用于波形设计与分析的切比雪夫多项式级数调频模型

Stephen P. Blackstock, [1, a] Amaro Tuninetti, [2, b] Dieter Vanderelst, [3, c] Laura N. Kloepper, [2, d] 和 Michael R. Haberman [1, e]1德克萨斯大学奥斯汀分校 *Walker*机械工程系，美国德克萨斯州奥斯汀，邮编 *78712*2新罕布什尔大学生物科学系，美国新罕布什尔州达勒姆，邮编 *03824*3辛辛那提大学生物科学系，美国俄亥俄州辛辛那提

arXiv:2603.01970v1 [eess.SP] 2 Mar 2026

（日期：2026年3月3日）

多项式相位信号（PPS）是声呐、雷达和通信领域中波形设计与分析的常用手段。它们也被应用于生物声学发射的建模，尤其是蝙蝠和齿鲸等回声定位动物的发射。本文提出一种新颖的多项式相位信号波形表述，利用切比雪夫多项式的若干特殊性质，如正交性、递推关系以及与三角函数的等价性。由此得到切比雪夫多项式调频（CPSFM）波形族，其在生物声学信号建模以及双曲线调频信号等非多项式相位信号的逼近中被证明十分有用。我们证明，CPSFM模型对傅里叶变换、卷积与相关运算以及模糊函数等基本连续时间信号处理函数具有紧凑的解析表达式。文中给出了利用CPSFM推导这些表达式的过程，并将其应用于墨西哥游离尾蝠生物声呐发射的分析。

[a]sblackstock@utexas.edu[b]
Amaro.Tuninetti@unh.edu[c]
vanderdt@ucmail.uc.edu[d]
laura.kloepper@unh.edu[e]
haberman@utexas.edu

I. 引言

调频（FM）波形在与雷达和声呐等遥感技术以及电磁和声学通信相关的工程应用中无处不在[1]，其中波形设计是一项以战术性能和效率为目标的工程任务。实际应用中常见的设计考虑包括发射功率效率与总能量、自相关特性、带宽以及多普勒敏感性[2]。对于通信应用，另一项考虑可能是信道分离，以便通过同一介质高效地发送和接收多路信息流，同时将干扰降至最低，参见Davies等人及其参考文献[3]。

调频信号在自然界中也十分常见，动物会利用它们进行交流和回声定位[4]。显然，动物不会像人类那样设计波形；相反，它们经过调谐的声学发射信号，是数百万年进化实验的结果[5]。然而，工程设计和进化都受到许多相同设计考量的驱动，因此这两种截然不同的设计路径产生了惊人相似的结果。正因如此，从波形工程的角度研究生物声呐发射引起了广泛关注。深入了解动物回声定位的神经学、生理学和行为学方面，有助于推动遥感波形设计的技术进步[6]。

本文提出了一种基于多项式频率调制的波形模型，该模型与波形设计和生物声学发射分析均有关。该模型十分简单，仅由少量参数表征；但这些参数所能表示的波形多样性却相当丰富。该模型的开发源于我们对密集蝠群中飞行的蝙蝠回声定位信号的研究；模型的简洁性使我们能够高效地表征数百万个独立叫声。

调频波形由幅度调制函数 $A(t)$ 和相位调制函数 (PMF) $\varphi(t)$ 表征。从数学上讲，这类波形可表示为以下解析形式

$$s(t) = A(t)\, e^{j\varphi(t)}, \tag{1}$$

其中， $\varphi(t)$ 与波形的频率调制函数 (FMF) $f(t)$ 的积分成正比，二者满足以下关系

$$\varphi(t) = 2\pi \int f(t)dt. \tag{2}$$

我们在此仅关注有限时长信号，其中 $A(t)$具有有限的时域支撑集。此外，我们将讨论范围限定为恒定振幅且单位能量的信号，使得

$$A(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right), \tag{3}$$

其中 T 为信号时长。我们将这种单位振幅、有限时长的调频信号称为“调频脉冲”，或简称“FM”。

$f(t)$的参数决定了调频信号的独特特性，而与其来源（声学、电学、电磁或机械）无关。在声学中，频率调制会产生许多熟悉的声音，例如啁啾声、警笛声、颤音、口哨声、音乐旋律等。

调频波形可分为两大数学类别：其频率调制函数为代数型的波形，以及其频率调制函数为超越型的波形。代数型调频波形包括应用广泛的线性调频（LFM）、双曲调频（HFM）和多项式调频。超越型的例子包括对数调频、指数调频和正弦调频（SFM）。后一类别还包括 Hague 最近提出的两种有趣变体，它们启发了本研究：多音正弦调频（MTSFM）[7] 和广义正弦调频（GSFM）[8]。MTSFM 波形族采用有限个正弦谐波构成的级数作为频率调制函数，而 GSFM 则规定其频率调制函数本身为线性调频波形。

多项式频率调制波形通常称为多项式相位信号（PPS），可用于分析和建模频率调制函数未知、但具有时频信息的调频信号。这类信号可能是简单的线性调频信号，例如常见的主动声呐发射；也可能是非线性调频信号，例如线性调频信号经加速目标反射产生的回波、鸟鸣，甚至鲸歌。对于非线性调频信号，根据魏尔斯特拉斯逼近定理，任何调频信号都可以逼近到任意

所需精度，而逼近信号可以是多项式相位信号[9]。在这种情况下，频率调制函数的参数就是有限阶多项式的系数。而构造波形本身所需的相位调制函数参数，则可根据式2通过多项式积分轻松计算得出。如果已知信号的时频分布（TFD），例如谱图，就可以对其进行分析，以揭示近似波形的频率调制函数参数[9–11]，随后可利用这些参数构造接收信号的无噪声原型、对该信号进行分类，或探究频谱和相关等信号变换。

仅给定离散时频分布，要经验性地估计定义 PPS 频率调制函数的多项式系数，是一项颇具风险的任务。一种简单的方法是对时频分布的峰值进行采样，然后使用线性最小二乘法（LLS）或加权线性最小二乘法（WLLS）求得多项式系数。然而，对于均匀间隔的数据点，采用 LLS 或 WLLS 进行多项式拟合容易出现数值不稳定性，进而导致高阶多项式的拟合效果较差。龙格现象[12], 就是这一问题的一个典型例子：采用 LLS 类方法进行拟合时，在待逼近函数定义域的边缘会产生振荡，且振荡幅度会随多项式阶数增加而呈指数增长。其实有一种更好的方法，即采用非均匀采样，并谨慎选择多项式基函数。在有限区间上对函数进行稳健多项式逼近的典型方法是切比雪夫逼近；对于高阶多项式拟合，只要被逼近的函数是解析函数，它就总能带来更小的 逼近误差[12], 。

本研究将多项式相位信号（PPS）波形的调制函数重新表示为切比雪夫多项式级数，并提出了切比雪夫多项式级数频率调制（CPSFM）波形类别。此外，本研究利用广义修正贝塞尔函数展开，推导了 CPSFM 波形的频谱、自相关、互相关和模糊函数的紧凑解析表达式，并提出了一种对这类信号进行参数化和分析的方法，可用于生物声学信号的波形设计与分析等应用。

本研究源于一个具体问题：对蝙蝠的回声定位发射信号进行建模。为此，我们寻求一种波形模型

1. 该方法便于且高效，可将记录到的发射信号的经验时频分布拟合为一个简单的解析表达式；该表达式由少量参数定义，用于描述非线性调频的频率调制函数，

2. 其参数以直观的方式对应于波形时频表示的显著特征，

3. 该模型可为傅里叶变换、自相关、互相关、卷积、多普勒处理和模糊函数等分析与信号处理任务提供闭式解，

4. 该模型可用于以任意所需精度近似任意调频波形，从而有效地将不符合第（1）、（2）或（3）点的波形转换为符合这些条件的波形。

上文第 3 点值得进一步讨论。许多信号处理函数都可表示为时域信号与其他时间函数乘积对时间的积分。这类积分往往难以甚至无法通过解析方法求得。例如，若 $s(t)$ 是一个单位模PPS，其连续傅里叶变换为：

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(j \sum_{n=0}^{N} c_n t^n\right) e^{-j2\pi f t} dt$$

对于 $N = 2$ （线性调频信号），其中涉及菲涅耳积分；当[13]的阶数更高时，解析求解很快就会变得难以处理。若能获得有限时长PPS傅里叶变换的解析解（即数学上的精确解），便可用于例如高效求得具有指定频谱的PPS的系数。因此，非常有必要重新表述PPS模型，使其傅里叶变换及其他信号处理函数能够得到解析表达式。第 II 节将介绍这种重新表述。

