a^j 共同构成了 $H^1(T^{2g})$ 的自然生成系，并且（见 [2,引理 10.10]）我们有：

$$\int_{T^{2g}} \exp\Big(\sum_{j=1}^{g}\sum_{a=1}^{r-1} \zeta_a^j \wedge \zeta_a^{g+j}\Big) = r^g. \tag{14}$$

4.4. **Jeffrey–Kirwan迭代留数公式**。做好这些准备后，我们可以给出 Jeffrey 和 Kirwan 的公式，它们描述了模空间 $\mathcal{M}_1(r)$ 上的所有交数。

令 $\tau_k(x)$、对于 $k=2,\ \dots,\ r$ 表示 $V\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ 关联~于向量丛 U 的陈类 $c_2,\ \dots,\ c_r$ 的对称多项式（见 §4.1）。特别地，有

$$\tau_2(x)=\sum_{i<j}\Big(x_i-\frac{1}{r}\sum_{a=1}^{r}x_a\Big)\Big(x_j-\frac{1}{r}\sum_{a=1}^{r}x_a\Big)=-\frac{1}{2r}\sum_{i<j}(x_i-x_j)^2 \tag{15}$$

它在归一化意义下与 SU_r的基灵形式一致。使用这一记号，可以显式计算上同调环 $H^*(\mathcal{M}_1(r))$ 中的交数，如下述定理所述。

定理 4.4。 [2, 定理 9.12(a)] 对于 $2\leqslant k\leqslant r$和 $1\leqslant j\leqslant 2g$，令 $\widetilde{a}_k,\ \widetilde{f}_k,\ \widetilde{b}_k^j\in H^*(\mathcal{M}_1(r))$ 和 $\zeta_k^j\in H^1(T^{2g})$ 表示在 *§4.1* 和 *§4.3* 中定义的上同调类。令 $Q(x)$ 为 $V\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$上的一个对称多项式，并将其表示为初等对称多项式 τ_k 的形式

$$Q(x)=\sum_{k=2}^{r}\delta_k\tau_k(x),$$

其中 δ_k 是形式幂零参数，满足 $\delta_2\neq 0$。定义 $c=(1/r,\dots,\ 1/r,(1-r)/r)\in V^*$ 以及 $\boldsymbol{B}=(\alpha^{12},\ \alpha^{23},\ \dots,\ \alpha^{r-1\,r})\in\mathcal{B}$；则有

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{M}_1(r)}\exp(\delta_2\widetilde{f}_2+\delta_3\widetilde{f}_3+\dots+\delta_r\widetilde{f}_r)\prod_{k=2}^{r}\widetilde{a}_k^{m_k}\prod_{j_k=1}^{2g}(\widetilde{b}_k^{j_k})^{l_{k,j_k}}=\\ \frac{(-1)^{\binom{r}{2}(g-1)}}{r!}\sum_{w\in\Sigma_{r-1}}\mathrm{iBer}_{\mathbf{B},Q}\left[\frac{\prod_{k=2}^{r}\tau_k(x)^{m_k}\exp(Q_{w\check{c}_{\boldsymbol{B}}})}{\prod_{i<j}(x_i-x_j)^{2g-2}\det(\mathrm{Hess}_{\boldsymbol{B}}(Q))}\right.\\ \left.\int_{T^{2g}}\exp\left(-\sum_{a,b}\sum_{j=1}^{g}\zeta_a^j\zeta_b^{j+g}Q_{\check{u}_a\check{u}_b}\right)\prod_{k=2}^{r}\prod_{j_k=1}^{2g}\left(\sum_a\zeta_a^{j_k}\tau_{k_{\check{u}_a}}\right)^{l_{k,j_k}}\right](-[wc]_{\boldsymbol{B}}),\end{aligned} \tag{16}$$

其中第一个求和遍历元素 $w\in\mathrm{Stab}_r\simeq\Sigma_{r-1}\subset\Sigma_r$，$\mathrm{Hess}_{\boldsymbol{B}}(Q)$ 表示海森矩阵：$\mathrm{Hess}_{\boldsymbol{B}}(Q)_{ij}=\frac{\partial}{\partial\beta^{[i]}}Q_{\check{\beta}^{[j]}\boldsymbol{B}}$，并且 $(\check{u}_1,\ \check{u}_2,\ \dots,\ \check{u}_{r-1})$ 是 V的一组正交归一基。

我们回顾一下 [2, 注 9.13]中的以下观点。

注 4.5。 在定理 4.4 中，类 ζ_k^j 来源于 Maurer– Cartan 形式 $\theta\in\Omega^1(T)\otimes\mathrm{Lie}(T)$ 相对于$V=\mathrm{Lie}(T)$的一组正交归一基 $\check{u}_1,\ \dots,\ \check{u}_{r-1}$的分量。原则上，可以用任意基替换这组正交归一基，前提是使用该基来定义类 ζ_a^j；在这种情况下，(16) 中的二阶导数 $Q_{\check{u}_a\check{u}_b}$必须替换为 $\frac{\partial}{\partial u_a}Q_{\check{u}_b}$。尽管如此，在环面 T^{2g}上进行计算时，使用正交归一基更为方便。

注 4.6. 简单计算可知，对任意$\mathbf{B}\in\mathcal{B}$，有 $[(1/r,\dots,\ 1/r,(1-r)/r)]_{\mathbf{B}}=[(1/2r,\dots,\ 1/2r,(1-r)/2)r]_{\mathbf{B}}$。

我们以将定理 4.4 改写成一种便于后续计算的形式来结束本节。

定理 4.7. 按照定理 *4.4* 的记号，我们有：

$$\begin{aligned}(17)\quad &\int_{\mathcal{M}_1(r)} \exp(\delta_2\widetilde{f}_2+\delta_3\widetilde{f}_3+\ldots+\delta_r\widetilde{f}_r)\prod_{k=2}^{r}\widetilde{a}_k^{m_k}\prod_{j_k=1}^{2g}(\widetilde{b}_k^{j_k})^{l_{k,j_k}} = \\ &\frac{(-1)^{\binom{r}{2}(g-1)}}{r!}\sum_{\boldsymbol{B}\in\mathcal{H}_n}\mathrm{iBer}_{\mathbf{B},Q}\left[\frac{\prod_{k=2}^{r}\tau_k(x)^{m_k}\exp(Q_{\check{c}_{\boldsymbol{B}}})}{\prod_{i<j}(x_i-x_j)^{2g-2}\det(\mathrm{Hess}_{\boldsymbol{B}}(Q))}\right. \\ &\left.\int_{T^{2g}}\exp\left(-\sum_{a,b}\sum_{j=1}^{g}\zeta_a^j\zeta_b^{j+g}Q_{\check{u}_a\check{u}_b}\right)\prod_{k=2}^{r}\prod_{j_k=1}^{2g}\left(\sum_a\zeta_a^{j_k}\tau_{k_{\check{u}_a}}\right)^{l_{k,j_k}}\right](-[c]_{\boldsymbol{B}}),\end{aligned}$$

其中，第一个求和现在遍历哈密顿基$\boldsymbol{B}$的元素 $\mathcal{H}_n$，对任意$n\in\{1,2,\ldots,r\}$ 均成立（参见第 *13* 页的记号）。[3]

证明。由 [13, 注 4.6] 可知，**(17)** 左边的积分等于

$$\begin{aligned}(18)\quad &\frac{(-1)^{\binom{r}{2}(g-1)}}{r!}\sum_{\mathbf{B}\in\mathcal{H}_r}\mathrm{iBer}_{\mathbf{B},Q}\left[\frac{\prod_{k=2}^{r}\tau_k(x)^{m_k}\exp(Q_{\check{c}_{\mathbf{B}}})}{\prod_{i<j}(x_i-x_j)^{2g-2}\det(\mathrm{Hess}_{\mathbf{B}}(Q))}\right. \\ &\left.\int_{T^{2g}}\exp\left(-\sum_{a,b}\sum_{j=1}^{g}\zeta_a^j\zeta_b^{j+g}Q_{\check{u}_a\check{u}_b}\right)\prod_{k=2}^{r}\prod_{j_k=1}^{2g}\left(\sum_a\zeta_a^{j_k}\tau_{k_{\check{u}_a}}\right)^{l_{k,j_k}}\right](-[c]_{\mathbf{B}}).\end{aligned}$$

