arXiv:2603.01985v1 [math.AP] 2 Mar 2026

通过相对于平面集的双重覆盖和最小连接，将索伯列夫映射提升至闭黎曼流形，并应用于铁磁向列相

Giacomo Canevari、Federico Luigi Dipasquale、Bianca Stroffolini

摘要

我们研究从平面定义域映射到闭黎曼流形的索伯列夫映射，以及通过目标空间的二重覆盖得到的有界变差提升。我们建立了提升的跳跃长度的尖锐下界，并将其表示为一个几何量：相对于定义域的不可定向奇点的最小连接。作为应用，我们分析了混合边界条件下铁磁向列相二维模型的极小化子——也就是说，对液晶序参量施加狄利克雷条件，对磁化向量施加诺伊曼条件。

关键词： 提升问题、最小连接、拓扑奇点、Ginzburg-Landau 泛函、艾伦–卡恩方程。

2020年数学主题分类： 35Q56· 76A15·49Q15 ·26B30

设 $\mathcal{N}$, $\mathscr{E}$ 为闭黎曼流形，且 $\Pi\colon \mathscr{E} \to \mathcal{N}$ 是一个覆盖映射。提升问题探讨给定映射 $u\colon \Omega \to \mathcal{N}$（定义在定义域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 上）是否可以分解为 $u = \Pi \circ v$，其中 $v\colon \Omega \to \mathscr{E}$ 是一个具有相当正则性的提升。对于单连通区域上的连续映射，这一问题是经典问题；但在较弱的正则性框架下，例如 Sobolev 空间或有界变差空间中，其分析则复杂得多。研究最深入的情形是由 $\Pi(\theta) := e^{i\theta}$ 给出的覆盖映射 $\Pi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$；它自然出现在超导体的金兹堡–朗道理论等领域。对此情形的分析始于 [15, 14]，随后由 Bourgain、Brezis 和 Mironescu [17], 完成；他们全面刻画了分数阶索伯列夫空间 $W^{s,p}(\Omega; \mathbb{S}^1)$，在这些空间中，提升问题总有肯定答案（全面讨论另见 [19]）。

后续研究将这些结果推广到了 Besov空间 [39]以及更一般的目标流形 [13, 8, 42, 40]。即便在熟悉的 $W^{1,p}$空间情形下，并非所有 $W^{1,p}$-映射都存在 $W^{1,p}$-提升——至少在 $1 < p < 2$时如此；然而，所有有界变差映射都存在一个有界变差提升。对于经由指数映射 $\Pi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$的提升，这一事实最初由 Giaquinta、Modica 和 Souček [30]证明，后来 Davila 和 Ignat [26]以及 Merlet [37], 又采用不同的证明方法重新研究了这一问题。对于经由商映射 $\Pi\colon \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}\mathrm{P}^d$（它定义了实射影空间）的提升，这一结果由 Ignat 和 Lamy [33], 证明，Bedford [9]此前则得出了一些（部分）结果。文献 [24] 和 [25] 将结果推广到了更广泛的一类覆盖映射 $\Pi\colon \mathscr{E} \to \mathcal{N}$；另请参见 [10]，其中证明了圆值映射存在 GSBV 提升。

本文将注意力限定于定义在平面区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$上的映射，并聚焦于双重覆盖 $\Pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{N}$（定义见下文第 1.1 节）。我们考虑的典型例子是双重覆盖 $\Pi\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$，其复数表示为 $\Pi(z) := z^2$。这一映射自然产生于二维（向列）液晶的建模中。液晶是一类各向异性流体，其组成分子呈现长程取向有序，同时仍能够流动。在满足面内分子取向排列等适当条件时，薄向列层的状态可由一个从物理区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 映至集合 $\mathscr{N}$的映射表示，其中该集合由满足 $\mathrm{tr}\mathbf{Q} := Q_{ii} = 0$ 且 $|\mathbf{Q}|^2 := Q_{ij}Q_{ij} = 1$ 的实对称矩阵$\mathbf{Q}$ 构成。就物理意义而言，与$\mathbf{Q}$ 的唯一正特征值对应的特征子空间，编码了各点处优选的（无定向）分子方向。在此例中，集合 $\mathscr{N}$ 是一个光滑紧流形，与单位圆 $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$微分同胚。对于$\mathbf{Q}\colon \Omega \to \mathscr{N}$，一个提升（或定向）是指满足下式的向量场$\mathbf{n}\colon \Omega \to \mathbb{S}^1$

$$\mathbf{Q}(x) = \sqrt{2}\left(\mathbf{n}(x) \otimes \mathbf{n}(x) - \frac{\mathbf{I}}{2}\right) \tag{1}$$

对几乎处处的 $x \in \Omega$ 成立。这种向量场在几乎每一点生成对应于正特征值的$\mathbf{Q}$ 特征子空间。从数学角度来看，除去与微分同胚 $\mathbb{S}^1 \to \mathscr{N}$的复合，$\mathbf{M}$ 作为$\mathbf{Q}$ 的提升，就是对$\mathbf{Q}$的一个平方根的选取。

更一般地，给定闭黎曼流形之间的二重覆盖 $\Pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{N}$以及映射 $u\colon \Omega \to \mathscr{N}$, $v\colon \Omega \to \mathscr{E}$，我们称 v是 u经由 Π的一个提升，当且仅当对几乎处处的 $x \in \Omega$，有 $u(x) = \Pi(v(x))$。
[30, 26, 33, 24, 25] 中的结果表明，每个映射 $u \in W^{1,1}(\Omega, \mathscr{N})$ 都存在一个提升 $v \in \mathrm{SBV}(\Omega, \mathscr{E})$，但该提升不一定属于 $W^{1,1}(\Omega, \mathscr{E})$。我们的第一个结果给出了 v 的跳跃集长度的一个下界，该下界由 u 的不可定向奇点以及它们之间的极小连接决定。设 $a_1, \ldots a_p$是 Ω 中互不相同的点。我们将相对于 Ω 的 $\{a_1, \ldots, a_p\}$ 的一个连接定义为由有限条闭、非退化直线段 $\{L_1, \ldots, L_q\}$构成的集合，并满足以下性质：

(i) 每个 L_j 都包含于 Ω；

(ii) 对每个 j， L_j要么连接点 a_1、.....、 a_p 中的两个点，要么 L_j连接点 a_i与 $\partial\Omega$ 中的一个点；

(iii) 对每个 i，都存在奇数个 指标 j，使得 a_i 是 L_j的一个端点。

图1给出了一个例子。我们定义

$$\mathbb{L}^{\Omega}(a_1, \ldots, a_p) := \min\left\{\sum_{j=1}^{q} \mathscr{H}^1(L_j)\colon \{L_1, \ldots, L_q\} \text{ is a connection for } \{a_1, \ldots, a_p\} \textit{ relative to } \Omega\right\}. \tag{2}$$

如果$\{L_1, \ldots, L_q\}$ 是(2)式右端的极小化子，我们将称$\{L_1, \ldots, L_q\}$为$\{a_1, \ldots, a_p\}$ 相对于Ω的极小连接。这一极小连接概念使人联想到Brezis、Coron和Lieb [18], 所引入的概念，关键区别在于 [18]中的极小连接是定向的，而我们的则不是。在该设定中，点 a_i 被

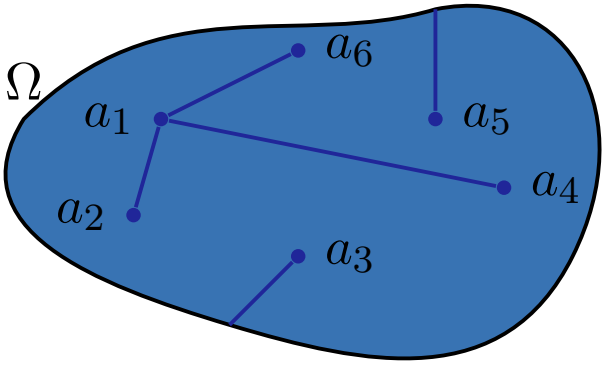


图1：相对于 Ω 的连接示例：$\{a_1 \ldots, a_6\}$。

赋予标签1或 -1，并且线段必须将一个正点与一个负点相连；相比之下，在我们的框架中，连接 a_i 中各点的所有线段都是可容许的。 [23], 中考虑了类似的非定向最小连接（或模二最小连接）概念，尽管在那里，不允许将 a_i 中的一点与 ∂Ω相连的线段，这一事实在 [23] 中是那里所考虑的特定狄利克雷边界条件的结果，这些条件特别保证了 p 为偶数，并结合了对Ω的凸性假设。

在下一个结果中，我们用 J$_v$ 表示映射 $v \in$ SBV(Ω $\mathbb{R}^2$) 的跳跃集，并用 $\mathscr{H}^1$ 表示一维豪斯多夫测度（即长度）。给定两个集合 $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$，当且仅当 $\mathscr{H}^1(A \setminus B) + \mathscr{H}^1(B \setminus A) = 0$ 时，我们记作 $A = B$ mod $\mathscr{H}^1$。我们的结论适用于映射 u: Ω $\to \mathscr{N}$，它们在有限个奇点之外局部属于 $W^{1,2}$；这些奇点可能是可定向的——大致而言，这意味着 u 在该奇点的某个邻域内存在索博列夫提升——也可能不是。关于可定向与不可定向奇点的更精确定义，见第 1.1 节。不过，在主要估计式 (3) 中，只有不可定向奇点起作用。

定理 1。 设 $\mathscr{N}$、 $\mathscr{E}$ 是闭的光滑黎曼流形，且 Π: $\mathscr{E} \to \mathscr{N}$ 是光滑二重覆盖映射。设 Ω $\subseteq \mathbb{R}^2$ 是一个有界的 C^2 类单连通域，并设 $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_r$ 是 Ω 中互不相同的点。设

$$u \in W^{1,1}(\Omega, \mathscr{N}) \cap W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega \setminus \{a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_r\}, \mathscr{N})$$

是一个映射，在每个 a_j 处都有一个不可定向奇点，在每个 b_h处都有一个可定向奇点。若 $v \in$ 特殊有界变差(Ω $\mathscr{E}$) 是 $\mathscr{E}$ 通过 Π 的一个提升，则

$$\mathscr{H}^1(\mathrm{J}_v) \geq \mathbb{L}^\Omega(a_1, \ldots, a_p). \tag{3}$$

当且仅当存在一个相对于 Ω 而言，针对 $\{a_1, \ldots, a_p\}$ 的极小连接 $\{L_1, \ldots, L_q\}$，使得 J$_v = \bigcup_{j=1}^q L_j$ 模 $\mathscr{H}^1$ 时，等式成立。

定理 1 推广了 [23], 中的命题A.1；该命题成立还需满足额外假设：Ω 是凸集，且 v 在 ∂Ω 的某个邻域内连续。直观而言，定理 1 源于这样一个拓扑观察：

提升的跳跃集 J_v 的边界点只能是 u 的不可定向奇点，或是 $\partial\Omega$ 中的点。然而，精确定义“跳跃集 J_v的边界”需要谨慎，因为标准的拓扑边界概念并不适用，而可求 rectifiable 集若没有额外结构，也没有自然的边界算子。在此情境下，更合适的概念是流意义下的模二边界，正如 [23]中所采用的。这里，我们避免明确提及流理论，而是依据 Ambrosio、Caselles、Masnou 和 Morel [3]关于有限周长平面集结构的一项结果。不过，这些论证仍隐含地依赖模二流的同调结构，这一点在引理 1.7 中表现得最为明显。