本文其余部分安排如下。第二节介绍切比雪夫多项式调频波形模型，包括回顾切比雪夫多项式及其级数，以及贝塞尔函数中的雅可比-安格展开；该展开在第三节的推导中发挥重要作用。第三节推导了此前难以获得的涉及多项式相位信号的常见信号处理函数的解析解，其中重要公式包括傅里叶变换（公式25）、模糊函数（公式 29）、自相关函数（公式34）和互相关函数（公式 35）。第四节给出了双曲调频信号的 CPSFM近似，以及将 CPSFM用于生物声纳信号建模的示例。最后，第五节总结 CPSFM波形模型，并展望其在信号分析和波形设计中的应用。

II. 切比雪夫 EV 多项式级数频率调制 (CPSF M)

所提出的波形模型基于切比雪夫多项式级数，这种级数因其在任意函数近似方面的实用性而广为人知[12]。

A. 切比雪夫多项式

鉴于本文所建立的波形模型广泛使用了切比雪夫多项式，我们首先简要回顾这一独特多项式及其相关性质。 n^{th} 切比雪夫多项式定义为

$$T_n(x) = \cos\left(n \operatorname{acos} x\right). \tag{4}$$

在本文中，采用代换 $x = \cos\theta$ 很方便，由此可得到 n^{th} 阶多项式的如下形式：

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta. \tag{5}$$

切比雪夫多项式的定义域通常限制为 $[-1, 1]$。在这一限制下，集合 $\{T_0, T_1, T_2, ...T_N\}$ 构成一个权函数为 $1/\sqrt{1-x^2}$的标准正交基，因此

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)\, T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & m = n = 0. \end{cases} \tag{6}$$

在 $[-1, 1]$的定义域内，切比雪夫多项式的值域也为 $[-1, 1]$。在此定义域和值域内， T_n 恰有 n 个零点，称为第一类切比雪夫节点；还有$n+1$ 个极值点（± 1），称为第二类切比雪夫节点。这些切比雪夫节点与正交性共同构成了切比雪夫多项式在函数逼近[12]中的核心优势。

与本文语境相关的切比雪夫多项式其他性质包括对称性： $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$，递推关系： $T_{n+1}(x) = 2x\, T_n(x) - T_{n-1}(x)$，其中 $n > 0$；以及积分： $\int T_n(x)\, dx = [(n-1)T_{n+1}(x) - (n+1)T_{n-1}] / [2(n^2-1)]$。

B. 切比雪夫多项式级数

由于切比雪夫多项式构成一个标准正交基，我们可以将任意函数表示为 $T_n(x)$ 的有限或无限线性组合，并赋予适当的权重 a_n。这种线性组合称为切比雪夫多项式级数（CPS），或简称切比雪夫级数。具体而言，只要将多项式的定义域限制在有限范围内，任意 N 阶多项式都可以写成 N 阶切比雪夫级数。多项式与切比雪夫级数之间这种一一对应的映射，对于本文的数学推导至关重要。

切比雪夫多项式级数的形式为

$$\Phi^N(x;\{a_n\}) = \sum_{n=0}^{N} a_n T_n(x) \tag{7}$$

其中， N是级数的阶数， $\{a_n\}$是级数系数 $\{a_0, a_1, ..., a_N\}$，而$T_n(x)$是切比雪夫多项式。

切比雪夫级数构成了一种稳健且数值稳定、计算简单高效的函数逼近框架，其系数也易于解释[12]。此外，它们还具有一个显著且极为实用的性质：截去高阶项后得到的级数，比任何其他截断阶数相同的多项式都更接近未截断的级数。也就是说，阶数为N的切比雪夫级数，最佳的阶数为$(N-1)$的多项式逼近，就是将原切比雪夫级数中N^{th} 对应的系数设为零[14]。相比之下，如果将同一个阶数为N 的切比雪夫级数表示为普通的阶数为N 多项式，那么截断至阶数$(N-1$通常会导致对原多项式的逼近效果很差。

有了这些定义和性质，我们引入一种基于切比雪夫多项式级数的波形模型，并将依托切比雪夫多项式级数的一些特定性质。

首先， N 阶切比雪夫多项式级数的积分是一个 $(N+1)$ 阶切比雪夫多项式级数，其系数由被积函数的系数通过以下关系确定：

$$\int \sum_{n=0}^{N} a_n T_n(x)\, dx = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{N+1} \alpha_n T_n(x) \tag{8}$$

其中， α_0 是任意积分常数， α_n 系数为

$$\alpha_n = \frac{1}{2n}(a_{n-1} - a_{n+1}),$$

根据切比雪夫多项式的积分性质。

其次，两个 CPS 之和显然仍是一个 CPS，其系数向量就是各自系数的和，即给定以下两个 CPS

$$\Phi_a(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n T_n(x), \quad \Phi_b(x) = \sum_{n=0}^{N} b_n T_n(x)$$

then

$$\Phi_a(x) + \Phi_b(x) = \sum_{n=0}^{N} (a_n + b_n) T_n(x) \tag{9}$$

最后，也是本文推导中最重要的一点：CPS 的定义域可以缩放和/或平移，从而得到另一个系数不同但阶数相同的 CPS，前提是修改后的定义域限制在区间 $[-1, 1]$ 内。具体而言，若

$$\Phi(\nu[x + \xi]) = \sum_{n=0}^{N} a_n T_n(\nu[x + \xi]), \tag{10}$$

then

$$\Phi(\nu[x + \xi]) = \tilde{\Phi}(x) = \sum_{n=0}^{N} \tilde{a}_{(\xi,\nu),n}\, T_n(x) \tag{11}$$

其中，修改后的系数 $\{\tilde{a}_{(\xi,\nu),n}\}$ 可通过计算 $\Phi^N(\nu[x + \xi])$ 在 $N + 1$ 零点 x_k 处的值来确定，这些零点位于

$$x_k = \cos\left(\frac{k + \frac{1}{2}}{N + 1}\,\pi\right), \quad k = \{0, 1, \ldots, N\}, \tag{12}$$

如下：

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{(\xi,\nu),0} &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \Phi(\nu[x_k + \xi]) \\ \tilde{a}_{(\xi,\nu),n} &= \frac{2}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \Phi(\nu[x_k + \xi])\, T_n(x_k). \end{aligned} \tag{13}$$

切比雪夫级数的这一缩放与平移特性，将用于推导信号处理函数的数学精确解；这类函数涉及时延和时间压缩/扩展，例如模糊函数。

C. 波形模型

现在，我们采用一个切比雪夫多项式级数作为有限时长解析信号的一般多项式相位信号的频率调制函数 T ，并使用式1、3 中给出的模型，使得

波形仅在区间 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 上非零，且能量为 1。根据式2，并结合对 $A(t)$ 的限制，我们可知，$s(t)$ 由 $f(t)$ 唯一确定，但相位可相差一个常数偏移。我们将此模型称为切比雪夫多项式级数频率调制，简称 CPSFM。

*1. CPSFM*模型

如上所述，我们将 N 阶CPSFM波形的频率调制函数定义为 $N-1$ 阶切比雪夫多项式级数：

$$g(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n T_n(x) \qquad -1 \le x \le 1. \tag{14}$$

这里，第一个系数 a_0 决定“载波”，即平均频率；第二个系数 a_1 表示时频空间中的整体斜率；而 $a_2 ... a_{N-1}$ 使我们能够叠加围绕线性函数的变化，从而构造任意的多项式频率调制。

为适应时间基 $\frac{-T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$ 任意的有限持续时间波形，我们通过以下方式将该时间基映射到 $[-1, 1]$：

$$x = \frac{2t}{T} \tag{15}$$

其中，T 和 t 分别是波形在自然时间基下的持续时间和时间轴，x 是持续时间为 2、范围为 $[-1, 1]$ 的归一化时间轴。时间归一化意味着频率也需要归一化：如果持续时间为 T 的波形，其频率调制函数具有 $f(t)$ 的形式，那么归一化后的频率调制函数为 $g(x = \frac{2t}{T}) = \frac{T}{2} f(t)$。为强调这一映射是使用切比雪夫多项式基的必要条件，在以下数学表达式中，我们将使用变量 x 和 g 分别表示归一化时间和归一化频率。

将式 2应用于式 14，可得波形的相位调制函数：

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 2\pi \int \sum_{n=0}^{N-1} a_n T_n(x) dt \\ &= \varphi_0 + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n T_n(x), \end{aligned} \tag{16}$$