由 [20]（另见 [13, 定理 4.4]）可知，**(18)** 中的和与哈密顿基的选择无关，因此得到表达式 **(17)**。□

5. $H^*(\mathcal{P}_0(r))$中的交配对

本节的目标是明确描述 $\mathcal{P}_0(r)$ 零度稳定抛物丛模空间上的交配对。相关结果见定理 5.5。

5.1. 上同调环的生成元 $H^*(\mathcal{P}_0(r))$。我们首先描述上同调环 $H^*(\mathcal{P}_0(r))$的生成元。为此，我们先引入一些附加记号。

$\mathcal{U}_0$ 和 $\mathcal{U}_1$ 分别是 $\mathcal{P}_0(r)\times C$ 和 $\mathcal{P}_1(r)\times C$上的万有丛。记相应的普适旗丛为 $\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2=\mathcal{U}_{0|p}:=\mathcal{U}_0|_{\mathcal{P}_0(r)\times\{p\}}$ 和 $\mathcal{G}_1\subset\mathcal{G}_2=\mathcal{U}_{1|p}:=\mathcal{U}_1|_{\mathcal{P}_1(r)\times\{p\}}$。于是我们定义上同调类 $z\in H^2(\mathcal{P}_0(r))$和 $\widetilde{z}\in H^2(\mathcal{P}_1(r))$ 如下：

$$\begin{aligned}(19)\quad z=c_1(\mathcal{F}_1\otimes\det(\mathcal{U}_{0|p})^{-1/r})\in H^2(\mathcal{P}_0(r))\quad\text{and}\\ \widetilde{z}=c_1(\mathcal{G}_2/\mathcal{G}_1\otimes\det(\mathcal{U}_{1|p})^{-1/r})\in H^2(\mathcal{P}_1(r)).\end{aligned}$$

[3]更准确地说，可以对任意$\mathbf{B}$ 对角基 中的元素求和；定义见 [13, §3。2] 为简洁起见，本文仅限于哈密顿基。

这些上同调类与万有丛 $\mathcal{U}_0$ 和 $\mathcal{U}_1$的选择无关。稍后（参见引理 5.2），我们将证明，在 Hecke 对应$\mathcal{H}$: $\mathcal{P}_1(r) \to \mathcal{P}_0(r)$下，类 z 拉回为 $\tilde{z}$。

我们在下图中概述命题 3.1 和 3.3 的陈述:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P}_0(r) & \xleftarrow[\simeq]{\mathcal{H}} & \mathcal{P}_1(r) & \simeq & \mathbf{P}(\widetilde{\mathcal{U}}_p) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathcal{M}_0(r) & & \xrightarrow{\quad h \quad} & & \mathcal{M}_1(r). \end{array} \tag{20}$$

因此，根据 [1, 命题 2.20]，，上同调环 $H^*(\mathcal{P}_0(r))$ 由类 $\tilde{a}_k$、$\tilde{b}_k^j$、$\tilde{f}_k \in H^*(\mathcal{M}_1(r))$的拉回生成，其中 $2 \leqslant k \leqslant r$ 和 $1 \leqslant j \leqslant 2g$是在§4.1 中通过丛 $\mathcal{U} \to \mathcal{M}_1(r) \times C$的陈类的 Künneth 分解定义的，此外还包括类 $(\mathcal{H}^{-1})^*\tilde{z}$。

现在定义

$$\overline{\mathcal{U}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{U}_0 \otimes \det(\mathcal{U}_0)^{-\frac{1}{r}}. \tag{21}$$

我们注意到，$\overline{\mathcal{U}}$ 与万有丛 $\mathcal{U}_0$的选取无关。本小节的目标是根据丛 $\mathcal{U}$的陈类的 Künneth 分量，对$\mathcal{P}_0(r)$ 上的上述上同调类给出几何解释；结果见定理 5.4。

我们首先证明丛 $\mathcal{U}$与 $\overline{\mathcal{U}}$的陈特征之间的以下关键关系。

命题 5.1. 用上述引入的记号，我们有

$$\mathrm{ch}(\overline{\mathcal{U}}) = (h \times \mathrm{id})^*\mathrm{ch}(\widetilde{\mathcal{U}}) - \omega \exp((\mathcal{H}^{-1})^*\tilde{z}) + \frac{1}{r}\omega\, h^*\mathrm{ch}(\widetilde{\mathcal{U}}_p),$$

其中，$\omega \in H^2(C)$ 表示曲线的基本类，而 $\tilde{z} \in H^2(\mathcal{P}_1(r))$ 是式(19)中定义的类。

证明。我们用记号 $\mathcal{U}_1$ 表示 $\mathcal{P}_1(r) \times C$上的万有丛，并配备万有旗

$$\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 = \mathcal{U}_1|_{\mathcal{P}_1(r)\times\{p\}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{U}_{1|p},$$

并作归一化，使得商 $\mathcal{G}_2/\mathcal{G}_1$ 是平凡直线丛。类似地，我们用 $\mathcal{U}_0$ 表示 $\mathcal{P}_0(r) \times C$上的万有丛，并配备万有旗

$$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 = \mathcal{U}_0|_{\mathcal{P}_0(r)\times\{p\}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{U}_{0|p},$$

作归一化，使子丛 $\mathcal{F}_1 \hookrightarrow \mathcal{U}_{0|p}$ 是平凡的。注意，由于表达式 (21) 与 $\mathcal{P}_0(r) \times C$上万有丛的选取无关，我们有

$$\overline{\mathcal{U}} \simeq \mathcal{U}_0 \otimes \det(\mathcal{U}_0)^{-\frac{1}{r}}.$$

下面的引理是一个简单的观察（参见 [13, §7]）。

引理 5.2。在 *Hecke* 对应 $\mathcal{H}$ 下，$\mathcal{P}_1(r)$ 上的线丛 $\mathcal{G}_2/\mathcal{G}_1$ 对应于 $\mathcal{P}_0(r)$上的线丛 $\mathcal{F}_1$，因此归一化泛丛 $\mathcal{U}_1$对应于万有丛 $\mathcal{U}_0$。

因此，将算子 $\mathcal{H}$ 作用于归一化泛丛 U_1 ，可得到相应截面层的如下短正合列。请注意，在此处及下文中，我们稍微滥用了记号，用相同的符号同时表示向量丛及其相应的截面层。

$$0 \to (\mathcal{H} \times \mathrm{id})^* U_0 \to U_1 \to \mathcal{G}_2/\mathcal{G}_1 \to 0. \tag{22}$$

过渡到相伴的向量丛，便得到该关系

$$\mathrm{ch}(U_1) = (\mathcal{H} \times \mathrm{id})^* \mathrm{ch}(U_0) + \omega. \tag{23}$$

接下来，将正合列 (22) 与 $\det(U_1)^{-1/r}$, 作张量积，我们得到短正合列

$$0 \to (\mathcal{H} \times \mathrm{id})^* U_0 \otimes \det(U_1)^{-1/r} \to U_1 \otimes \det(U_1)^{-1/r} \to \mathcal{G}_2/\mathcal{G}_1 \otimes \det(U_1)^{-1/r} \to 0,$$

它可以改写为

$$0 \to (\mathcal{H} \times \mathrm{id})^* U_0 \otimes \det(U_1)^{-1/r} \to (f \times \mathrm{id})^* \widetilde{U} \to \mathcal{G}_2/\mathcal{G}_1 \otimes \det(U_1)^{-1/r} \to 0. \tag{24}$$

利用等式 (19)、(23) 以及 $\omega\, \mathrm{ch}(V) = \omega\, \mathrm{ch}(V|_{X\times\{p\}})$ 对积 $X \times C$ 上任意丛V成立这一事实，我们得到如下陈特征等式：

$$\begin{aligned}
&(f \times \mathrm{id})^* \mathrm{ch}(\widetilde{U}) - \omega\, \exp(\widetilde{z}) \overset{(19)}{=} \\
&(f \times \mathrm{id})^* \mathrm{ch}(\widetilde{U}) - \omega\, \mathrm{ch}(\det(U_{1|p})^{-1/r}) \overset{(24)}{=} (\mathcal{H} \times \mathrm{id})^* \mathrm{ch}(U_0) \cdot \mathrm{ch}(\det(U_1)^{-1/r}) = \\
&(\mathcal{H} \times \mathrm{id})^* \mathrm{ch}(U_0) \cdot \exp(-c_1(U_1)/r) = (\mathcal{H} \times \mathrm{id})^* \mathrm{ch}(U_0) \cdot \exp(-c_1(U_{1|p})/r - \omega/r) \overset{(23)}{=} \\
&(\mathcal{H} \times \mathrm{id})^* \mathrm{ch}(U_0) \cdot \exp(-c_1(U_{0|p})/r - \omega/r) = \\
&(\mathcal{H} \times \mathrm{id})^* \mathrm{ch}(U_0) \cdot \mathrm{ch}(\det(U_0)^{-1/r})(1 - \omega/r) \overset{(23)}{=} (\mathcal{H} \times \mathrm{id})^* \mathrm{ch}(\overline{U}) - \omega/r \cdot f^* \mathrm{ch}(\widetilde{U}_p).
\end{aligned} \tag{25}$$

