arXiv:2603.01954v1 [math.CA] 2 Mar 2026

任意含多个固定点的有限图的 Falconer 型结果

Tainara Borges、Ben Foster、Yumeng Ou、Eyvindur Palsson、Francisco Romero Acosta

Abstract. 对著名的 Falconer 距离问题的一种推广是：给定一个图$G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$，其顶点集为 $\mathcal{V}$，边集为 $\mathcal{E}$，紧集 $E \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ 的豪斯多夫维数需要多大，才能保证距离图

$$\Delta^G(E) := \{(|x_i - x_j|)_{(v_i,v_j)\in\mathcal{E}} : x_1, \ldots, x_{|\mathcal{V}|} \in E\}$$

具有正的 $|\mathcal{E}|$ 维勒贝格测度。这里，我们将 $\mathcal{E}$ 中的边表示为顶点的有序对 (v_i, v_j)，其中 $i < j$。已有许多针对特定图的结果，例如树和单形。也有一些一般性结果，但需要进行复杂的计算，例如计算构形集上自然测度的傅里叶衰减，或研究相关傅里叶积分算子的映射性质。本文利用图论中的k-退化度这一易于计算的概念，为任意非平凡图 G 得到了一个非平凡的维数阈值 $\frac{d+k}{2}$，$d > k$。我们结果的关键在于，确定固定星图是一般图的合适基本构件，并改进了 Taylor 与第三位作者提出的一种 Fubini 型论证。我们进一步将这一结果推广到含多个固定点的图：通过引入图的 k-可容许性——这是将固定点纳入考量的 k-退化度推广——并将 Fubini 论证扩展到多个固定点的情形。我们的结果不仅对维数足够高时的任意距离图都给出了非平凡结论，而且对某些特定图（如环）也有力地改进了此前的最佳结果。只要相应星形基本构件的结果已知，我们的方法还可推广到一般的两点构形。

1. Introduction

著名的 Falconer 距离问题可视为 Erd˝os 不同距离问题的连续类比。它要问：对于一个紧集 $E \subset \mathbb{R}^d$，其豪斯多夫维数 $\dim_H(E)$ 必须多大，才能保证它的距离集

$$\Delta(E) = \{|x - y| : x, y \in E\}$$

具有正的勒贝格测度。Falconer 证明了阈值 $\frac{d}{2}$ 是必要的，并猜想它也是充分的 [11]。近年来，这一猜想取得了许多进展，目前最佳阈值为 $\frac{5}{4}$（当 $d = 2$ 时）以及 $\frac{d}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8d+4}$（当 $d \geq 3$ [21, 8] 时）。一个经典变体——固定点 Falconer 距离问题——同样要问：$\dim_H(E)$ 必须多大，才能保证存在一个固定点 $x \in E$，使得固定点距离集

$$\Delta_x(E) = \{|x - y| : y \in E\}$$

具有正的勒贝格测度。针对固定点问题确立的任何阈值，都意味着同一阈值也适用于原问题。令人惊讶的是，借助 Liu [32], 提出的转换机制，Falconer 距离问题的所有最佳阈值也适用于固定点版本。另一个经典变体是要求距离集 $\Delta(E)$具有非空内点，而不只是正的勒贝格测度。Mattila 和 Sj¨olin [37]针对这个问题得到了阈值 $\frac{d+1}{2}$，$d \geq 2$，此后这一结果一直未有改进。最后，还可以结合不同变体，要求固定点的

距离集 $\Delta_x(E)$，目前最佳结果由 Peres 和 Schlag 给出 [43]，其阈值为$\frac{d+2}{2}$，$d \geq 4$；而本文的前四位作者最近在 $d = 3$ 时得到了改进后的阈值$\frac{12}{5}$，并在 $d = 2$ [2]时得到了首个非平凡阈值$\frac{7}{4}$。

上述所有变体的共同点是，它们都关注两个点之间经典的欧几里得距离。该领域的一项重要进展，是将这些结果推广到其他两点构形（例如点积）以及多点构形（例如三角形和单形）。这类推广有助于我们以更好的视角看待问题。一个例子是 Mattila-Sj¨olin 结果的现代证明，例如 Mattila [35], 的经典著作中所呈现的证明；这一结果源自 Iosevich、Mourgoglou 和 Taylor[28] 的一项工作，他们将结果推广到由对称有界凸体所诱导的范数，其中凸体具有光滑边界，且高斯曲率处处非零。推广甚至可能推动经典变体取得突破。一个例子是 Greenleaf、Iosevich、Liu 和第四位署名作者 [15], 提出的群作用方法。该方法最初针对三角形和单形提出，却为原始距离问题提供了新的视角，也是 Liu [32], 提出的魔法公式中的关键要素；该公式将固定点距离问题与原始的非固定点距离问题联系起来。关于这类推广的文献浩如烟海，因此我们仅着重介绍其中的一些主要主题。一个主题是考虑更一般的两点构形 Φ：$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ 及其对应的构形集

$$\Delta^{\Phi}(E) = \{\Phi(x, y) : x, y \in E\}$$

一个很好的例子是点积，即 $\Phi(x, y) = x \cdot y$，如 [10, 9, 6], 中所研究的（另见 [28, 17]）。另一个主题是考察更大的构形，例如三角形和单形；在这一研究背景下， [14]， 首先开展了这方面的工作，尽管在 Erd˝os 距离问题的背景下，类似问题已被研究数十年 [4]。这里仅列举一些已研究过的构形： [9, 15, 42, 41, 30]，进一步改进了关于三角形和单形的结果； [16, 26], 研究了环； [39, 12,44]，研究了面积和体积； [22, 23, 27, 34] 研究了角；而 [13, 19, 18, 20] 则借助 Φ 构形的语言处理了一些相当一般的构形。

三角形 $\Phi_{\text{triangle}}(x, y, z)$ 的构形函数 $= (|x - y|, |y - z|, |z - x|)$ 编码了该三角形的边长，其构造仅用到原始 Falconer 距离问题中出现的常规距离。一个自然的问题是：是否存在某种机制，能够将关于 Falconer 距离问题的结果或其他自然的基本构件自动转化为三角形，乃至更一般地由距离构成的任意构形的阈值？在距离链和距离树的研究中，已有研究以距离为基本构件实现了这一目标；首个相关结果由 Bennett、Iosevich、Taylor [1] 给出，他们得到了使距离链具有非空内点的阈值 $\frac{d+1}{2}$。后来，这一结果被推广到树 [25], 、固定点树 [40] ，最近又推广到固定点树具有非空内点的情形 [2]。所有这些结果本质上都是归纳性的，并且关键依赖于构形中没有环。 [30] Iosevich、Pham、Pham 和 Shen 使用 k-星这一基本构件，得到了关于固定 k-单形的结果，但并未进一步推广。最后，Greenleaf、Iosevich 和 Taylor [20] 最近的一项结果为超图实现了一种归纳策略；例如，他们证明了三角形链具有非空内点。其基本构件是基底形状，随后通过归纳策略构造出由这类构形组成的树；但任何包含环的构形（基本构件除外）仍然无法处理。

与这些归纳策略不同，Grafakos、Greenleaf、Iosevich 和第四位列出的作者 [13] ，以及 Greenleaf、Iosevich 和 Taylor [17, 19, 18]针对 Φ-构形的结果，要求使用者验证一些复杂的计算，例如由 Φ-构形集上诱导的自然测度的傅里叶变换的衰减，或者

其相关傅里叶积分算子的映射性质。这些方法适用于逐个案例分析，但似乎远不足以建立一个理想的结果：给定任意距离构形，只需查看构形的结构，就能为其确定一个非平凡阈值。最后，Chatzikonstantinou、Iosevich、Mkrtchyan 和 Pakianathan [7]针对一类特定的图——称为无穷小刚性图——成功证明了一个近似理想定理的结果。尽管该方法更多地基于图，但仍需对某个距离函数求导；这可以针对具体案例计算，却难以通过快速查看图来确定。以往许多结果有一个共同特点：相当刚性的构形（例如单形），或适合采用归纳论证的构形，都可以处理。

迄今为止的主要挑战之一是，任何包含圈的情形都很难处理；关于圈的结果至今只有两项 [16, 26]（第一篇参考文献中将圈称为项链），而且它们只处理偶数长度的圈。本文的主定理朝着理想结果迈出了重要一步。通过引入 k-可容许性这一概念——一种纯粹的图论条件，仅取决于钉扎点构形的结构——我们在维数足够高时，得到了任意由距离构成的构形的非平凡阈值（维数要求取决于图本身的复杂程度）。重要的是，我们的方法能够处理圈，甚至能为它们建立良好的维数阈值。我们通过找出适用于任意由距离构成的图的基本构件，实现了这一切。

通向主定理的一个出发点，是图论中关于图的退化度的一项经典概念 [31]。

定义 1. 若 G 是使得 G 的每个诱导子图都包含一个邻居数不超过 k 的顶点的最小数，则称图 G 为 k-退化的。

对于图 $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$，其顶点集为 $\mathcal{V}$，边集为 $\mathcal{E}$，Matula 和 Beck [38] 描述了一种算法，可以在 $O(|\mathcal{V}| + |\mathcal{E}|)$ 时间内高效计算图的退化度。简而言之，该算法通过反复移除度最小的顶点来运行，而退化度 k 等于每个顶点被移除时的度的最大值。

借助 k-退化图的概念，我们已经能够处理距离构成的一般图。对于图 $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$，用紧子集 $E \subset \mathbb{R}^d$ 的 G-距离集表示为

$$\Delta^G(E) := \{(|x_i - x_j|)_{(v_i,v_j)\in\mathcal{E}} : x_1, \dots, x_{|\mathcal{V}|} \in E\}$$

其中 $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_{|\mathcal{V}|}\}$，为方便起见，我们将 $\mathcal{E}$ 中的边表示为有序对 (v_i, v_j)，其中 $i < j$。在这种情形下，如果 $|\mathcal{E}| \geq 1$，我们称图 G 为非平凡图，因此 G-距离集非空。至少有一条边，立即意味着我们所考虑的所有非平凡图的退化度至少为 1。举例来说，对于 G-距离集，若$G = K_3$，即 3 个顶点上的完全图，我们恰好得到三角形集，也就是$\Delta^{K_3}(E) = \{(|x_1 - x_2|, |x_1 - x_3|, |x_2 - x_3|) : x_1, x_2, x_3 \in E\}$。

定理 2。 设 $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 是一个 k-退化的非平凡图。那么对于任意紧集 $E \subset \mathbb{R}^d$, $d > k$，若维数$(E) > \frac{d+k}{2}$，则 $\Delta^G(E)$ 的 $|\mathcal{E}|$ 维勒贝格测度为正。

有限图的退化度总是有限的，因此，这一结果为维数足够高时任意有限的非平凡距离图的 Falconer 型结果确立了一个非平凡的维数阈值。据我们所知，Lyall 和 Magyar 首次在距离问题中使用图的退化度这一概念；由于研究背景截然不同，他们采用了非常不同的技术，在额外假设一般位置的条件下，证明了关于距离图的欧几里得拉姆齐理论结果 [33]。如果计算图的退化度似乎令人望而生畏，那么求出图的最大顶点度或许会更容易。图的退化度不超过其最大顶点度，

这一点可由 Matula 和 Beck 的算法直接看出。由此立即得到以下推论。

推论 3. 设 $G=(\mathcal{V},\mathcal{E})$ 是一个最大顶点度为 v_{max} 的非平凡图。那么对于任意紧集 $E\subset\mathbb{R}^d$，$d>v_{max}$，若 $\dim(E)>\frac{d+v_{max}}{2}$则 $|\mathcal{E}|$ 维勒贝格测度 $\Delta^G(E)$为正。

虽然这个推论提供了一种非常快捷的方法来得到一个非平凡的维数阈值，但我们提醒读者，图的退化度与其最大顶点度之间可能存在很大差异。例如，只需在一个公共顶点处聚集任意多个叶节点，树的最大顶点度就可以任意大，而树的退化度始终为 1。我们注意到，在有限域的情形下，Iosevich 和 Parshall 已经建立了距离图的此类最大顶点度结果 [29]，Bright 等人又将其推广到了更一般的距离情形，见 [5]。

定理 2 由第2节中介绍的一个更一般的框架推出。为了处理定点构形，我们将图论中的 k-退化度概念推广为我们所称的 k-可容许性，并在第3节中详细定义并给出许多示例。与 k-退化度的情形类似，我们在命题14中提出了一种算法，可快速求出图的可容许数。定理A 是关于距离的主定理，并可推出定理2。我们的方法还具有更强的普适性，定理 $\Phi(\cdot,\cdot)$ 中的广义边向量函数也适用，前提是相应构件的结果成立。B。

除了证明这一理想定理——它表明，对于任何由距离构成的非平凡构形，在维数足够高时都能得到非平凡阈值——我们的定理还为特定构形带来了强有力的结果，尤其是那些包含环的构形。为了展示这一点，我们先定义由紧集 $E\subset\mathbb{R}^d$ 生成的 l-圈集合 $l\geq 3$:

$$\Delta^{l-cycle}(E):=\{(|x_1-x_2|,|x_2-x_3|,\dots,|x_{l-1}-x_l|,|x_l-x_1|):x_1,x_2,\dots,x_l\in E\}\subset\mathbb{R}^l.$$

对于偶数长度的环（对应于 l 为偶数），Greenleaf、Iosevich 和 Pramanik 在 [16] 中证明，在所有边长相等的常数间隙情形下，若满足维数阈值 $\dim(E)>\frac{d+3}{2}$，$d\geq 4$，则 $\Delta^{l-cycle}(E)$ 具有非空内点。值得注意的是，他们将这些环称为项链，但本文采用更常见的图论名称“环”。最近，Iosevich、Magyar、McDonald 和 McDonald [26]改进了这一结果，将针对 4-环（仍为常数间隙情形）的结果扩展至 $\dim(E)>\frac{53-\sqrt{337}}{12}$（当 $d=3$ 时）。我们强调，除了对应于 $l=3$ 的三角形以外，目前尚无关于奇环的结果。作为定理 2 的一个应用，我们得到维数阈值 $\dim(E)>\frac{d+2}{2}$，$d\geq 3$：对于紧集 $E\subset\mathbb{R}^d$，该阈值可保证 $\Delta^{l-cycle}(E)$ 的 l-环集合 $l\geq 3$ 具有正的 l 维勒贝格测度。除了对应于三角形的情形 $l=3$ 外，这一结果此前仅在 [30]，已知；而在有限域中，虽然已有类似结果，但其证明方法截然不同 [24]。我们在第 5 节中详细阐述这一结果的更强多重定点版本，并以此为例，展示理解定理 A 证明内在机制的第一步。

推动我们对一般带钉距离图所得结果的构件是所谓的 k-星。设 $k\geq 1$ 为一个整数。所谓 k-星，是指一个具有（$k+1$）个顶点的图，其中中心顶点通过边与任何其他顶点连通，并且这些是该图中仅有的顶点。我们将这样的图记为 S_k（见图 1，对应于 S_7）。