若 Π 是二重覆盖 $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$，定理 1 可能对液晶二维建模的某些相关问题具有潜在意义。在可能的应用中，我们提及 [6] 中研究的向列相弦缺陷离散模型，以及 [31, 5] 中的拓扑自由间断金兹堡–朗道模型（尽管后者也适用于任意有限阶的覆盖映射）。不过，此处我们聚焦于其在铁磁向列相中的应用。铁磁向列相是将磁性纳米颗粒悬浮于向列液晶基体中制成的复合材料 [20, 38]。我们采用 [16], 中基于两个序参量的建模方法。液晶分子的定向由朗道–德根$\mathbf{Q}$张量描述，它是一个从物理区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 映射到 $\mathscr{S}_0^{2\times 2}$中迹为零的 2×2对称实矩阵空间的映射。$\mathbf{Q}$ 的非零值对应于分子取向明确的构型，而$\mathbf{Q}=0$ 则表示各向同性态，此时各种分子取向方向出现的可能性均相同。磁性纳米颗粒的分布由平均磁化向量$\mathbf{M}$描述：$\Omega \to \mathbb{R}^2$。该系统由自由能泛函描述

$$\mathscr{F}_\varepsilon(\mathbf{Q},\mathbf{M}) := \int_G \left(\frac{1}{2}\,|\nabla \mathbf{Q}|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\,|\nabla \mathbf{M}|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} f_\varepsilon(\mathbf{Q},\mathbf{M}) \right) \mathrm{d}x, \tag{4}$$

其中 ε 是一个无量纲参数。液晶基体与磁性夹杂物之间的相互作用由势 f_ε 表示，其形式为

$$f_\varepsilon(\mathbf{Q},\mathbf{M}) := \frac{1}{4}\left(1-|\mathbf{Q}|^2\right)^2 + \frac{\varepsilon}{4}\left(1-|\mathbf{M}|^2\right)^2 - \varepsilon\beta\,\mathbf{Q}\mathbf{M}\cdot\mathbf{M} + \kappa_\varepsilon. \tag{5}$$

这里，$\beta>0$ 是给定的，κ_ε 是一个加性常数，仅依赖于 ε和 β，其选取满足 $\inf f_\varepsilon = 0$。类似于 (5) 的势能可由适当的均匀化极限 [21] 得到。当 β取正值时，势 f_ε 倾向于使液晶分子与磁化向量对齐。事实上，势 $f_\varepsilon(\mathbf{Q},,\mathbf{M})$ 在满足以下条件的配对 $(\mathbf{Q}_\varepsilon^{\mathrm{pot}},\,\mathbf{M}_\varepsilon^{\mathrm{pot}})$ 处取最小值

$$|\mathbf{M}_\varepsilon^{\mathrm{pot}}| = \lambda_{\varepsilon,\beta}, \qquad \mathbf{Q}_\varepsilon^{\mathrm{pot}} = \sqrt{2}\,s_{\varepsilon,\beta}\left(\frac{\mathbf{M}_\varepsilon^{\mathrm{pot}}\otimes\mathbf{M}_\varepsilon^{\mathrm{pot}}}{\lambda_{\varepsilon,\beta}^2} - \frac{\mathbf{I}}{2} \right) \tag{6}$$

其中 $\mathbf{I}$ 是 2×2 单位矩阵，$\lambda_{\varepsilon,\beta}$, $s_{\varepsilon,\beta}$ 是正数，由 ε和 β唯一确定，使得

$$\lambda_{\varepsilon,\beta} \to \left(\sqrt{2}\beta+1\right)^{1/2}, \qquad s_{\varepsilon,\beta}\to 1$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时（见 [23, 引理 B.2]）。我们研究 $\varepsilon \to 0$时的极限，这在物理上对应于“大定义域”情形（即定义域的大小远大于液晶分子的典型关联长度）。金兹堡-朗道型泛函的渐近分析表明，$\mathbf{Q}$分量的能量集中在有限多个点上，这些点对应于极限液晶构型的不可定向奇点。特别是，极小化子的$\mathbf{Q}$分量收敛到一个矩阵值映射，该映射不具有连续的正交特征标架。然而，由于耦合作用促使$\mathbf{M}$与$\mathbf{Q}$的特征向量对齐，$\mathbf{M}$分量的能量预计会沿奇异线集中，这些奇异线对应于特征向量标架的跳跃。

针对 $\mathscr{F}_\varepsilon$、同时满足 $\mathbf{Q}_\varepsilon$ 和$\mathbf{M}_\varepsilon$的狄利克雷边界条件的极小化子的渐近分析，已在论文 [23] 中完成。本文将考虑混合边界条件，即$\mathbf{Q}_\varepsilon$ 满足狄利克雷边界条件，而$\mathbf{M}_\varepsilon$满足齐次诺伊曼边界条件：

$$\mathbf{Q}_\varepsilon = \mathbf{Q}_{\mathrm{bd}}, \quad \partial_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{M}_\varepsilon = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega, \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{\nu}$ 是 Ω ∂的外单位法向量。接下来，我们假设边界数据$\mathbf{Q}_{\mathrm{bd}}$ （不依赖于 ε，且）具有如下形式

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{bd}} = \sqrt{2}\left(\mathbf{n}_{\mathrm{bd}} \otimes \mathbf{n}_{\mathrm{bd}} - \frac{\mathbf{I}}{2}\right) \qquad \text{on } \partial\Omega, \tag{8}$$

对于某个映射$\mathbf{n}_{\mathrm{bd}} \in C^2$($\partial\Omega$ $\mathbb{R}^2$)，该映射先验上完全独立于$\mathbf{M}_\varepsilon$在边界上的取值。我们假设定义域 Ω $\subseteq \mathbb{R}^2$ 有界、单连通且属于 C^2类，因此$\mathbf{n}_{\mathrm{bd}}$: $\partial\Omega$ $\to \mathbb{S}^1$ 具有定义良好的拓扑度，记为 $d \in \mathbb{Z}$。

下文中，我们用 ($\mathbf{Q}^\star_\varepsilon$,$\mathbf{M}^\star_\varepsilon$) 表示满足边界条件 (7) 的泛函 (4) 的一个极小化子。给定 Ω 中互异的点 $a_1, \dots, a_{2|d|}$，我们用 $\mathbb{W}(a_1, \dots, a_{2|d|})$ 表示它们的 Ginzburg–Landau 重整化能量，其定义见 Bethuel、Brezis 和 Hélein [12]（定义见第 2 节中的公式 (2.11)）。

定理 2. 设$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 是一个 C^2类有界单连通域。那么，存在一个（未重新标号的）子列、映射 $\mathbf{Q}^\star$: Ω $\to \mathscr{N}$、$\mathbf{M}^\star$: Ω $\to \mathbb{R}^2$ 以及Ω 中的互异点 $a^\star_1, \dots, a^\star_{2|d|}$，使得以下结论成立：

(i) $\mathbf{Q}^\star_\varepsilon \to \mathbf{Q}^\star$ 在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中对任意 $p < 2$强收敛；

(ii) $\mathbf{M}^\star_\varepsilon \to \mathbf{M}^\star$ 在 $L^p(\Omega)$ 中对任意 $p < +\infty$强收敛；

(iii) $\mathbf{Q}^\star$ 在每个点 $a^\star_j$ 处都有一个不可定向奇点，并且满足

$$\partial_j \left(Q^\star_{11}\, \partial_j Q^\star_{12} - Q^\star_{12}\, \partial_j Q^\star_{11}\right) = 0$$

以分布的意义在Ω中；

(iv) $\mathbf{M}^\star \in$ 特殊有界变差(Ω $\mathbb{R}^2$)，它满足 $|\mathbf{M}^\star|= (\sqrt{2\beta+1})^{1/2}$ 在Ω中几乎处处成立，并且($\sqrt{2\beta+1})^{-1/2}\mathbf{M}^\star$ 是$\mathbf{Q}^\star$的提升；

(v) 存在一个相对于Ω 的极小连接$(L_1,\ \ldots,\ L_{|d|})$，对应于$(a_1^\star,\ \ldots,\ a_{2|d|}^\star)$，使得J $\mathbf{M}^\star = \bigcup_{j=1}^{q} L_j$ 模 $\mathscr{H}^1$;

(vi) $(a_1^\star, \ldots, a_{2|d|}^\star)$ 使该函数取最小值

$$\mathbb{W}_\beta^\Omega(a_1,\ldots,a_{2|d|}) := \mathbb{W}(a_1,\ldots,a_{2|d|}) + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{2}\beta+1\right)^{3/2}\mathbb{L}^\Omega(a_1,\ldots,a_{2|d|})$$

在 Ω 中所有由互异点组成的 $(2\,|d|)$ 元组 $(a_1, \ldots, a_{2|d|})$ 之中。

定理 2 是 [23] 中定理 1 的一个变体。更一般地，定理 2 的第 (i)、(ii)、(iv) 项以及第 (iii) 项的一个稍弱变体，对于任意一列相对于 ε 势能等度有界的临界点序列均成立，无论是在如 [23] 中的纯狄利克雷边界条件下，还是在如 (7)、(8) 中的“混合”边界条件下。这是配套论文 [22]，中所进行的偏微分方程分析的结果；该分析还给出了 $\mathbf{Q}$ 与 $\mathbf{M}$ 二者改进的收敛结果，并将 $\mathbf{M}$ 部分的奇异集刻画为具有广义曲率、且支撑在 $\mathbf{Q}$ 部分奇异集上的 $\mathscr{H}^1$-可求长 varifold，而后者即使在这一更一般的情形下仍是一个有限点集。我们进一步指出，点缺陷以及连接它们的线缺陷也出现在其他变分模型中，例如 [6, 31, 5]。然而，这些问题的数学本质有所不同：在我们的情形中，点缺陷与线缺陷源于两个序参量的非平凡耦合；而在 [31, 5] 中，它们来自一个对跳跃施加拓扑约束的自由间断问题；在 [6] 中，则来自一个具有特定结构的离散变分问题。

本文其余部分组织如下。第 1 节专门用于定理 1 的证明。更确切地说，在回顾覆盖映射与索博列夫提升的若干预备材料（第 1.1 小节）并证明最小连接的若干关键性质（第 1.2 小节）之后，我们将定理 1 重新表述为关于有限周长集的一个陈述，即第 1.3 小节中的命题 1.10。在此过程中，我们按需要回顾有限周长集的定义与性质。在第 1.4 小节中，我们利用 [3]的结果证明命题 1.10。第 2 节专门用于定理 2 的证明。

1 提升与相对极小连接

1.1 黎曼流形的双重覆盖

首先，我们回顾（二重）覆盖映射的定义与基本性质。更多细节请读者参阅，例如 [32] 。设 $\mathscr{N}$、$\mathscr{E}$ 为两个闭的（即紧且无边界的）光滑黎曼流形。光滑映射 $\Pi\colon\ \mathscr{E}\to\mathscr{N}$称为 $\mathscr{N}$ 的二重覆盖，当且仅当对任意 $w\in\mathscr{N}$，存在 w 的开邻域 V 以及两个不相交的开集 U_1、$U_2\subseteq\mathscr{E}$，使得 $\Pi^{-1}(V)=U_1\cup U_2$，且限制 $\Pi_{|U_1}\colon\ U_1\to V$、$\Pi_{|U_2}\colon\ U_2\to V$为等距微分同胚。由此定义可知，任意点 $w\in\mathscr{N}$的逆像 $\Pi^{-1}(w)$恰好包含 $\mathscr{E}$的两个点。

注 1.1. 由于 $\mathscr{N}$是紧的，可以在覆盖的定义中选取 V、U_1、U_2 为具有统一半径的测地球。更精确地说，设 $B_0:=B_{\delta_0}^{\mathscr{N}}(w)$为测地开球

在 $\mathscr{N}$ 中，以 w 为中心、半径为 δ_0。存在足够小的 $\delta_0 > 0$，使得对任意 $w \in \mathscr{N}$，逆像 $\Pi^{-1}(B_0)$ 恰好由 $\mathscr{E}$ 中两个互不相交的测地球组成，记为 $B_1 = B^{\mathscr{E}}_{\delta_0}(z_1)$ 与 $B_2 := B^{\mathscr{E}}_{\delta_0}(z_2)$，并且限制 $\Pi_{|B_1}\colon B_1 \to B_0$、$\Pi_{|B_2}\colon B_2 \to B_0$ 是等距微分同胚。这由二重覆盖的定义得出，例如可通过反证并利用 $\mathscr{N}$ 的紧性来论证。

二重覆盖的典型例子是自然商映射 $\Pi\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$，它在严格包含于一个半球内的任意开集 $U \subseteq \mathbb{S}^n$ 上的限制是一一等距映射。当 $n = 1$ 时，实射影直线 $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$（等距地）微分同胚于单位圆，并且在与该微分同胚复合的意义下，Π 可等同于由 $\Pi(z) := z^2$（对 $z \in \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$）所定义的映射。