其中 φ_0 是任意积分常数，表示平均相位。求得新的系数 α_n 需要利用切比雪夫多项式的递推关系和积分关系，从而得到 $n > 0$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{n}(a_{n-1} - a_{n+1}).$$

若不失一般性地假设平均相位为零（$\varphi_0 = 0$），则可将 CPSFM 的时域波形写为

$$\begin{aligned} s(x) &= \sqrt{2}\ \mathrm{rect}\left(\tfrac{x}{2}\right)\ e^{j\varphi(x)} \\ &= \begin{cases} \sqrt{2}\ \exp\left(j\sum_{n=1}^{N}\alpha_n T_n(x)\right), & -1 \le x \le 1 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned} \tag{17}$$

利用 公式 5 所依据的变量替换，可得到公式 17的另一种形式 ：

$$s(\cos\theta;\{\alpha_n\}) = \exp\left(j\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\cos n\theta\right) \qquad 0 \le \theta \le \pi \tag{18}$$

其中 $\{\alpha_n\}$表示 N维向量 $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N\}$，它对波形函数进行参数化。这种表述使 $s(x)$ 可以表示为广义贝塞尔函数的展开，从而便于对熟知的信号处理函数进行解析计算。这些函数定义为 $s(x)$ 与 x的其他函数乘积的积分。利用公式 18的广义雅可比-安格展开可得这些解析解，相关内容见第 IID节。

D. 雅可比-安格展开

1. 单变量

雅可比-安格展开是傅里叶正弦或余弦级数展开的一种特殊情况[15]，其关系式为：

$$e^{j\alpha\cos\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} j^m J_m(\alpha) e^{jm\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(j\alpha)\, e^{jm\theta}, \tag{19}$$

其中， $J_m(\alpha)$ 是第一类m 阶普通贝塞尔函数，最右侧的表达式是第一类m 阶修正贝塞尔函数，其自变量为 $j\alpha$

利用恒等式： $I_m(j\alpha) \equiv (-j)^n J_m(-\alpha)$。第二个等式中的表达式巧妙地消除了 j^m 振荡，并呈现出有用的对称性 $I_{-m}(j\alpha) = I_m(j\alpha)$。式19左侧是平凡的 1 阶 CPSFM，其相位调制函数是一个一阶切比雪夫多项式级数。该波形在 x =余弦 θ中是一个简单的正弦函数，其中 α 决定其频率。通常不将这种波形视为调频波形，因此我们关注阶数为 $N > 1$的 CPSFM 波形，这需要使用广义雅可比-安格展开。

2. 扩展到多变量

单变量雅可比-安格展开可通过以傅里叶余弦级数作为指数函数的自变量来加以推广：

$$\exp\left(j\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\cos n\theta\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathcal{I}_m(j\{\alpha_n\})\,e^{jm\theta} \tag{20}$$

其中 $\{\alpha_n\}$表示 N元向量 $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N\}$，系数 $\mathcal{I}_m$（$j\{\alpha_n\}$）为在 $j\{\alpha_n\}$[15]、[16]处求值的修正广义贝塞尔函数（M-GBFs）。该表述对任意 N均满足CPSFM模型，因此式18 可写为：

$$s(\cos\theta;\{\alpha_n\}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathcal{I}_m(j\{\alpha_n\})\,e^{jm\theta} \qquad 0 \le \theta \le \pi \tag{21}$$

系数 $\mathcal{I}_m$（$j\{\alpha_n\}$）可由修正广义贝塞尔函数定义的积分形式，或由将修正广义贝塞尔函数与广义贝塞尔函数联系起来的递推公式计算得到（见附录A）。

$s(\cos\theta)$的修正广义贝塞尔函数展开，是推导CPSFM的频谱（傅里叶变换）、自相关函数、互相关函数和模糊函数解析表达式的基础，如第三节所示。

III. 规范信号分析与处理函数

切比雪夫多项式级数频率调制波形的傅里叶变换、自相关、互相关和模糊函数均有解析解。这些都是设计主动雷达和声呐波形所必不可少的数学工具，也有助于对生物声呐发射信号进行建模，正如第 IVB 节所示。以下内容的详细推导见附录B。

A. CPSFM 频谱（傅里叶变换）

信号 $s(t)$ 的连续傅里叶变换为

$$S(f) = \mathcal{F}\{s(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt. \tag{22}$$

对于有限持续时长的信号，例如 $s(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)e^{j\varphi(t)}$，其频谱可写为

$$S(f) = \int_{-T/2}^{T/2} s(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt. \tag{23}$$

若 s 是 CPFSM 波形，并选取归一化时间和频率 $x = \frac{2}{T}t$ 及 $g = \frac{T}{2}f$，使得 $-1 \le x \le 1$，则可得如下表达式

$$\begin{aligned} S(g;\{\alpha_n\}) &= \int_{-1}^{1} \exp\left(j\sum_{n=1}^{N}\alpha_n T_n(x)\right) e^{-j2\pi gx}\, dx \\ &= \int_{0}^{\pi} \exp\left(j\sum_{n=1}^{N}\alpha_n \cos n\theta\right) e^{-j2\pi g\cos\theta}\, \sin\theta d\theta, \end{aligned} \tag{24}$$

其中使用了变量替换 $x = \cos\theta$。通过对广义修正贝塞尔函数进行展开，最终可得

$$S(g;\{\alpha_n\}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m\, \mathcal{I}_m(j\{\hat{\alpha}_n(g)\}), \tag{25}$$

其中

$$\gamma_m = \begin{cases} \frac{2}{1-m^2}, & m \text{ even} \\ \pm\frac{j\pi}{2}, & m = \pm 1 \\ 0, & m \text{ otherwise odd} \end{cases}$$

$$\hat{\alpha}_n(g) = \begin{cases} \alpha_n - j2\pi g, & n = 1 \\ \alpha_n, & n > 1. \end{cases}$$

因此，N 阶CPSFM的频谱（即连续傅里叶变换）由其 N 系数 $\{a_0, a_1, ..., a_{N-1}\}$ 和持续时间 T 以解析形式唯一确定，该持续时间规定了到归一化时间和频率的映射。由于任一多项式均可表示为切比雪夫级数，该结果可推广至任意有限持续时间的多项式相位信号。据作者所知，此前尚未给出任意阶多项式相位信号的傅里叶变换解析解。

B. CPSFM 的模糊函数

波形的模糊函数（AF）是评估声呐和雷达应用中发射波形距离分辨率性能与多普勒敏感性的有力工具[17]。对于窄带波形，或当观测者与目标之间的相对速度相对于波传播速度非常小时，模糊函数通常由窄带模糊函数近似，后者允许频移但不允许频率缩放。在声呐应用中，物体速度通常是传播速度中虽小但不可忽略的一部分，带宽可达一个倍频程或更大。在这种情况下，频率上的多普勒效应不能用简单的标量平移很好地近似；确切地说，它表现为频率轴的拉伸或压缩，这一点已纳入宽带模糊函数。本文将讨论限于宽带版本。

有限时长信号 $s(t)$的宽带模糊函数（AF）为00

$$\chi(\tau,\nu)=\frac{\sqrt{\nu}}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^{*}(t)\,s(\nu(t+\tau))dt, \tag{26}$$

其中，$\nu=\frac{1+\mu}{1-\mu}$、$\mu=\frac{v}{c}$为马赫指数，c为声速，v为相对速度。以$\frac{\sqrt{\nu}}{T}$归一化，其中T为波形持续时间，可确保$|\chi(\tau,\ \nu)|\leq 1$。

若 s 为 CPSFM，则使用归一化时间 $x=\frac{2t}{T}$ 和时延 $\xi=\frac{2\tau}{T}$，因此

$$\chi(\xi,\nu)=\frac{\sqrt{\nu}}{2}\int_{x_1}^{x_2} s^{*}(x)\,s(\nu(x+\xi))dx, \tag{27}$$

其中，边界 x_1 和 x_2 满足限制条件 $-1\leq x\leq 1$ 和 $-1\leq\nu(x+\xi)\leq 1$。将 $s(x)$表示为 CPSFM，可得

$$\begin{aligned}\chi(\xi,\nu;\{\alpha_n\}) &= \rho_{\xi,\nu}\frac{\sqrt{\nu}}{2}\\ &\times\int_{x_1}^{x_2}\exp\left(j\sum_{n=1}^{N}\left(\tilde{\alpha}_{(\xi,\nu),n}-\alpha_n\right)T_n(x)\right)dt,\end{aligned} \tag{28}$$