定义4。 设 $E\subset\mathbb{R}^d$ 为一个紧集。由 E 生成、固定点位于x_1、x_2、.....、x_k的 k 星的集合记为

$$\Delta^{k-star}_{x_1,\dots,x_k}(E):=\{(|x_1-y|,|x_2-y|,\dots,|x_k-y|):y\in E\}\subset\mathbb{R}^k.$$

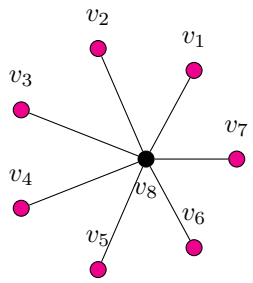


图1。 S_7，带有钉在每个叶子上的 7 星图。

在 [30] 中，作者证明了，如果 $E \subset \mathbb{R}^d$ 是一个紧集，且 $\dim(E) > \frac{d+k}{2}$ 那么存在 x_1、x_2、……、$x_k \in E$，使得$\Delta^{k-star}_{x_1 \ldots}$、，$_{x_k}(E)$具有正的 k维勒贝格测度。事实上，他们证明了一个更强的结论，我们将在下面的定理中回顾，定理6。

首先，我们来介绍几个定义。给定一个紧集 $E \subset \mathbb{R}^d$， s-Frostman 测度 μ 定义在 E 上，是一个支撑紧致（支撑于 E）的有限博雷尔测度，并满足

$$\mu(B(x,r)) \lesssim r^s, \text{ for all } r > 0.$$

根据 Frostman 引理 [35, 定理 2。7], 对所有 $0 < s <$ 维数 E，此类测度均存在。

定义 5。 给定一个支撑在紧集 $E \subset \mathbb{R}^d$ 上的 Frostman 测度 μ，以及 $\mathbb{R}^d$中的一个博雷尔集 F，记 μ_F为 μ在 F上的限制测度。也就是说，对于任意博雷尔集$A \subset \mathbb{R}^d$，有 $\mu_F(A) = \mu(A \cap F)$。

现在我们可以陈述一个在 [30] 中证明的结果。

定理6 ([30]). 设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 是一个紧集，且满足$\dim(E) > \frac{d+k}{2}$。取 μ 一个定义在 E上的 *s-Frostman* 测度，满足 $s > \frac{d+k}{2}$。设 E_1、E_2、 $\ldots E_{k+1}$是E 中的两两分离的紧子集，且对所有 $i = 1, 2, \ldots, k+1$, 都有 $\mu(E_i) > 0$，那么对于 $\mu_{E_1} \times \mu_{E_2} \times \cdots \times \mu_{E_k}$ 几乎每个$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k$，推前测度

$$(d^{k-star}_{x_1,x_2,\ldots,x_k})_*(\mu_{E_{k+1}}) \text{ belongs to } L^2(\mathbb{R}^k),$$

其中 $d^{k-star}_{x_1\ x_2\ ,,\ldots,x_k}(y) := (|x_1 - y|, |x_2 - y|, \ldots, |x_k - y|)$，因此，

$$\mathcal{L}^k\left(\Delta^{k-star}_{x_1,\ldots,x_k}(E_{k+1})\right) > 0.$$

在上面的陈述以及本文后文中，如果 ν 是 $\mathbb{R}^k$ 中的一个测度，我们采用标准的记号简写 $\nu \in L^p(\mathbb{R}^k)$，表示测度 ν 相对于 $\mathbb{R}^k$ 上的勒贝格测度绝对连续，且其拉东–尼科迪姆导数属于 $L^p(\mathbb{R}^k)$。有效利用这一结果，并将 Taylor 和第三位署名作者首创的 Fubini型论证 [40] 推广到多个固定点情形，是使我们能够证明主定理的一些关键要素。对于链，我们的论证本质上是逆向的 Fubini 型论证的一个版本，该论证见 [40]。然而，对于含有环和多个固定点的一般图，尚不清楚 [40]中的论证如何推广。我们通过在这一新情形下为我们的 k-可容许图确定恰当的图构造策略，并利用 k-星构件，解决了这一问题。我们的论证有一个有趣之处：仅仅拥有所需构件的充足数量并不足够，例如环这一特殊情形（见第5节）便是如此；我们需要的是完整的 L^2 密度结果。

尽管我们的 Fubini型论证相当一般，可以表述为适用于相当一般的 $\Phi(\cdot, \cdot)$ 配置，但通常来说，对于6 之外的配置，我们没有与定理

欧几里得距离。文献 [30] 中的证明使用了精细的投影型论证，这些论证利用了欧几里得距离可通过点积来表示这一性质。因此，如何将他们的论证推广到其他距离，甚至其他配置，目前都不明确。因而，对许多配置而言，建立固定k-星结果是一个尚待解决且令人兴奋的问题；这将立即借助我们的定理 B 得出一系列广泛的一般性定理。

注 7. 可以看出，沿着定理6 的思路，关于固定 k-星的非平凡结果只有在维数为 $d > k$时才可能成立。事实上，假设 E 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个紧集，且存在 $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d$ 满足 $\mathcal{L}^k(\Delta^{k-star}_{x_1 \dots ,,x_k}(E)) > 0$。由于映射

$$\Phi_{x_1,\dots,x_k} : E \to \mathbb{R}^k, \qquad x_{k+1} \mapsto (|x_1 - x_{k+1}|, |x_2 - x_{k+1}|, \dots, |x_k - x_{k+1}|)$$

是一个 Lipchitz 映射，且 $\Delta^{k-star}_{x_1 \dots ,,x_k}(E) = \Phi_{x_1,x_2,\dots,x_k}(E)$，因此 $\dim(E) \geq k$ （甚至在 $k = d$的情况下，$\mathcal{L}^k(E) > 0$ ）。特别地，在 $\mathbb{R}^2$中获得双定点 2-链的正测度不存在非平凡的豪斯多夫维数阈值。

本文研究的构形函数 $\Phi(\cdot, \cdot)$始终有两个输入，因为它们应用于图中由边相连的顶点。由此自然产生一个问题：在超图情形下会发生什么，此时构形函数可能有两个以上的输入？在一个简单情形中，如果构形函数的输出仅基于多个两点构形函数，例如返回由三个点确定的三个距离，那么显然仍可使用本文的理论。在后续工作中 [3] 我们研究三角形面积这一具体例子。在某些情况下，我们展示了本文的结果如何甚至能够应用于该情形；而在另一些情况下，我们则得以一窥真正的超图理论。尽管这些结果与本文主题相关，但其本身也颇具意义；我们建立的某些基例扩展了面积构形方面的已知结果，并采用了不同于本文的方法。

下面概述本文的组织结构。第2 节讨论基本设置并陈述主要结果。第3 节定义并给出可容许性概念的大量例子，这是我们所使用的关键图论概念。第4 节给出一个关键的图拆解引理。第5 节说明如何在更简单的固定链和固定环情形下证明我们的结果；对于这些情形，我们不需要 L^2 基本构件的密度结果的全部强度。最后，第6 节给出主要结构定理的证明。

致谢。 Y.O. 获得美国国家科学基金会 DMS-2142221 和美国国家科学基金会 DMS-2055008 的部分资助。作者谨向 Alex Iosevich、Jill Pipher 和 Maya Sankar 致谢，感谢他们围绕本文主题进行的许多有益且富有启发性的讨论。

2. Setup and main results

设 G 是一个顶点集为 $\mathcal{V}$、边集为 $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_{|\mathcal{E}|}\}$ 的简单图，并假设 G 非平凡，即 $|\mathcal{E}| \geq 1$。为方便起见，我们将每条边表示为有序对 $e =$ （u， v），尽管该图是无向图。

设 $\mathcal{P} \subset \mathcal{V}$ 表示固定顶点的子集，并假设 $\mathcal{P}$ 中任意两个顶点都不相邻，也就是说， $\mathcal{E}$ 中没有边连接 $\mathcal{P}$ 中的两个顶点。令 $m := |\mathcal{P}|$，其中 $0 \leq m \leq |\mathcal{V}|$（ $m = 0$ 对应于未固定情形 $\mathcal{P} = \emptyset$）。

我们固定顶点的一种典范排序 v_1、.....、$v_{|\mathcal{V}|}$，使得 v_1、.....、v_m 恰好是固定顶点。给定一个紧集 $E \subset \mathbb{R}^d$，我们考虑由 E、图 G 和一个连续映射生成的边向量

$$\Phi = (\Phi_{e_1}, \dots, \Phi_{e_{|\mathcal{E}|}}) : \mathbb{R}^{d|\mathcal{V}|} \to \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}.$$

每个分量 Φ_{e_i} 都是与边 e_i相关联的二元函数；如果 e_i 连接顶点 v_{i_1} 和 v_{i_2}，那么 Φ_{e_i} 只取决于相应的坐标 x_{i_1}， x_{i_2} 的

$x=(x_1,\ \ldots\ldots,\ x_{|\mathcal{V}|})\in\mathbb{R}^{d|\mathcal{V}|}$。我们还假设 Φ_{e_i}是对称的，即 $\Phi_{e_i}(a,\ b)=\Phi_{e_i}(b,\ a)$，$a,\ b\in\mathbb{R}^d$。我们将这样的映射 Φ 称为 G的边向量函数。

最后，对于互不相同的点 x_1、……、$x_m\in\mathbb{R}^d$，我们定义 m-固定$(G,\ \Phi)$-集合 Eb y

$$\Delta^{G,\Phi}_{\mathcal{P},x_1,\ldots,x_m}(E):=\left\{\Phi(x_1,\ldots,x_m,y_{m+1},\ldots,y_{|\mathcal{V}|}):\ y_{m+1},\ldots,y_{|\mathcal{V}|}\in E\ \text{distinct}\right\}.$$

在一个特殊情形中，Φ 取为欧几里得距离向量，使得$\Phi_{e_i}(x,\ y)=|x-y|$ 对所有 i均成立，因此每个 Φ_{e_i} 都将一对由边连接的顶点映射为它们之间的欧几里得距离，我们通常会在记法中省略函数 Φ。定义4即属此情形，它对应于一个在除中心顶点外所有顶点处均固定的 k-星形图。对于固定的 k-星形图，我们也省略了 $\mathcal{P}$ (固定点位置的选择)这一记法，因为默认非固定顶点是中心顶点。

边向量函数 Φ 的其他例子包括点积向量，其分量 Φ_{e_i} 取各顶点对的点积；另一种选择是用一个函数替代点积，该函数根据两个顶点和原点所确定的三角形计算其面积。

我们在此希望探讨的核心问题是：在什么条件下，集合$\Delta^{G,\ \mathcal{P}}_{x_1,\ ,\ \cdots,\ x_m}(E)$ 对某些 x_1，x_2、……、$x_m\in E$而言，具有正的 $|\mathcal{E}|$ 维勒贝格测度。由于我们在此考虑的所有图都是有限的，因此可以在函数 Φ 的定义中固定边的规范顺序。我们的结果与所选顺序无关。事实上，我们始终选择与下文 k-可容许 的定义相一致的顺序。稍后还会作进一步说明。

为了避免退化问题，我们往往直接研究一个稍小的 $(G,\ \Phi)$-集合，其中的点取自 E 的两两分离子集。设 $E_{m+1},\ \cdots,\ E_{|\mathcal{V}|}$ 是这样一组集合（通常选取它们使得 $\mu(E_j)>0$，其中 μ 是 E 中的 Frostman 测度）。定义如下：

$$\begin{aligned}&\Delta^{G,\Phi}_{\mathcal{P},x_1,\cdots,x_m}(E_{m+1},\cdots,E_{|\mathcal{V}|})\\:=&\{\Phi(x_1,\cdots,x_m,y_{m+1},\cdots,y_{|\mathcal{V}|}):\ y_{m+1}\in E_{m+1},\cdots,y_{|\mathcal{V}|}\in E_{|\mathcal{V}|}\}.\end{aligned}$$

定理 A（欧几里得距离结构定理）。设 G是一个图，其顶点集为 $\mathcal{V}$，边集为 $\mathcal{E}$。设 $\mathcal{P}\subset\mathcal{V}$ 满足：$\mathcal{P}$ 中任意一对顶点都不由$\mathcal{E}$ 中的边连接，并记 $m=|\mathcal{P}|$。假设$(G,\mathcal{P})$是 k-可容许的，并令 Φ 为欧几里得距离向量函数。那么，对于 $d>k$ 以及任意豪斯多夫维数大于 $\frac{d+k}{2}$ 的紧集 $E\subset\mathbb{R}^d$，存在互不相同的点 $x_1,\cdots,x_m\in E$（甚至存在正 $\Pi_{i=1}^m\mu_{E_i}$ 测度的 m-元组$(x_1,x_2,\ldots,x_m)$，其中 μ_{E_i} 是定义在 E 的互相分离的子集 E_i 上的 *Frostman* 测度），使得固定的 (G,Φ)-图集 $\Delta^{G,\ \mathcal{P}}_{x_1,\ ,\cdots,x_m}(E)$具有正的 $|\mathcal{E}|$维勒贝格测度。

此外，当 $k=1$ 和 $d\geq 2$时，阈值 $\frac{d+1}{2}$ 可替换为目前已知最优的固定点 *Falconer* 距离阈值，即，对于 $d=2$，$\dim(E)>\frac{5}{4}$；对于 $d\geq 3$，$\dim(E)>\frac{d}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8d+4}$。

定理中使用的 k-可容许性概念将在第 3 节介绍。作为上述结构定理的一个重要推论，并利用环是 2-可容许的这一事实（见小节 3.2.4），我们得到以下结果。

推论 8（环的结构定理的推论）。设 $l\geq 3$。设 C_l 是一个具有 $m\geq 0$ 个固定点的 l-圈图，这些固定点按 $\mathcal{P}$列出，且 $\mathcal{P}$ 中任意两个顶点之间都没有边相连。那么，若$E\subset\mathbb{R}^d$是一个满足 $\dim(E)>\frac{d+2}{2}$ 的紧集，则存在互不相同的点 $x_1,x_2,\ldots,x_m$，使得固定的 l-环具有正测度，其含义是

$$\mathcal{L}^l\left(\Delta^{C_l}_{\mathcal{P},x_1,x_2,\ldots,x_m}(E)\right)>0.$$

事实上，如果主要关注的是固定链和非三角形的固定环（可能有多个固定点），那么 L^2 定理 6 中的[30] 所给出的 2-星构件并非必要；只需采用该定理关于 2-星的较弱正测度结论即可。我们将在第 5 节进一步讨论这一点，并给出一个自包含的证明，证明固定链以及长度至少为 4 的固定环的阈值（$d+2$）/2 。

定理 A 可以推广到比欧几里得距离更一般的距离函数，前提是具备恰当的基本构件。现在我们将对此作出精确说明。下文使用的构造顺序概念将在第 10 节的定义 3中引入。