对任意二重覆盖 $\Pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{N}$，存在唯一的等距微分同胚 $\Phi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}$，使得

$$\Pi(\Phi(z)) = z, \qquad \Phi(z) \neq z \qquad \text{for all } z \in \mathscr{E}. \tag{1.1}$$

（例如，在 $\Pi\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 的情形中，$\Phi\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ 是对跖映射，$\Phi(z) := -z$。）对每个 $z \in \mathscr{E}$，$\Phi(z)$ 被定义为满足 $y \neq z$ 且 $\Pi(y) = \Pi(z)$ 的唯一点 $y \in \mathscr{E}$。Π 的定义蕴含 Φ 是局部等距映射，并且对每个 $z \in \mathscr{E}$ 有 $\Phi(\Phi(z)) = z$，因此 Φ 确实是一个（等距的、对合的）微分同胚。出于技术原因，在证明的某些点处，我们还需要一个辅助函数，我们将在下面的引理中引入它。

引理 1.1. 存在一个利普希茨函数 $\Xi\colon \mathscr{E} \times \mathscr{E} \to \mathbb{R}$，对任意 $z_1 \in \mathscr{E}$、$z_2 \in \mathscr{E}$，都满足以下性质：

$$\Xi(z_1, z_2) = 1 \qquad \textit{if and only if } z_1 = z_2 \tag{1.2}$$

$$\Xi(z_1, z_2) = -1 \qquad \textit{if and only if } z_1 = \Phi(z_2) \tag{1.3}$$

$$\Xi(z_1, z_2) = \Xi(\Phi(z_1), \Phi(z_2)). \tag{1.4}$$

例如，当 Π 是商映射 $\mathbb{S}^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 时，一个这样的函数 $\Xi\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ 可简单地定义为 $\Xi(z_1, z_2) := z_1 \cdot z_2$。

引理 1.1 的证明。取充分小的 $\delta_0 > 0$，紧集合 $K := \{(z_1, z_2) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}\colon \mathrm{dist}_{\mathscr{N}}(\Pi(z_1), \Pi(z_2)) \leq \delta_0\}$ 有两个连通分支：一个是 $K_+ := \{(z_1, z_2) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}\colon \mathrm{dist}_{\mathscr{E}}(z_1, z_2) \leq \delta_0\}$，另一个是 $K_- := \{(z_1, z_2) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}\colon \mathrm{dist}_{\mathscr{E}}(\Phi(z_1), z_2) \leq \delta_0\}$。（这是备注1.1的推论。）令 $\sigma(z_1, z_2) := 1$，其中 $(z_1, z_2) \in K_+$；并令 $\sigma(z_1, z_2) := -1$，其中 $(z_1, z_2) \in K_-$。我们定义

$$\Xi(z_1, z_2) := \sigma(z_1, z_2) \left(1 - \frac{1}{\delta_0} \mathrm{dist}_{\mathscr{E}}(\Pi(z_1), \Pi(z_2))\right)_+$$

对所有 $z = (z_1, z_2) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}$，其中 $t_+ := \max(t, 0)$ 是正部。不难验证，该函数具有所有所需的性质。 □

欧几里得嵌入与函数空间。根据纳什等距嵌入，我们可以将 $\mathscr{E}, \mathscr{N}$ 视为某些欧几里得空间（记为 $\mathscr{E} \subseteq \mathbb{R}^{\ell}$ 和 $\mathscr{N} \subseteq \mathbb{R}^{m}$）中的闭子流形。由于 $\mathscr{N}$,$\mathscr{E}$ 都是紧的，由黎曼度量诱导的测地距离函数 $\mathrm{dist}_{\mathscr{N}}$、$\mathrm{dist}_{\mathscr{E}}$ 与欧几里得距离等价。换言之，存在一个常数 C 使得

$$|w_1 - w_2| \leq \mathrm{dist}_{\mathscr{N}}(w_1, w_2) \leq C\,|w_1 - w_2|\,, \tag{1.5}$$

$$|z_1 - w_2| \leq \mathrm{dist}_{\mathscr{E}}(z_1, z_2) \leq C\,|z_1 - z_2|\,, \tag{1.6}$$

对任意 $w_1 \in \mathscr{N}$, $w_2 \in \mathscr{N}$, $z_1 \in \mathscr{E}$, $z_2 \in \mathscr{E}$。利用 $\mathscr{N}$, $\mathscr{E}$ 的光滑性和紧性，例如通过反证法，可以证明这些不等式。得益于 (1.5)、(1.6)，我们可以将 Π, Φ, Ξ 延拓为利普希茨映射 $\Pi\colon \mathbb{R}^{\ell} \to \mathbb{R}^{m}$, $\Phi\colon \mathbb{R}^{\ell} \to \mathbb{R}^{\ell}$, $\Xi\colon \mathbb{R}^{\ell} \times \mathbb{R}^{\ell} \to \mathbb{R}$（为方便起见，仍用相同符号表示）。我们定义如下函数空间

$$\mathrm{BV}(\Omega, \mathscr{N}) := \{u \in \mathrm{BV}(\Omega, \mathbb{R}^{m})\colon u(x) \in \mathscr{N} \text{ for a.e. } x \in \Omega\},$$

这是一个度量空间，其距离由 $\mathrm{BV}(\Omega, \mathscr{N})$ 中的范数诱导。我们以完全类似的方式定义其他函数空间，例如 $\mathrm{BV}(\Omega, \mathscr{E})$ 或 $W^{1,p}(\Omega, \mathscr{N})$。选择不同的嵌入，例如 $\mathscr{N}' \subseteq \mathbb{R}^{m'}$，得到的度量空间 $\mathrm{BV}(\Omega, \mathscr{N}')$ 与 $\mathrm{BV}(\Omega, \mathscr{N})$ 等价，即存在一个利普希茨映射 $\mathrm{BV}(\Omega, \mathscr{N}) \to \mathrm{BV}(\Omega, \mathscr{N}')$，其逆映射也是利普希茨映射。事实上，由于 (1.5)，等距微分同胚 $\psi\colon \mathscr{N} \to \mathscr{N}'$ 相对于环境空间 $\mathbb{R}^{m}$, $\mathbb{R}^{m'}$ 中的欧几里得距离，也是一个具有利普希茨逆映射的利普希茨映射。因此，根据链式法则（例如参见 [4, 定理 3.96]），与 ψ 复合会诱导出一个利普希茨映射 $\mathrm{BV}(\Omega, \mathscr{N}) \to \mathrm{BV}(\Omega, \mathscr{N}')$，其逆映射也是利普希茨映射。我们也可以完全以内在方式定义 $\mathrm{BV}(\Omega, \mathscr{N})$、$\mathrm{BV}(\Omega, \mathscr{E})$，而不必参照欧几里得嵌入（例如参见 [2] 中的度量空间方法），但对于我们的目的而言，不需要如此一般的框架。

可定向与不可定向奇点。我们回顾映射 $u\colon \Omega \to \mathscr{N}$ 的可定向与不可定向奇点这一概念。首先，假设 u 除有限个间断点 p_1、……、p_n 外均连续。给定连续映射 $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to \Omega \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$，若存在连续映射 $v\colon \mathbb{S}^1 \to \mathscr{E}$，使得对所有 $\omega \in \mathbb{S}^1$，$u(\gamma(\omega)) = \Pi(v(\omega))$，则称 u 在 $\gamma(\mathbb{S}^1)$ 上可定向。同伦提升性质（见 [32, 命题 1.30]）保证：对于任意闭环带 $B_R(a) \setminus B_r(a) \subseteq \Omega \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$，$u$ 要么在 $\partial B_R(a)$ 和 $\partial B_r(a)$ 上均可定向，要么在两者上均不可定向。因此，对于任意奇点 p_i，u 要么在所有足够小的 $\partial B_\rho(p_i)$ 上均可定向，要么在所有足够小的 $\partial B_\rho(p_i)$ 上均不可定向。相应地，我们称 p_i 是 u 的可定向奇点或不可定向奇点。同伦提升性质还意味着，可定向性在一致收敛下保持不变：若 $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是一列光滑映射，且在 $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to \Omega \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$ 的像上一致收敛，那么当 k 充分大时，u^k 在 $\gamma(\mathbb{S}^1)$ 上可定向，当且仅当极限映射 u 可定向。

情形 $u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}, \mathscr{N})$ 可由前面的讨论推出，这得益于以下稠密性结果（见 [44, 命题 p. 267]）。给定一个闭集 $K \subseteq \mathbb{R}^2$，我们用 $C^\infty(K, \mathscr{N})$ 表示函数集合 $K \to \mathscr{N}$：其中的函数都能在 U 的某个开邻域 $U \to \mathscr{N}$ 上作光滑延拓。

命题 1.2 ([44])。 对于任意有界利普希茨区域 $D \subseteq \mathbb{R}^2$，集合 $C^\infty(D, \mathscr{N})$ 在 $W^{1,2}(D, \mathscr{N})$ 中稠密。

现在，若 $u \in W^{1,2}\text{loc}(\Omega \setminus \{p_1, \dots, p_n\}, \mathscr{N})$，则根据 Fubini 定理和索博列夫嵌入 $W^{1,2}(\partial B_\rho(p_i)) \to C^0(\partial B_\rho(p_i))$，对每个 i 以及几乎所有半径值 $\rho > 0$，u 在圆 $\partial B_\rho(p_i)$ 上连续。由命题 1.2 和对角线论证，存在一列光滑函数 $u^k : \Omega \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \to \mathscr{N}$，在 $W^{1,2}\text{loc}(\Omega \setminus \{p_1, \dots, p_n\})$ 中收敛于 u。再次应用 Fubini 定理和索博列夫嵌入，可得对所有指标 i 及几乎所有半径 ρ，$u^k \to u$ 在 $\partial B_\rho(p_i)$ 上一致收敛。因此，当且仅当对充分大的 k，u^k 具有可定向性时，u 在 $\partial B_\rho(p_i)$ 上才具有可定向性。同伦提升性质表明，对于每个指标 i 及几乎所有 ρ_1，当 ρ_2 足够小时，u 在 $\partial B_{\rho_1}(p_i)$ 上具有可定向性，当且仅当其在 $\partial B_{\rho_2}(p_i)$ 上具有可定向性。因此，判断 p_i 是否为 u 的可定向奇点仍然是有意义的。

索博列夫提升。 如引言中所述，关于索伯列夫映射是否存在提升，已有若干结果。不过，我们在此回顾一些已有论证，因为这些论证对我们后续的工作会有所帮助。

引理 1.3. 设 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 是有界利普希茨区域，$u \in W^{1,2}(D, \mathscr{N})$，且 $u^k \in C^\infty(D, \mathscr{N})$ 满足 $u^k \rightharpoonup u$ 在 $W^{1,2}(D, \mathscr{N})$ 中弱收敛，并且几乎处处逐点收敛。对每个 $k \in \mathbb{N}$，令 $v^k \in C^\infty(D, \mathscr{E})$ 为 u^k 的一个提升。那么，我们可以抽取一个（不重新编号的）子序列，使得 $v^k \rightharpoonup v$ 在 $W^{1,2}(D)$ 中弱收敛，其中 v 是 u 的一个提升。

证明。 根据定义，覆盖映射 Π 是局部等距映射，即它在任意点 $x \in \mathscr{E}$ 处的微分，都是 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{N}$ 在 x 和 $\Pi(x)$ 处切空间之间的等距映射。由于映射 $w \in W^{1,2}(D, \mathscr{E})$ 的方向导数几乎处处都属于 $\mathscr{E}$ 的切空间，由链式法则可得

$$|\nabla w| = |\nabla(\Pi \circ w)| \qquad \text{a.e. in } \Omega \text{ for any } w \in W^{1,2}(D, \mathscr{E}). \tag{1.7}$$

特别地，对于所有 k，$|\nabla u^k| = |\nabla v^k|$。因此，序列 $(v^k)_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $W^{1,2}(D, \mathscr{E})$ 中有界，我们可以抽取一个子序列，使其在 $W^{1,2}(D)$ 中弱收敛，在 $L^2(D)$ 中强收敛，并且几乎处处收敛到某个极限 $v \in W^{1,2}(D, \mathbb{R}^\ell)$。通过取几乎处处的逐点极限，我们推得，对于几乎处处的 $x \in \Omega$，$v(x) \in \mathscr{E}$ 且 $u(x) = \Pi(v(x))$。 □