其中，$\{\tilde{\alpha}_n\}$ 是通过对自变量进行缩放和平移后得到的切比雪夫级数系数，如式11所示；$\rho_{\xi,\ \nu}=\exp\left(j\tilde{\alpha}_{(\xi,\nu),\ 0}\right)$表示由 ξ平移和 ν缩放引入的平均相位偏移，对于 $\xi\neq 0$ 和 $\nu\neq 1$通常不为零。

随着.....的变化　变量：　$x=\cos\theta,\quad T_n(\cos\ \theta)\ =\cos n\theta$，以及 M-GBFs 展开　　，

我们得到

$$\begin{aligned}\chi(\xi,\nu;\{\alpha_n\}) &= \rho_{\xi,\nu}\frac{\sqrt{\nu}}{2} \\ &\times \sum_{m=-\infty}^{\infty}\gamma_m(\theta_1,\theta_2)\,\mathcal{I}_m\Big(j\{\tilde{\alpha}_{(\xi,\nu),n}-\alpha_n\}\Big),\end{aligned} \tag{29}$$

其中

$$\begin{aligned}\gamma_m(\theta_1,\theta_2) &= \frac{1}{m^2-1}\Big[\Upsilon_m(\theta_1)-\Upsilon_m(\theta_2)\Big] \quad ,m\neq\pm1 \\ \gamma_{\pm1}(\theta_1,\theta_2) &= \frac{1}{4}\Big[e^{j2m\theta_2}-e^{j2m\theta_1}+j2m(\theta_1-\theta_2)\Big] \\ \theta_i &= \operatorname{acos} x_i\,,\ i\in\{1,2\} \\ x_1 &= \max\left(-1,-\frac{1}{\nu}-\xi\right) \\ x_2 &= \min\left(1,\frac{1}{\nu}-\xi\right) \\ \Upsilon_m(\theta) &= e^{jm\theta}(\cos\theta-jm\sin\theta).\end{aligned} \tag{30}$$

宽带模糊函数实际上是更一般的互模糊函数（CAF）的一个特例，它展示了多普勒如何影响两个信号的互相关。CAF的形式为

$$\chi_{ab}(\tau,\nu)=\frac{\sqrt{\nu}}{T}\int_{-\infty}^{\infty}s_a^*(t)\,s_b(\nu[t+\tau])dt, \tag{31}$$

其中， s_a 和 s_b 是两个不同的时域信号。如果这些信号是持续时间相同、相位调制函数形式如下的CPSFM波形

$$\begin{aligned}\varphi_a(x) &= \sum_{n=1}^{N}\alpha_n T_n(x) \\ \varphi_b(x) &= \sum_{n=1}^{N}\beta_n T_n(x),\end{aligned}$$

CAF的推导过程与模糊函数的推导过程相同，结果为

$$\begin{aligned}\chi_{ab}(\xi,\nu;\{\alpha_n\}) &= \rho_{\xi,\nu}\frac{\sqrt{\nu}}{2} \\ &\times \sum_{m=-\infty}^{\infty}\gamma_m(\theta_1,\theta_2)\,\mathcal{I}_m\Big(j\{\tilde{\beta}_{(\xi,\nu),n}-\alpha_n\}\Big),\end{aligned} \tag{32}$$

其中，参数 γ_m、θ_i、x_i、 $i\in\{1,2\}$，如式 30 所示，但 $\rho_{\xi、\nu}$现在为$\rho_{\xi、\nu}=\exp\Big(j\tilde{\beta}_{(\xi,\nu),0}\Big)$。

这些 AF 和 CAF 的解析表达式为两个特殊情形奠定了基础：自相关函数（ACF）和互相关函数（CCF）。

C. CPSFM自相关与互相关

自相关是一种广泛使用的信号处理工具，除其他用途外，它还能简洁地表征采用给定信号作为发射波形的主动声呐或雷达的性能。在理想条件下，对于基于脉冲压缩的遥感系统，它能将波形的能量“压缩”至最紧凑的形式，从而提供有关距离分辨率和不确定性的信息[17]。因此，我们希望得到 CPSFM 自相关函数的解析解，以便高效评估不同 CPSFM参数组合如何影响主瓣旁瓣比等性能指标。

自相关 函数为常模有限时长信号 $s(t)$的自相关函数：

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^*(t) s(t+\tau)\, dt, \tag{33}$$

其中 T 为波形持续时间，其倒数限定了条件 $|R(\tau)| \leq 1$。此表达式与式26相同，其中 $\nu = 1$，因此 CPSFM 自相关函数为

$$R(\xi; \{\alpha_n\}) = \frac{\rho_\xi}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m(\theta_1, \theta_2)\, \mathcal{I}_m\Big(j\{\tilde{\alpha}_{\xi,n} - \alpha_n\}\Big). \tag{34}$$

互相关是自相关更为灵活的近亲。它能高效地评估波形在非理想条件下的性能。这些条件包括噪声、多径和频谱整形等信道特性，以及频谱上重叠的竞争传输信号。互相关函数是设计主动声呐和雷达波形，以及分析生物声呐发射等被动记录信号的重要工具。

两个持续时间相同（ T）的信号 $s_a(t)$ 和 $s_b(t)$ 的互相关函数为

$$R_{ab}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s_a^*(t)\, s_b(t+\tau)\, dt\,.$$

此表达式与方程 31 相同，其中 $\nu = 1$，因此 CPSFM 的互相关函数为

$$R_{ab}(\xi; \{\alpha_n, \beta_n\}) = \frac{\rho_\xi}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m(\theta_1, \theta_2)\, \mathcal{I}_m\Big(j\{\tilde{\beta}_{\xi,n} - \alpha_n\}\Big). \tag{35}$$

IV. CPSFM的选定应用

A. 示例 1：双曲调频的CPSFM近似

双曲调频（HFM）波形是声呐和雷达领域众所周知的最优“多普勒容忍”波形，这意味着其匹配滤波响应在存在非零多普勒的情况下，距离分辨率的退化最小[18]。HFM 的频率调制函数为

$$f(t) = \frac{f_1\, f_2\, T}{(f_1 - f_2)\, t + f_2\, T}, \tag{36}$$

其中，f_1 和 f_2 分别为初始频率和终止频率，T 为波形持续时间。该函数虽然不是超越型函数，但无法表示为有限长度的多项式。不过，它可以通过切比雪夫多项式级数近似到任意所需的精度。因此，这种近似可得到模糊函数的闭式解，为评估近似的CPSFM阶数与多普勒容限之间的权衡提供了指标。

图1 展示了双曲调频（HFM）的模糊函数，以及CPSFM的低阶近似。请注意，$N = 2$ 情形就是线性调频（LFM），其斜率（即调频率）等于双曲调频的平均斜率。显然，线性调频的多普勒容限特性有很大不同，而 $N = 4$ 的表示与双曲调频非常相似。

为了量化 CPSFM 近似的多普勒容限特性，我们可以生成模糊函数的“多普勒切片”。对于特定的目标相对速度，这些切片呈现波形与其多普勒扭曲版本之间的互相关。图2显示了在空气中相对速度为 20 m/s 时，若干 HFM 波形 CPSFM 近似的多普勒切片。$N = 2$ CPSFM 与 HFM 相比，脉冲压缩输出明显退化（波形更宽、幅度更小），而 $N = 8$ CPSFM 则与 HFM 几乎完全相同。在几乎所有实际应用中，$N = 8$ 显然可以很好地替代实际的 HFM，而 $N = 4$ CPSFM 对某些应用来说也足够了。

在现代声呐和雷达发射系统中，人们不太可能认为 HFM 波形的某种近似在某方面优于数字采样的 HFM。不过，这个颇具学术性的示例有助于我们了解 CPSFM 模型如何应用于发射波形设计。