定义 9. 设 $\alpha \in (0,d)$，且设 $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2 \cdots, \Phi_{|\mathcal{E}|})$ 是钉扎图 $(G, \mathcal{P} = (v_1, \ldots, v_m))$ 的连续边向量函数。设 $1 \le p \le \infty$。若存在构造顺序 $\mathcal{O} = (v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_l)$，使得对所有 $m+1 \le r \le l = |\mathcal{V}|$，以下条件均成立，则称 Φ 在 L^p 意义下对 $(G, \mathcal{P})$ 中的星是 α-适用的。设 η_r 为与 v_r 共享一条边且在构造顺序 $\mathcal{O}$ 中排在 v_r 之前的 G 的顶点指标集合，并设 $\epsilon_r := |\eta_r|$ 是按照该排序得到的 v_r 的后向度。于是，对于任意满足 $\dim(E) > \alpha$ 的紧集E，以及定义在 E 上的任意 μ s-Frostman 测度，其中 $s > \alpha$，若 $\{E_i\}_{i \in \eta_r}$ 是 E 中 ϵ_r 个互相分离的紧子集，且对所有 $i \in \eta_r$ 都有 $\mu(E_i) > 0$，那么对于 $\Pi_{i \in \eta_r} \mu_{E_i}$ -几乎处处的 $(x_i)_{i \in \eta_r} \in \Pi_{i \in \eta_r} E_i$，有

$$(d^{\epsilon_r - star, \Phi^r}_{(x_i)_{i \in \eta_r}})_* (\mu_{E_r}) \text{ belongs to } L^p(\mathbb{R}^{\epsilon_r}),$$

其中

$$d^{\epsilon_r - star, \Phi^r}_{(x_i)_{i \in \eta_r}}(y) := (\Phi_{(v_i, v_r)}(x_i, y))_{i \in \eta_r}.$$

特别是，

$$\mathcal{L}^{\epsilon_r}\left(\Delta^{\epsilon_r - star, \Phi^r}_{(x_i)_{i \in \eta_r}}(E_r)\right) > 0.$$

定理 *B*（一般边向量函数的结构定理）。设 G是一个图，其顶点集为 $\mathcal{V}$，边集为 $\mathcal{E}$。设 $\mathcal{P} \subset \mathcal{V}$ 满足：$\mathcal{P}$ 中的任意一对顶点之间都不存在 $\mathcal{E}$ 中的边，并记 $m = |\mathcal{P}|$。设 $\alpha \in (0,d)$和 $\Phi = (\Phi_{e_1}, \cdots, \Phi_{e_{|\mathcal{E}|}})$是给定的任意 G的连续边向量函数，并满足：Φ 在 L^p意义下对 G 中的星是 α-适用的，其中 $1 \le p \le \infty$。那么，对于任意满足 $\dim(E) > \alpha$的紧集 $E \subset \mathbb{R}^d$，存在 x_1、$\cdots$、$x_m \in E$，使得固定点 (G, Φ) -图集 $\Delta^{G, \mathcal{P}, \Phi}_{x_1, \cdots, x_m}(E)$具有正的 $|\mathcal{E}|$维勒贝格测度。

3. Notion of admissibility and some key examples

3.1. **允许的操作：定义** k**-可容许**。沿用上述记号，设 $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 是一个带有固定点 $\mathcal{P} \subset \mathcal{V}$ 和 $|\mathcal{P}| = m$ 的简单图。将固定点列为 $v_1, \ldots, v_m$。如果钉扎图 $(G, \mathcal{P})$ 可按以下步骤构造，则称其为 k-可容许的，记作 $k \in \mathbb{N}$: G。

(1) 加入固定顶点 $v_1, \cdots, v_m$（若没有固定顶点，则跳过此步）。(2) 选择一个顶点 $v_{m+1} \in \mathcal{V} \backslash \mathcal{P}$，使得 $\mathcal{E}$ 中连接 v_{m+1} 与先前加入的顶点的边数至多为 k。加入 v_{m+1} 及所有这类边。(3) 重复上述步骤，再加入一个顶点 $v_{m+2} \in \mathcal{V} \backslash (\mathcal{P} \cup \{v_{m+1}\})$ 以及 $\mathcal{E}$ 中连接 v_{m+2} 与先前加入的顶点的所有边（这类边至多有 k 条）。继续此过程。(4) 继续操作，直到加入 $\mathcal{V}$ 中的所有顶点（因此也揭示了 $\mathcal{E}$ 中的所有边）。

下面的定义使我们能够简洁地表示 k-可容许性。

定义10（构造顺序和后向度）。我们称 $\mathcal{V}$ 的一个排序 v_1、……、v_n，其中包含 v_1、……、$v_m \in \mathcal{P}$，为 $(G, \mathcal{P})$ 的一个构造顺序 。对于 $i > m$，定义后向度

$$d_{<i}(v_i) := \left|\{ u \in \{v_1, \ldots, v_{i-1}\} : (u, v_i) \in \mathcal{E} \}\right|.$$

在实际操作中，当加入 v_i 时，我们会揭示从 v_i 到已加入集合的所有边；两个端点都尚未加入的边，则在较晚的端点出现时揭示。

定义 11 （k-可容许；可容许数）. 对于 $k \in \mathbb{N}_0$，若存在一个构造顺序，使得对所有 $i > m$ 均有 $d_{<i}(v_i) \le k$，则钉扎图 $(G, \mathcal{P})$ 是k-可容许的 。我们可以将这样的构造顺序称为一个 k-可容许构造顺序。可容许数 定义为

$$\kappa(G,\mathcal{P}) := \min\{\, k \in \mathbb{N}_0 : \ (G,\mathcal{P}) \text{ is } k\text{-admissible} \,\}.$$

显然，

$$0 \ \le \ \kappa(G,\mathcal{P}) \ \le \ \Delta(G) \ \le \ \min\{\, |\mathcal{V}| - 1, \ |\mathcal{E}| \,\},$$

其中 $\Delta(G)$ 是 G 中一个顶点的最大度。

所有叶顶点处均有钉点的 k-星 S_k 是 k-可容许的，因为中心顶点具有最大度 k。事实上， k 就是此类钉扎图的可容许数。在下一小节中，我们给出钉点图及其相应可容许性的若干例子。

3.2 一些关键例子的可容许性。为了最小化可容许性 k，我们优先添加相对于已添加顶点具有最大相对度的顶点。（换言之，在第 1 步之后，我们应首先添加与 v_1、$\cdots$、v_m 相连边数最多的 v_{m+1}，并在每一步重复此过程）。为理解为何这样做有利，考虑如下例子：
$\mathcal{P} = \{v_1, v_2\} \subset \mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，且边集为 $\mathcal{E} = \{(v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_3, v_4)\}$。我们从固定顶点 $\{v_1, v_2\}$ 出发，且没有边。若首先添加 v_3，其后向度为 2，随后 v_4 的后向度为 2，从而得到 $\kappa(G,\mathcal{P}) \le 2$。若改为首先添加 v_4 （后向度为 1），则 v_3 的后向度为 3，因此我们只能得到 $\kappa(G,\mathcal{P}) \le 3$。因此，优先选择当前后向度较大的顶点会得到更好的界。

3.2.1. $(k+1)$ 个顶点的完全图。对于一个有 $(k+1)$ 个顶点的完全图（即每一对点都由一条边连接），我们至多可以固定一个顶点（因为要求各固定点之间不能由边连接）。无论固定点位于何处，这样的图都是 k-可容许的，而 k 是其可容许数（因为在可容许性构造中最后加入的非固定顶点总是会与此前的 k个顶点相连）。应用定理 A，可得到钉扎 k单形的定理 1.9], 中的结果 [30, ，即距离集 $\{(|x_i - x_j|)_{1 \le i < j \le k+1} : \ x_2, x_3, \ldots, x_k \in E\}$ 对于某个 $x_1 \in E$ 具有正的 $\binom{k+1}{2}$维勒贝格测度，其中 $\dim(E) > \frac{d+k}{2}$。当 $k = 2$时，这可归结为钉扎三角形。图 2 和图 3 分别展示了 $k = 2$ 和 $k = 4$。

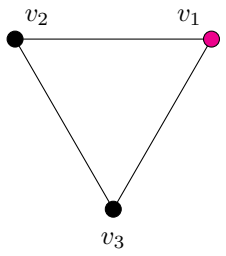


图 2. 钉扎三角形。

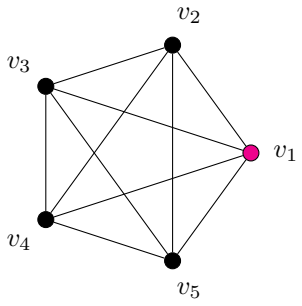


图 3. 5 个顶点的钉扎完全图。

请注意，上述讨论意味着，对于一般图，即使只固定一个顶点，也可以在简单有限图这一类中实现任意可容许数。此外，对于这个例子，可容许数等于最大顶点度 $\Delta(G)$。

3.2.2. 链。 设 Ch_n 为一个具有 n 个顶点的链图，其固定点位于 $\mathcal{P}$，其中 $\mathcal{P}$是 Ch_n 中一组 m个非邻接顶点。对于 $m = 1$ （因此 $m = 0$ 也成立），容易看出 $(\mathsf{Ch}_n, \mathcal{P})$ 是 1-可容许的；而对于任意 $m \geq 2$，$(\mathsf{Ch}_n, \mathcal{P})$ 是 2-可容许的，这可以通过对链中未固定顶点的数量进行归纳来证明。

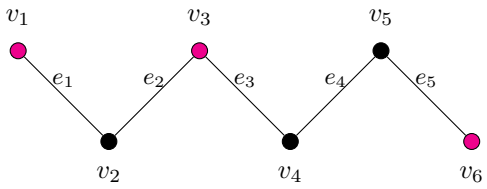


图 4. 多重固定链示例。

要验证上图示例的 2-可容许性，其中 $\mathcal{P} = \{v_1, v_3, v_6\}$（洋红色顶点），可以先取 v_1, v_3, v_6，然后添加 v_2 和两条边 e_1, e_2，接着添加v_4 和边 e_3，最后添加 v_5 及其两条边 e_4, e_5。

3.2.3. 树。 设 $\mathcal{T}$是一棵至少有两个顶点的树，其固定点位于 $\mathcal{P}$，其中包含 m 个树中互不相邻的顶点。那么这样的多重固定图是 m-可容许的。根据命题16，只需验证 $m = 1$的情形，即只有一个固定点的情形。由于任何树（至少有两个顶点）在一个位置钉扎后总会有一个未固定叶节点，因此对 $m = 1$的证明只需对树的顶点数进行简单归纳。

注意， m 对于某些具有 m 个固定点的树，可能并非最优。事实上，对任意 $2 \leq k \leq m$，都存在具有 m 个固定顶点且可容许数为 k的树。可以通过在一条具有 $m - k$ 个固定点的适当链的未固定端点处添加 k 个固定叶节点来实现这一点。例如，对于 $m = 5$ 和 $k = 3$ ，可以考虑图5中的树。

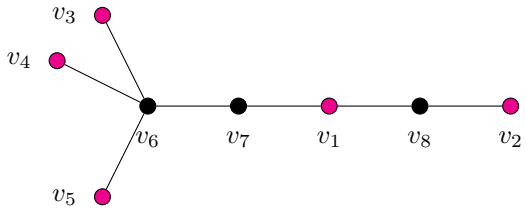


图 5. 含有 5 个钉点、可容许数为 3 的固定树。

3.2.4. 多重固定环。 图 6 和7 展示了几个圈图。如果环的顶点数为偶数，我们最多可以固定其中一半的顶点；而在 为奇数的情况下，我们最多可以固定 $(n - 1)/2$ 个非邻接顶点。无论哪种情况，这些钉扎图都是 2-可容许的，因为每个顶点的度都是 2。请注意，它们的实际可容许数是 2，因为它们不是 1-可容许的。

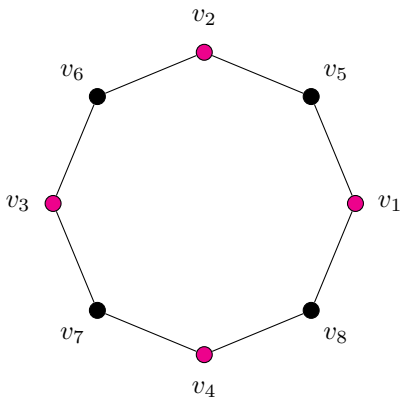


图 6. 有 8 个顶点的 4 个固定点固定环。

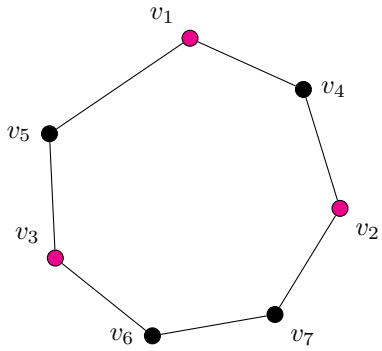


图 7. 有 7 个顶点的 3 个固定点固定环。

3.2.5. 三角形树。 接下来，我们考虑一个由三角形构成的树。洋红色顶点表示钉点集的三种不同选择，并且针对每种情况，我们标出了所得钉扎图的可容许数。

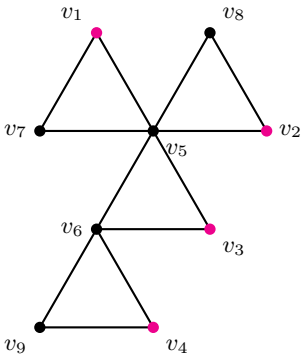


图 8. 可容许性数为 3

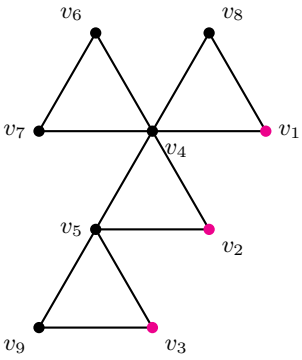


图9。可容许数为3

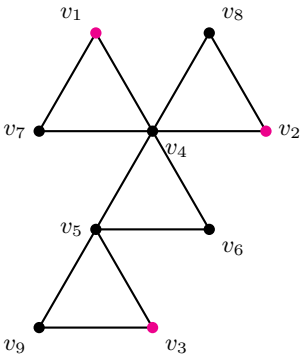


图10。可容许数为2

在上面的图中，我们有意以一种特定方式标记顶点，暗示了添加顶点和边的一种可能顺序，以满足各个情形中所声称的可容许性。例如，按照以下步骤，我们可以验证最左侧位置的钉扎图是3-可容许的：

- 添加固定顶点 v_1， v_2， v_3， v_4；
- 添加顶点 v_5 ， 以及连接它与 v_1， v_2， v_3 的3条边；
- 添加 v_6 ， 以及连接它与 v_3， v_4 和 v_5的3条边；
- 添加 v_7 以及将其连接到 v_1的2条边, v_5；
- 以与 v_7 类似的方式添加 v_8 和 v_9 （每个各添加 2 条边）。