将引理 1.3 与命题 1.2 以及光滑提升的经典存在性结果（例如参见 [32, 命题 1.33]）相结合，我们得到 $W^{1,2}$-提升的存在性结果。例如，任意映射 $u \in W^{1,2}(D, \mathscr{N})$，只要定义在有界的利普希茨单连通域 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 上，就存在一个提升 $v \in W^{1,2}(D, \mathscr{E})$。这一结论在更高维的单连通域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 中仍然成立，但证明更为微妙；例如参见 [13]。此外，在 $W^{1,2}$ 中，提升在与 Φ 复合的意义下唯一。

引理 1.4。 设 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 为有界的利普希茨区域。设 $v_1 \in W^{1,2}(D, \mathscr{E})$ 和 $v_2 \in W^{1,2}(D, \mathscr{E})$ 是同一映射 $u \in W^{1,2}(D, \mathscr{E})$ 的提升。那么，要么 $v_1 = v_2$ 在 Ω 中几乎处处成立，要么 $v_1 = \Phi(v_2)$ 在 Ω 中几乎处处成立。

证明。 设 $w := \Xi(v_1, v_2)$，其中 Ξ 是引理 1.1 给出的函数。由于 Ξ 是利普希茨连续的，链式法则表明 $w \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R})$。此外，对于几乎处处的 $x \in \Omega$，都有 $\Pi(v_1(x)) = \Pi(v_2(x))$，因此，根据 (1.2)、(1.3)，$w(x) \in \{1, -1\}$。由于 $\{1, -1\}$ 是一个离散集，所以 w 必为常数。再次由 (1.2)、(1.3) 即得该引理。 □

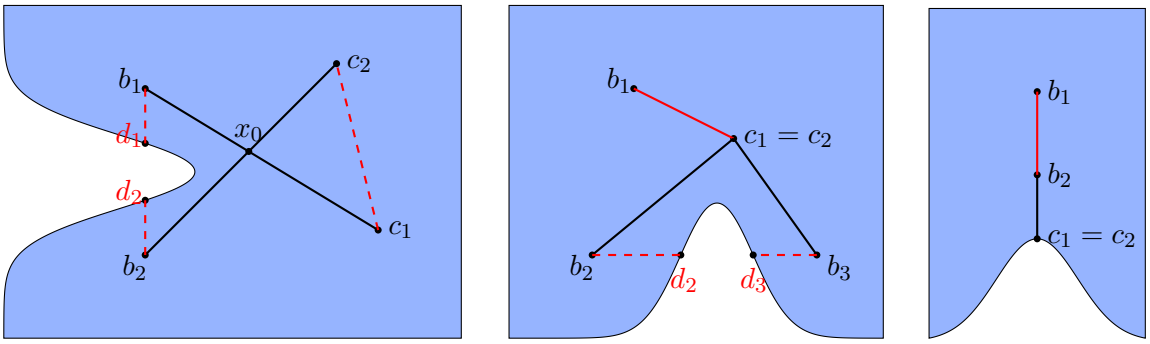


图2：引理1.6证明示意图。

1.2 极小相对连接的性质

我们归纳 这里先介绍一些关于极小连接的观察结果，后文将会用到。

引理1.5。 设$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$是一个有界的、属于 C^1 类的单连通域。设 $a_1, \dots a_p$是Ω中的互异点，并设 $\{L_1, \dots, L_q\}$ 是 $\{a_1, \dots, a_p\}$ 相对于Ω的极小连接。若 L_j 有一个端点 $b_j \in \partial\Omega$，则 L_j 在 b_j处与 Ω 正交。

证明。 设 a_j是 L_j中不在 $\partial\Omega$ 上的端点。根据$\{L_1, \dots, L_q\}$的极小性， b_j必定是函数 $f(x)$: $= |x - a_j|^2$在约束条件 $x \in \partial\Omega$ 下的极小化子。于是，由拉格朗日乘数定理可轻易推出该引理。□

引理1.6。 设$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$是一个有界的、属于 C^1 类的单连通域。设 $a_1, \dots a_p$是Ω中的互异点，并设 $\{L_1, \dots, L_q\}$ 是 $\{a_1, \dots, a_p\}$ 相对于Ω的极小连接。则线段 L_j 两两不相交。此外，对于每个满足 $a_i \in\Omega$的指标 i，恰有一个指标 j 使得 a_i 是 L_j的一个端点。最后，对于每个 j，交集 $L_j \cap \partial\Omega$ 要么为空，要么是 L_j的一个端点。

证明。 在整个证明过程中，我们用 $[a, b]$ 表示端点为 $a \in\mathbb{R}^2$、 $b \in \mathbb{R}^2$ 的直线段。反设 L_1、 ... ...、 L_q 并非两两不相交。举例来说，假设存在 $x_0 \in L_1 \cap L_2$，其中 $L_1 = [b_1, c_1]$、 $L_2 = [b_2, c_2]$ 不同。先假设 b_1、 c_1、 b_2、 c_2 互不相同（这对应图2a所示的情形）。于是，由三角不等式可得

$$|b_1 - b_2| + |c_1 - c_2| < |b_1 - x_0| + |b_2 - x_0| + |c_1 - x_0| + |c_2 + x_0| = |b_1 - c_1| + |b_2 - c_2|$$

如果 $[b_1, b_2]$, $[c_1, c_2]$ 包含在 Ω 中，那么簇 $\{L_3, L_4, \dots, L_q, [b_1, b_2], [c_1, c_2]\}$ 是相对于 Ω、连接 $\{a_1, \dots, a_p\}$ 的一组连接，其总长度小于 $\{L_1, \dots, L_p\}$，这不可能，因为 $\{L_1, \dots, L_p\}$ 是最小的。因此， $[b_1, b_2]$ 和 $[c_1, c_2]$ 中至少有一个必须包含 $\Omega\setminus \mathbb{R}^2$ 中的一个点。举例来说，设 $[b_1, b_2] \not\subseteq$ 属于 Ω，而 $[c_1, c_2] \subseteq$ 不属于 Ω。令 d_1, d_2 分别为 $[b_1, b_2] \cap \partial\Omega$ 中距离 b_1, b_2 最近的点。这些点存在，因为 $[b_1, b_2] \cap \partial\Omega$ 是紧的，而且它们是唯一的。根据定义， $[b_1, d_1]$ 和 $[b_2, d_2]$ 包含在 Ω 中，因此这个族

$\{L_3,\ L_4,\ \ldots\ldots,\ L_q,\ [b_1,\, d_1],\ [b_2,\, d_2],\ [c_1,\, c_2]\}$ 是相对于 Ω、连接 $\{a_1,\ \ldots\ldots,\ a_p\}$ 的一组连接，其总长度小于 $\{L_1,\ \ldots\ldots,\ L_p\}$ 的总长度。这与假设矛盾。如果 $[b_1,\, b_2]$ 和 $[c_1,\, c_2]$ 都不包含在 Ω 中，我们也可以用类似的方法得到矛盾。

尚需考虑点 b_1、 c_1、 b_2、 c_2 并非互异的情形，这意味着 L_1与 L_2 相交于一个公共端点。例如，设 $c_1 = c_2 = x_0$ 但 $b_1 \neq b_2$ （否则 L_1与 L_2将会重合）。假设 x_0是点 $a_1,\ \ldots\ldots,\ a_p$中的一个（见图2b）。由于该连接中以 x_0 为端点的线段条数为奇数，由定义可知，至少还有另一条线段 L_j 以 x_0为端点，记作 $L_3 = [b_3,\, x_0]$。若$[b_2,\, b_3] \subseteq$Ω，则$\{L_1, L_4, L_5, \ldots, L_q, [b_1,\, c_1], [b_2,\, b_3]\}$是 $a_1,\ \ldots\ldots,\ a_p$相对于Ω的一个连接，其总长度小于$\{L_1, \ldots, L_q\}$，矛盾。否则，如上所述，用包含于Ω中的更短线段 $[b_2,\, d_2]$、 $[b_3,\, d_3]$ 替换 $[b_2,\, b_3]$ ，即可得到矛盾。若 x_0是 $\partial\Omega$中的一点（如图2c所示），则由引理1.5， L_1 与 L_2 在 x_0处都必须与 $\partial\Omega$正交。由于 L_1 与 L_2 都必须包含于Ω中，而Ω在局部是一个正则函数的下图,–因此 L_1 与 L_2 中必有一条包含于另一条之内。于是，考虑$\{[b_1,\, c_1], L_3, L_4, \ldots, L_q\}$，它是$\{a_1, \ldots, a_p\}$相对于Ω的一个连接，并且破坏了$\{L_1, L_2, \ldots, L_q\}$ 的极小性，从而得到矛盾。这就证明了线段 $L_1,\ \ldots\ldots,\ L_p$ 两两不相交。

根据相对于 Ω 的连接的定义，对于每个 i with $a_i \in$Ω，必有奇数个指标 j ——因此至少有一个——使得 a_i 属于 L_j。由于 L_j 两两不相交，这样的 j 是唯一的。最后，如果 L_j 是一条与 $\partial\Omega$相交于多个点的线段，我们可以像上面那样，用更短的线段替换 L_j ，从而为 $\{a_1, \ldots, a_p\}$ 构造一个相对于 Ω 的连接，其总长度小于$\{L_1, \ldots, L_q\}$。 □

1.3 提升与有限周长集

给定一个 集合 $E \subseteq \mathbb{R}^2$，我们用 $\partial^* E$ 表示 E 的本质边界，其定义为 as

$$\partial^* E := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \colon \limsup_{\rho \to 0} \frac{|B_\rho(x) \cap E|}{\rho^2} > 0,\ \limsup_{\rho \to 0} \frac{|B_\rho(x) \setminus E|}{\rho^2} > 0 \right\}.$$

给定可测子集 $E \subseteq$Ω，我们将其相对于 Ω 的周长定义为

$$P(E,\, \Omega) := \sup \left\{ \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{V}(x)\, \mathrm{d}x \colon \mathbf{V} \in C_c^\infty(\Omega,\, \mathbb{R}^2),\ \|\mathbf{V}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \right\} < +\infty.$$

对于光滑集合， $\partial^* E = \partial E$，且周长 $P(E, \Omega)$ 与 Ω 的表面积 $\cap \partial E$ 相同，这由高斯–格林定理可得。更一般地，Federer 的一个结果 $[28,\ 4.5.11]$表明， $P(E, \Omega) = \mathscr{H}^1(\Omega \cap \partial^* E)$。如果集合 Ω 的边界光滑，或至少是利普希茨的，并且 E 相对于 Ω 具有有限周长，那么 E 在 $\mathbb{R}^2$中具有有限周长。（这由周长的定义得出，采用基于截断函数的局部化论证，而这些截断函数逼近 Ω 的示性函数。）由于下文中我们只关注正则区域 Ω 的子集，因此我们只会说集合“具有有限周长”，而不说明周长是相对于 Ω 还是 $\mathbb{R}^2$而言。

给定两个集合 A、 B，我们将用 $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ 表示它们的对称差。对称差与本质边界相容，如下述引理所精确表述。

L引理 1.7. 若 A、 B 为有限周长集，则 $A\triangle B$ 具有有限周长，并 d

$$\partial^*(A\triangle B) = \partial^* A\triangle\partial^* B \mod \mathscr{H}^1. \tag{1.8}$$

在本证明及后文中，我们用 J_w 表示函数 $w \in \mathrm{BV}(\Omega)$ 的跳跃集，并用 w^+、 w^- 表示 w 在跳跃集两侧的迹。（更多细节参见例如 [4, 第 3] 章。）我们将 w^+、 w^- 延拓为在 $\mathscr{H}^1$-几乎处处定义的函数 $\widetilde{w}^+$、 $\widetilde{w}^-$ ，令 $\widetilde{w}^+(x) := w^+(x)$， $\widetilde{w}^-(x) := w^-(x)$，其中 $x \in \mathrm{J}_u$ ，并且

$$\widetilde{w}^+(x) = \widetilde{w}^-(x) := \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{|B_\rho(x)|} \int_{B_\rho(x)} w(y)\,\mathrm{d}y$$