最后，用 $(\mathcal{H}^{-1} \times \mathrm{id})^*$ 拉回 (25) 的两边，我们便得到命题 5.1 的陈述。□

~我们的下一个目标是建立丛 U 和 $\overline{U}$ 的陈类之间的联系。¯我们先回顾并设定将要使用的记号。

- 与上文一样，我们用 x_1、x_2、...、x_r 表示 $\mathbb{R}^r$ 上的标准坐标，并令 $V = \mathbb{R}^r/(1, ..., 1)$。对于每个指标 $i = 1$、2、...、r，我们记

$$\overline{x}_i := x_i - \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} x_j \in V^*.$$

- 对于 $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 上任意一个 Σ_r-不变多项式 q ，我们记

$$q(\overline{U}) \in H^*(\mathcal{P}_0(r) \times C),\ q(\widetilde{U}) \in H^*(\mathcal{P}_1(r) \times C) \tag{26}$$

表示分别将 $q(x_1, ..., x_r)$ 代入丛~ U 和 U 的陈根所得的上同调类。特别地，对于次数为 k 的基本对称多项式 τ_k ，我们有

$$\tau_k(\widetilde{U}) = c_k(\widetilde{U}) \quad \text{and} \quad \tau_k(\overline{U}) = c_k(\overline{U}),$$

因此 τ_k 我们恢复这些向量丛通常的陈类。

• 我们用$\mathbb{C}[x_1, ..., \overline{x}_r]^{\Sigma_r}$表示关于 $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$的对称多项式环，并用$\mathbb{C}[x_1, ..., x_r]^{\Sigma_r}[x_1]$表示以变量 x_1为自变量、系数取自$\mathbb{C}[x_1, ..., x_r]^{\Sigma_r}$的多项式环。在陈根的自然识别下，我们有

$$\overline{x}_1(\widetilde{U}_p) := \overline{x}_1(\widetilde{U})\big|_{\mathcal{P}_1(r)\times\{p\}} = \widetilde{z} \quad (\text{cf. } (19)).$$

• 利用这一对应，对于任意多项式 $q \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_r]^{\Sigma_r}[x_1]$ 我们得到一个定义良好的上同调类

$$q(\widetilde{U}_p) := q(\widetilde{U})\big|_{\mathcal{P}_1(r)\times\{p\}} \in H^*(\mathcal{P}_1(C)).$$

稍后，我们将使用以下简单观察。

引理 5.3。令 $q(x_1, ..., x_r) \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_r]^{\Sigma_r}$。令 $\boldsymbol{B} \in \mathcal{B}$ 为 V^* 的一个基（见 *§4.2*），并定义 $s := ((1-r)/r, 1/r, ...1/r) \in V^*$。令 $q_{\check{s}}$ 表示 q 的方向导数，该导数用与基 $\boldsymbol{B}$ 相对应的变量表示，方向为 $\check{s}_{\boldsymbol{B}}$。所得多项式 $q_{\check{s}}$ 与 $\boldsymbol{B} \in \mathcal{B}$ 的选择无关，而且，

$$q_{\check{s}} \in \mathbb{C}[\overline{x}_1, ..., \overline{x}_r]^{\Sigma_r}[\overline{x}_1].$$

有了这些准备性的结果，我们现在可以用 $\mathcal{P}_0(r)$ 上的万有类来描述其上同调环 $H^*(\mathcal{P}_0(r))$的一组生成元。

定理 5.4。设 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{P}_0(r) \times C$ 上的万有丛，$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{U}\big|_{\mathcal{P}_0(r)\times\{p\}} =: \mathcal{U}_p$ 是相应的旗丛。回忆记号 $z = c_1(\mathcal{F}_1 \otimes \det(\mathcal{U}_p)^{-1/r}) \in H^2(\mathcal{P}_0(r))$ 和 $U = \mathcal{U} \otimes \det(\mathcal{U})^{-1/r}$。对于 $2 \leqslant k \leqslant r$ 和 $1 \leqslant j \leqslant 2g$，定义上同调类

$$a_k \in H^{2k}(\mathcal{P}_0(r)), \qquad b_k^j \in H^{2k-1}(\mathcal{P}_0(r)), \qquad f_k \in H^{2k-2}(\mathcal{P}_0(r))$$

通过 *Künneth* 分解

$$c_k(\overline{U}) = a_k \otimes 1 + \sum_{j=1}^{2g} b_k^j \otimes e_j + f_k \otimes \omega \in H^*(\mathcal{P}_0(r)) \otimes H^*(C),$$

其中 $\omega \in H^2(C)$ 是曲线的基本类，$\{e_j\}$ 是 $H^1(C)$ 的一组基，满足对 $1 \leqslant i \leqslant g$ 有 $e_i e_{i+g} = \omega$，且所有其他交数 $e_i e_j$ 均为 *0*。

(i) 那么对于任意 $2 \leqslant k \leqslant r$ 和 $1 \leqslant j \leqslant 2g$，有：

$$(27) \qquad a_k = h^*(\widetilde{a}_k), \qquad b_k^j = h^*(\widetilde{b}_k^j) \quad \textit{and} \quad f_k = h^*(\widetilde{f}_k) - h^*(\tau_{k\check{s}}(\widetilde{U}_p)),$$

其中 $h\colon \mathcal{P}_0(r) \to \mathcal{M}_1(r)$ 是式 (20) 中定义的态射，$\tau_k \in \mathbb{C}[x_1, ..., \overline{x_r}]^{\Sigma_r}$~ 表示次数为 k 的初等对称多项式，$\tau_{k\check{s}}(U_p)$ 是引理 *5.3* 之前引入的上同调类。*(ii)* 上同调环 $H^*(\mathcal{P}_0(r))$ 由上同调类 a_k, b_k^j, f_k 和 z 生成。

证明。我们引入记号 $q_i(y_1, ..., y_r) = \frac{1}{i!}(y_1^i + ... + y_r^i)$；特别地，我们~ ~有 $q_i(U) = ch_i(U)$ 和 $q_i(U) = \overline{c}h_i(U)$。由命题 5.1 可得

$$q_i(\overline{U}) = (h \times \mathrm{id})^*(q_i(\widetilde{U})) - \omega\, h^*(q_{i\check{s}}(\widetilde{U}_p)),$$

因此

$$q_i(\overline{U})q_i(\overline{U}) = (h\times \mathrm{id})^*(q_i(\widetilde{U})q_i(\widetilde{U}) - \omega\,(q_{i\check{s}}(\widetilde{U}_p)q_i(\widetilde{U}) + q_{j\check{s}}(\widetilde{U}_p)q_i(\widetilde{U}))) = \tag{28}$$
$$(h\times \mathrm{id})^*(q_i(\widetilde{U})q_i(\widetilde{U})) - \omega\, h^*((q_iq_j)_{\check{s}}(\widetilde{U}_p)).$$

~ ~关于最后一个等式，我们用到了这样一个事实： $\omega\, ch(U) = \omega\, ch(U_p)$。

由于任意多项式 $q\in\mathbb{C}[y_1,\ ...,\ y_r]^{\Sigma_r}$ 都可以写成关于 q_i 的多项式，(28) 蕴含对于 $V\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ 上的任意对称多项式 q，我们有：

$$q(\overline{U}) = (h\times \mathrm{id})^*(q(\widetilde{U})) - \omega\, h^*(q_{\check{s}}(\widetilde{U}_p)).$$

将 $q=\tau_k$ 代入 $k=2$、3、...、r，即可得到定理 5.4(i 的陈述).