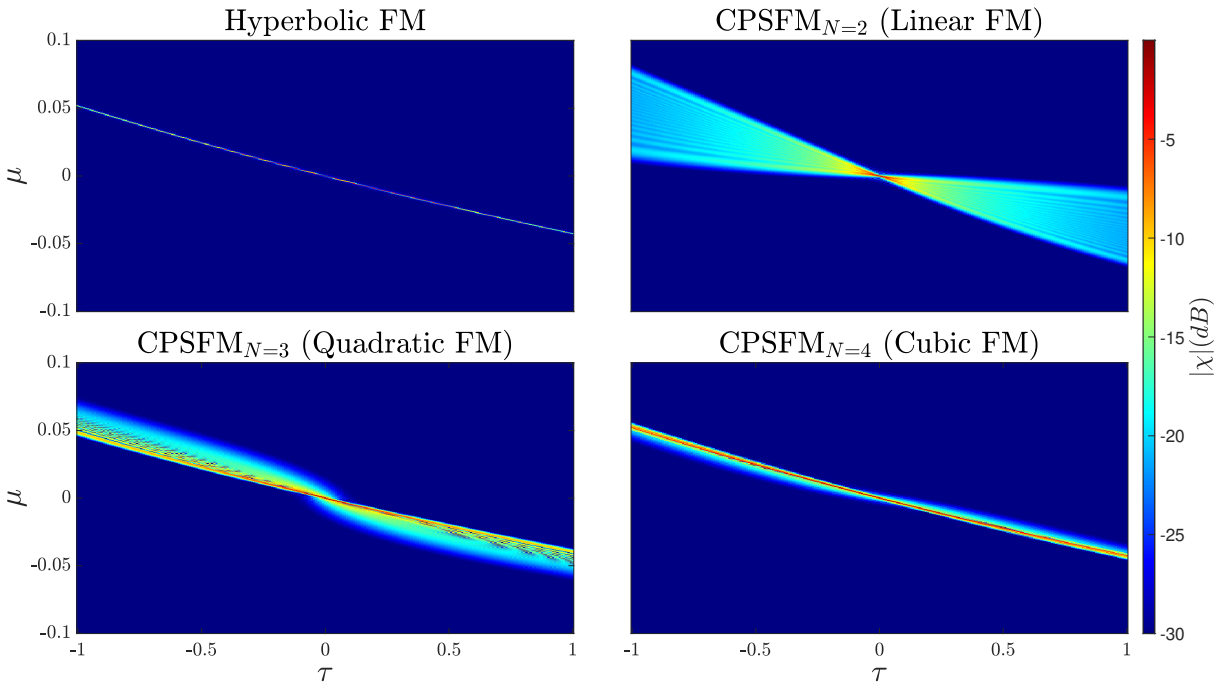


图1. HFM波形及三种CPSFM近似的模糊函数。二阶CPSFM是一种LFM，其表现不佳，信噪比和距离分辨率特性均显著下降。四阶CPSFM具有良好的多普勒容限。

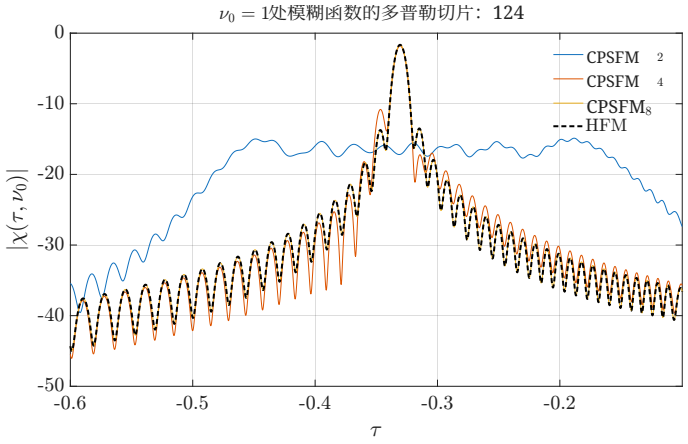


图2. 真实双曲调频及三种CPSFM近似在 $\nu_0 = 1.124$ 处的模糊函数多普勒切片。起始频率和终止频率分别为100kHz和200kHz，持续时间为2ms。所选多普勒系数对应的相对速度为20m/s。

B. 示例2：墨西哥游离尾蝠的生物声呐发声

前一示例的主题是波形设计。在本示例中，CPSFM模型将应用于波形分析问题。

。CPSFM波形的一项有趣用途，也是本文的主要研究动机，是对生物声呐发射进行建模。墨西哥游离尾蝠（*Tadarida brasiliensis*）生活在大型群落中，有时群落数量可达数百万只。每天傍晚，它们会从栖息地——洞穴或城市桥梁——飞出，利用声呐捕食昆虫。在飞出过程中，蝠群十分密集，蝙蝠似乎会利用声呐避免彼此相撞，也避免撞上其他障碍物（例如鹰[19]）。图 3 展示了2022年7月黄昏时，在新墨西哥州塞拉县的 Jordana 洞穴记录到的一群密集蝠群飞出时，其中两只蝙蝠（以及许多其他蝙蝠）的叫声频谱图。这些频谱图呈现出时频“脊线”，它们是信号能量瞬时频率在频谱图上的体现。在本文的处理过程中，我们使用轻度监督的 Canny边缘检测器[20], 对这些脊线进行时间和频率采样，然后通过加权线性最小二乘法，将采样点拟合为四阶切比雪夫多项式级数。选择四阶是基于对 1000 多个孤立叫声脊线结构的目视检查；这些脊线至多有一个临界点和两个拐点。对于此类函数，所需的最低多项式阶数为四阶。

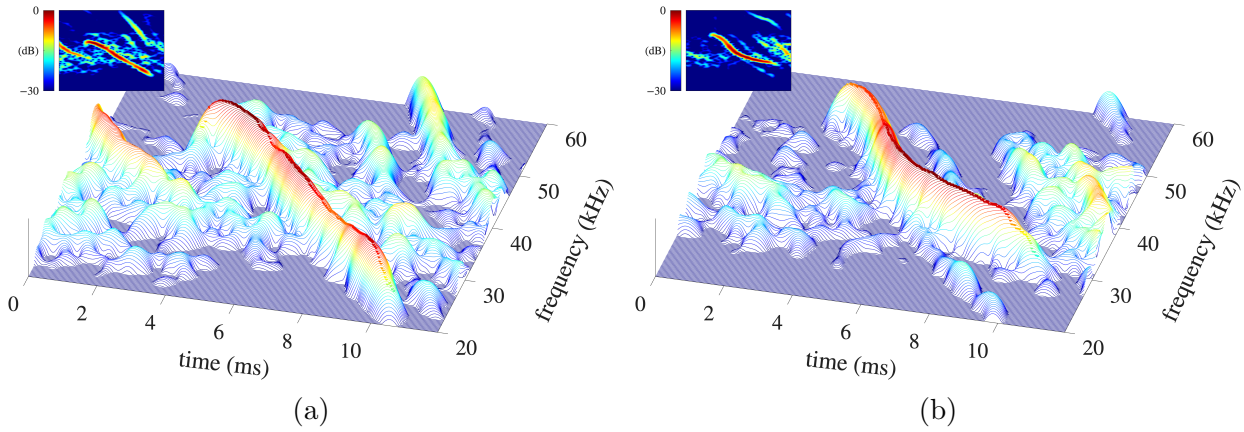
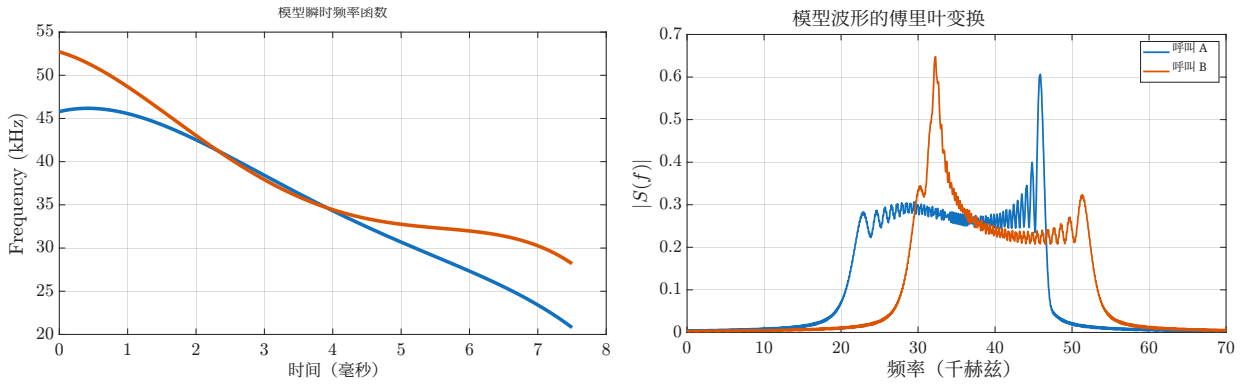


图3. 一群*Tadarida brasiliensis*回声定位发射录音中两段（a）和（b）的频谱图。请注意，坐标轴为未归一化的时间和频率 $\{t, f\}$，而非归一化的 $\{x, g\}$，以便更易于解读图示。

图 4 展示了 CPSFM 拟合所建模的瞬时频率函数及其频谱，频谱根据方程 25计算，其中 M-GBF 展开截断于$M = 1000$。这一截断限足以将误差降至机器精度。



(a) (b)