3.2.6. 双香蕉。 下面的图将被称为双香蕉图。

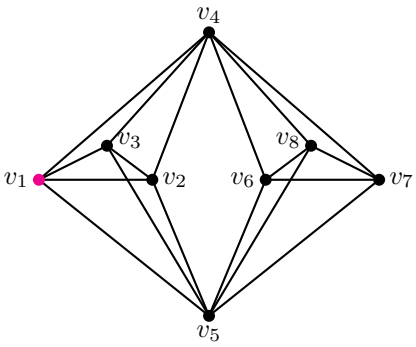


图11。双香蕉图。

如果我们将顶点 v_1固定下来，那么按照我们的标记方式添加顶点后，可以看出这个钉扎图是 4-可容许的。事实上，对于任意选择的固定顶点，双香蕉图都是 4-可容许的，感兴趣的读者可以轻松验证。因此，根据定理 A，我们得出该图在 $\mathbb{R}^{18}$ 中诱导出正测度的固定距离集，条件是用于采样顶点的紧集 $E \subset \mathbb{R}^d$ 的豪斯多夫维数严格大于 $(d+4)/2$。

接下来，假设我们删除连接 v_2 和 v_4的边，如下图所示。将图的顶点取为集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 中的点，我们得到 $\mathbb{R}^{17}$中的一个距离集。对于这个例子，我们注意到固定点的位置可能会影响可容许数，因此一般而言，固定点的选择很重要。将固定点设在 v_7 处会得到一个 3-可容许钉扎图（例如，按照可容许性定义中的顺序 v_6、v_8、v_4、v_5、v_1、v_3、v_2 依次添加顶点即可；也可以使用命题 14，因为不断删除度不超过 3 的未固定顶点及其对应的边，最终会删除所有未固定顶点），但左侧的图若将固定点设在 v_1 处，则不是 3-可容许的。

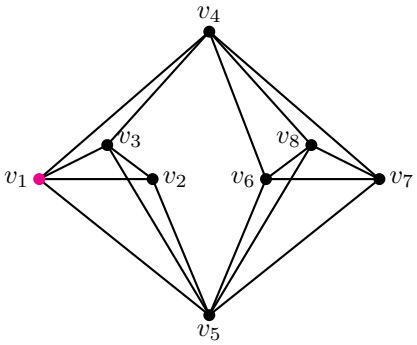


图12。一个4-可容许固定图，但不是3-可容许。

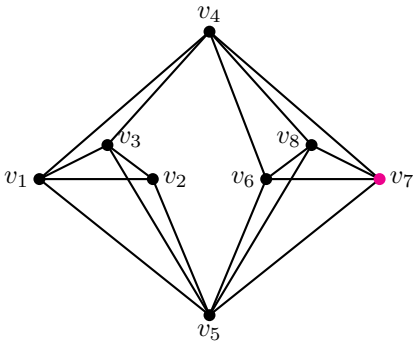


图13。一个3-可容许固定图。

关于相应的未钉图，文献 [7] 证明了，在$\mathbb{R}^{17}$ 中，由删去一条边的双香蕉图所诱导的距离集，在满足 $\dim(E \subset \mathbb{R}^3)$ E的紧集 $> 3 - 1/9$中具有正测度。我们注意到，我们的方法只能给出阈值

$$\dim(E) > \frac{d+3}{2} = 3,$$

因此，它们在 $\mathbb{R}^3$ 中不会得出任何非平凡结果。

4. An algorithm - graph dismantling lemma

我们希望求出给定钉扎图的最小可容许性 k。当图中没有钉点时，我们的算法会将 k 还原为该图的 k-退化度。

定义 12（固定子图）。如果 H 是一个导出子图为 G 的钉扎图，且 $\mathcal{P}_H \subset \mathcal{P}_G$，即 H 中的固定顶点集合是 G 中固定顶点集合的子集，我们就称钉扎图（H，$\mathcal{P}_H$）是钉扎图（G，$\mathcal{P}_G$）的一个**固定子图**。

我们先给出一个简单的引理。

引理 13. 设 $(H, \mathcal{P}_H)$ 是$(G, \mathcal{P}_G)$的一个固定子图。若$(G, \mathcal{P}_G)$ 是 k-可容许的，则$(H, \mathcal{P}_H)$也是如此。

证明。设 $\mathcal{P}_G = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ 是 G 中的钉点集。存在 $\mathcal{V}_G$ 中一列未固定顶点 v_{m+1}，$\ldots$，v_l，使得 G 可以从其固定顶点开始，依次添加未固定顶点，并通过合法的 k- 可容许步骤构造而成。从列表 v_1，v_2，$\ldots$，v_l 中移除所有不属于 $\mathcal{V}_H$ 的顶点，然后按顺序用剩余顶点构造 H；由于每一步新增的边数不会增加，这证明（H，$\mathcal{P}_H$）同样是 k-可容许的。□

现在，我们可以描述一种图拆解算法，用来检验一个（不一定是单固定点的）钉扎图是否是 k-可容许的。该算法并非唯一，但我们将证明，算法的结果不依赖于所作的选择。

k-算法：只要存在至少一个度不超过 k 的未固定顶点，就选择这样一个顶点并将其删除（以及从该顶点出发的所有边）。当所有未固定顶点都被删除，或所有剩余未固定顶点的度都严格大于 k时，过程终止。

命题 14. 钉扎图 G是 k-可容许的，当且仅当 k-算法删除了所有未固定顶点。特别地，k-算法的结果与应用 k-算法时所作的选择无关。

该命题对于确定钉扎图的可容许数非常有用。事实上，由于可容许数总是大于或等于最小度，因此可以反复运行 k-算法，从 k 等于最小度开始，逐次递增，直到得到一个能使算法删除所有未固定顶点的值。这个最小值就是该钉扎图的可容许数。

证明。如果 k-算法删除了所有未固定顶点，那么我们可以按相反的顺序将被删除的顶点逐一添加回去，从而构造出该图；这意味着 G 是 k-可容许的。反过来，如果 G 是 k-可容许的，那么我们可以按照定义 k-可容许性的允许操作中添加顶点的相反顺序来删除这些顶点。因此，只需证明 k-算法的结果不取决于所作的选择，从而说明前面的论证中确实可以作出这样的选择。如果 G 不是 k-可容许的，那么 k-算法就不可能删除所有未固定顶点；否则，按照被删除顶点的相反顺序逐一添加，就能通过 k-可容许的操作合法地构造该图。如果 G 是 k-可容许的，我们首先断言，至少存在一个度不超过 k 的未固定顶点。事实上，未固定顶点存在一个排序 w_1，$\ldots w_l$，于是顶点 w_l 的度必定不超过 k。令 G' 表示从 G 中删除一个度不超过 k 的未固定顶点后得到的图。那么根据前面的引理，G' 是 k-可容许的。由归纳法即可得出该断言

（更准确地说，我们可以固定钉点数为 m，并对未固定顶点的数量 j 使用归纳法；然后利用归纳假设处理 G'。）

□

P命题 15. 对于任意未钉图， k-可容许性等价于 k-退化度 .

证明。 这可由 [38] 中描述的算法直接得出。 □

命题 16. 设 $(G,\mathcal{P})$ 是一个具有 $|\mathcal{P}| = m_0 + m$ 的钉扎图，并令 $G_0 = (G,\mathcal{P}')$ 表示同一个图，其固定点位于 $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ 和 $|\mathcal{P}'| = m_0$ 中，其中 $m_0, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。若 G_0 是 k-可容许的，则 $(G,\mathcal{P})$ 是 $(k+m)$-可容许的。

证明。由于 G_0 是 k-可容许的，根据定义，顶点 $Gv_1, v_2, \ldots, v_{m_0}, v_{m_0+1} \ldots v_l$ 存在一种排序，使得 $\mathcal{P}' = \{v_1, \ldots, v_{m_0}\}$ 是固定点，并且每个满足 $i > m_0$ 的顶点 v_i 至多有 k 条边连接到所有排在它之前的顶点。令 $v_{i_1}, \ldots, v_{i_m}$, $m_0 < i_1 < \cdots < i_m \leq l$ 表示 $\mathcal{P}\backslash\mathcal{P}'$ 中额外的 m 个固定点。现在，考虑 G 的未固定顶点的如下排序： $v_{m_0+1}, v_{m_0+2}, \ldots, \hat{v}_{i_1}, \ldots, \hat{v}_{i_m}, \ldots, v_l$，其中帽号表示省略该顶点。以固定点 $v_1, \ldots, v_{m_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_m}$ 为起点，并按照该排序逐个加入未固定顶点，从而构造 G 时，每个顶点 v_j 至多有 k 条边连接到索引较小的顶点，并且至多有 m 条边连接到 $v_{i_1}, \ldots, v_{i_m}$，由此得证。□

我们注意到，通过考虑 k-星图，上述命题达到饱和。若仅钉住一个叶子，则该图是1-可容许的；在其余所有叶顶点上添加 $k-1$ 个钉点后，即可得到钉点 k-星图所期望的 k-可容许性。

5. Special case: Multiple pinned chains and cycles

在本节中，我们给出证明钉点链与钉点环图（含一个或多个钉点）的正测度结果的细节。阈值 $(d+2)/2$ 对此类定点构形成立，这是我们的结构定理A的推论，但这些具体的图结构足够简单，因此无需动用 L^2 关于2-星的密度的全部强度，如定理6所述。只需在下文所定义的意义下对2-星具有正测度即可，而这由更强的 L^2 陈述所蕴含。

定义 17. 设 ν 为紧支撑于 $E \subset \mathbb{R}^n$中的有限测度。我们称博雷尔子集 $F \subseteq E$ 是 ν-满的，如果 $\nu(F) = \nu(E)$。

定义 18. 我们称 $\alpha \in (0,d)$ 适用于正测度的 k星，如果以下条件成立：对每一个满足 $\dim(E) > \alpha$ 的紧集 $E \subset \mathbb{R}^d$、每一个支撑在 E 上且满足 $s > \alpha$ 的 s-Frostman 测度 μ，以及每一组两两分离的紧子集 $E_1, E_2, \ldots, E_{k+1} \subset E$，它们对所有 $i = 1, \ldots, k+1$ 均满足 $\mu(E_i) > 0$，则对于

$$\mu_{E_1} \times \mu_{E_2} \times \cdots \times \mu_{E_k}\text{-a.e. } (x_1, \ldots, x_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k,$$

则成立

$$\mathcal{L}^k\big(\Delta^{k\text{-star}}_{x_1,\ldots,x_k}(E_{k+1})\big) > 0.$$

换言之，对包含于 $\Pi_{i=1}^k E_i \subset \mathbb{R}^{kd}$ 的某个 $(\Pi_{i=1}^k \mu_{E_i})$-全子集中的钉点 k 元组 $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$， k星的带钉点正测度成立。

注记 19. 如果 $\alpha \in (0,d)$ 适用于 k星的正测度，那么对任意 $1 \leq k' < k$，它也适用于 k' 星的正测度。

引理 20。 设 G 是一个图，其连通分量为 G_1、$\cdots$、G_ℓ。设 Φ 是 G 的边函数向量，而 Φ^i 是其在连通分量 G_i 上的限制测度。对于 G 的任意固定点集 $\mathcal{P}$，令 $\mathcal{P}_i$ 表示其在分量 G_i 上的限制测度。设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 是一个紧集，使得

对于所有 $i=1$、$\cdots$、ℓ，其固定点 $(G_i$、$\Phi^i)$-图集 $\Delta^{G_i,\,\mathcal{P}_i}{}^{\Phi^i,\,\{x_j^i\}_j}$ 对某些点 $\{x_j^i\}_j$ 具有正的勒贝格测度。那么，其 $(G$、$\Phi)$-图集 $\Delta^{G,\,\mathcal{P}}{}^{\Phi,\,\{x_j^i\}_{i,\,j}}$ 也必然具有正的勒贝格测度。

证明。注意到 $\Delta^{G,\mathcal{P}}{}^{\Phi}{}_{,\{x_j^i\}_{i,j}}$ 恰好是所有 $\Delta^{G_i,\mathcal{P}_i}{}^{\Phi^i}{}_{,\{x_j^i\}_j}$, $i=1,\cdots,\ell$的笛卡尔积。所述结果立即得证。□

定理 21。假设 $\alpha\in(0,d)$ 适用于正测度的2-星。设 $l\geq 2$，并设Ch 是一个带有 $m\geq 1$ 个固定顶点（列于 $\mathcal{P}$ 中）的$(l-1)$-链，其中$\mathcal{P}$ 中任意一对顶点之间都没有边。于是，若 $E\subset\mathbb{R}^d$ 是满足$\dim(E)>\alpha$的紧集，μ 是 E上的 *Frostman* 测度，且 $E_1,E_2,\ldots,E_l\subset E$是具有正 μ 测度的互相分离的紧子集，则有

$$\mathcal{L}^{l-1}\left(\Delta^{Ch}_{\mathcal{P},x_1,x_2,\ldots,x_m}(E_{m+1},\ldots,E_l)\right)>0$$

对 $\Pi_{i=1}^m\mu_{E_i}$几乎处处的$(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in E_1\times\cdots\times E_m$。

证明。我们对 n进行归纳，其中 n表示链中未固定顶点的数量（于是$n+m=l$）。若 $n=1$，这意味着除一个顶点外，其余顶点都已固定。这种情况要么是带一个固定点的 1 链，要么是两个端点都带钉点的 2 链。根据关于阈值 α 的假设，对于 μ_{E_1} 几乎处处的点 x_1，或者分别对于$\mu_{E_1}\times\mu_{E_2}$几乎处处（x_1，x_2），正测度成立。

接下来，假设 $n\geq 2$，并且对于至多有$n-1$ 个未固定顶点的链，结论已知。任取一个 2-容许构造顺序

$$\mathcal{O}=(v_1,v_2,\ldots,v_m,v_{m+1},v_{m+2},\ldots,v_{m+n}=v_l)$$

~对于 Ch。我们删去 v_{m+n} 及其相邻边，得到子图 Ch（可能不连通）。分两种情况：v_{m+n} 是叶子（只有一条边从 v_{m+n}伸出），或者 v_{m+n} 不是叶子。

情形 1： v_{m+n} **是一个叶子**。在这种情况下，删除 v_{m+n} 及其相邻边后，我们~剩下一条新的链 Ch，其钉点位于与之前相同的顶点上，但现在少了一个非固定顶点。设 $1\leq r\leq m+n-1$ 为在 Ch中通过一条边与 v_{m+n} 连通的顶点的指标。