由引理 5.3 可知，多项式 $\tau_{k\check{s}}$ 是 $\mathbb{C}[x_1,\ ...,\ x_r]^{\Sigma_r}[x_1]$, ~的元素，因此上同调类 $(\tau_{k\check{s}})(U_p)$ 可以表示为以下类的多项式

$$\widetilde{a}_j = \tau_i(\widetilde{U}_p) = \tau_i(\widetilde{U})\big|_{\mathcal{M}_1(r)\times\{p\}},\quad j=2,3,...,r,$$

~和 $\widetilde{z}=x_1(U_p)$。

由引理 5.2，我们得到同一性 $z=(\mathcal{H}^{-1})^*\widetilde{z}$，因此上同调环 $H^*(\mathcal{P}_0(r))$由这些类生成

$$h^*(\widetilde{a}_k),\ h^*(\widetilde{b}_k^j),\ h^*(\widetilde{f}_k)\ \ (k=2,...,r;\ j=1,...,2g)\ \text{ and }\ (\mathcal{H}^{-1})^*\widetilde{z},$$

也可等价地描述为由相应的类 a_k、b_k^j、 f_k 和z生成。定理 5.
4 □的证明至此完成

5.2. **对 $\mathcal{P}_0(r)$ 上的积分**。 现在我们可以陈述本节的主要结果，它计算了模空间 $\mathcal{P}_0(r)$ 上的所有交配对。

定理 5.5。 设 z、a_k、f_k、$b_k^j\in H^*(\mathcal{P}_0(r))$ 和 $\zeta_k^j\in H^1(T^{2g})$，其中 $2\leqslant k\leqslant r$ 和 $1\leqslant j\leqslant 2g$，表示在 *§5.1* 和 *§4.3* 中定义的上同调类。回顾记号$Q(x)$，它表示 $V\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ 上的对称多项式，并用初等对称多项式 τ_k 表示为

$$Q(x) = \sum_{k=2}^{r}\delta_k\tau_k(x), \tag{29}$$

其中 δ_k 是形式幂零参数，使得 $\delta_2\neq 0$。定义 $c=(1/r,\ldots\ldots,\ 1/r,1/r{-}1)\in V^*$；则有

$$\int_{\mathcal{P}_0(r)}\exp(\delta_2f_2+\delta_3f_3+...+\delta_rf_r)z^m\prod_{k=2}^{r}a_k^{m_k}\prod_{j_k=1}^{2g}(b_k^{j_k})^{l_{k,j_k}} = \tag{30}$$
$$\frac{(-1)^{\binom{r}{2}(g-1)}}{(r-1)!}\sum_{\boldsymbol{B}\in\mathcal{H}_n}\mathrm{iBer}_{\mathbf{B},Q}\left[\frac{\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}(x_r-x_j)\right)^m\prod_{k=2}^{r}\tau_k(x)^{m_k}}{\prod_{i=1}^{r-1}(x_r-x_i)\prod_{i<j}(x_i-x_j)^{2g-2}\det(\mathrm{Hess}_{\boldsymbol{B}}(Q))}\right.$$
$$\left.\int_{T^{2g}}\exp\left(-\sum_{a,b}\sum_{j=1}^{g}\zeta_a^j\zeta_b^{j+g}Q_{\check{u}_a\check{u}_b}\right)\prod_{k=2}^{r}\prod_{j_k=1}^{2g}\left(\sum_a\zeta_a^{j_k}\tau_{k_{\check{u}_a}}\right)^{l_{k,j_k}}\right](-[c]_{\boldsymbol{B}}),$$

其中，第一个求和遍历哈密顿基中的元素 $\boldsymbol{B}$ $\mathcal{H}_n$ 对任意$n \in \{1,2,...,r\}$（参见第 *13* 页的记号），$\mathrm{Hess}_{\boldsymbol{B}}(Q)$ 表示海森矩阵：$\mathrm{Hess}_{\boldsymbol{B}}(Q)_{ij} = \frac{\partial}{\partial \beta^{[i]}} Q_{\check{\beta}^{[j]}\boldsymbol{B}}$，而 $(\check{u}_1, \check{u}_2, ..., \check{u}_{r-1})$ 是 V 的正交归一基。

证明。首先，我们将（30）式的左边改写为对 1 次抛物丛模空间 $\mathcal{P}_1(r)$ 的积分。应用定理 5.4，得到

$$\int_{\mathcal{P}_0(r)} \exp(\delta_2 f_2 + \delta_3 f_3 + ... + \delta_r f_r) z^m \prod_{k=2}^{r} a_k^{m_k} \prod_{j_k=1}^{2g} (b_k^{j_k})^{l_{k,j_k}} = \tag{31}$$

$$\int_{\mathcal{P}_1(r)} \exp(\delta_2 \widetilde{f_2} + \delta_3 \widetilde{f_3} + ... + \delta_r \widetilde{f_r}) \prod_{k=2}^{r} \widetilde{a}_k^{m_k} \prod_{j_k=1}^{2g} (\widetilde{b}_k^{j_k})^{l_{k,j_k}} \exp(-Q_{\check{s}}(\widetilde{u}_p)) \tilde{z}^m,$$

其中 $s = ((1-r)/r, 1/r, ..., 1/r) \in V^*$ 并且如上所述，$Q_{\check{s}}(u_p)$ 表示引理 5.3 之前定义的上同调类。

为了在模空间 $\mathcal{P}_1(r)$上进行积分，我们将使用以下命题。

命题 5.6。对于任意 $q \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_r]^{\Sigma_r}[x_1]$和 $\alpha \in H^*(\mathcal{M}_1(r))$，有：

$$\int_{\mathcal{P}_1(r)} f^*(\alpha) q(\widetilde{u}_p) = \int_{\mathcal{M}_1(r)} \alpha \left(\sum_{\sigma \in \Sigma_r/\mathrm{Stab}_1} \frac{\sigma \cdot q}{\prod_{j \neq \sigma(1)} (x_{\sigma(1)} - x_j)} \right) \left(\widetilde{u}_p \right), \tag{32}$$

其中 $f: \mathcal{P}_1(r) \to \mathcal{M}_1(r)$ 是射影丛映射（见命题 *3.1*），并且

$$\left(\sum_{\sigma \in \Sigma_r/\mathrm{Stab}_1} \frac{\sigma \cdot q}{\prod_{j \neq \sigma(1)} (x_{\sigma(1)} - x_j)} \right) \left(\widetilde{u}_p \right) \in H^*(\mathcal{P}_1(r))$$

是式(26)中定义的上同调类。

证明。注意，对任意 $q \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_r]^{\Sigma_r}$，上同调类 $q(\widetilde{u}_p)$ 属于$H^*(\mathcal{M}_1(r))$，因此要证明命题 5.6，只需证明

$$\int_{\mathcal{P}_1(r)} f^*(\alpha) \bar{x}_1^k (\widetilde{u}_p) = \int_{\mathcal{M}_1(r)} \alpha \left(\sum_{\sigma \in \Sigma_r/\mathrm{Stab}_1} \frac{\sigma \cdot \bar{x}_1^k}{\prod_{j \neq \sigma(1)} (x_{\sigma(1)} - x_j)} \right) \left(\widetilde{u}_p \right) = \tag{33}$$

$$\int_{\mathcal{M}_1(r)} \alpha \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{\bar{x}_i^k}{\prod_{j \neq i} (\bar{x}_i - \bar{x}_j)} \right) \left(\widetilde{u}_p \right)$$

对任意 $k \geqslant 0$。

我们先化简式 (33) 右端的表达式。

引理 5.7. 记 $h_m(x_1, ..., x_r)$ 为次数为 m 的完全齐次对称多项式。那么，假设 $h_0(x_1, ..., x_r) = 1$ 且 $h_m(x_1, ..., x_r) = 0$ 对 $m < 0$ 成立，我们有

$$h_{m-r+1}(x_1, ..., x_r) = \sum_{i=1}^{r} \frac{x_i^m}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} \quad \textit{for any} \quad m \geqslant 0.$$

证明. 考虑完全齐次对称多项式的生成函数：

$$H(t) = \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{1-x_i t} = \sum_{k\geqslant 0} h_k(x_1, ..., x_r) t^k. \tag{34}$$

注意，有理函数 $H(t) = \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{(1-x_i t)}$ 可以写成

$$H(t) = \sum_{i=1}^{r} \frac{C_i}{1-x_i t},$$

其中常数 C_i 由部分分式分解确定：

$$C_i = \lim_{t\to 1/x_i} H(t)(1-x_i t) = \frac{1}{\prod_{j\neq i}(1-x_j/x_i)} = \frac{x_i^{r-1}}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)}.$$

将 C_i 代回 $H(t)$ 的部分分式形式中，可得

$$H(t) = \sum_{i=1}^{r} \frac{x_i^{r-1}}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)} \frac{1}{1-x_i t} = \sum_{k\geqslant 0} \sum_{i=1}^{r} \frac{x_i^{r-1+k}}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)} t^k. \tag{35}$$

现在比较 $H(t)$ 的表达式 (34) 和 (35) 中 t^k 的系数，可得

$$h_k(x_1, ..., x_r) = \sum_{i=1}^{r} \frac{x_i^{r-1+k}}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)} \quad \text{for any} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