否则。根据 Federer-Vol'pert 定理（参见例如 [4, 定理 3.78]），对于 $\mathscr{H}^1$-几乎处处的 $x \in \Omega\backslash \mathrm{J}_w$, 该极限在 $\mathbb{R}$ 中存在。

引理 *1.7* 的证明。 这个引理本质上是 BV 函数链式法则的推论（参见例如 [4, 定理 3.96]）。事实上，设 $\chi_A \in$BV($\mathbb{R}^2$)、 $\chi_B \in$BV($\mathbb{R}^2$) 分别为 A、 B 的示性函数（即 $\chi_A := 1$ 在 A 中， $\chi_A := 0$ 在 $\mathbb{R}^2 \setminus A$ 中， χ_B 亦然）。跳跃集 J_{χ_A}、J_{χ_B} 分别等于 $\partial^* A$、 $\partial^* B$，除去 $\mathscr{H}^1$-零测集（参见例如 [4, 例 3.68]）。根据链式法则，函数

$$\chi_{A\triangle B} = \max(\chi_A, \chi_B) - \min(\chi_A, \chi_B)$$

属于 BV($\mathbb{R}^2$)，且其跳跃集在模 $\mathscr{H}^1$-零集的意义下，与满足下述条件的点集 $x \in \partial^* A \cup \partial^* B$ 重合

$$\begin{aligned}\max(\widetilde{\chi_A}^+(x), \widetilde{\chi_B}^+(x)) - \min(\widetilde{\chi_A}^+(x), \widetilde{\chi_B}^+(x))\\ \neq \max(\widetilde{\chi_A}^-(x), \widetilde{\chi_B}^-(x)) - \min(\widetilde{\chi_A}^-(x), \widetilde{\chi_B}^-(x)).\end{aligned}$$

通过直接检验可见，该条件成立当且仅当 $x \in \partial^* A\triangle\partial^* B$，至多除去 x 的一个 $\mathscr{H}^1$-可忽略集。 □

引理 1.7 表明存在一种潜在的同调结构。事实上，对称差 $\triangle$ 在模 $\mathscr{H}^1$-零集的意义下，于 $\mathbb{R}^2$中有限周长集合的类以及 $\mathbb{R}^2$的 1-可求 rectifiable 子集上诱导出阿贝尔群结构。等式 (1.8) 表明，本质边界 ∂^* 是一个群同态。要形成一个完整的同调理论，所缺的只是 $\mathbb{R}^2$中 1-可求 rectifiable 集的一个合适的边界概念。事实证明，这恰恰就是模二流意义下的边界概念（或等价地，系数在 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$中的平坦链）。

贯 穿第 1 节余下部分，我们固定 Ω 中互不相同的点 $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_r$ 和一个 m ap

$$u \in W^{1,1}(\Omega, \mathscr{N}) \cap W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega \setminus \{a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_r\}, \mathscr{N})$$

在点a_j 处具有不可定向奇点，在点 b_h处具有可定向奇点。我们还固定一个相对于Ω的、针对{a_1, …, a_p} 的极小连接 $\{L_1, \ldots, L_q\}$。我们首先构造 u 的提升 $v^\star$ ，其跳跃集是所有线段 L_j 的并。

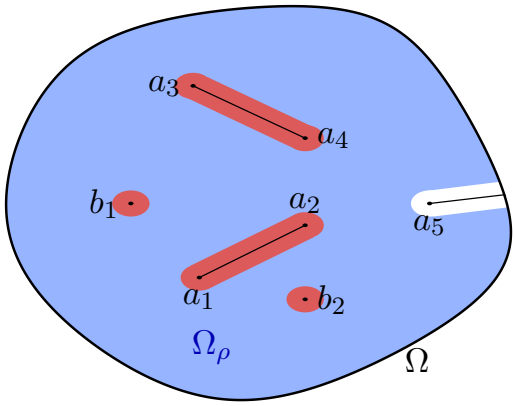


图3：引理1.8的证明中引入的集合Ω_ρ （蓝色）。集合 G_ρ 是Ω_ρ 与红色区域的并。

引理1.8。 给定上述的 u和 L_1、... L_q，存在一个提升 $v^\star \in$SBV(Ω $\mathscr{E}$)，使得 u

$$\mathrm{J}_{v^\star} = \bigcup_{j=1}^{q} L_j \qquad \mathrm{mod}\ \mathscr{H}^1. \tag{1.9}$$

证明。 我们按照 [23, 引理A.3]的思路进行。对于任意 $\rho > 0$和 $j \in \{1, \dots, d\}$，定义

$$U_{j,\rho} := \Big\{x \in \mathbb{R}^2 \colon \operatorname{dist}(x, L_j) < \rho\Big\}.$$

令 J为满足 L_j在Ω ∂中有一个端点的指标集合 $j \in \{1, \dots, q\}$，令

$$G_\rho := \{x \in \Omega \colon \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \rho\} \setminus \bigcup_{j \in J} U_{j,\rho}$$

and

$$\Omega_\rho := G_\rho \setminus \left(\bigcup_{j \notin J} U_{j,\rho} \cup \bigcup_{h=1}^{r} B_\rho(b_h) \right).$$

集合 G_ρ、Ω_ρ 如图3所示。当 ρ足够小时，集合 G_ρ 是一个具有Lipschitz边界的单连通域。此外，G_ρ 包含偶数个 u的不可定向奇点。事实上， G_ρ 内部的不可定向奇点 a_i 恰好是满足 $j \notin J$的 L_j 的端点。由于各个 L_j两两不相交（由引理1.6可知），这样的端点必为偶数个。特别地，当 ρ足够小时， u 在Ω_ρ 的每个边界分支上都是可定向的，并且在Ω_ρ内部属于 $W^{1,2}$ 类。

我们声称，对于几乎处处的 ρ，存在一个 $u_{|\Omega_\rho}$ 的提升 $v_\rho^\star \in W^{1,2}(\Omega_\rho, \mathscr{E})$。事实上，根据命题 1.2 和对角线论证，我们可以找到一列光滑映射

$$u^k \colon \Omega \setminus \{a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_h\} \to \mathscr{N}$$

它们在 $W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_h\})$ 中收敛于 u。由 Fubini 定理和索博列夫嵌入 $W^{1,2}(\partial\Omega_\rho) \to C^0(\partial\Omega_\rho)$，对于几乎处处的 ρ，我们还有在 $\partial\Omega_\rho$ 上的一致收敛 $u^k \to u$。因此，当 k 充分大时，u^k 在 $\partial\Omega_\rho$ 的每个连通分支上都是可定向的。根据光滑映射的经典提升结果（例如参见 [32, 命题 1.33]），可知 $u^k|_{\Omega_\rho}$ 存在一个光滑提升 $v^k_\rho\colon \Omega_\rho \to \mathscr{N}$。引理 1.3 使我们能够抽取一个（不重新编号的）子列，使得 $v^k_\rho \rightharpoonup v^\star_\rho$，其中 $v^\star_\rho \in W^{1,2}(\Omega_\rho, \mathscr{E})$ 是 u_{Ω_ρ} 的一个提升，正如所声称的那样。此外，对于 $0 < \rho_1 < \rho_2$，由于引理 1.4，我们有 $v^\star_{\rho_2} = v^\star_{\rho_1}$ 在 Ω_{ρ_2} 中几乎处处成立，或者 $v^\star_{\rho_2} = \Phi(v^\star_{\rho_1})$ 在 Ω_{ρ_2} 中几乎处处成立。因此，我们可以选取一个递减序列 $\rho_k \searrow 0$，并确保对于任意 k，$v^\star_{\rho_{k+1}} = v^\star_{\rho_k}$ 在 $\Omega_{\rho_{k+1}}$ 中几乎处处成立；必要时以 $\Phi(v^\star_{\rho_k})$ 替换 $v^\star_{\rho_k}$。通过粘接，我们定义一个提升

$$v^\star \in W^{1,2}_{\text{loc}}\left(\Omega \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{q} L_j \cup \{b_1, \dots, b_r\}\right), \mathscr{E}\right)$$

u。事实上，由于 $|\nabla v^\star| = |\nabla u|$ 几乎处处成立（见（1.7）），且根据假设，∇u 在 Ω 上可积，因此我们有 $v^\star \in W^{1,1}(\Omega \setminus \cup_{j=1}^q L_j, \mathscr{E})$。我们还有 $v^\star \in$ 特殊有界变差$(\Omega, \mathscr{E})$，因为 $\bigcup_j L_j$ 长度有限且 $v^\star$ 有界（见 [4, 命题 4.4]）。

只需证明（1.9）。根据构造，我们有 $\mathrm{J}_{v^\star} \subseteq \bigcup_j L_j$；我们声称 $\mathrm{J}_{v^\star}$ 包含 $\bigcup_j L_j$ 中几乎所有的 $\mathscr{H}^1$。这里的关键观察是，对于任意 $j \in \{1, \dots, q\}$，L_j 的至少一个端点是 u 的不可定向奇点。（这直接由相对连接的定义得出。）接着，应用 Fubini 定理，对于几乎所有 $x \in L_j$，我们都可以构造一个矩形 $K_x \subset\subset \Omega$，它恰好包含 u 的一个不可定向奇点（L_j 的一个端点），并且满足 $\partial K_x \cap (\bigcup_j L_j) = \{x\}$，$u \in W^{1,2}(\partial K_x, \mathscr{N})$，$v^\star \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\partial K_x \setminus \{x\}, \mathscr{E})$。在这样一个矩形的边界上，$u$ 是连续但不可定向的，也就是说，它没有连续提升。但由于 $v^\star$ 在 $\partial K_x \setminus \{x\}$ 上连续，因此必有 $x \in \mathrm{J}_{v^\star}$。因此，$\mathrm{J}_{v^\star}$ 包含 $\bigcup_j L_j$ 中几乎所有的 $\mathscr{H}^1$。

□

对于任意有限周长集合 $A \subseteq \Omega$，我们定义

$$\mathscr{L}_A := (\Omega \cap \partial^* A) \triangle \bigcup_{j=1}^{q} L_j. \tag{1.10}$$

图4给出了一个例子。我们回顾一下，极小连接 $\{L_1, \dots, L_p\}$ 已事先选定。

引理1.9。设 $\{L_1, \dots, L_q\}$ 是相对于Ω的 $\{a_1, \dots, a_p\}$ 的一个极小连接。对于 u 的任意提升 $v \in \mathrm{SBV}(\Omega, \mathscr{E})$，存在一个有限周长集合 $A \subseteq \Omega$，使得

$$\mathrm{J}_v = \mathscr{L}_A \qquad \mod \mathscr{H}^1. \tag{1.11}$$

反过来，给定任意有限周长集合 $A \subseteq \Omega$，存在一个满足(1.11)的提升 $v \in \mathrm{SBV}(\Omega, \mathscr{E})$。

作为证明的预备性说明，我们注意到，对于任意 $v \in \mathrm{SBV}(\Omega, \mathscr{E})$，以及 $\mathscr{H}^1$- 几乎处处的 $x \in \mathrm{J}_v$，有 $v^+(x) \in \mathscr{E}$, $v^-(x) \in \mathscr{E}$。事实上，迹 $v^+(x)$, $v^-(x)$ 满足

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\left|B^+_\rho(x)\right|} \int_{B^+_\rho(x)} \left|v(y) - v^+(x)\right| \mathrm{d}y = 0, \qquad \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\left|B^-_\rho(x)\right|} \int_{B^-_\rho(x)} \left|v(y) - v^-(x)\right| \mathrm{d}y = 0,$$

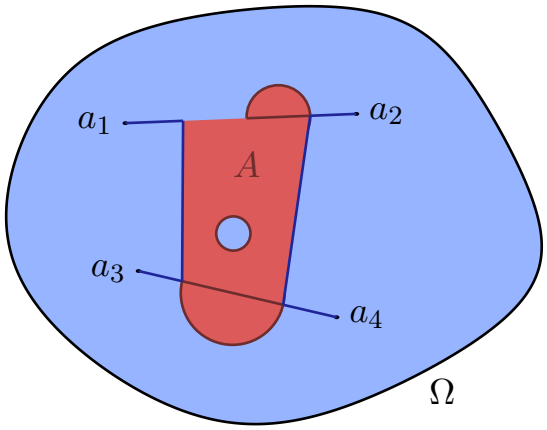


图4：(1.10)中定义的集合 $\mathscr{L}_A$ 。在此例中， A 是红色集合， $\mathscr{L}_A$ 由两条多边形路径（蓝色）组成，分别连接 a_1 与 a_3 、 a_2 与 a_4，此外还包括有限个环的并集。