子情形 1.1：v_r 是非固定顶点：由于对 μ_{E_r} 几乎处处的 x_r，我们有$\Delta_{x_r}(E_{m+n})$的正测度，我们可以将 E_r 修剪为一个更小的紧集 $E_r'\subset E_r$，使得任意固定点 $x_r\in E_r'$~都给出$\Delta_{x_r}($$E_{m+n})$的正测度。然后对 Ch 以及集合 $\{E_i\}_{1\leq i\neq r\leq m+n-1}$和 E_r'应用归纳假设，从而得到对 $\Pi_{i=1}^m\mu_{E_i}$几乎处处的$(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in\Pi_{i=1}^m E_i$，人们~有$\Delta^{Ch}_{\mathcal{P}},_{x_1,\ldots,x_m}($$E_{m+1},\ldots E_{r-1},E_r'$, $E_{r+1},\ldots,E_{m+n-1})$。由 Fubini 定理，对每个这样的 m元组$(x_1,x_2,\ldots,x_m)$，固定点距离集

$$\Delta^{Ch}_{\mathcal{P},x_1,\ldots,x_m}(E_{m+1},\ldots E_{r-1},E_r',E_{r+1},\ldots,E_{m+n})$$

具有正测度。由于 $E_r'\subset E_r$，这足以推出结论。

子情形 1.2：v_r 是一个固定顶点。根据归纳假设，对于 μ_{E_r} 几乎处处的x_r 属于 E_r，$\Delta_{x_r}(E_{m+n})$具有正勒贝格测度，并且对于

$$\mu_{E_r}\times\Pi_{1\leq i\neq r\leq m}\mu_{E_i}\text{ a.e. }(x_r,x_1,\ldots,x_{r-1},x_{r+1},\ldots,x_m)\in E_r\times\Pi_{1\leq i\neq r\leq m}E_i$$

~，$\Delta^{Ch}_{\mathcal{P}},_{x_1,\ldots,x_m}($$E_{m+1},\ldots,E_{m+n-1})$具有正测度。这足以保证存在 $E_1\times\cdots\times E_m$ 的一个$(\Pi_{i=1}^m\mu_{E_i})$ 全子集，使得对于该集合中的任意$(x_1,\ldots,x_m)$，这两件事都成立。事实上，设 $\mathcal{E}^{(m)}\subset\Pi_{i=1}^m E_i$ 是前面步骤中得到的$(\Pi_{i=1}^m\mu_{E_i})$ 全集，$\mathcal{E}_r^{(1)}\subset E_r$ 是μ_{E_r}-全集，那么取

$$\mathcal{F}^{(m)}=\mathcal{E}^{(m)}\cap(E_1\times\cdots\times E_{r-1}\times\mathcal{E}_r^{(1)}\times E_{r+1}\times\ldots E_m).$$

任意 m元组$(x_1,\ldots,x_m)\in\mathcal{F}^{(m)}$ 都给出正测度

$$\Delta^{Ch}_{\mathcal{P},\,x_1,\,\ldots,\,x_m}(E_{m+1},E_{m+2}\ldots,E_{m+n})=\Delta^{Ch}_{\mathcal{P},\,x_1,\,\ldots,\,x_m}(E_{m+1},E_{m+2}\ldots,E_{m+n-1})\times\Delta_{x_r}(E_{m+n})。$$

情形 2： v_{m+n} 不是叶子。

子情形 2.1. v_{m+n} 与 Ch中的两个固定顶点相连 Ch。删除 v_{m+n} 和˜这两个相邻顶点后，我们得到一个不连通图 Ch ，它由两个不连通的子链构成。我们分别对这两个子链应用归纳假设。利用引理20，可得几乎所有 m元固定点元组（x_1， x_2，……， x_m） $\in E_1 \times \cdots \times E_m$ 使得 $\Delta^{Ch}_{\mathcal{P},\ x_1,\ \ldots\ldots,\ x_m}(E_{m+1},\ E_{m+2},\ \ldots\ldots,\ E_{m+n-1})$ 具有正的勒贝格测度。如果 $r_1 \neq r_2 \in \{1,2,\ldots,m\}$ 是图 Ch 中与 v_{m+n} 相连的顶点的指标，我们还知道，对于几乎所有的 x_{r_1}， x_{r_2}， $\in E_{r_1} \times E_{r_2}$ 都给出 $\mathcal{L}^2(\Delta^{2-star}_{x_{r_1}\ x_{r_2},}\ (E_{m+n})) > 0$。取若干个 $(\Pi_{i=1}^m \mu_{E_i})$-全测集的交集后，仍存在一个 $(\Pi_{i=1}^m \mu_{E_i})$-全测集，其中包含使两个固定点距离集都具有正测度的 m 元组（x_1， x_2，……， x_m）。任意这样的 m 元组都会使……具有正测度

$$\Delta^{Ch}_{\mathcal{P},x_1,\ldots,x_m}(E_{m+1},\ldots,E_{m+n}) = \Delta^{\tilde{Ch}}_{\mathcal{P},x_1,\ldots,x_m}(E_{m+1},\ldots,E_{m+n-1}) \times \Delta^{2-star}_{x_{r_1},x_{r_2}}(E_{m+n}).$$

子情形 2.2. v_{m+n} 在 Ch中与一个固定顶点和一个未固定顶点相连。令p 和 u 分别为 v_{m+n} 在 Ch中相连的固定顶点和未固定顶点的指标。删除 v_{m+n} 及相邻边后，剩下两个子链，Ch_u， Ch_p，其端点分别位于 v_u 和 v_p中。由于 α 适用于具有正测度的二星，因此对于 $\mu_{E_p} \times \mu_{E_u}$ 几乎处处的点对（x_p， x_u） ， $\in E_p \times E_u$ 都有 $\mathcal{L}^2(\Delta^{2-star}_{x_p\ x_u\ ,}\ (E_{m+n})) > 0$。特别地，存在一个全$\mu_{E_p}$ 测度的集合 $E'_p \subset E_p$ ，使得对每个 $x_p \in E'_p$，

$$E'_u(x_p) := \{x_u \in E_u \colon \mathcal{L}^2(\Delta^{2-star}_{x_p,x_u}(E_{m+n})) > 0\} \text{ has full measure } \mu_{E_u}(E_u).$$

令 $\mathcal{P}_p$ 和 $\mathcal{P}_u$ 分别为由（Ch， $\mathcal{P}$）在 Ch_p 和 Ch_u 中诱导出的钉点集合。令$m_p = |\mathcal{P}_p|$ 和 $m_u = |\mathcal{P}_u|$，使得 $m_p + m_u = m$。在（Ch_p， $\mathcal{P}_p$）中应用归纳假设，将 E_p 替换为 E'_p，从而得到一个由良好钉点组成的 m_p元组的全积测度集合。接下来，对每个 $x_p \in E'_p$ ，都可以取一个紧集 $K_u(x_p) \subset E'_u(x_p)$，使得 $\mu_{E_u}(K_u(x_p)) > 0$ ，并在端点为 v_u 的子链中应用归纳假设，其中 $K_u(x_p)$起到 E_u的作用；同样可得到一个全积测度子集，其中包含（Ch_u， $\mathcal{P}_u$）的 m_u 元组良好钉点。根据 Fubini 定理，这意味着 Ch的整个固定点距离集具有全测度。

子情形 2.3。 v_{m+n} 通过边与两个未固定顶点v_{r_1} 和v_{r_2}相连。在这种情况下，我们可以证明一个更强的结果，即在额外的位置 v_{m+n}固定一个点。为此，对在 v_{m+n} 处拆分 Ch 后得到的两条子链应用归纳假设；每条子链中的两个固定点分别是从（Ch， $\mathcal{P}$）继承而来，另加一个位于 v_{m+n}的新固定点。每条子链中的未固定顶点都少于 n 个，因此根据归纳假设，我们得到好钉点的一个全积测度。对几个全测集取交集，即可得到所需结果。□

接下来，我们证明固定 l-环 $l \geq 4$的一个正测度结果。基本思路是将项链视为一对共享端点的链；[16] 中也采用了这种视角，不过该论文所用的柯西-施瓦茨方法还要求环具有偶数长度且间隙为常数。我们认为，我们的定理是文献中首批适用于连续情形下任意长度环的结果之一。此外，不同于 [16], 中隐式地将项链拆分为一对对称链，并基于 L^2 进行估计的方法，我们将链集的正测度作为黑箱输入，而且不要求两条链长度相同。

定理22。 假设 $\alpha \in (0,d)$ 适用于2-星。设 $l \geq 4$。设 C_l 是一个含有 $m \geq 0$ 个固定点的 l-圈图，这些固定点按 $\mathcal{P}$列出，且 $\mathcal{P}$ 中的任意两个顶点之间都没有边。则若 $E \subset \mathbb{R}^d$ 是一个紧集，满足$\dim(E)$ $> \alpha$， E 中存在 *Frostman* 测度，且

$E_1, E_2, \ldots, E_l \subset E$ 是具有正 μ 测度且互相分离的紧子集，便有正测度的钉点 $\mathcal{P}$ l-圈，具体而言

$$\mathcal{L}^l\left(\Delta^{C_l}_{\mathcal{P},x_1,x_2,\ldots,x_m}(E_{m+1},\ldots,E_l)\right) > 0$$

对于几乎处处的 $\Pi_{i=1}^m \mu_{E_i}$ $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ 。$\in E_1 \times \cdots \times E_m$。

注 23。我们指出，上述定理不包括 $l = 3$ （三角形）的情形；对于这种情形，我们仍需要关于 2-星的更强 L^2 结论。

证明。不失一般性，我们可以假设 $m \geq 2$。若 $m = 1$ 或 $m = 0$，我们可以分别选取一个或两个额外顶点作为固定点，使得得到一个具有两个非相邻固定点的环（为此，我们必须假设 $l \geq 4$，这样才能在环上固定两个不相邻的顶点）。该双固定环（情形 $m = 2$）具有正测度这一事实，意味着对这些固定点的某个子集也有相同结论。

在 $m \geq 2$ 的情况下，将固定顶点标记为 v_1、v_2、.....、v_m。固定环可以拆分为两条钉点链 Ch_1、Ch_2，它们的固定端点为 v_1、v_2（并且沿着 Ch_i 可能还有其他钉点）。

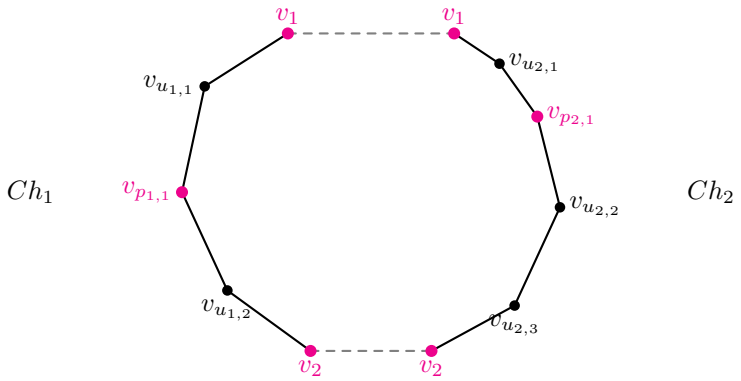


图14. 将一个带钉点的9-环（有4个钉点）拆分为两条钉点链，它们在 v_1、v_2 处共用钉点。灰色虚线边表示如何将两条链重新拼接成原来的带钉点环。洋红色顶点是固定顶点。

对于 $i = 1$，令 M_i 和 N_i 分别表示 Ch_i 中固定顶点和未固定顶点的数量。注意，$M_1 + M_2 = m + 2$，因为两条链共用两个钉点。对于每个 $i = 1$，2，设 $\mathcal{P}_i = \{v_1, v_2\} \cup \{v_{p_{i,j}}\}_{j=1}^{M_i}$ 为 Ch_i 的固定顶点，$\{v_{u_{i,j}}\}_{j=1}^{N_i}$ 为 Ch_i 的未固定顶点，例子见图 14。对于每个 $i = 1$，2，将定理 21 应用于钉点链图 $(Ch_i, \mathcal{P}_i)$，可得对于 $\mu_{E_1} \times \mu_{E_2} \times \Pi_{j=1}^{M_i} \mu_{E_{p_i,j}}$ 几乎处处成立的 $(x_1, x_2, x_{p_i,1}, \ldots, x_{p_i,M_i})$，有

$$\mathcal{L}^{|\mathcal{E}_i|}\left(\Delta^{Ch_i}_{\mathcal{P}_i,x_1,x_2,x_{p_{i,1}},\ldots,x_{p_{i,M_i}}}(E_{u_{i,1}}, E_{u_{i,2}}, \ldots, E_{u_{i,N_i}})\right) > 0, \tag{1}$$

其中，$|\mathcal{E}_i|$ 是 Ch_i 中的边数。

对于每个 $i = 1$，2，都存在 $\mathcal{E}^i_{1,\ 2} \subset E_1 \times E_2$，其满 $\mu_{E_1} \times \mu_{E_2}$ 测度，使得对于每个 $(x_1,\ x_2) \in \mathcal{E}^i_{12}$，

$$\Pi_{j=1}^{M_i} \mu_{E_{p_{i,j}}}(\{(x_{p_{i,1}}, x_{p_{i,2}}, \ldots, x_{p_{i,M_i}}) \colon (1) \text{ holds }\}) = \Pi_{j=1}^{M_i} \mu(E_{p_{i,j}}).$$

那么集合 $\mathcal{E}_{12} := \mathcal{E}_{12}^1 \cap \mathcal{E}_{12}^2 \subset E_1 \times E_2$ 仍具有满 $\mu_{E_1} \times \mu_{E_2}$ 测度。对于每个 $(x_1, x_2) \in \mathcal{E}_{12}$, $\mathcal{L}^l(\Delta_{\mathcal{P}, x_1, \ldots, x_m}^{C_l}(E_{m+1}, \ldots, E_l)) = \Pi_{i=1}^2 \mathcal{L}^{|\mathcal{E}_i|}\left(\Delta_{\mathcal{P}_i, x_1, x_2, x_{p_{i,1}}, \ldots, x_{p_{i,M_i}}}^{Ch_i}(E_{u_i,1}, E_{u_i,2}, \ldots, E_{u_i,N_i})\right) > 0$, 对于某个满 $\Pi_{i=1}^2 \Pi_{j=1}^{M_i} \mu_{E_{p_i,j}}$ 测度集合中的所有 $(x_{p_1,1}, \ldots, x_{p_1,M_1}, x_{p_2,1}, \ldots, x_{p_2,M_2})$ 均成立。□