然后代入 $k = m - r + 1$，便得到引理 5.7 的结论。 □

回顾一下，在 §5.1 中，我们将 $\bar{}x_1(\tilde{U}_p)$ 与上同调类 $\tilde{z} \in H^2(\mathcal{P}_1(r))$（定义于 (19)）认作相同。因此，由引理 5.7 可知，要证明 (33)，只需证明以下等式：

$$\int_{\mathcal{P}_1(r)} f^*(\alpha)\tilde{z}^k(\tilde{U}_p) = \int_{\mathcal{M}_1(r)} \alpha\, h_{k-r+1}(\tilde{U}_p) \quad \text{for} \quad k \geqslant 0. \tag{36}$$

$\tilde{}$由于 $\mathcal{P}_1(r) \simeq \mathbb{P}(U_p^*)$（见注 3.2）且 $\tilde{z} = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\tilde{U}_p^*)}(1))$（参见 (19)），等式 (36) 由 [22, 引理 1] 得出；命题 5.6 的证明至此完成。 □

现在利用命题 5.6，我们将 (31) 改写为

$$\int_{\mathcal{M}_1(r)} \exp(\delta_2 \tilde{f}_2 + \delta_3 \tilde{f}_3 + ... + \delta_r \tilde{f}_r) \prod_{k=2}^{r} \tilde{a}_k^{m_k} \prod_{j_k=1}^{2g} (\tilde{b}_k^{j_k})^{l_{k,j_k}} \sum_{\sigma} \frac{\exp(-Q_{\sigma\check{s}}(\tilde{U}_p))(\sigma\tilde{z})^m}{\prod_{j\neq\sigma(1)}(x_{\sigma(1)} - x_j)},$$

其中求和遍历 $\sigma \in \Sigma_r/\mathrm{Stab}_1$ 中的元素。根据定理 4.7，该积分等于

$$\sum_{\mathbf{B}\in\mathcal{H}_r} \mathrm{iBer}_{\mathbf{B},Q}\left[\mathcal{T}(x) \sum_{i=1}^{r} \frac{\exp(Q_{\check{\alpha}^{ir}})\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}(x_i - x_j)\right)^m}{\prod_{j,j\neq i}(x_i - x_j)}\right](-[(1/r, ..., 1/r, 1/r-1)]_{\mathbf{B}}), \tag{37}$$

其中

$$\mathcal{T}(x)=\frac{(-1)^{\binom{r}{2}(g-1)}}{r!}\frac{\prod_{k=2}^{r}\tau_k(x)^{m_k}}{\prod_{i<j}(x_i-x_j)^{2g-2}\det(\mathrm{Hess}_{\mathbf{B}}(Q))}$$
$$\int_{T^{2g}}\exp\left(-\sum_{a,b}\sum_{j=1}^{g}\zeta_a^j\zeta_b^{j+g}Q_{\check{u}_a\check{u}_b}\right)\prod_{k=2}^{r}\prod_{j_k=1}^{2g}\left(\sum_a\zeta_a^{j_k}\tau_{k_{\check{u}_a}}\right)^{l_{k,j_k}}.$$

现在利用注 4.2 以及 $\nu=x_i-x_r$, $i=1,2,\ldots,r-1$, 将 (37) 改写为

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{\mathbf{B}\in\mathcal{H}_r}\mathrm{iBer}_{\mathbf{B},Q}\left[\mathcal{T}(x)\frac{\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}(x_i-x_j)\right)^m}{\prod_{j,j\neq i}(x_i-x_j)}\right]\Big(-\Big[\sum_{j=1}^{r}\frac{x_j}{r}-x_i\Big]_{\mathbf{B}}\Big). \tag{38}$$

引入记号 σ_i 表示排列 $(ir)\in\Sigma_r$, 我们注意到

$$\sum_{\mathbf{B}\in\mathcal{H}_r}\mathrm{iBer}_{\mathbf{B},Q}\left[\mathcal{T}(x)\frac{\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}(x_i-x_j)\right)^m}{\prod_{j,j\neq i}(x_i-x_j)}\right]\Big(-\Big[\sum_{j=1}^{r}\frac{x_j}{r}-x_i\Big]_{\mathbf{B}}\Big)=$$
$$\sum_{\mathbf{B}\in\mathcal{H}_i}\mathrm{iBer}_{\sigma_i\mathbf{B},Q}\left[\mathcal{T}(x)\frac{\sigma_i\cdot\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}(x_r-x_j)\right)^m}{\sigma_i\cdot\prod_{j,j\neq r}(x_r-x_j)}\right](-[\sigma_i\cdot c]_{\sigma_i\mathbf{B}})\overset{4.3}{=}$$
$$\sum_{\mathbf{B}\in\mathcal{H}_i}\mathrm{iBer}_{\mathbf{B},Q}\left[\mathcal{T}(x)\frac{\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}(x_r-x_j)\right)^m}{\prod_{j,j\neq r}(x_r-x_j)}\right](-[c]_{\mathbf{B}}),$$

最后一个等号用到了注4.3。最后，利用总和

$$\sum_{\mathbf{B}\in\mathcal{H}_i}\mathrm{iBer}_{\mathbf{B},Q}\left[\mathcal{T}(x)\frac{\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}(x_r-x_j)\right)^m}{\prod_{j,j\neq r}(x_r-x_j)}\right](-[c]_{\mathbf{B}})$$

不依赖于哈密顿基 $\mathcal{H}_i$ [20] 的选取（另见 [13, 定理 4.4]），我们得到表达式 (30), 从而完成了定理 5.5 的证明。□

6. Our main result and its relation to Kiem's work

在最后一节中，我们给出主要结果：关于 $\mathrm{IH}^*(\mathcal{M}_0(r))$ 上庞加莱–韦尔配对的显式公式（见定理 6.3）。我们还将这些公式在秩为 2 的情形下，与 Kiem 对 $\mathrm{IH}^*(\mathcal{M}_0(2))$ 上交配对的计算进行比较。

6.1. 充足上同调类。如 §3.3 和 §3.4 所述，为了根据 $\mathrm{H}^*(\mathcal{P}_0(r))$ 上的交数推导出 $\mathrm{IH}^*(\mathcal{M}_0(r))$ 上庞加莱–韦尔迪耶配对的显式公式，有必要确定模空间 $\mathcal{M}_0(r)$ 和 $\mathcal{P}_0(r)$ 上（相对）充足的上同调类。下面的命题将给出这一确定结果。

命题 6.1。设 $f_2,z\in\mathrm{H}^2(\mathcal{P}_0(r))$ 为 *§5.1* 中引入的类， $\pi\ \mathcal{P}_0(r)\to\mathcal{M}_0(r)$ 为命题 *3.1* 中定义的映射。存在 $\mathcal{M}_0(r)$ 上的一个充足线丛 $\mathcal{L}_0$ ，以及 $\mathcal{P}_0(r)$ 上的一个 π-充足线丛 $\mathcal{L}$，使得

$$f_2=c_1(\pi^*\mathcal{L}_0),\ \ -z=c_1(\mathcal{L}),$$

且对于每个稳定的 $V\in\mathcal{M}_0(r)$, $\deg(\mathcal{L}\big|_{\pi^{-1}(V)})=1$ 。

证明。 我们首先证明，类 $f_2 \in H^2(\mathcal{P}_0(r))$ 是 $H^2(\mathcal{M}_0(r))$中一个丰沛类的拉回。沿用 [23], ，我们考虑 $\mathcal{M}_1(r) \times C$上的万有丛 U，并将其规范化，使其第一陈类限制到 $\mathcal{M}_1(r) \times \{p\}$上时等于$\sim r f_2$。根据命题 3.1，存在一个同构

$$\mathcal{P}_1(r) \simeq \mathbf{P}(U|_{\mathcal{M}_1(r)\times\{p\}}) \xrightarrow{f} \mathcal{M}_1(r),$$

因此，在 $\mathcal{P}_1(r)$ 上我们有典范短正合列：

$$0 \to Q \to f^*U|_{\mathcal{M}_1(r)\times\{p\}} \to \mathcal{O}(1) \to 0. \tag{39}$$

逐行重复 [23, 引理 2.1], 中处理情形$\mathcal{M}_0(2)$的论证，可得

$$\mathcal{O}(1) = (\pi \circ \mathcal{H})^* \mathcal{L}_0,$$

其中 $\mathcal{L}_0$ 是 $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_0(r))$ 的丰沛生成元，而 $\mathcal{H}\colon \mathcal{P}_1(r) \to \mathcal{P}_0(r)$ 是由典范Hecke对应诱导的同构（见命题 3.3）。