其中 $B_\rho^+(x) := \{y \in B_\rho(x) : \ y\cdot \nu_v(x) \ > 0\}$， $B_\rho^-(x) := \{y \in B_\rho(x) : \ y\cdot \nu_v(x) \ < 0\}$，而 $\nu_v(x)$ 是跳跃集在 $x \in \mathrm{J}_v$ 处的单位法向量。由于 v 取值于 $\mathscr{E}$，我们有

$$\operatorname{dist}_{\mathbb{R}^\ell}(v^+(x), \mathscr{E}) \le \fint_{B_\rho^+(x)} \left|v(y) - v^+(x)\right| \mathrm{d}y \to 0 \qquad \text{as } \rho \to 0,$$

因此 $v^+(x) \in \mathscr{E}$，类似地， $v^-(x) \in \mathscr{E}$。

引理*1.9*的证明。设 $v^\star \in \mathrm{SBV}(\Omega;\mathscr{E})$是 u 的一个提升，满足(1.9)，如引理1.8所给出。设 $v \in \mathrm{SBV}(\Omega;\mathscr{E})$是同一映射 u的任意一个提升。设 $\Phi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}$如(1.1)所示。由于 $u \in W^{1,1}(\Omega;\mathscr{N})$没有跳跃集，BV函数的链式法则（例如参见 [4,定理3.96]）意味着 $\Phi(v^+(x)) = \Phi(v^-(x))$， $\Phi((v^\star)^+(x)) = \Phi((v^\star)^-(x))$分别在几乎处处的 $\mathscr{H}^1$-几乎处处点 $x \in \mathrm{J}_v$、 $x \in \mathrm{J}_{v^\star}$ 成立。根据定义，跳跃点处的迹彼此不同，因此我们必有

$$v^-(x) = \Phi(v^+(x)), \qquad (v^\star)^-(x) = \Phi((v^\star)^+(x)) \tag{1.12}$$

在 $\mathscr{H}^1$-几乎处处的点 $x \in \mathrm{J}_v$, $x \in \mathrm{J}_{v^\star}$ 处，分别如此。我们定义

$$w := \Xi(v, v^\star), \qquad A := \{x \in \Omega\colon w(x) = 1\},$$

其中 Ξ 是由引理 1.1 给出的函数。由于 v 和 $v^\star$ 都是同一映射 u的提升，我们必有 $w(x) \in \{-1,\ 1\}$，对几乎所有 $x \in \Omega$ 都成立。链式法则表明， $w \in$ 属于特殊有界变差(Ω)，并且 x 是 w 的跳跃点，当且仅当 x 是 v 或 $v^\star$ 之一的跳跃点——但不能两者同时成立，否则

$$w^+(x) = \Xi(v^+(x), (v^\star)^+(x)) \overset{(1.4)}{=} \Xi(\Phi(v^+(x)), \Phi((v^\star)^+(x)) \overset{(1.12)}{=} \Xi(v^-(x), (v^\star)^-(x)) = w^-(x).$$

换句话说，我们有

$$\mathrm{J}_w = \mathrm{J}_v \Delta \mathrm{J}_{v^\star} \qquad \mod \mathscr{H}^1.$$

考虑到 (1.9)，我们得到

$$\mathrm{J}_v = \mathrm{J}_w \Delta \mathrm{J}_{v^\star} = \mathrm{J}_w \Delta \bigcup_{j=1}^{q} L_j \qquad \mod \mathscr{H}^1. \tag{1.13}$$

另一方面，由于 $w \in \mathrm{BV}(\Omega, \{1, -1\})$，集合 A 具有有限周长，且

$$\mathrm{J}_w = \Omega \cap \partial^* A \qquad \mod \mathscr{H}^1 \tag{1.14}$$

（例如参见 [4, 例 3.68]）。综合起来，(1.13) 和 (1.14) 表明 A 满足 (1.11)。反过来，给定一个有限周长的 $A \subseteq \Omega$，我们定义

$$v(x) := \begin{cases} v^\star(x) & \text{if } x \in A \\ \Phi(v^\star(x)) & \text{if } x \in \Omega \setminus A \end{cases}$$

以及 $w := \Xi(v, v^\star)$，与之前一样。我们知道 $v^\star \in$ 属于特殊有界变差$(\Omega \ \mathscr{E})$，因此根据链式法则，$\Phi(v^\star) \in$ 属于特殊有界变差 $(\Omega \ \mathscr{E})$，且 A 具有有限周长；因此我们得出 $v \in$ 属于特殊有界变差 $(\Omega \ \mathscr{E})$（例如参见 [4, 定理 3.84]）。根据构造，v 是 u的一个提升，并且通过与之前相同的推理，我们推出 v 满足 (1.11)。 □

考虑到引理1.9，我们可以将定理 1 改述如下：

命题 1.10. 对于任意有限周长集合 $A \subseteq \Omega$，有

$$\mathscr{H}^1(\mathscr{L}_A) \geq \mathbb{L}^\Omega(a_1, \ldots, a_p). \tag{1.15}$$

等号成立，当且仅当存在另一个相对于 Ω 的极小连接 $\{S_1, \ldots, S_r\}$，使得

$$\mathscr{L}_A = \bigcup_{h=1}^{r} S_h. \tag{1.16}$$

定理 1 是命题 1.10 和引理1.9的直接推论。我们将根据 Ambrosio、Caselles、Masnou 和 Morel 的一个结果推导命题 1.10 [3], ，该结果描述了有限周长平面集的边界。回顾一下，如果存在一个连续函数 γ: $[a, b] \to \mathbb{R}^2$，它在 $[a, b)$ 上是单射，满足 $\gamma(a) = \gamma(b)$，且使得 $C = \gamma([a, b])$，那么集合 $C \subseteq \mathbb{R}^2$ 就称为若尔当曲线。具有 $\mathscr{H}^1(C) < +\infty$ 的若尔当曲线 C 称为可求长若尔当曲线。可求长若尔当曲线存在一个利普希茨参数化（例如参见 [3, 引理 3]）。

定理1.11. 设 E 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个有限周长子集。则存在一个分解

$$\partial^* E = \bigcup_{i=0}^{+\infty} C_i \quad \mod \mathscr{H}^1$$

成可数多条可求长若尔当曲线 $\{C_i\}_{i \geq 0}$，使得

$$P(E, \mathbb{R}^2) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathscr{H}^1(C_i). \tag{1.17}$$

定理1.11是 [3] 中推论1的直接推论。后者实际上对有限周长平面集的边界提供了更为详细的描述，但此处给出的陈述已足以满足我们的目的。接下来证明命题 1.10。

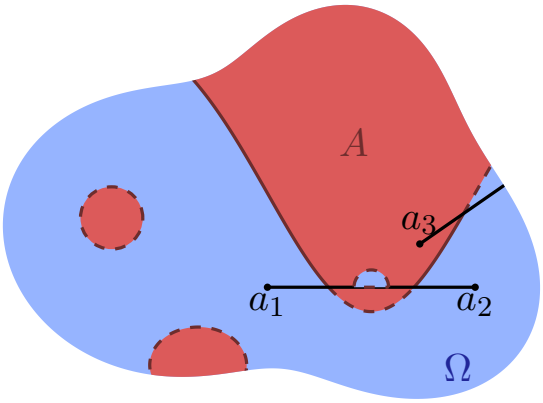


图5：集合 A（红色）及其弧。本质弧以实线表示，非本质弧以虚线表示。

1.4 命题 1.10 的证明

设 $A \subseteq \Omega$ 是一个有限周长集。应用定理1.11，我们将 $\partial^* A$ 分解为可求长若尔当曲线的可数并，$\partial^* A = \cup_{i=0}^{+\infty} C_i \bmod \mathscr{H}^1$，这些曲线满足 (1.17)。设 $\gamma_i\colon [0,1] \to \Omega$ 是 C_i 的 Lipschitz 参数化，在 $[0,1)$ 上为单射，并满足 $\gamma_i(0) = \gamma_i(1)$。对每个 i，集合 $(\gamma_i)^{-1}\left(\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{q} L_j\right)$ 是开集，因此可写成可数个互不相交的相对开区间之并，记作

$$(\gamma_i)^{-1}\left(\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{q} L_j\right) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} I_{ik}$$

这里，每个 I_{ik} （其中 $k \geq 1$ ）都是一个（可能为空的）开区间，形式为 $I_{ik} = (a_{ik}, b_{ik})$，其中 $0 \leq a_{ik} \leq b_{ik} \leq 1$；而 I_{i0} 要么为空，要么是整个区间 $I_{i0} = [0,1]$，要么具有形式 $I_{i0}^{+} = [0, a_{i0}) \cup (b_{i0}, 1]$，其中 $0 < a_{i0} \leq b_{i0} < 1$。

在本证明中，我们将 $\partial^* A$ 中所有形如 $\Gamma_{ik} := \gamma_i\left(I_{ik}^{+}\right)$ 的集合称为弧，其中指标 i、k 满足相应条件，I_{ik} 表示 I_{ik} 的闭包。弧可以是闭曲线，也可以有端点，而这些端点必然属于 $\partial\Omega \cup \bigcup_{j=1}^{q} L_j$。我们称 $\partial^* A$ 中的一条弧是本质的，当且仅当它不是闭曲线，并且

(a) 要么其端点位于不同的线段 $L_j \neq L_k$ 上，

(b) 要么其中一个位于 $\partial\Omega$ 上，另一个位于不与 $\partial\Omega$ 相交的线段 L_j 上。

$\partial^* A$ 的非本质弧满足以下条件之一：

(i) 要么是一条闭曲线；或

(ii) 它不是闭曲线，且其两个端点都位于 $\partial\Omega$ 上；或

(iii) 其端点位于同一线段 L_j 上；或

(iv) 一　其中一个端点位于 $\partial\Omega$ 上，另一个端点位于与 ∂ 相交的线段 L_j 上　　Ω.

图5给出了一个例子。

Lemma 1.12. 对于任意有限周长的 $A \subseteq \Omega$，$\partial^* A$ 仅有有限条本质弧　　*cs.*

证明。设

$$\eta_0 := \min\{\mathrm{dist}_{\mathbb{R}^2}(L_j, L_k) \colon j \neq k\} \wedge \min\{\mathrm{dist}_{\mathbb{R}^2}(L_j, \partial\Omega) \colon j \text{ such that } L_j \subseteq \Omega\},$$

其中，按惯例，$a \wedge b := \min(a, b)$，而 $\mathrm{dist}_{\mathbb{R}^2}$ 表示 $\mathbb{R}^2$中的欧几里得距离。注意，要么不存在本质弧，要么其数量 η_0 严格为正，因为极小连接中的线段 L_j两两不相交（引理1.6）。$\partial^* A$ 的所有本质弧长度都大于或等于 η_0。另一方面，由于 A 具有有限周长，且不同弧的交集可忽略不计（根据定理1.11中的(1.17)），长度大于或等于 η_0的弧只有有限条。

□

我们首先考虑 $\partial^* A$仅包含本质弧的情形，这种情形可通过组合论证处理。给定两个集合 E、$F \subseteq \mathbb{R}^2$，我们将 $E \subseteq F \mod \mathscr{H}^1$ 记作 $\mathscr{H}^1(E \setminus F) = 0$的同义表达。

引理 1.13. 设 $A \subseteq \Omega$ 为一个有限周长集合，且 $\partial^* A$ 的所有弧都是本质的。那么，存在有限条利普希茨曲线 $f_1, \ldots, f_k : [0, 1] \to \Omega$，满足以下性质：

(i) 对每个 h，要么 $f_h(0) = a_i$ 且 $f_h(1) = a_j$，其中某个 $i \neq j$ 成立；要么 $f_h(0) = a_i$，其中某个 i成立，且 $f_h(1) \in \partial\Omega$；