6. Proof of general structural Theorems A and B

给定一个钉扎图 $(G, \mathcal{P})$，其固定点位于 $\mathcal{P} = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ 中，构造顺序为 $\mathcal{O} = (v_1, v_2, \ldots, v_l)$，记 $\eta_{j,\mathcal{O}}$ 为与 v_j 相连且在排序 $\mathcal{O}$ 中先于 v_j 的顶点的指标集；通常会省略记号中对 $\mathcal{O}$ 的依赖。记 $\epsilon_j = |\eta_j|$，也就是说，ϵ_j 是 v_j 相对于排序 $\mathcal{O}$的后向度。我们还记 $\eta_{j,P}$ 为 η_j 中由固定顶点指标组成的子集，并记 $\eta_{j,U}$ 为由未固定顶点指标组成的子集；类似地，用 $\epsilon_{j,P}$ 和 $\epsilon_{j,U}$ 表示它们的基数。令 l 为图 G中的顶点总数；回忆一下， m 表示固定顶点的数量，并令 $n := l - m$ （未固定顶点的数量）。为便于记号，记 $x = (x_1, \cdots, x_m)$；对于 $r \geq m+1$, 记 $y_{(r)}$ 为 $(r-m)$ 元组 $(y_{m+1}, \ldots, y_r)$。下文中提及的全子集均指此前定义 17 中引入的概念。

定义 24. 设 $m \geq 1$ （至少一个固定点）。对于支撑 Frostman 测度 μ_E 的紧集 $E \subset \mathbb{R}^d$，取互相分离的紧子集 $E_1, \ldots, E_l \subset E$，满足对所有 $j = 1, 2 \ldots, l$, 均有 $\mu(E_j) > 0$，并令 μ_{E_j} 表示 μ 在 E_j 上的限制测度。若满足以下条件，我们称由钉点组成的 m-元组 $(x_1, \ldots, x_m) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_m$ 对 $(G, \mathcal{P}, \mathcal{O}, \{E_i\}_{i=1}^l)$ 是良好的:

(1) $\left(d_{x_i \ i\in\eta_{m+1}}^{\epsilon_{m+1}-star}(\,), P\right)_*(\mu_{E_{m+1}}) \in L^2(\mathbb{R}^{\epsilon_{m+1}})$。(2) 存在 $(E_{m+1})_x^G \subset E_{m+1}$，使得 $(E_{m+1})_x^G$ 是 μ_{m+1}-满的，并且对每个$y_{m+1} \in (E_{m+1})_x^G$，推前测度 $\left(d_{x_i \ i\in\eta_{m+2}}^{\epsilon_{m+2}-star}(\,), P, (y_j)_{j\in\eta_{m+2}, U}\right)_*(\mu_{E_{m+2}}) \in L^2(\mathbb{R}^{\epsilon_{m+2}})$。(3) 对每个 $y_{m+1} \in (E_{m+1})_x^G$，在上述部分标识出的集合中，存在 $(E_{m+2})_{x, y_{(m+1)}}^G \subset E_{m+2}$，使得 $(E_{m+2})_{x, y_{(m+1)}}^G$ 是 μ_{m+2}-满的，并且对每个 $y_{m+2} \in (E_{m+1})_{x, y_{(m+1)}}^G$，推前测度 $\left(d_{x_i \ i\in\eta_{m+3}}^{\epsilon_{m+3}-star}(\,), P, (y_j)_{j\in\eta_{m+3}, U}\right)_*(\mu_{E_{m+3}}) \in L^2(\mathbb{R}^{\epsilon_{m+3}})$。(4) $\cdots$(5) 对每个 $y_{m+1} \in (E_{m+1})_x^G$、每个 $y_{m+2} \in (E_{m+2})_{x, y_{(m+1)}}^G$, $\cdots$, 以及每个 $y_{l-2} \in (E_{l-2})_{x, y_{(l-3)}}^G$

从先前确定的集合中选取，存在 $(E_{l-1})_{x,\ y_{(l-2)}}^G \subset E_{l-1}$ 使得 $(E_{l-1})_{x,\ y_{(l-2)}}^G$ 是 μ_{l-1}-完全的，并且对于每个 $y_{l-1} \in (E_{l-1})_{x,\ y_{(l-2)}}^G$，推前测度 $\left(d_{x_i \ i\in\eta_l}^{\epsilon_l-star}(\,), P, (y_j)^{j\in\eta_l, U}\right)_*(\mu_{E_l}) \in L^2(\mathbb{R}^{\epsilon_l})$。

我们所说的... 步骤，是指一系列由 Υ 编号的条件（其中 Υ 取遍满足 $\Upsilon \geq 1$ 和 $l - \Upsilon - 3 \geq m+1$ 的值），其形式如下:

“对于每个 $y_{m+1} \in (E_{m+1})_x^G$、每个 $y_{m+2} \in (E_{m+2})_{x, y_{(m+1)}}^G$, $\cdots$, 以及每个 $y_{l-\Upsilon-2} \in (E_{l-\Upsilon-2})_{x, y_{(l-\Upsilon-3)}}^G$，从先前确定的集合中选取，存在 $(E_{l-\Upsilon-1})_{x, y_{(l-\Upsilon-2)}}^G \subset E_{l-\Upsilon-1}$ 使得 $(E_{l-\Upsilon-1})_{x, y_{(l-\Upsilon-2)}}^G$ 是 $\mu_{l-\Upsilon-1}$-完全的，并且对于每个 $y_{l-\Upsilon-1} \in (E_{l-\Upsilon-1})_{x, y_{(l-\Upsilon-2)}}^G$，推前测度 $\left(d_{x_i \ i\in\eta_{l-\Upsilon}}^{\epsilon_{l-\Upsilon}-star}(\,), P, (y_j)_{j\in\eta_{l-\Upsilon}, U}\right)_*(\mu_{E_{l-\Upsilon}}) \in L^2(\mathbb{R}^{\epsilon_{l-\Upsilon}})$。”

也就是说，它涵盖了定义中条件 (3) 和 (5) 之间的自然中间条件；我们可以把它理解为每次将 Υ 递减一次，直到最终条件 (5) 对应的情形，其中 $\Upsilon = 0$。

例 25. 考虑图 G，如图 15 所示，其中 $\mathcal{P} = (v_1, v_2)$ 是固定顶点，且采用 4-可容许次序 $\mathcal{O} = (v_1, v_2, \dots, v_6)$。假设如前所述，互不相交的紧集 E 和 $E_1, E_2, \dots, E_6$ 已固定。

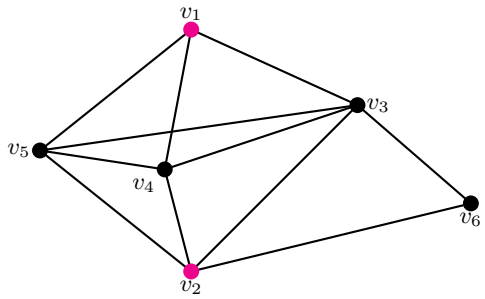


图 15。玩具钉扎图。

一对 $(x_1,\ x_2) \in E_1 \times E_2$ 是 $(G,\ \mathcal{P},\ \mathcal{O},\ \{E_i\}_{i=1}^6)$ 良好的，当且仅当：

(1) $(d^{2-star}_{x_1\ x_2},\ )_*(\mu_{E_3}) \in L^2(\mathbb{R}^2)$；(2) 存在一个 μ_{E_3}-全子集 $(E_3)^G_{x_1,\ x_2} \subset E_3$ 使得对所有 $y_3 \in (E_3)^G_{x_1,\ x_2}$

$$(d^{3-star}_{x_1,x_2,y_3})_*(\mu_{E_4}) \in L^2(\mathbb{R}^3);$$

(3) 对于每个 $y_3 \in (E_3)^G_{x_1,x_2}$，存在一个 μ_{E_4}-全测度子集 $(E_4)^G_{x_1,x_2,y_3} \subset E_4$ 使得对所有 $y_4 \in (E_4)^G_{x_1,x_2,y_3}$

$$(d^{4-star}_{x_1,x_2,y_3,y_4})_*(\mu_{E_5}) \in L^2(\mathbb{R}^4);$$

(4) 对于每个 $y_3 \in (E_3)^G_{x_1,\ x_2}$ 和 $y_4 \in (E_4)^G_{x_1,\ x_2,\ y_3}$ 存在一个 μ_{E_5}-全测度子集 $(E_5)^G_{x_1,\ x_2,\ y_3,\ y_4} = E_5$ 使得对所有 $y_5 \in E_5$

$$(d^{2-star}_{x_2,y_3})_*(\mu_{E_6}) \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

采用上述例子中好钉点的定义，我们可以通过类似富比尼的论证，得到正测度的距离图。事实上，我们用一个迭代积分给出所关注距离集的勒贝格测度下界

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{11}(\Delta^G_{x_1,x_2}(E_3, E_4, \dots, E_6)) \\
&\quad \geq \int_{\Delta^{2-star}_{x_1,x_2}((E_3)^G_{x_1,x_2})} \Big(\int_{\Delta^{3-star}_{x_1,x_2,y_3}((E_4)^G_{x_1,x_2,y_3})} \Big(\int_{\Delta^{4-star}_{x_1,x_2,y_3,y_4}((E_5)^G_{x_1,x_2,y_3,y_4})} \\
&\qquad \Big(\int_{\Delta^{2-star}_{x_2,y_3}(E_6)} dt_{10} dt_{11} \Big) dt_6 dt_7 dt_8 dt_9 \Big) dt_3 dt_4 dt_5 \Big) dt_1 dt_2
\end{aligned}$$

其中，对于每个 $(t_1, t_2) \in \Delta^{2-star}_{x_1\ x_2}, ((E_3)^G_{x_1,x_2})$，我们选取 $y_3 = y_3(t_1, t_2) \in (E_3)^G_{x_1,x_2}$，使得 $|y_3 - x_1| = t_1$ 且 $|y_3 - x_2| = t_2$；接着，对于每个 $(t_3, t_4, t_5) \in \Delta^{3-star}_{x_1\ x_2}, ,_{y_3}((E_4)^G_{x_1,x_2,y_3})$，我们选取某个 $y_4 = y_4(t_3, t_4, t_5) \in (E_4)^G_{x_1,x_2,y_3}$，使得 $(t_3, t_4, t_5) = d^{3-star}_{x_1\ x_2}, ,_{y_3}(y_4)$。

根据 (x_1, x_2) 良好固定点定义中推前测度的 L^2 性质，结合对于每个 $3 \leq i \leq 5$, $\mu_{E_i}((E_i)^G_{x, y(i-1)}) > 0$，我们可以验证，上方公式中四重积分涉及的距离集合具有正的勒贝格测度。事实上，取一个紧集 $(K_r)^G_{x,y(r-1)} \subset (E_r)^G_{x,y(r-1)}$，满足 $\mu_{E_r}((K_r)^G_{x,y(r-1)}) > 0$，则引理 27 推出 $\Delta^{\epsilon_r - star}(x_i)_{i\in\eta_r,P}, (y_j)_{j\in\eta_r,U}((K_r)^G_{x,y(r-1)}) > 0$。因此 $\mathcal{L}^{11}(\Delta^G_{x_1,x_2}(E_3, E_4, \dots, E_6)) > 0$。

下一个定理是得出结构定理A所需的主要技术结果。

定理 26。设 $(G, \mathcal{P})$ 是一个 k-可容许的钉扎图，具有 $m \geq 1$ 个固定顶点$\mathcal{P} = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$，且配有任意固定的 k-可容许排序 $\mathcal{O} = (v_1, v_2, \ldots, v_l)$。那么，对于任意满足 $\dim(E) > \frac{d+k}{2}$ 的紧集 $E \subset \mathbb{R}^d$，以及任意支撑在 E 中、满足$s > \frac{d+k}{2}$ 且为 s-Frostman 测度的测度 μ，以及任意满足 $\mu(E_i) > 0$ 的 E 的互相分离的紧子集 E_i，其中 $1 \leq i \leq l$，有 $\mu_{E_1} \times \mu_{E_2} \times \cdots \times \mu_{E_m}$ 几乎处处的 m-元组 $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in E_1 \times E_2 \times \ldots E_m$ 都是 $(G, \mathcal{P}, \mathcal{O}, \{E_i\}_{i=1}^l)$-良好的。

我们将定理 26 的证明推迟到本节末尾，现在着手建立欧几里得距离结构定理。首先，我们需要一个关于 L^p中推前测度的简单引理。

引理 27. 设 μ_F 是紧支撑于 F 中的 Frostman 测度。设 $\Phi^k : F \to \mathbb{R}^k$ 是连续映射，使得推前测度 $(\Phi^k)_*(\mu_F)$ 关于 $\mathbb{R}^k$ 中的勒贝格测度绝对连续，且 $\frac{d(\Phi^k)_*}{dx}(\mu_F) \in L^p(\mathbb{R}^k)$，对某个 $1 \leq p \leq \infty$，我们将其简记为 $(\Phi^k)_*(\mu_F) \in L^p$。则对任意满足 $\mu_F(F') > 0$ 的子集 $F' \subset F$，以及作为 μ_F 在 F' 上的限制测度的 $\mu_{F'}$，同样有 $(\Phi^k)_*(\mu_{F'}) \in L^p(\mathbb{R}^k) \setminus \{0\}$。

特别地，若$(d^{k-star}_{x_1\, x_2\, ,\ldots,x_k})_*(\mu_F) \in L^p(\mathbb{R}^k)$，对某个 $1 \leq p \leq \infty$ 且 F' 是 F的具有正 μ_F测度的闭子集，则$\Delta^{k-star}_{x_1\, \ldots\, ,x_k}(F')$ 具有正测度。

证明。 对任意博雷尔集 $A \subset \mathbb{R}^k$,

$$\begin{aligned}(\Phi^k)_*(\mu_{F'})(A) =& \mu_{F'}\left((\Phi^k)^{-1}(A)\right) = \mu_F\left(F' \cap (\Phi^k)^{-1}(A)\right)\\ \leq& \mu_F\left((\Phi^k)^{-1}(A)\right) = (\Phi^k)_*(\mu_F)(A).\end{aligned}$$

因此 $\nu' := (\Phi^k)_*(\mu_{F'}) \leq \nu = (\Phi^k)_*(\mu_F)$。于是 ν' 关于 ν 绝对连续，并由拉东-尼科迪姆定理可得$0 \leq \frac{d\nu'}{d\nu} \leq 1$，从而 $0 \leq \frac{d\nu'}{dx} \in L^p$。

其次，注意到若 $\frac{d\nu'}{dx} \in L^p$，则其支撑必具有正测度。若 $p = 1$,

$$0 < \mu_{F'}(F) = \int \frac{d\nu'}{dx} dx,$$

直接蕴含该结论。对于 $1 < p \leq \infty$，由H¨older不等式可得，因为

$$0 < \mu_{F'}(F) = \int_{\mathbb{R}^k} \frac{d\nu'}{dx} dx \leq \left\| \frac{d\mu'}{dx} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^k)} \mathcal{L}^k(\mathrm{supp}(d\nu'/dx))^{1/p'}.$$

最后一个结论由以下事实得出：如果 F'是闭的，那么 $(d^{k-star}_{x_1\, x_2\, ,\ldots,x_k})_*(\mu_{F'}$的支撑包含于 $d^{k-star}_{x_1\, x_2\, ,\ldots,x_k}(\mathrm{supp}\mu_{F'}) \subseteq d^{k-star}_{x_1\, x_2\, ,\ldots,x_k}(F') = \Delta^{k-star}_{x_1\, \ldots\, ,x_k}(F')$（[36, 定理 1。18]）。□