图 4. (a) 两个呼叫的 CPSFM 模型瞬时频率的四阶切比雪夫级数拟合。每个呼叫的持续时间约为 7.5 ms，扫过的带宽约为一个倍频程。所得切比雪夫级数的系数为 $\{a_n\}$ ={34.9629 -13.1297 -1.0060 0.6347 -0.6599}和 $\{b_n\}$ ={38.8165 -11.9987 2.6602 -0.2573 -1.0253}. (b) 两种模型波形的频谱，通过 M-GBF 展开计算得出。

在声呐和雷达应用中，自相关函数 (ACF) 表示发射该波形的系统的理想检测和测距性能[17]。图5 展示了每种 CPSFM 波形的自相关函数。图中还显示了呼叫 A 与呼叫 B 的互相关函数。该图说明，当存在个体 B 发出的信号时，个体 A 的声呐在检测和测距性能方面会受到怎样的影响。呼叫 B 实际上是一种带内“声呐干扰器”，但其调频函数形状上的细微差异，使个体 A 获得了近 12 分贝的抗干扰能力。图 5 中还将呼叫 A 与具有相同频谱的伪随机噪声进行互相关，作为参考。该结果表明，时频形状上的细微差异可能有助于干扰规避，使各只蝙蝠即使在其他回声定位蝙蝠存在时，也能正确识别回波。

图 6 展示了 s_a 和 s_b的模糊函数，其根据公式 25计算得出。这两种波形的多普勒容限显著不同，其中 s_b 即使在相对速度不高时，也会出现距离分辨率下降和距离模糊。

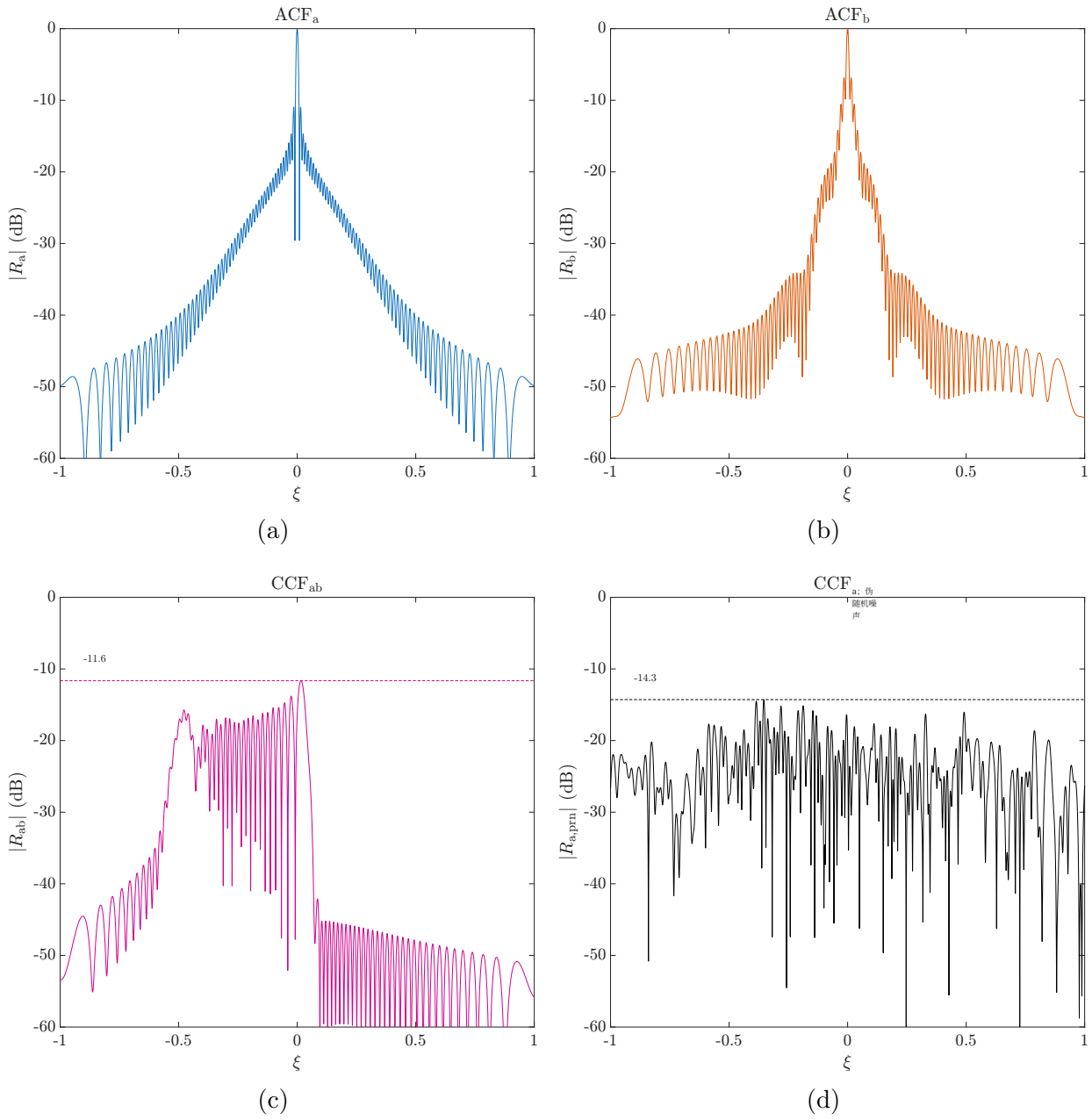


图 5. 两种模型波形的自相关和互相关函数。CCF 峰值相对于 ACF 衰减了 11.6 分贝，且宽得多。右下图显示波形 (a) 与伪随机噪声的互相关函数，该伪随机噪声的频谱幅度与波形 (a) 相同，其峰值响应衰减了 14.3 分贝。

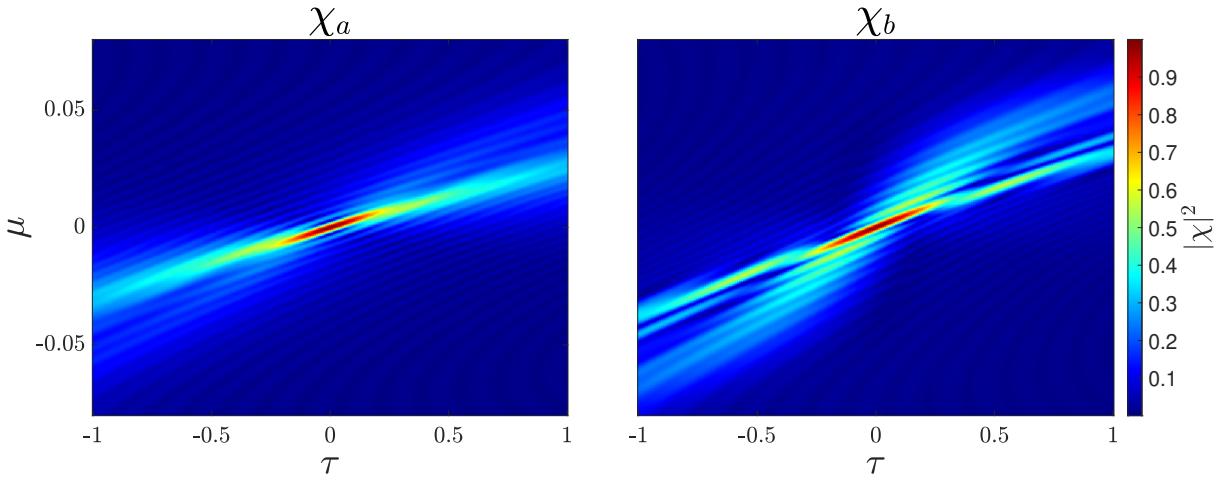


图6. 两个CPSFM模型波形的模糊函数，计算依据为式29。

V. 结论

本文对PPS模型进行了重新表述，提出了面向有限时长波形的CPSFM波形模型。CPSFM波形的特征在于其调制函数为切比雪夫级数，并且该形式被证明在数学上等价于修正广义贝塞尔函数展开。该展开使得能够推导任意阶CPSFM的傅里叶变换、模糊函数以及自相关和互相关函数的解析解，从而也适用于有限时长的任意阶多项式相位信号。

本文还给出了一个波形设计示例，展示了对HFM波形的CPSFM近似，并定量探讨了该近似精度与CPSFM阶数的关系。尽管将模型应用于波形设计超出了本文的范围，但从工程角度对该模型进行研究与发展很可能是富有成效的。