(ii) 对每个 i，满足 a_i 是曲线 f_h的端点的指标 h 有奇数个；

(iii) 我们有

$$\bigcup_{h=1}^{k} f_h([0, 1]) \subseteq \mathscr{L}_A \mod \mathscr{H}^1,$$

其中 $\mathscr{L}_A$ 与(1.10)中的相同；

(iv) 我们有

$$\mathscr{H}^1\left(\bigcup_{h=1}^{k} f_h([0, 1])\right) = \sum_{h=1}^{k} \mathscr{H}^1(f_h([0, 1)).$$

证明。由于 $\Omega \cap \partial^* A$ 有有限个分支（由引理 1.12 可知），因此 $(\bigcup_{j=1}^{q} L_j) \setminus (\Omega \cap \partial^* A)$ 也必定有有限个分支。这些性质使我们能够将问题归结为一个组合问题。令 $\mathscr{G}$ 为如下定义的有限（无向、多重）图：

- $\mathscr{G}$ 的顶点是所有线段 L_1、.....、 L_q 的端点以及 $\partial^* A$ 中所有弧的端点；

$\mathscr{G}$ 的边是 $\partial^* A$ 的所有（本质）弧，以及 $(\bigcup_{j=1}^{q} L_j)\backslash(\Omega \cap \partial^* A)$ 的所有连通分支。

$\mathscr{G}$ 中可能有多条边连接同一对顶点。不过， $\mathscr{G}$ 中没有环（即没有连接某个顶点与其自身的边），因为 $\partial^* A$的任何本质弧都不是闭曲线。

我们关注的是 $\mathscr{G}$ 中顶点的度，也就是 $\mathscr{G}$ 中与给定顶点关联的边数。根据构造，

$$a_1, \dots, a_p \text{ have odd degree in } \mathscr{G}. \tag{1.18}$$

事实上，

(1.19)
$a_i \equiv$的度（以 a_i 为端点的 L_j 中的线段数）+（以 a_i 为端点的 $\partial^* A \setminus \{a_i\}$ 的分支数）模 2。

可能会出现这样的情况：线段 L_j 以 a_i 为端点，但它并不与图 $\mathscr{G}$中的 a_i 关联，因为 $L_j \cap \partial^* A$ 包含一个与 a_i相邻的子线段。不过，若发生这种情况，(1.19) 右侧的两项都会减少一，因为 $L_j \cap \partial^* A$ 也不是一条弧，因此 (1.19) 仍然成立。现在，根据相对于 Ω 的连接的定义，以 a_i 为端点的 L_j 中的线段数为奇数。另一方面， $\partial^* A$ 的分支都是闭曲线，而任何经过 a_i 的分支都必须至少在另一点与 $\partial\Omega \cup \bigcup_{j=1}^{q} L_j$相交，否则 $\partial^* A$中就会有一条弧是闭曲线。因此，以 a_i 为端点的 $\partial^* A\backslash\{a_i\}$ 的分支数为偶数，由此得到 (1.18)。用类似的推理，我们还可以证明

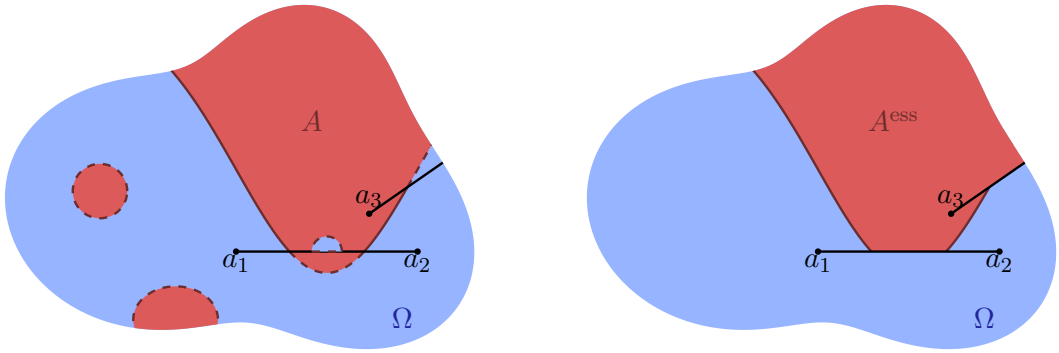
$$\text{vertices of } \mathscr{G} \text{ that do not belong to } \{a_1, \dots, a_p\} \cup \partial\Omega \text{ have even degree.} \tag{1.20}$$

根据图论中的经典方法（Fleury 算法，参见例如 [45, 定理 6.5]），存在一个将 $\mathscr{G}$的边集划分为互不相交子集 $\mathscr{E}_1, \dots \mathscr{E}_k$的划分，其中每个 $\mathscr{E}_h$ 都是一条迹（即由不同边组成、且每条边都与下一条边相邻的序列），它连接 $\mathscr{G}$ 中两个不同的奇度顶点。特别地，由于 (1.20)， $\mathscr{E}_h$ 的端点必须属于$\{a_1, \dots, a_p\} \cup \partial\Omega$。此外，由于性质 (1.18)，任意一个 a_i 都是奇数条迹 $\mathscr{E}_h$的端点。最后，我们舍弃所有连接 ∂Ω中两点的迹，并将 f_h: $[0, 1] \to \mathbb{R}^2$ 定义为剩余迹 $\mathscr{E}_h$的一个利普希茨参数化。这样的映射 f_h 满足所有期望的性质。

□

现在，我们对集合 A 进行修改，以便从 $\partial^* A$ 中移除非本质弧，并证明这一过程会缩短 $\mathscr{L}_A$ （由 (1.10) 定义）。作为预备性说明，我们注意到 ∂Ω 是道路连通的，因为我们假设 Ω 是单连通且属于 C^1 类。此外，Ω 中两点 x、 y 之间的测地距离 $\mathrm{dist}_{\partial\Omega}(x, y)$ ——也就是说，包含在 Ω 中且连接 x 与 y 的最短曲线的长度——满足

$$\mathrm{dist}_{\partial\Omega}(x, y) \le C_\Omega \, |x - y| \tag{1.21}$$



(a) (b)

图 6：如引理1.6所述，修改集合 A，以移除 $\partial^* A$中的非本质弧。左：原集合 A；右：修改后的集合 A^{ess}。

其中一致常数 $C_\Omega > 1$ 仅取决于 Ω。这个不等式与 (1.5)、(1.6) 完全类似。在下一个引理的证明中，我们还将用到等周不等式：对于任意有限周长的有界集 $E \subseteq \mathbb{R}^2$，有

$$|E| \leq C\mathscr{H}^1(\partial^* E)^2, \tag{1.22}$$

对于某个一致常数 C（例如参见 [4, 定理 3.46]）。这里，$|E|$ 是 E的勒贝格测度。众所周知，球是该不等式的最优集合，因此该不等式以最优常数 $C = \frac{1}{4\pi}$成立；但这对我们的论证没有影响。

引理 1.14. 设 $A \subseteq \Omega$ 是一个有限周长集合，且 $\partial^* A$ 至少有一条非本质弧。那么，存在一个有限周长集合 $A^{\text{ess}} \subseteq \Omega$，使得 $\partial^* A^{\text{ess}}$ 的弧恰好是 $\partial^* A$的本质弧，并且

$$\mathscr{H}^1(\mathscr{L}_{A^{\text{ess}}}) < \mathscr{H}^1(\mathscr{L}_A). \tag{1.23}$$

证明. 证明的策略是，为 A添加或移除适当的集合，每条 $\partial^* A$中的非本质弧对应一个集合，从而删除所有非本质弧，如图 6 所示。我们将证明分为若干步骤。

步骤 1. 设 Γ 是 $\partial^* A$ 的一条非本质弧。我们通过区分以下几种情况，将 Γ 延拓为一条若尔当曲线 $J(\Gamma) \supseteq \Gamma$。

(i) 若 Γ 是一条闭曲线，则令 $J(\Gamma) := \Gamma$。

(ii) 若 Γ 是一条端点为 x、y 且位于 $\partial\Omega$ 上的非闭曲线，则通过将 Γ 与一条连接 y 和 x 的利普希茨单射曲线 $J_{\partial\Omega}(\Gamma) \subseteq \partial\Omega$ 拼接，来定义 $J(\Gamma)$，使得

$$\mathscr{H}^1(J_{\partial\Omega}(\Gamma)) \leq C_\Omega\,|x - y| \leq C_\Omega \mathscr{H}^1(\Gamma). \tag{1.24}$$

这样的曲线 $J_{\partial\Omega}(\Gamma)$ 存在，这是由 (1.21) 得出的。

(iii) 若 Γ 是一条端点 x、y 位于同一线段 L_j 上的非闭曲线，我们首先将 $S(\Gamma)$ 定义为一条与 Γ 具有相同端点 x、y 的线段，然后通过将 Γ 与 $S(\Gamma)$ 拼接（并沿相反方向经过 $S(\Gamma)$）来定义 $J(\Gamma)$。

(iv) 若 Γ 是一条端点为 $x \in L_j$、$y \in \partial\Omega$ 的非闭曲线，那么 L_j 本身必定有一个端点位于 $\partial\Omega$ 上，否则 Γ 将是一条本质弧。比如，设 $\{z\} = L_j \cap \partial\Omega$。在这种情况下，我们先将 $S(\Gamma)$ 定义为从 x 到 z 的线段。然后，取一条利普希茨单射曲线 $J_{\partial\Omega}(\Gamma)$，从 y 到 z，使得

$$\mathscr{H}^1(J_{\partial\Omega}(\Gamma)) \le C_\Omega\,|y-z| \le C_\Omega\left(\mathscr{H}^1(\Gamma)+\mathscr{H}^1(S(\Gamma))\right). \tag{1.25}$$

(根据 (1.21)，这样的曲线确实存在。) 最后，我们通过将 Γ、$J_{\partial\Omega}(\Gamma)$ 和 $S(\Gamma)$ 按适当的定向依次连接，定义若尔当曲线 $J(\Gamma)$。

对于上述所有情形 (i)–(iv)，我们有

$$J(\Gamma)\setminus\Gamma \subseteq \partial\Omega \cup \bigcup_{j=1}^{q} L_j \tag{1.26}$$

由构造可知。

步骤 2。 在情形 (iii) 和 (iv) 中，我们声称

$$\mathscr{H}^1(S(\Gamma)) < \mathscr{H}^1(\Gamma). \tag{1.27}$$

在情形 (iii) 中，不等式 (1.27) 显然成立，因为直线段的长度最短。在情形 (iv) 中，反设 $|x-y| \le |x-z|$，其中 x、y 是 $S(\Gamma)$ 的端点，且 $z \in L_j \cap \partial\Omega$ 如上。令 a_i 为 L_j 上不在 $\partial\Omega$ 上的那个端点。由三角不等式可得

$$|a_i-y| \le |a_i-x|+|x-y| \le |a_i-x|+|x-z| = |a_i-z|.$$

事实上，等式 $|a_i-y| = |a_i-z|$ 不可能成立，否则前面的所有不等式都会取等号；于是我们便有 $|x-y| = |x-z|$，且点 a_i、x、y、z 都共线，因此

$$|a_i-y| = ||a_i-x|-|x-y|| < |a_i-x|+|x-z| = |a_i-z|,$$

这就产生了矛盾。因此，我们必须有 $|a_i-y| < |a_i-z|$。但这样一来，将 L_j 替换为端点为 a_i、y 的直线段 S_j（如有必要，也可替换为位于 Ω 内的更短线段 $S_j' \subseteq S_j \cap$），便得到一个相对于 Ω、连接$\{a_1,\dots,a_p\}$的总长度小于$\{L_1,\dots,L_q\}$的连接。这又产生了矛盾，从而完成了 (1.27) 的证明。结合 (1.27)、(1.24) 和 (1.25)，我们得到

$$\mathscr{H}^1(J(\Gamma)) \le C\mathscr{H}^1(\Gamma) \tag{1.28}$$

在所有情形 (i)–(iv) 中，对于某个只依赖于 Ω 的一致常数 C。

步骤 3. 令 $\{\Gamma_n\}_{n\geq 0}$ 为 $\partial^* A$ 的所有非本质弧的一个枚举，$J_n := J(\Gamma_n)$，并令 E_n为 J_n 的内部。根据构造，我们有 $J_n \subseteq \Omega$，因此 $E_n \subseteq\Omega$。我们定义如下的集合序列$\{A_n\}_{n\geq 0}$：

$$\begin{cases} A_0 := A \\ A_n := A_{n-1} \triangle E_{n-1} \qquad \text{for all } n \geq 1. \end{cases}$$