定理 A 的证明。固定钉扎图 $(G, \mathcal{P})$ 的一个 k-可容许排序 $\mathcal{O} = (v_1, v_2, \ldots, v_l)$，其中 $\mathcal{P} = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ 是固定顶点。注意，不失一般性，我们可以假设 $m \geq 1$（至少有一个固定顶点），因为如果 $m = 0$（没有固定点），我们可以在 v_1 处添加一个固定点，并且仍有 $(G, \{v_1\})$ 是 k-可容许的，且其 k-可容许排序为 $\mathcal{O}$。

给定一个紧集 E，满足 $\dim(E) > \frac{d+k}{2}$。令 μ 为E上的一个 s-Frostman 测度，且满足 $s > \frac{d+k}{2}$，并从 E中选取 l 个互相分离的紧子集，记为 E_1、E_2、.....、E_l。由定理 26 可知，$\mu_{E_1} \times \mu_{E_2} \times \cdots \times \mu_{E_m}$ 几乎每个 m-元组 $(x_1$、x_2、.....、$x_m) \in E_1 \times E_2 \times \ldots E_m$都是 $(G$、$\mathcal{P}$、$\mathcal{O}$、$\{E_i\}_{i=1}^l)$-良好的。

我们只需验证：若 $x := (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in E_1 \times E_2 \times \ldots E_m$ 是 $(G, \mathcal{P}, \mathcal{O}, \{E_i\}_{i=1}^l)$ 良好的，则 $\Delta^G_{\mathcal{P}, x_1, \ldots, x_k}(E_{m+1}, \ldots, E_l)$ 具有正测度。我们有一列集合

$$(E_r)^G_{x, y_{(r-1)}} \subset E_r, \qquad m+1 \leq r \leq l-1$$

由 $(x_1,\dots,x_m)$ 为 $(G,\mathcal{P},\mathcal{O},\{E_i\}_{i=1}^l)$ 良好这一定义所提供。

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}^{|\mathcal{E}|}(\Delta^G_{\mathcal{P},x}(E_{m+1},\dots,E_l))\\ \geq&\int_{\Delta^{\epsilon_{m+1}-star}_{(x_i)_{i\in\eta_{m+1,P}}}((E_{m+1})^G_x)}\int_{\Delta^{\epsilon_{m+2}-star}_{(x_i)_{i\in\eta_{m+2,P}},(y_j)_{j\in\eta_{m+2,U}}}((E_{m+2})^G_{x,y_{(m+1)}})}\\ &\int_{\Delta^{\epsilon_{m+3}-star}_{(x_i)_{i\in\eta_{m+3,P}},(y_j)_{j\in\eta_{m+3,U}}}((E_{m+3})^G_{x,y_{(m+2)}})}\cdots\int_{\Delta^{\epsilon_l-star}_{(x_i)_{i\in\eta_{l,P}},(y_j)_{j\in\eta_{l,U}}}(E_l)}dT^l\cdots dT^{m+3}T^{m+2}dT^{m+1},\end{aligned}$$

其中 $dT^r=dt^r_1dt^r_2\dots dt^r_{\epsilon_r}$，对于 $m\leq r\leq l-1$，我们依次选择 $y_r\in(E_r)^G_{x,y_{(r-1)}}$，使得 $d^{\epsilon_r-star}_{(x_i)_{i\in\eta_r,P},(y_j)_{j\in\eta_r,U}}(y_r)=(t^r_1,t^r_2\dots,t^r_{\epsilon_r})$。引理 27 保证，在迭代积分的每一步中，我们都在对正测度的距离集积分。因此，右侧的积分必为正。□

定理 *26* 的证明。我们将按图中 n 个未固定顶点的数量对此定理进行归纳证明。

基例： $n=1$。若该图连通，则它恰好是一个 m星，其中有一个非固定顶点 v_{m+1} 与所有 v_i 相连，且 $1\leq i\leq m$。此时，定理 6 恰好给出本定理的结论。若图不连通，则至多有 $m'<m$ 个固定顶点（v_{i_1}，v_{i_2}，……，$v_{i_{m'}}$）与 v_{m+1}相连；同样，可以直接对6 个 m'星应用定理，得到 $\Pi_{j=1}^{m'}\mu_{E_{i_j}}$几乎处处成立（$x_{i_1}$，……，$x_{i_{m'}}$）（而对于未与 x_i 相连的v_i ，不对固定点 v_{m+1}施加任何限制，因此相对于乘积测度仍为全测度集）。

归纳步骤：假设 $n\geq 2$ ，并且该定理对至多有$n-1$ 个未固定顶点的图成立。记$(G',\mathcal{P})$为从 G 中删除 v_l （ k-可容许排序 $\mathcal{O}$中最后添加的顶点）及其所有相邻边后得到的固定子图；此外，令 $\mathcal{O}'=(v_1,v_2,\dots,v_{l-1})$为在$(G',\mathcal{P})$中诱导的 k-可容许排序。由于 G'有 $n-1$ 个未固定顶点，我们有 $\mu_{E_1}\times\mu_{E_2}\cdots\times\mu_{E_m}$几乎每一个$(x_1,\dots,x_m)\in E_1\times E_2\times\cdots\times E_m$都是$(G',\mathcal{P},\mathcal{O}',\{E_i\}_{i=1}^{l-1})$良好的。换言之，存在一个子集 $\mathcal{E}^{G'}_m\subset E_1\times\cdots\times E_m$，使得$(\Pi_{i=1}^m\mu_i)((\mathcal{E}^{G'}_m)^c)=0$，并且每一个 $x=(x_1,\dots,x_m)\in\mathcal{E}^{G'}_m$ 对$(G',\mathcal{P},\mathcal{O}',\{E_i\}_{i=1}^{l-1})$都是良好的。

根据 x 为良好的定义，我们有集合$(E_{m+1})^{G'}_x\subset E_{m+1}$ ；对于每个 $y_{m+1}\in(E_{m+1})^{G'}_x$ ，都有$(E_{m+2})^{G'}_{x,y_{m+1}}\subset E_{m+2}$。更一般地，对于任意 $m+1\leq r<l$，只要对所有 $m+1\leq i<r$ 都有 $y_i\in(E_i)^{G'}_{x,y_{(i-1)}}$，就定义了集合$(E_r)^{G'}_{x,y_{(r-1)}}\subset E_r$ 。为了针对 G更新这些集合，我们考察与 v_l连通的顶点。这样的顶点总共有 ϵ_l 个，其索引由$\eta_l=\eta_{l,P}\bigsqcup\eta_{l,U}$给出。此外，将定理6应用于 $\{E_i:\ i\in\eta_l\}$和E_l可知，对于$\Pi_{i\in\eta_{l,P}}\mu_{E_i}\times\Pi_{j\in\eta_{j,U}}\mu_{E_j}$，几乎所有$(((x_i)_{i\in\eta_{l,P}},(y_j)_{j\in\eta_{l,U}})\in\Pi_{i\in\eta_{l,P}}E_i\times\Pi_{j\in\eta_{j,U}}E_j$都满足

$$(d^{\epsilon_l-star}_{(x_i)_{i\in\eta_{l,P}},(y_j)_{j\in\eta_{l,U}}})_*(\mu_{E_l})\in L^2.$$

因此，存在一个具有全 $(\Pi_{j\in\eta_{l,P}}\mu_{E_j})$ 测度的集合 $\mathcal{E}_{\eta_{l,P}}\subset\Pi_{j\in\eta_{l.P}E_j}$，使得对任意 $(x_j)_{j\in\eta_{l,P}}\in\mathcal{E}_{\eta_{l,P}}$，有

$$(d^{\epsilon_l-star}_{(x_i)_{i\in\eta_{l,P}},(y_j)_{j\in\eta_{l,U}}})_*(\mu_{E_l})\in L^2$$

对 $(\Pi_{j\in\eta_{l,U}}\mu_j)$ 几乎每一个 $(y_j)_{j\in\eta_{l,U}}\in\Pi_{j\in\eta_{l,U}}E_j$。

按递增顺序列出 $\eta_{l,U}$ 中的指标 $i_1<i_2<\cdots<i_{\epsilon_{l,U}}$。对于每个 $x(l,P):=(x_j)_{j\in\eta_{l,P}}\in\mathcal{E}_{\eta_{l,P}}$，存在一个 $\mu_{E_{i_1}}$-全测度集 $(S_{i_1})_{x(l,P)}\subset E_{i_1}$，使得对于所有 $y_{i_1}\in(S_{i_1})_{x(l,P)}$，都存在一个 $\mu_{E_{i_2}}$-全测度子集 $(S_{i_2})_{x(l,P),y_{i_1}}\subset E_{i_2}$；更一般地，对于任意 $2\leq r<\epsilon_{l,U}$，都有集合 $(S_{i_r})_{x(l,P),y_{i_1},\dots,y_{i_{r-1}}}\subset E_{i_r}$，只要 $y_{i_j}\in(S_{i_j})_{x(l,P),y_{i_1},\dots,y_{i_{j-1}}}$ 对所有 $m+1\leq j<r$ 都有定义。

Let

$$\mathcal{E}_m^G := \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{E}_m^{G'} : (x_i)_{i\in\eta_{l,P}} \in \mathcal{E}_{\eta_{l,P}}\} \subset E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_m.$$

不难看出 $(\Pi_{i=1}^m \mu_i)((\mathcal{E}_m^G)^c) = 0$。我们声称，每个 $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathcal{E}_m^G$ 都是 $(G, \mathcal{P}, \mathcal{O}, \{E_i\}_{i=1}^l)$ 良好的。对于每个 $i_r \in \eta_{l,U}$，都需要重新定义

$$(E_{i_r})_{x,y(i_r-1)}^G = (E_{i_r})_{x,y(i_r-1)}^{G'} \cap (S_{i_r})_{x(l,P),y_{i_1},\dots,y_{i_{r-1}}} \subset E_{i_r},$$

其测度仍为全测度。若 $(l-1) \in \eta_{l,U}$，我们使用 $(E_{l-1})_{x,y(l-2)}^{G'} := E_{l-1}$。

对于满足 $j \notin \eta_{l,U}$ 的 $m+1 \le j \le l-1$，我们基本上保留其在 G' 时的形式，记为 ly

$$(E_j)_{x,y(j-1)}^G = (E_j)_{x,y(j-1)}^{G'} \subset E_j,$$

对所有 $1 \le i < j$，只要 $y_i \in (E_i)_{x,y(i-1)}^G$，便有定义。 □

定理 B 的证明与定理 A的证明思路相同。下面讨论所需的主要修改。

定理 B 的证明概要。与定理 A 的证明一样，不失一般性，我们可以假设 $m \ge 1$。令 $\Phi = (\Phi_{(v_i,v_j)})_{(v_i,v_j)\in\mathcal{E}}$ 为所研究的连续边向量函数。固定 $\mathcal{O} = (v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_l)$，它是 $(G, \mathcal{P})$ 的一个构造顺序，并且根据定义 9，对 $(G, \mathcal{P})$ 中的星而言是 α-适用的。对于每个 $m+1 \le r \le l$，令 ϵ_r 为按照排序 $\mathcal{O}$ 得到的 v_r 的后向度。令 $\eta_r, \eta_{r,P}, \eta_{r,U}$ 与前文相同。定义

$$\Phi^r = (\Phi_{(v_i,v_r)})_{i\in\eta_r}, m+1 \le r \le l.$$

换言之，Φ^r 是一个函数，其 ϵ_r 个分量对应于 v_r 与任意其他顶点之间的边；这些顶点与 v_r 共享一条边，且在排序 $\mathcal{O}$中位于其之前。

定义

$$d_{(z_i)_{i\in\eta_r}}^{\epsilon_r - star, \Phi^r}(x_r) := (\Phi_{(v_i,v_r)}(x_i, x_r))_{i\in\eta_r}.$$

我们称由 m个固定点组成的元组（x_1、……、x_m）$\in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_m$ 为（G，$\mathcal{P}$，$\mathcal{O}$，$\{E_i\}_{i=1}^l$，Φ）-良好，如果它满足定义 24 中的条件，其中将 $\left(d_{x_i\ i\in\eta_r}^{\epsilon_r - star}(), P, (y_j)^{j\in\eta_r, U}\right)_*(\mu_{E_r})$替换为

$$\left(d_{(x_i)_{i\in\eta_{r,P}},(y_j)_{j\in\eta_{r,U}}}^{\epsilon_r - star, \Phi^r}\right)_*(\mu_{E_r}), m+1 \le r \le l,$$

并将 L^2 替换为 L^p。通过与定理 26 的证明类似的证明（对未固定顶点的数量使用归纳法），可以证明，几乎处处，$(\Pi_{i=1}^m \mu_{E_i})$元组（x_1、……、x_m）$\in \Pi_{i=1}^m E_i$ 是（G，$\mathcal{P}$，$\mathcal{O}$，$\{E_i\}_{i=1}^l$，Φ）-良好的。为此，值得注意的是，从 G的一个 α-适用排序中删除最后一个非固定顶点后，我们得到 $\mathcal{O}'$ =(v_1，……，v_m，v_{m+1}，……，v_{l-1})，它是如下钉扎图的一个 α 适用构造顺序：该图由从 G 中删除顶点 v_l 及其所有相邻顶点得到。

与定理 A 中一样，通过结合使用 Fubini 定理和引理 27，每个 $(G, \mathcal{P}, \mathcal{O}, \{E_i\}_{i=1}^l, \Phi)$-良好 m-元固定点组 $(x_1, \dots, x_m)$ 都会使 $\Delta^{G,\mathcal{P},\Phi}{}_{x_1\ \cdots\ ,,,x_m}(E)$ 的固定点距离集具有正测度。□

References

[1] Bennett, Michael, Iosevich, Alexander, 和 Taylor, Krystal。《欧几里得空间中薄子集内的有限链》 $\mathbb{R}^d$。载于《分析与偏微分方程》9.3（2016），第597–614页。 ISSN：2157-5045,1948-206X。 DOI：10.2140/apde.2016.9.597。 URL：https://doi.org/10.2140/apde.2016.9.597。