我们注意到，在（19）中定义的上同调类 $-r\tilde{z}$ 等于 $Q \otimes \mathcal{O}(-1)$ 的第一陈类。将短正合列（39）与 $\mathcal{O}(-1)$ 作张量积并取行列式，得到

$$rf^*(\widetilde{f_2}) - ry = -r\tilde{z} \Leftrightarrow y = f^*(\widetilde{f_2}) + \tilde{z}, \quad \text{where} \quad y = c_1(\mathcal{O}(1)) = c_1((\pi \circ \mathcal{H})^* \mathcal{L}_0).$$

将此恒等式与方程（27）比较，我们推得 $y = \mathcal{H}^* f_2$，从而$f_2 = c_1(\pi^* \mathcal{L}_0)$。

现设 $\mathcal{U}_0$ 为 $\mathcal{P}_0(r) \times C$上的万有丛，并以 $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 = \mathcal{U}_{0|p} := \mathcal{U}_0|_{\mathcal{P}_0(r)\times\{p\}}$ 表示相应的普适旗丛。由(15)我们有

$$2rf_2 = \mathrm{pr}_* c_2(\mathrm{End}(\mathcal{U}_0)),$$

其中$\mathrm{pr} : \mathcal{P}_0(r) \times C \to \mathcal{P}_0(r)$ 为自然投影。应用 [13, 引理2.8], 我们得到

$$f_2 = c_1(\det(\mathcal{U}_{0|p})^{1-g} \otimes \det(\mathrm{pr}_* \mathcal{U}_0)^{-1}).$$

因此，由(19)，类 $f_2 - z$ 是线丛的第一陈类

$$\det(\mathcal{U}_{0|p})^{1-g} \otimes \det(\mathrm{pr}_* \mathcal{U}_0)^{-1} \otimes \mathcal{L}, \quad \text{where } \mathcal{L} := \det(\mathcal{U}_{0|p})^{1/r} \otimes \mathcal{F}_1^{-1}. \tag{40}$$

如 [13, §2.2及注记2.7],所说明的，该线丛在 $\mathcal{P}_0(r)$上是丰沛的。

由于 $f_2 = c_1(\pi^*(\mathcal{L}_0))$ 且 $\mathcal{L}_0$ 在 $\mathcal{M}_0(r)$上丰沛，而 $f_2 - z$ 在 $\mathcal{P}_0(r)$上丰沛，故 $-z = c_1(\mathcal{L})$ 是相对丰沛的。

尚需验证 $\mathcal{L}$ 在稳定 $V \in \mathcal{M}_0(r)$之上的每个纤维 $\pi^{-1}(V)$上限制为一个次数为1的线丛。如定理 3.5(i)中所观察到的，态射$\pi : \mathcal{P}_0(r) \to \mathcal{M}_0(r)$ 在对应于稳定向量丛 V 的点上的纤维为

$$\pi^{-1}(V) = \mathbb{P}(V_p) \simeq \mathbb{P}^{r-1},$$

配备重言线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}(-1)$。 $\mathcal{F}_1$ 在 $\pi^{-1}(V)$上的限制与$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}(-1)$一致，而 $\mathcal{L}$的定义（40）中的其余因子限制后为平凡丛。由此完成命题 6.1 的证明。□

回顾记号 $\mathrm{i}\colon \mathrm{IH}^*(\mathcal{M}_0(\mathrm{r})) \hookrightarrow \mathrm{H}^*(\mathcal{P}_0(\mathrm{r}))$，它是通过将 $\mathrm{IH}^*(\mathcal{M}_0(\mathrm{r}))$ 与零阶反常部分 $\mathrm{P}_0\mathrm{H}^*(\mathcal{P}_0(\mathrm{r}))$等同而得到的包含映射（见命题 3.7）。命题 6.1 蕴含了以下关于交上同调类上积的结论。

推论 6.2。对于任意 α，$\beta \in \mathrm{IH}^*(\mathcal{M}_0(\mathrm{r}))$，上积 $\mathrm{i}(\alpha)\cup\mathrm{i}(\beta)$ 可以在 $\mathrm{H}^*(\mathcal{P}_0(\mathrm{r}))$ 中写成不涉及 z的上同调类的线性组合。

证明。我们注意到，根据命题 6.1，$\mathrm{P}_0\mathrm{H}^*(\mathcal{P}_0(\mathrm{r}))$ 中的任何上同调类都不能被 z整除。事实上，根据相对硬 Lefschetz 定理 2.4，乘以相对丰沛类 z 会严格提高反常度。□

6.2. **我们的主要结果**。现在我们可以描述交叉上同调 $\mathrm{IH}^*(\mathcal{M}_0(\mathrm{r}))$中的交配对。

定理 6.3。设 a_k，$\mathrm{b}_\mathrm{k}^\mathrm{j}$，$\mathrm{f}_\mathrm{k} \in \mathrm{H}^*(\mathcal{P}_0(\mathrm{r}))$ 为 *§5.1* 中定义的上同调类，并令 $\mathrm{A}\colon \mathrm{H}^*(\mathcal{P}_0(\mathrm{r})) \to \mathrm{H}^{*+2}(\mathcal{P}_0(\mathrm{r}))$ 表示通过与类 f_2进行杯积给出的算子。置 $\mathrm{n} = \text{维}(\mathcal{M}_0(\mathrm{r}))$。

(i) 对于每个 $0 \leqslant \mathrm{d} \leqslant 2\mathrm{n}$，$\mathcal{M}_0(\mathrm{r})$ 的次数-d 交叉上同调具有如下描述：

$$\mathrm{IH}^\mathrm{d}(\mathcal{M}_0(\mathrm{r})) = \bigoplus_{\mathrm{k}\geqslant 1} \left(\ker(\mathrm{A}^{\mathrm{n}-\mathrm{d}+\mathrm{k}}) \cap \mathrm{im}(\mathrm{A}^{\mathrm{k}-1})\right) \cap \mathrm{H}^\mathrm{d}(\mathcal{P}_0(\mathrm{r})).$$

(ii) 令 $\mathrm{i}\colon \mathrm{IH}^*(\mathcal{M}_0(\mathrm{r})) \hookrightarrow \mathrm{H}^*(\mathcal{P}_0(\mathrm{r}))$ 表示自然嵌入。令 $\alpha, \beta \in \mathrm{IH}^*(\mathcal{M}_0(\mathrm{r}))$为满足 次数$\alpha$ +次数β = 2维数$(\mathcal{M}_0(\mathrm{r}))$的类，从而

$$\mathrm{i}(\alpha)\cup\mathrm{i}(\beta) = \prod_{\mathrm{k}=2}^{\mathrm{r}} \left(\mathrm{a}_\mathrm{k}^{\mathrm{m}_\mathrm{k}} \mathrm{f}_\mathrm{k}^{\mathrm{n}_\mathrm{k}} \prod_{\mathrm{j}_\mathrm{k}=1}^{2\mathrm{g}} (\mathrm{b}_\mathrm{k}^{\mathrm{j}_\mathrm{k}})^{\mathrm{l}_{\mathrm{k},\mathrm{j}_\mathrm{k}}} \right).$$

α 与 β 在 $\mathrm{IH}^*(\mathcal{M}_0(\mathrm{r}))$ 中的相交庞加莱-韦迪耶配对为

$$\begin{aligned}(41)\quad \mathrm{N}\cdot\mathrm{Coeff}_{\delta^\mathrm{n}} \Bigg[\sum_{\boldsymbol{B}\in\mathcal{H}_\mathrm{n}} \mathrm{iBer}_{\mathbf{B},\mathrm{Q}} \Bigg[\frac{\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{r}}(\mathrm{x}_\mathrm{j}-\mathrm{x}_\mathrm{r})\right)^{\mathrm{r}-1} \prod_{\mathrm{k}=2}^{\mathrm{r}} \tau_\mathrm{k}(\mathrm{x})^{\mathrm{m}_\mathrm{k}}}{\prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{r}-1}(\mathrm{x}_\mathrm{r}-\mathrm{x}_\mathrm{i}) \prod_{\mathrm{i}<\mathrm{j}} (\mathrm{x}_\mathrm{i}-\mathrm{x}_\mathrm{j})^{2\mathrm{g}-2} \det(\mathrm{Hess}_{\boldsymbol{B}}(\mathrm{Q}))} \\ \int_{\mathrm{T}^{2\mathrm{g}}} \exp\left(-\sum_{\mathrm{a},\mathrm{b}} \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{g}} \zeta_\mathrm{a}^\mathrm{j} \zeta_\mathrm{b}^{\mathrm{j}+\mathrm{g}} \mathrm{Q}_{\check{\mathrm{u}}_\mathrm{a}\check{\mathrm{u}}_\mathrm{b}} \right) \prod_{\mathrm{k}=2}^{\mathrm{r}} \prod_{\mathrm{j}_\mathrm{k}=1}^{2\mathrm{g}} \left(\sum_\mathrm{a} \zeta_\mathrm{a}^{\mathrm{j}_\mathrm{k}} \tau_{\mathrm{k}\check{\mathrm{u}}_\mathrm{a}} \right)^{\mathrm{l}_{\mathrm{k},\mathrm{j}_\mathrm{k}}} \Bigg] (-[\mathrm{c}]_{\boldsymbol{B}}) \Bigg],\end{aligned}$$