第二个示例展示了如何将CPSFM模型用于分析蝙蝠的回声定位信号，从而促进对主动声呐性能的定量评估，尤其是在存在干扰机的情况下。未来的研究将进一步探讨这一应用。

致谢

作者谨此感谢David A. Hague所作的贡献。他建议研究切比雪夫级数，这一建议至关重要；他在广义贝塞尔函数方面的专业知识和指导也弥足珍贵。作者还感谢Greg Allen和Terry Henderson投入大量时间审阅多份稿件。L.K.感谢美国国家科学基金会奖项#2034885和美国海军研究办公室奖项N000141410588提供的支持。A.T.获得了美国国家科学基金会生物学博士后研究奖学金奖项#2410301的资助。

作者声明

利益冲突

作者没有需要披露的利益冲突。

数据可用性

本研究结果所依据的数据可在提出合理请求后向通讯作者获取。

附录A：M-GBF计算

修正广义贝塞尔函数在广义雅可比–安格尔展开式中起到系数的作用：

$$\exp\left(j\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\cos n\theta\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathcal{I}_m(j\{\alpha_n\})e^{jm\theta}, \tag{A1}$$

其中， $\mathcal{I}_m$ 是 m阶修正广义贝塞尔函数。
计算这些系数的一种方法是依据M-GBF定义的积分形式：

$$\mathcal{I}_m(j\{\alpha_n\})=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos m\theta\exp\left(j\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\cos n\theta\right)d\theta. \tag{A2}$$

实际应用 方程 A2 的求解涉及数值积分，其中有限步长 o f

θ 必须随 m 的增加而减小。

另一种a 方法使用一组递推方程，这些方程将修正广义贝塞尔函数与贝塞尔函数联系起来[2] [1]:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_m(j\{\alpha_n\}) &\equiv \mathcal{I}_m(j\alpha_1, j\alpha_2, \ldots, j\alpha_N) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{I}_{m-Nk}(j\alpha_1, j\alpha_2, \ldots, j\alpha_{N-1}) I_k(j\alpha_N),\end{aligned} \tag{A3}$$

其中 I_k 是 k阶（单变量）修正贝塞尔函数。

由于 $\mathcal{I}_\epsilon$ 关于零相对于整数阶对称 ϵ，因此 $\mathcal{I}_{-\epsilon}(j\{\alpha\}) = \mathcal{I}_\epsilon(j\{\alpha\})$，式A3 等价地为

$$\mathcal{I}_m(j\{\alpha_n\}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{I}_{Nk-m}(j\alpha_1, j\alpha_2, \ldots, j\alpha_{N-1}) I_k(j\alpha_N). \tag{A4}$$

例如，对于相位调制函数为 $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{5} \alpha_n T_n(x) = \sum_{n=1}^{5} \alpha_n \cos n\theta$ 的4阶CPSFM，其修正广义贝塞尔函数系数的计算遵循如下递推：

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_m(\alpha_1) &= I_m(\alpha_1) \\ \mathcal{I}_m(\alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_{2k-m}(\alpha_1) I_k(\alpha_2) \\ \mathcal{I}_m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{I}_{3k-m}(\alpha_1, \alpha_2) I_k(\alpha_3) \\ \mathcal{I}_m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{I}_{4k-m}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) I_k(\alpha_4) \\ \mathcal{I}_m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{I}_{5k-m}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) I_k(\alpha_5).\end{aligned}$$

附录 B：解析解的推导

1. 傅里叶变换

信号 $s(x)$的连续傅里叶变换为

$$S(f) = \mathcal{F}\{s(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt. \tag{B1}$$

对于有限时长信号，例如 $s(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{\varphi(t)}$，其频谱可写为

$$S(f) = \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j2\pi ft} dt. \tag{B2}$$

如果 s 是 CPFSM 波形，并且我们选择归一化时间和频率 $x = \frac{2t}{T}$ 和 $g = \frac{f}{2T\gamma}$ 使得 $-1 \le x \le 1$，则所得表达式为

$$\begin{aligned} S(g;\{\alpha_n\}) &= \int_{-1}^{1} s(x) e^{-j2\pi g x} dx \\ &= \int_{-1}^{1} \exp\left(\sum_{n=1}^{N} j\alpha_n T_n(x)\right) e^{-j2\pi g x} dx \\ &= \int_{-1}^{1} \exp\left(-j2\pi g x + \sum_{n=1}^{N} j\alpha_n T_n(x)\right) dx. \end{aligned} \tag{B3}$$

变换核 $e^{j2\pi g x}$ 可以并入求和中，从而对切比雪夫级数稍作修改：

$$S(g;\{\alpha_n\}) = \int_{-1}^{1} \exp\left(\sum_{n=1}^{N} j\hat{\alpha}_n(g) T_n(x)\right) dx, \tag{B4}$$

其中

$$\hat{\alpha}_n(g) = \begin{cases} \alpha_n - j2\pi g, & n = 1 \\ \alpha_n, & n > 1. \end{cases} \tag{B5}$$

通过变量替换 $x = \cos\theta$，可得：

$$\begin{aligned} S(g;\{\alpha_n\}) &= \int_{\pi}^{0} s(\cos\theta) e^{-j2\pi g \cos\theta} d(\cos\theta) \\ &= \int_{0}^{\pi} \exp\left(\sum_{n=1}^{N} j\hat{\alpha}_n(g) \cos n\theta\right) \sin\theta d\theta. \end{aligned} \tag{B6}$$

被积函数的指数项可重新展开为修正广义贝塞尔函数的级数，其中大部分项可以从积分中提取出来：

$$S(g;\{\alpha_n\}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{I}_m(j\{\hat{\alpha}_n(g)\}) \int_{0}^{\pi} e^{jm\theta} \sin\theta d\theta. \tag{B7}$$

方程中的积分 B7可解得

$$\begin{aligned} \int_{0}^{\pi} e^{jm\theta} \sin\theta d\theta &= \frac{e^{jm\theta}(\cos\theta - jm\sin\theta)}{m^2 - 1}\Bigg|_{0}^{\pi} \\ &= \frac{e^{jm\pi} + 1}{m^2 - 1}. \end{aligned} \tag{B8}$$

通过洛必达法则可确定 $m=\pm1$ 的情况为 $\pm j\frac{\pi}{2}$。为简化记号，我们可以定义

$$\gamma_m \equiv \frac{(-1)^m+1}{1-m^2} \quad ,$$

由此可观察到

$$\gamma_m = \begin{cases} \frac{2}{1-m^2}, & m \text{ even} \\ \pm j\frac{\pi}{2}, & m=\pm1 \\ 0, & m \text{ otherwise odd.} \end{cases} \tag{B9}$$

方程B3 因此成立

$$S\big(g;\{\alpha_n\}\big) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m \mathcal{I}_m(j\{\hat{\alpha}_n(g)\}). \tag{B10}$$

2. 互模糊函数和自模糊函数

两个单位模信号 $s_a(t)$ 和 $s_b(t)$ 的宽带互模糊函数 (CAF) 为

$$\chi_{ab}(\tau,\nu) = \frac{\sqrt{\nu}}{T}\int_{-\infty}^{\infty} s_a^*(t)s_b(\nu(t+\tau))dt, \tag{B11}$$

其中，$\nu=\frac{1+\mu}{1-\mu}$、$\mu=\frac{v}{c}$（声音的马赫指数）、c 为传播速度，v 为相对速度。以 $\frac{\sqrt{\nu}}{T}$ 归一化，其中 T 为波形持续时间，可确保 $|\chi(\tau,\nu)|\le 1$。若 s_a 和 s_b 是持续时间相同的 CPSFM 波形，则使用归一化时间 $x=\frac{2t}{T}$ 和 $\xi=\frac{2\tau}{T}$，因此

$$\chi_{ab}(\xi,\nu) = \frac{\sqrt{\nu}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} s_a^*(x)s_b(\nu(x+\xi))dx, \tag{B12}$$

以及限制 ns $-1\le x\le 1$ 和 $-1\le \nu(x+\xi)\le 1$ 对积分施加有限积分限：

$$\chi_{ab}(\xi,\nu) = \frac{\sqrt{\nu}}{2}\int_{x_1}^{x_2} s_a^*(x)s_b(\nu(x+\xi))dx, \tag{B13}$$

其中

$$\begin{aligned} x_1 &= \max\left(-1, -\frac{1}{\nu}-\xi\right) \\ x_2 &= \min\left(1, \frac{1}{\nu}-\xi\right). \end{aligned} \tag{B14}$$

根据 CPSFM 的定义，式17

$$\begin{aligned} s_a^*(x) &= \exp\left(-j\varphi_a(x)\right) \\ s_b\big(\nu[x+\xi]\big) &= \exp\left(j\varphi_b(\nu[x+\xi])\right), \end{aligned} \tag{B15}$$