[2] Borges, Tainara, Foster, Benjamin, Ou, Yumeng, 和 Palsson, Eyvindur。《固定距离与树集的非空内部》。2025。arXiv：2503.15709 [math.CA]。 URL：https: //arxiv.org/abs/2503.15709。[3] Borges, Tainara, Foster, Benjamin, Ou, Yumeng, Palsson, Eyvindur, 和 Romero Acosta, Francisco。《欧几里得空间薄子集中的超图所确定的体积向量》。预印本。2026年。[4] Brass, Peter, Moser, William, 和 Pach, J´anos。《离散几何中的研究问题》。施普林格，纽约，2005年，第xii+499页。 ISBN：978-0387-23815-8；0-387-23815-8。[5] Bright, Paige, Fang, Xinyu, Heritage, Barrett, Iosevich, Alex, Jiang, Tingsong, Parshall, Hans, 和 Sun, Maxwell。《广义点构形》 $\mathbb{F}_q^d$。载于：Finite Fields Appl. 99（2024年），论文编号102472，共28页。 ISSN：1071-5797,1090-2465。 DOI：10.1016/j.ffa.2024. 102472。 URL：https://doi.org/10.1016/j.ffa.2024.102472。[6] Bright, Paige, Marshall, Caleb, 和 Senger, Steven。《固定点积集估计》。2024年。arXiv：2412.17985 [math.CA]。 URL：https://arxiv.org/abs/2412.17985。[7] Chatzikonstantinou, Nikolaos, Iosevich, Alex, Mkrtchyan, Sevak, 和Pakianathan, Jonathan

《刚性、图与豪斯多夫维数》。载于：《组合与加性数论 IV》。Nathanson, Melvyn B. 编。沙姆：施普林格国际出版，2021年，第73–106页。 ISBN：978-3-030-67996-5。[8] Du, Xiumin、Ou, Yumeng、Ren, Kevin与Zhang, Ruixiang。加权精细解耦估计及其在Falconer距离集问题中的应用。2023年。arXiv: 2309 . 04501[math.CA]。 URL：https://arxiv.org/abs/2309.04501。[9] Erdogan, Burak、Hart, Derrick与Iosevich, Alex。《多参数投影定理及其在和积与欧几里得情形中有限点构型上的应用》。载于：《调和分析及其应用的最新进展》。第25卷。《施普林格数学与统计学会议录》。施普林格，纽约，2013年，第93–103页。 ISBN：978-1-4614-4565-4; 978-1-4614- 4564-7。 DOI：10.1007/978-1-4614-4565-4_11。 URL：https://doi.org/10.1007/978- 1-4614-4565-4_11。[10] Eswarathasan, Suresh、Iosevich, Alex与Taylor, Krystal。《傅里叶积分算子、分形集与正则值定理》。载于：数学进展 228.4（2011年），第2385– 2402页。 ISSN：0001-8708,1090-2082。 DOI：10 . 1016 / j . aim . 2011 . 07 . 012。 URL：https : //doi.org/10.1016/j.aim.2011.07.012。[11] Falconer, K. J.《论距离集的豪斯多夫维数》。载于：《Mathematika》32.2（1985年），第206–212页。 ISSN：0025-5793。 DOI：10.1112/S0025579300010998。 URL：https: //doi.org/10.1112/S0025579300010998。[12] Galo, Belmiro与McDonald, Alex。《 k点构形在 $\mathbb{R}^d$中张成的体积》。载于：《几何分析杂志》32.1（2022年），论文编号23，26。 ISSN：1050-6926,1559-002X。 DOI：10. 1007/s12220-021-00763-5。 URL：https://doi.org/10.1007/s12220-021-00763-5。[13] Grafakos, Loukas、Greenleaf, Allan、Iosevich, Alex与Palsson, Eyvindur。《多线性广义拉东变换与点构形》。载于：《数学论坛》27.4（2015年），第2323–2360页。 ISSN：0933-7741,1435-5337。 DOI：10.1515/forum-2013-0128。 URL：https: // doi.org/10.1515/forum-2013-0128。[14] Greenleaf, Allan与Iosevich, Alex。《论欧几里得平面子集所确定的三角形、相关双线性算子及其在离散几何中的应用》。载于：《分析与偏微分方程》5.2（2012年），第397–409页。 ISSN：2157-5045,1948-206X。 DOI：10.2140/apde.2012.5. 397。 URL：https://doi.org/10.2140/apde.2012.5.397。[15] Greenleaf, Allan、Iosevich, Alex、Liu, Bochen与Palsson, Eyvindur。《从群论视角看Erd¨os-Falconer问题与Mattila积分》。载于：《伊比利亚美洲数学杂志》31.3（2015年），第799–810页。 ISSN：0213-2230,2235-0616。 DOI：10.4171/RMI/854。 URL：https: //doi.org/10.4171/RMI/854。

[16] Greenleaf, Allan、Iosevich, Alex与Pramanik, Malabika。《论 $\mathbb{R}^d$的薄子集中的项链》。载于：《数学研究快报》24.2（2017年），第347–362页。 ISSN：1073-2780,1945-001X。DOI：10.4310/MRL.2017.v24.n2.a4。 URL：https://doi.org/10.4310/MRL.2017.v24. n2.a4。[17] Greenleaf, Allan、Iosevich, Alex与Taylor, Krystal。《具有非空内部的构形集》。载于：《几何分析杂志》31.7（2021年），第6662–6680页。 ISSN：1050-6926,1559-002X。 DOI：10.1007/s12220-019-00288-y。 URL：https://doi.org/10.1007/s12220-019-00288- y。[18] Greenleaf, Allan、Iosevich, Alex与Taylor, Krystal。《经由微局部分割优化得到构形集的非空内部》。载于：《数学杂志》306.4（2024年），论文编号66，20。ISSN：0025-5874,1432-1823。 DOI：10.1007/s00209- 024- 03466- z。 URL：https://doi. org/10.1007/s00209-024-03466-z。[19] Greenleaf, Allan、Iosevich, Alex与Taylor, Krystal。《论具有非空内部的 k点构形集》。载于：《Mathematika》68.1（2022年），第163–190页。 ISSN：0025-5793,2041-7942。DOI：10.1112/mtk.12114。 URL：https://doi.org/10.1112/mtk.12114。[20] Greenleaf, Allan、Iosevich, Alex与Taylor, Krystal。《在薄集中实现构形树》。载于：《太平洋数学杂志》335.2（2025），第355–372页。 ISSN：0030-8730,1945-5844。 DOI：10.2140/pjm.2025.335.355。 URL：https://doi.org/10.2140/pjm.2025.335.355。[21] Guth, Larry、Iosevich, Alex、Ou, Yumeng与Wang, Hong。《论平面上的Falconer距离集问题》。载于：《数学发明》219.3（2020年），第779–830页。 ISSN：0020-9910,1432- 1297。 DOI：10.1007/s00222-019-00917-x。 URL：https://doi.org/10.1007/s00222- 019-00917-x。[22] Harangi, Viktor。《不含给定角的大维数集合》。载于：《中欧数学杂志》9.4（2011年），第757–764页。 ISSN：1895-1074,1644-3616。 DOI：10.2478/s11533-011- 0043-x。 URL：https://doi.org/10.2478/s11533-011-0043-x。[23] Harangi, Viktor、Keleti, Tam´as、Kiss, Gergely、Maga, P´eter、M´ath´e, Andr´as、Mattila, Pertti与Strenner, Bal´azs。《多大的维数能保证给定的角？》载于：《数学月刊》171.2（2013年），第169–187页。 ISSN：0026-9255,1436-5081。 DOI：10.1007/s00605-012-0455-0。 URL：https://doi.org/10.1007/s00605-012-0455-0。[24] Iosevich, A.、Jardine, G.与McDonald, B.《 $\mathbb{F}_q^d$上距离图中任意长度的圈》。载于：《斯捷克洛夫数学研究所学报》314（2021年）。英文版发表于《斯捷克洛夫数学研究所学报》314（2021年），第1期，27–43，第31–48页。 ISSN：0371-9685,3034-1809。 DOI：10. 4213/tm4189。 URL：https://doi.org/10.4213/tm4189。[25] Iosevich, A.与Taylor, K.《 $\mathbb{R}^d$的薄子集中的有限树》。载于：算子理论与调和分析的现代方法。第291卷。《施普林格数学与统计学会议录》。施普林格，沙姆，2019年，第51–56页。 ISBN：978-3-030-26748-3; 978-3-030-26747-6。 DOI：10.1007/978-3-030-26748-3_3。 URL：https://doi.org/10.1007/978-3-030-26748-3_3。[26] Iosevich, Alex、Magyar, Akos、McDonald, Alex与McDonald, Brian。 $\mathbb{R}^d$中的VC维数与点构形。2025。arXiv: 2510 .13984 [math.CA]。 URL：https :/ / arxiv.org/abs/2510.13984。[27] Iosevich, Alex、Mourgoglou, Mihalis与Palsson, Eyvindur Ari。《论欧几里得空间的分形子集所确定的角》。载于：《数学研究快报》23.6（2016年），第1737– 1759页。 ISSN：1073-2780,1945-001X。 DOI：10.4310/MRL.2016.v23.n6.a8。 URL：https: //doi.org/10.4310/MRL.2016.v23.n6.a8。[28] Iosevich, Alex、Mourgoglou, Mihalis与Taylor, Krystal。《论距离集的Mattila-Sj¨olin定理》。载于：《芬兰科学院数学学报》37.2（2012年），第557–562页。 ISSN：1239- 629X,1798-2383。 DOI：10.5186/aasfm.2012.3732。 URL：https://doi.org/10.5186/ aasfm.2012.3732。

[29] Iosevich, Alex 和 Parshall, Hans. “在有限域向量空间中嵌入距离图”。载于：《韩国数学会会刊》56.6（2019），第 1515–1528 页。 ISSN: 0304-9914,2234-3008。 DOI: 10.4134/JKMS.j180776。 URL: https://doi.org/10.4134/JKMS.j180776.[30] Iosevich, Alex、Pham, Minh-Quy、Pham, Thang 和 Shen, Chun-Yen. “固定单形与抛物面上集合乘积的联系”。载于：《印第安纳大学数学杂志》74.3（2025），第 647–668 页。 ISSN: 0022-2518,1943-5258。[31] Lick, Don R. 和 White, Arthur T. “k-退化图”。载于：《加拿大数学杂志》22（1970），第 1082–1096 页。 ISSN: 0008-414X,1496-4279。 DOI: 10.4153/CJM-1970-125-1。 URL: https://doi.org/10.4153/CJM-1970-125-1.[32] Liu, Bochen. “一个 L^2 恒等式与固定点距离问题”。载于：《几何与泛函分析》29.1（2019），第 283–294 页。 ISSN: 1016-443X,1420-8970。 DOI: 10.1007/s00039-019-00482-8。URL: https://doi.org/10.1007/s00039-019-00482-8.[33] Lyall, Neil 和 Magyar, ´Akos. “距离图与上密度为正的集合（在$\mathbb{R}^d$中）”。载于：《分析与偏微分方程》13.3（2020），第 685–700 页。 ISSN: 2157-5045,1948-206X。 DOI: 10.2140/ apde.2020.13.685。 URL: https://doi.org/10.2140/apde.2020.13.685.[34] M´ath´e, Andr´as. “不含多项式构型的大维数集合”。载于：《数学进展》316（2017），第 691–709 页。 ISSN: 0001-8708,1090-2082。 DOI: 10.1016/j.aim.2017.01.002。 URL: https://doi.org/10.1016/j.aim.2017.01.002.[35] Mattila, Pertti. 傅里叶分析与豪斯多夫维数。第 150 卷。剑桥高等数学研究丛书。剑桥：剑桥大学出版社，2015年，第 xiv+440 页。ISBN: 978-1-107-10735-9。 DOI: 10.1017/CBO9781316227619。 URL: https://doi.org/10.1017/CBO9781316227619.[36] Mattila, Pertti. 欧几里得空间中的集合几何与测度。第 44 卷。剑桥高等数学研究丛书。分形与可整性。剑桥：剑桥大学出版社，1995年，第 xii+343 页。 ISBN: 0-521-46576-1; 0-521-65595-1。 DOI: 10.1017/CBO9780511623813。URL: https://doi.org/10.1017/CBO9780511623813.[37] Mattila, Pertti 和 Sj¨olin, Per. “距离测度与集合的正则性”。载于：《数学新闻》204（1999），第 157–162 页。 ISSN: 0025-584X,1522-2616。 DOI: 10.1002/mana.3212040110。URL: https://doi.org/10.1002/mana.3212040110.[38] Matula, David W. 和 Beck, Leland L. “最小末位排序、聚类与图着色算法”。载于：《计算机协会杂志》30.3（1983），第 417–427 页。 ISSN: 0004- 5411,1557-735X。 DOI: 10.1145/2402.322385。 URL: https://doi.org/10.1145/2402. 322385.[39] McDonald, Alex. “平面中点构型张成的面积”。载于：《美国数学会会刊》149.5（2021），第 2035–2049 页。 ISSN: 0002-9939,1088-6826。 DOI: 10.1090/proc/15348。 URL: https://doi.org/10.1090/proc/15348.[40] Ou, Yumeng 和 Taylor, Krystal. “分形背景下的有限点构型与正则值定理”。载于：《印第安纳大学数学杂志》71.4（2022），第 1707–1761 页。ISSN: 0022-2518,1943-5258。[41] Palsson, Eyvindur Ari 和 Romero Acosta, Francisco. “低维单形的 Mattila-Sj¨olin 定理”。载于：《数学年刊》391.1（2025），第 1123–1146 页。 ISSN: 0025-5831,1432-1807。 DOI: 10.1007/s00208-024-02948-z。 URL: https://doi.org/10.1007/s00208-024-02948-z.[42] Palsson, Eyvindur Ari 和 Romero Acosta, Francisco. “三角形的 Mattila-Sj¨olin 定理”。载于：《泛函分析杂志》284.6（2023），论文编号 109814，共 20 页。 ISSN: 0022-1236,1096- 0783。 DOI: 10.1016/j.jfa.2022.109814。 URL: https://doi.org/10.1016/j.jfa.2022.109814.[43] Peres, Yuval 和 Schlag, Wilhelm. “投影的光滑性、伯努利卷积与例外集的维数”。载于：《杜克数学杂志》102.2（2000），第 193–251 页。 ISSN:

0012-7094,1547-7398。 DOI: 10.1215/S0012-7094-00-10222-0。 URL: https://doi.org/10.1215/S0012-7094-00-10222-0.[44] Shmerkin, Pablo 和 Yavicoli, Alexia. “由 $\mathbb{R}^d$ 的子集确定的单形体积”。载于：《芬兰数学年刊》50.1（2025），第 97–108 页。 ISSN: 2737-0690,2737-114X。DOI: 10.54330/afm.159807。 URL: https://doi.org/10.54330/afm.159807. (T.Borges) Department of Mathematics, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA 19104, USA*Email address*: tborges@sas.upenn.edu(B. Foster) Department of Mathematics, Washington University in St. Louis, St. Louis, MO 63130,USA *Email address*: bfoster@wustl.edu(Y. Ou) Department of Mathematics, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA 19104, USA*Email address*: yumengou@sas.upenn.edu(E. Palsson) Department of Mathematics, Virginia Tech, Virginia, VA 24061, USA*Email address*: palsson@vt.edu (F. Romero Acosta) MSI, The Australian National University, ACT, Australia*Email address*: Francisco.Romero@anu.edu.au