其中

$$\mathrm{N} = (-1)^{\binom{\mathrm{r}}{2}(\mathrm{g}-1)} \frac{\prod_{\mathrm{k}=2}^{\mathrm{r}} \mathrm{n}_\mathrm{k}!}{(\mathrm{r}-1)!} \quad \textit{and} \quad \mathrm{c} = (1/\mathrm{r}, \ldots, 1/\mathrm{r}, 1/\mathrm{r}-1).$$

如上所述，$\mathrm{Q}(\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{k}=2}^{\mathrm{r}} \delta_\mathrm{k}\tau_\mathrm{k}(\mathrm{x})$ 是定义在 $\mathrm{V}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$上的多项式，其中 τ_k 表示第 k个初等对称多项式，δ_k 是形式幂零参数，并且 $\delta_2 \neq 0$。我们将 $\exp(\mathrm{Q}_{\check{\mathrm{u}}_\mathrm{a}\check{\mathrm{u}}_\mathrm{b}})$ 按变量δ_k展开为形式幂级数，并用 $\mathrm{Coeff}_{\delta^\mathrm{n}}$ 表示 $\delta^\mathrm{n} := \prod_{\mathrm{k}=2}^{\mathrm{r}} \delta_\mathrm{k}^{\mathrm{n}_\mathrm{k}}$. 的系数。

证明。由于 $\mathrm{f}_2 \in \mathrm{H}^*(\mathcal{P}_0(\mathrm{r}))$ 是 $\mathcal{M}_0(\mathrm{r})$ 上的一个丰沛类的拉回（见命题 6.1），由定义 2.1 可立即得出 (i) 部分。

对于 (ii) 部分，结合命题 3.8 和 6.1，可知 $\mathrm{IH}^*(\mathcal{M}_0(r))$ 中类 α 和 β 的交配对为

$$\int_{\mathcal{P}_0(r)}(-z)^{r-1}\prod_{k=2}^{r}\left(a_k^{m_k}f_k^{n_k}\prod_{j_k=1}^{2g}(b_k^{j_k})^{l_{k,j_k}}\right),$$

其中，$z\in H^2(\mathcal{P}_0(r))$ 是式 (19) 中定义的类。应用定理 5.5 计算模空间 $\mathcal{P}_0(r)$ 上的积分，我们得到表达式 (41)。□

注 6.4. 注 3.9 使我们能够将交配对的公式 (41) 与 Jeffrey–Kirwan–Kiem–Woolf [9] 的相应表达式进行比较。在文中所述的对应关系下，由相对丰沛类的幂产生的因子 $(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}(x_j-x_r))^{r-1}$ 被 $\frac{1}{r}\prod_{j=1}^{r-1}(x_j-x_r)$ 取代，后者表示虚相对切丛的最高陈类。经过这一替换，我们的公式便恢复了 [9,定理 33] 中表达式的形式。

6.3. **与 Kiem 的工作之关系**。本文最后将我们的公式与 Kiem [8], 的结果进行比较；他计算了秩二半稳定丛模空间 $\mathcal{M}_0(2)$ 上的交旋加莱配对。作为第一步，我们将定理 6.3 的秩二情形写成便于比较的形式。

命题 6.5。设 $a_2, f_2, z, b_2^j\in H^*(\mathcal{P}_0(2))$（其中 $j=1,2,\ldots,2g$）为 *§5.1* 中针对 $r=2$ 定义的上同调类，并令 $\gamma=\sum_{j=1}^{g}b_2^jb_2^{j+g}\in H^6(\mathcal{P}_0(2))$。设 $\alpha_1,\alpha_2\in\mathrm{IH}^*(\mathcal{M}_0(2))$ 为满足以下条件的类：

$$i(\alpha_1)\cup i(\alpha_2)=a_2^m f_2^n\gamma^p\quad with\quad 2m+n+3p=3g-3.$$

则 α 与 β 在 $\mathrm{IH}^*(\mathcal{M}_0(2))$ 中的庞加莱–韦尔迪耶配对为

$$\frac{(-1)^{g+m}}{2^{1+2m+p-g}}\cdot\frac{n!g!}{(g-p)!}\cdot\operatorname*{Res}_{y=0}\frac{y^{2+2m+2p-2g}}{1-e^{-y}}\,dy.$$

证明。我们首先在 $r=2$ 的情形下应用定理 6.3。由此可得，α_1 与 α_2 的交配对为

$$N\cdot\mathrm{Coeff}_{\delta^n}\left[i\mathrm{Ber}_{\mathbf{B},Q}\left[\frac{\big((x_1-x_2)/2\big)\tau_2(x)^m}{-(x_1-x_2)^{2g-1}\det(\mathrm{Hess}_{\mathbf{B}}(Q))}\right.\right.$$
$$\left.\left.\int_{T^{2g}}\exp\left(-\sum_{j=1}^{g}\zeta^j\zeta^{j+g}Q_{\check{u}\,\check{u}}\right)\left(\sum_{j=1}^{g}\zeta^j\zeta^{j+g}(\tau_{2_{\check{u}}})^2\right)^p\right](-[c]_{\mathbf{B}})\right],$$

其中 $N=(-1)^{g-1}(n)!$，$\mathbf{B}=(\alpha^{12})$（见 §4.2）、$Q(x)=-\delta(x_1-x_2)^2/4$（见式 (15)）~~$\mathfrak{u}$~~ $=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_2)$，以及 $\zeta^j\in H^1(T^{2g})$（$j=1,\ldots\ldots,2g$）是 §4.3 中定义的上同调类。利用注 4.1，可将此表达式改写为

$$N\cdot\mathrm{Coeff}_{\delta^n}\operatorname*{Res}_{y=0}\frac{(y/2)(-y^2/4)^m}{-y^{2g-1}(1-e^{-\delta y})}\int_{T^{2g}}\exp\left(\delta\sum_{j=1}^{g}\zeta^j\zeta^{j+g}\right)\left(\sum_{j=1}^{g}\frac{\zeta^j\zeta^{j+g}y^2}{2}\right)^p dy.\tag{42}$$

现在令 $\xi=\sum_{j=1}^{g}\zeta^j\zeta^{j+g}\in H^2(T^{2g})$。不难验证（参见（14））..... t

$$\int_{T^{2g}}\exp(\delta\xi)\xi^p=\delta^{g-p}2^g\frac{g!}{(g-p)!}.$$

将其代入（42），得到

$$(43)\quad N\cdot \mathrm{Coeff}_{\delta^{i+n}}\frac{(-1)^{m+1}g!}{(g-p)!}\operatorname*{Res}_{y=0}\frac{y^{2+2m+2p-2g}\delta^{g-p}}{2^{1+2m+p-g}(1-e^{-\delta y})}dy = N\cdot\frac{(-1)^{m+1}g!}{(g-p)!}\operatorname*{Res}_{y=0}\frac{y^{2+2m+2p-2g}}{2^{1+2m+p-g}(1-e^{-y})}dy,$$

其中我们使用了恒等式 $n-(g-p)=-1-(2-2g+2m+2p)$。 □

回顾§5.1，我们将上同调类 a_2、f_2、$b_2^j\in H^*(\mathcal{P}_0(2))$ 定义为向量丛$U=\mathcal{U}\otimes\det(\mathcal{U})^{-1/2}$,的第二陈类的Künneth分量，其中 $\mathcal{U}\to\mathcal{P}_0(2)\times C$ 是一个万有丛。具体而言，我们有

$$c_2(\overline{U})=a_2\otimes 1+\sum_{j=1}^{2g}b_2^j\otimes e_j+f_2\otimes\omega\in H^*(\mathcal{P}_0(2))\otimes H^*(C),$$