其中 φ_a 和 φ_b 满足

$$\begin{aligned} s_a^*(x) &= \exp\left(-j\sum_{n=1}^{N}\alpha_n T_n(x)\right) \\ s_b\big(\nu[x+\xi]x\big) &= \exp\left(j\sum_{n=1}^{N}\beta_n T_n\big(\nu[x+\xi]\big)\right). \end{aligned} \tag{B16}$$

根据公式11，公式B16 中的第二个切比雪夫级数可写为

$$\tilde{\beta}_0 + \sum_{n=1}^{N}\tilde{\beta}_n T_n(x) = \sum_{n=1}^{N}\beta_n T_n\big(\nu[x+\xi]\big), \tag{B17}$$

˜其中 β_0 表示由 ξ移位和 ν缩放 s_b引起的相移，通常不为零。现在公式B13 变为

$$\begin{aligned} \chi(\xi,\nu;\{\alpha_n,\beta_n\}) &= \rho_{\xi,\nu}\frac{\sqrt{\nu}}{2} \\ &\times \int_{x_1}^{x_2}\exp\left(j\sum_{n=1}^{N}\left(\tilde{\beta}_n-\alpha_n\right)T_n(x)\right)dt, \end{aligned} \tag{B18}$$

其中，相位偏移$\rho_{\xi,\ \nu}=\exp\left(j\tilde{\beta}_0\right)$。上下限 x_1，x_2在公式B14中定义，而参数化表示其对 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$的依赖关系。

变量替换：$x=\cos\ \theta$，$T_n(\cos\theta)=\cos\ n\theta$得到

$$\begin{aligned} \chi_{ab}(\xi,\nu;\{\alpha_n,\beta_n\}) &= \rho_{\xi,\nu}\frac{\sqrt{\nu}}{2} \\ &\times \int_{\theta_2}^{\theta_1}\exp\left(j\sum_{n=1}^{N}\left(\tilde{\beta}_n-\alpha_n\right)\cos n\theta\right)\sin\theta d\theta, \end{aligned} \tag{B19}$$

其中 $\theta_i=\operatorname{acos} x_i$, $i\in\{1,2\}$。（注意 $0\le\theta_2<\theta_1\le\pi$。）
被积函数的大部分适合用修正广义贝塞尔函数进行雅可比-安格展开：

$$\chi_{ab}(\xi,\nu;\{\alpha_n,\beta_n\}) = \rho_{\xi,\nu}\frac{\sqrt{\nu}}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathcal{I}_m\left(j\left\{\tilde{\beta}_n-\alpha_n\right\}\right)\int_{\theta_2}^{\theta_1}e^{jm\theta}\sin\theta d\theta. \tag{B20}$$

我们将 $\gamma_m(\theta_1,\ \theta_2)$ 定义为积分乘数，其结果为

$$\begin{aligned}\gamma_m(\theta_1,\theta_2) &= \gamma_m\left(\operatorname{acos} x_1, \operatorname{acos} x_2\right) \equiv \int_{\theta_2}^{\theta_1} e^{jm\theta}\sin\theta d\theta \\ &= \frac{1}{m^2-1}\Big[e^{jm\theta_1}(\cos\theta_1 - jm\sin\theta_1) \\ &\quad - e^{jm\theta_2}(\cos\theta_2 - jm\sin\theta_2)\Big] \quad , m \neq \pm 1.\end{aligned} \tag{B21}$$

这些情况 $m = \pm 1$ 可通过洛必达法则确定为

$$\begin{aligned}\gamma_{\pm 1}(\theta_1,\theta_2) &= \frac{1}{4}(1 - e^{j2m\theta} + j2m\theta)\Big|_{\theta_2}^{\theta_1} \\ &= \frac{1}{4}\Big[e^{j2m\theta_2} - e^{j2m\theta_1} + j2m(\theta_1-\theta_2)\Big].\end{aligned} \tag{B22}$$

最后，

$$\chi_{ab}(\xi,\nu;\{\alpha_n,\beta_n\}) = \rho_{\xi,\nu}\frac{\sqrt{\nu}}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\gamma_m(\theta_1,\theta_2)\mathcal{I}_m\Big(j\{\tilde{\beta}_n - \alpha_n\}\Big) \tag{B23}$$

自模糊函数（简称模糊函数）是指当 $s_a(x) = s_b(x)$时的互模糊函数：

$$\chi(\xi,\nu;\{\alpha_n\}) = \rho_{\xi,\nu}\frac{\sqrt{\nu}}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\gamma_m(\theta_1,\theta_2)\mathcal{I}_m\Big(j\{\tilde{\alpha}_n - \alpha_n\}\Big). \tag{B24}$$

参考文献

[1]S. D. Blunt 和 E. L. Mokole，《雷达波形多样性概述》，IEEE 航空航天与电子系统杂志**31(11)**，2–42 (2016)。

[2]C. E. Cook 和 M. Bernfeld，《雷达信号：理论与应用导论》，电气科学丛书（Academic Press，纽约，1967 年）。

[3]J. Davies、J. Dinale、P. Mitchell、H. Dol、P. Van Walree 和 I. Nissen，“面向声学通信（ACOMMS）波形—接收机性能评估的开放水下声学信道模型与工具”，载于*2024*年第七届水下通信与网络会议（*UComms*），IEEE（2024），第 1–4 页。

[4]J. W. Bradbury 和 S. L. Vehrencamp，《动物通信原理》，《动物通信》第 2 版（Sinauer Associates，桑德兰，马萨诸塞州，2011 年）。

[5]J. A. Simmons 与 R. A. Stein，“蝙蝠声纳中的声学成像：回声定位信号与回声定位的演化”，比较生理学杂志 **135(1)**，61–84（1980）。

[6]M. Vespe、G. Jones 与 C. J. Baker，“雷达的启示：回声定位哺乳动物中的波形多样性”，IEEE 信号处理杂志 **26**(1)，65–75（2009）。[7]D. A. Hague，“采用多音正弦频率调制的自适应发射波形设计”，IEEE 航空航天与电子系统汇刊 **57**(2)，1274–1287（2021）。[8]D. A. Hague 与 J. R. Buck，“用于主动声呐的广义正弦调频波形”，IEEE 海洋工程期刊 **42**(1)，109–123（2017）。[9]S. Peleg 与 B. Porat，“多项式相位信号的估计与分类”，IEEE 信息论汇刊 **37**(2)，422–430（1991）。[10]I. Djurovi´c、M. Simeunovi´c 与 P. Wang，“三次相位函数：多项式相位信号分析的一种简单解法”，信号处理 **135**，48–66（2017）。[11]A. Gershman、M. Pesavento 与 M. Amin，“传感器阵列中多个宽带多项式相位源的参数估计”，IEEE 信号处理汇刊**49**(12)，2924–2934（2001）。[12]L. N. Trefethen，逼近理论与逼近实践，应用数学其他书目；164，扩展版（工业与应用数学学会，费城，2020）。[13]A. Scaglione 与 S. Barbarossa，“论多项式相位信号的谱性质”，IEEE 信号处理快报 **5**(9)，237–240（1998）。[14]J. P. Boyd，切比雪夫与傅里叶谱方法（Courier Corporation，2001）。[15]P. Kuklinski 与 D. A. Hague，“多维广义贝塞尔函数的恒等式与性质”，arXiv 预印本 arXiv:1908.11683（2021）。[16]S. Lorenzutta、G. Maino、G. Dattoli、A. Torre 与 C. Chiccoli，“论无限变量贝塞尔函数”，《数学及其应用报告》（1981）**15**(3)，405–420（1995）。[17]D. W. Ricker，回波信号处理，第725卷（Springer 科学与商业媒体，2012）。[18]J. Yang 与 T. K. Sarkar，“双曲调频波形的多普勒不变性”，《微波与光学技术快报》**48**(6)，1174–1179（2006）。[19]L. Kloepper、G. Taylor、P. Domski、D. Vanderelst、K. Eveland 与 R. Stevenson，“HawkEar：一种用于窃听移动动物行为的鸟载视觉与声学平台”，《生态学与进化方法》 **15**(7)（2024）。

[20]J. Canny，“边缘检测的计算方法”，IEEE《模式分析与机器智能汇刊》**PAMI-8**，679–698（1986年）。

[21]G. Dattoli、C. Mari、A. Torre、C. Chiccoli、S. Lorenzutta 和 G. Maino，“M变量广义贝塞尔函数的解析与数值结果”，《科学计算杂志》**7(2)**，175–196（1992年）。+