其中 $\omega\in H^2(C)$ 是该曲线的基本类，$\{e_j\}$ 是$H^1(C)$的一个辛基。该定义的关键在于，向量丛 U以及由此得到的类 a_2、f_2、$b_2^j\in H^*(\mathcal{P}_0(2))$与万有丛$\mathcal{U}$的选取无关。

受 Kiem 的构造（见 [8, §5]）启发，我们也可以考虑丛 $\mathrm{End}(\mathcal{U})$ 的 Künneth分量，它同样不依赖于万有丛 $\mathcal{U}$ 的选择。在这种情况下，我们定义 $\alpha,\beta,\psi_j\in H^*(\mathcal{P}_0(2))$ 如下：

$$c_2(\mathrm{End}(\mathcal{U}))=-\beta\otimes 1+4\sum_{j=1}^{2g}\psi_j\otimes e_j+2\alpha\otimes\omega\in H^*(\mathcal{P}_0(2))\otimes H^*(C).$$

于是得到以下结论，这与 Kiem 的结果一致；见 [8, 推论 5.4]。

命题 6.6. 设 $\alpha,\beta\in H^*(\mathcal{P}_0(2))$ 为上文定义的上同调类。

(i) 满足以下条件的类 $\alpha_1,\alpha_2\in IH^*(\mathcal{M}_0(2))$ 的交配对

$$i(\alpha_1)\cup i(\alpha_2)=\beta^m\alpha^n\quad with\quad 2m+n=3g-3\quad and\quad m<g-1$$

等于 $(-1)^g n!\,2^{2g-2}\kappa_{g-1-m}$，其中 κ_{g-1-m} 由 $^{t\ \text{双曲正切}(t)}=\sum_{j\geqslant 0}\kappa_j t^{2j}$.定义。

（*ii*）此外，$\mathcal{M}_0(2)$ 的相交同调基本类由下式表示

$$\frac{\alpha^{g-2}\beta^{g-2}\psi}{(g-2)!(-4)^{g-1}},\quad where\ \ \psi=\alpha\beta-4\sum_{j=1}^{g}\psi_j\psi_{j+g}.$$

证明。 利用 (15)，我们观察到 $c_2(U)=\frac{1}{4}c_2(\mathrm{End}(\mathcal{U}))$，因此相应的 Küneth 分量满足

$$\beta=-4a_2,\ \ \alpha=2f_2,\ \ \psi_j=b_2^j,\ j=1,2,...,2g.$$

应用命题 6.5，可得类 $\alpha_1, \alpha_2 \in IH^*(\mathcal{M}_0(2))$ 的交配对为

$$(44)\quad \frac{(-1)^g n!\, 2^{2g-2}}{2^{2+2m-2g}} \cdot \operatorname*{Res}_{y=0} \frac{y^{2+2m-2g}}{1-e^{-y}}\, dy =$$
$$\frac{(-1)^g n!\, 2^{2g-2}}{2^{2+2m-2g}} \cdot \frac{1}{2} \operatorname*{Res}_{y=0} y^{2+2m-2g} \left(\frac{1}{1-e^{-y}} - \frac{1}{1-e^{y}} \right) dy =$$
$$\frac{(-1)^g n!\, 2^{2g-2}}{2^{2+2m-2g}} \cdot \frac{1}{2} \operatorname*{Res}_{y=0} y^{2+2m-2g} \frac{e^{y/2}+e^{-y/2}}{e^{y/2}-e^{-y/2}} dy =$$
$$(-1)^g n!\, 2^{2g-2} \operatorname*{Res}_{y=0} y^{2+2m-2g} \frac{e^{y}+e^{-y}}{e^{y}-e^{-y}} dy = (-1)^g n!\, 2^{2g-2} \kappa_{g-1-m}.$$

这验证了 (i)。为证明 (ii)，我们首先通过直接计算观察到，该类

$$\alpha^{g-2}\beta^{g-2}\psi \in H^{3g-3}(\mathcal{P}_0(2))$$

属于自然嵌入 $i\colon IH^*(\mathcal{M}_0(2)) \hookrightarrow H^*(\mathcal{P}_0(2))$（定义见 6.3）的像。应用命题 6.5，我们接着计算交配对

$$\langle i^{-1}(\alpha^{g-2}\beta^{g-2}\psi), 1\rangle_{IH(\mathcal{M}_0(2))} = (-4)^{g-1}(g-2)!;$$

这表明 (ii) 成立。 □

参考文献

[1] M. F. Atiyah 和 R. Bott. 黎曼曲面上的杨–米尔斯方程。*Philos. Trans. Roy.Soc. London Ser. A*，308(1505):523–615，1983。[2] L. C. Jeffrey 和 F. Kirwan. 黎曼曲面上任意秩全纯丛模空间的交叉理论。*Ann. of Math.*，148:109–196，1996。[3] E. Witten. 重新探讨二维规范理论。*J. of Geom. and Phys.*，9:303–368，1992。[4] M. S. Narasimhan 和 C. S. Seshadri. 紧黎曼曲面上的稳定酉向量丛。*Ann. of Math. (2)*，82:540–567，1965。[5] G. Harder 和 M. S. Narasimhan. 曲线上向量丛模空间的上同调群。*Math. Ann.*，212:215–248，1974/75。[6] M. Goresky 和 R. MacPherson. 交同调理论。拓扑学，19(2):135–162，1980。[7] M. Goresky 和 R. MacPherson. 交叉同调 II。*Invent. Math.*，72(1):77–129，1983。[8] Y.-H. Kiem. 曲面群表示空间的交叉上同调。*Int. J. of Math.*，17(02):169–182，2006。[9]L. Jeffrey、Y.H. Kiem、F. C. Kirwan 和 J. Woolf. 黎曼曲面上丛的奇异模空间及其部分消奇异化的交配对。*Transform. Groups*，11(3):439–494，2006。[10] L. C. Jeffrey、Y.-H. Kiem、F. Kirwan 和 J. Woolf. 几何不变式理论中奇异商空间上的上同调配对。*Transform. Groups*，8(3):217–259，2003。[11] C. Felisetti、A. Szenes 和 O. Trapeznikova. 抛物丛与曲线上向量丛模空间的交叉上同调。*arXiv:2502.20327*，2025。[12] A. A. Be˘ılinson、J. Bernstein 和 P. Deligne. 反常层。载于奇异空间上的分析与拓扑，*I*（*Luminy，1981*），*Astérisque*第100卷，第5–171页。法国数学会，巴黎，1982。[13]A. Szenes 和 O. Trapeznikova. 抛物 Verlinde 公式：迭代留数与墙穿越。*Geom. Topol.*，28(5):2259–2311，2024。[14] M. A. A. de Cataldo 和 L. Migliorini. 分解定理、反常层与代数映射的拓扑。美国数学会通报（新系列），46(4):535–633，2009。

[15] A. A. Be˘ılinson、J. Bernstein 和 P. Deligne. 反常层。100:5–171，1982。[16] M. A. A. de Cataldo 和 L. Migliorini. 代数映射的霍奇理论。高等师范学校科学年刊 *(4)*，38(5):693–750，2005。[17] G. Williamson. 分解定理的霍奇理论。第390号，第335–367页，报告编号1115。2017。布尔巴基研讨班，第2015/2016卷，报告1104–1119。[18] M. A. A. de Cataldo 和 L. Migliorini. 分解定理的霍奇理论方面。载于代数几何——西雅图 *2005*。第*2*部分，纯数学专题研讨会论文集第80卷，第489–504页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2009。[19]M. Laurentiu. 交叉同调与反常层及其在奇点中的应用。施普林格·查姆，第1版，2019。[20] A. Szenes. 迭代留数与多重伯努利多项式。国际数学研究通报，1998(18):937–956，1998。[21] O. Trapeznikova. 抛物模空间上的重言丛：欧拉示性数与黑克对应。代数几何（即将出版），*arXiv2209.15600*，2022。[22] T. Józefiak、A. Lascoux 和 P. Pragacz. 与对称矩阵和斜对称矩阵相关的行列式簇的类。苏联科学院通报·数学系列，45(3):662–673，1981。[23] A. Bertram 和 A. Szenes. 秩 2 向量丛模空间的希尔伯特多项式 II。拓扑学，32(3):599–609，1993。

摩德纳-雷焦艾米利亚大学物理、信息与数学科学系。电子邮件地址：
Camilla.Felisetti@unimore.it

ISTA 数学系电子邮件地址：
Olga.Trapeznikova@ist.ac.at