引理 1.7 蕴含所有集合 A_n 都具有有限周长，且 $\partial^* A_n = \partial^* A_{n-1} \triangle J_{n-1}$ 模 $\mathscr{H}^1$，对任意 $n \geq 1$ 均成立。结合 (1.26) 并进行归纳推理，我们得到

$$\partial^* A_n \cap \left(\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{q} L_j \right) = \partial^* A \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} \Gamma_k \right) \mod \mathscr{H}^1 \tag{1.29}$$

对所有 $n \geq 1$ 均成立。(1.29) 的证明依赖于不同的弧 Γ_n, Γ_m 的 $\mathscr{H}^1$-零交集这一事实，而这由定理1.11中的 (1.17) 推出。结合 (1.28)，同一结论蕴含

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathscr{H}^1(J_n) \leq C \sum_{n=0}^{+\infty} \mathscr{H}^1(\Gamma_n) < +\infty, \tag{1.30}$$

而等周不等式 (1.22) 蕴含

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |E_n| \leq C \sum_{n=0}^{+\infty} \mathscr{H}^1(\Gamma_n)^2 < +\infty. \tag{1.31}$$

令 χ_n 为 A_n 的示性函数（即，在 A_n 上 $\chi_n := 1$，而在其他地方 $\chi_n := 0$）。不等式 (1.30) 和 (1.31) 证明，$\{\chi_n\}_{n\geq 0}$ 是 BV($\mathbb{R}^2$) 中的柯西序列，因此收敛到一个极限函数 χ。由于 BV 收敛意味着至少沿某个子序列几乎处处逐点收敛，因此极限函数满足 $\chi(x) \in \{0, 1\}$ 对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^2$ 成立；所以（可能在一个可忽略集合上作修改后）它本身就是一个有限周长集合的示性函数，我们将该集合记为 A^{ess}。在 (1.29) 中令 $n \to +\infty$ 趋于极限，可知 $\partial^* A^{\text{ess}} \cap (\Omega \setminus \cup_{j=1}^{q} L_j)$ 恰由 $\partial^* A$ 的本质弧组成。在此过程中，我们也可能删去了 $\partial^* A \cap \cup_{j=1}^{q} L_j$ 中形如 $S(\Gamma_n)$ 的一些部分，其中某个 n；并且可能出现 $\cup_{j=1}^{q} L_j \setminus \partial^* A^{\text{ess}}$ 的长度严格大于 $\cup_{j=1}^{q} L_j \setminus \partial^* A$ 的长度的情况。然而，根据 (1.27)，移除所有非本质弧所带来的收益足以弥补长度的这一可能增加。因此，不等式 (1.23) 得证。 □

命题 *1.10* 的证明。设 $A \subseteq \Omega$ 是一个有限周长集合。结合引理 1.13 和引理 1.14，我们得到利普希茨曲线 f_1, ..., f_k: $[0, , 1] \to \Omega$，它们满足以下性质:

(i) 对于每个 h，要么 $f_h(0) = a_i$ 且 $f_h(1) = a_j$，对某个 $i \neq j$ 成立；要么 $f_h(0) = a_i$，对某个 i成立，且 $f_h(1) \in \partial\Omega$;

(ii) 对于每个 i，存在奇数个指标 h，使得 a_i 是曲线 f_h 的一个端点；

(iii) 我们有

$$\sum_{h=1}^{k} \mathscr{H}^1(f_h([0,1])) \le \mathscr{H}^1(\mathscr{L}_A)$$

并且除非 $\partial^* A$ 的所有弧都是本质的，否则不等式为严格不等式。（回顾一下，$\mathscr{L}_A$ 由 (1.10) 定义。）

令 S_h 为端点分别为 $f_h(0)$ 和 $f_h(1)$ 的（闭）线段。若对所有 h，$S_h \subseteq \subset \overline{\Omega}$，则 $\{S_1, \dots, S_k\}$ 是相对于 Ω、对应于 $\{a_1, \dots, a_p\}$ 的一个连接。若线段 S_h 并未完全包含于 Ω 中，并且例如 S_h 将点 a_i 与 Ω 的一个点 ∂ 相连，则舍弃 S_h，并用 $S'_h \subseteq S_h$ 替代它，其中 $S'_h \subseteq S_h$ 是包含 a_i 的 $-S_h \cap \Omega$ 的连通分支。类似地，若 $S_h \not\subseteq \Omega$ 且 S_h 将 a_i 与 a_j 相连，则用包含 a_i 和 a_j 的 $S_h \cap \Omega$ 的连通分支 S'_h、S''_h 替换 S_h。无论哪种情况，对线段重新编号后，我们都构造出一个连接 $\{S_1, \dots, S_r\}$，对应于 $\{a_1, \dots, a_p\}$，使得

$$\mathscr{H}^1(\mathscr{L}_A) \ge \sum_{h=1}^{k} \mathscr{H}^1(f_h([0,1])) \ge \sum_{h=1}^{r} \mathscr{H}^1(S_h). \tag{1.32}$$

于是，根据 $\mathbb{L}^\Omega$ 的定义 (2)，不等式 (1.15) 立即成立。若 (1.32) 化为等式，则 $\partial^* A$ 的所有弧都是本质的，由引理 1.13 可得

$$\bigcup_{h=1}^{k} f_h([0,1]) \subseteq \mathscr{L}_A \mod \mathscr{H}^1. \tag{1.33}$$

此外，等式 (1.32) 意味着每个 f_h 都参数化一条直线段，并且 (1.33) 中的包含实际上是等式，模去 $\mathscr{H}^1$-零测集后成立。换言之，等式 (1.32) 意味着 $\partial^* A$ 具有形式 (1.16)。证明至此完成。□

2 R铁磁向列相模型中的相对极小连接

本节中，我们将定理 1 与 [23], 中的论证结合起来，研究能量泛函 (4) 的极小化子 $(\mathbf{Q}^\star_\varepsilon, \mathbf{M}^\star_\varepsilon)$ 在如 (7)、(8) 所示的“混合”边界条件下的渐近行为。具体而言，我们将证明定理 2。论证大体沿用 [23] 中的方法。我们只关注需要作出一些调整的部分。

2.1 初步估计与记号

由公式（5）定义的势 f_ε 的若干性质列于 [23, 引理 3.1]中。这里我们仅提及，对于所有充分小的 $\varepsilon > 0$ 以及所有 $(\mathbf{Q}, \mathbf{M}) \in \mathscr{S}_0^{2\times 2} \times \mathbb{R}^2$，有

$$\frac{1}{\varepsilon^2} f_\varepsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{M}) \ge \frac{1}{8\varepsilon^2}(|\mathbf{Q}|^2 - 1)^2 - \beta^2 |\mathbf{M}|^4 \tag{2.1}$$

（见 [23]中的方程（3.2）。）

欧拉-拉格朗日方程与最大值原理。泛函（4）的极小化子（$\mathbf{Q}_\varepsilon^\star$,$\mathbf{M}_\varepsilon^\star$）是欧拉-拉格朗日方程的解

$$-\Delta \mathbf{Q}_\varepsilon^\star + \frac{1}{\varepsilon^2}(|\mathbf{Q}_\varepsilon^\star|^2 - 1)\mathbf{Q}_\varepsilon^\star - \frac{\beta}{\varepsilon}\left(\mathbf{M}_\varepsilon^\star \otimes \mathbf{M}_\varepsilon^\star - \frac{|\mathbf{M}_\varepsilon^\star|^2}{2}\mathbf{I}\right) = 0 \tag{2.2}$$

$$-\Delta \mathbf{M}_\varepsilon^\star + \frac{1}{\varepsilon^2}(|\mathbf{M}_\varepsilon^\star|^2 - 1)\mathbf{M}_\varepsilon^\star - \frac{2\beta}{\varepsilon^2}\mathbf{Q}_\varepsilon^\star \mathbf{M}_\varepsilon^\star = 0. \tag{2.3}$$

以下是方程 (2.2)–(2.3) 的一个标准推论。

引理 2.1。 映射 $\mathbf{Q}_\varepsilon^\star$、$\mathbf{M}_\varepsilon^\star$ 在Ω 内光滑，且直至Ω的边界均属于 C^2 类。此外，存在一个仅依赖于 β 的常数 C_β，以及一个,Ω常数 C_β，它仅依赖于 β 和Ω，使得

$$\|\mathbf{Q}_\varepsilon^\star\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\mathbf{M}_\varepsilon^\star\|_{L^\infty(\Omega)} \le C_\beta \tag{2.4}$$

$$\|\nabla \mathbf{Q}_\varepsilon^\star\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla \mathbf{M}_\varepsilon^\star\|_{L^\infty(\Omega)} \le \frac{C_{\beta,\Omega}}{\varepsilon}. \tag{2.5}$$

引理 *2.1* 的证明。 椭圆正则性理论表明，$\mathbf{Q}_\varepsilon$ 和$\mathbf{M}_\varepsilon$ 在 Ω 内光滑，且直至 Ω 的边界均属于 C^2 类。我们着重证明 (2.4)；由椭圆估计，梯度界 (2.5) 可沿用 [11, 引理 A.2] 中的思路从 (2.4) 推出。作为证明 (2.4) 的中间步骤，我们证明

$$\max_{\overline{\Omega}} |\mathbf{M}_\varepsilon|^2 \le m_\varepsilon := 1 + \sqrt{2}\beta \max_{\overline{\Omega}} |\mathbf{Q}_\varepsilon| \tag{2.6}$$

事实上，将 (2.3) 与$\mathbf{M}_\varepsilon$作标量积，可得

$$-\frac{1}{2}\Delta\left(|\mathbf{M}_\varepsilon|^2\right) + |\nabla \mathbf{M}_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}(|\mathbf{M}_\varepsilon|^2 - 1)\,|\mathbf{M}_\varepsilon|^2 - \frac{2\beta}{\varepsilon^2}\mathbf{Q}_\varepsilon \mathbf{M}_\varepsilon \cdot \mathbf{M}_\varepsilon = 0.$$

因此（注意到对于任意$\mathbf{Q} \in \mathscr{S}_0^{2\times 2}$和$\mathbf{M} \in \mathbb{R}^2$，$\mathbf{Q}\mathbf{M}\cdot\mathbf{M} \le \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathbf{Q}|\,|\mathbf{M}|^2$）

$$-\frac{1}{2}\Delta\left(|\mathbf{M}_\varepsilon|^2\right) \le -\frac{|\mathbf{M}_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2}\left(|\mathbf{M}_\varepsilon|^2 - 1 - \sqrt{2}\beta\,|\mathbf{Q}_\varepsilon|\right) \tag{2.7}$$

在 Ω 的每一点都成立。现在，令 $x_0 \in \overline{\Omega}$为 $|\mathbf{M}_\varepsilon|^2$ 的最大值点，并反设 $|\mathbf{M}_\varepsilon(x_0)| > m_\varepsilon$。于是，(2.7) 的右端在点 x_0 处取严格负值（并且，由于 ($\mathbf{Q}_\varepsilon$,$\mathbf{M}_\varepsilon$) 连续，它在 x_0 的某个邻域 $V \subseteq \Omega$ 内严格为负）。如果 x_0 位于 Ω 的内部，那么由于 $-\Delta(|\mathbf{M}_\varepsilon|^2)(x_0) \ge 0$，便得到矛盾。如果 $x_0 \in \partial\Omega$，那么霍普夫引理（应用于 V）蕴含 $\partial_\nu(|\mathbf{M}_\varepsilon|^2)(x_0) > 0$，这与边界条件 (7) 矛盾。因此，(2.6) 得证。

现在，由最大值原理可由 (2.6) 得出 (2.4)。事实上，将 (2.2) 与$\mathbf{Q}_\varepsilon$作标量积，可得

$$-\frac{1}{2}\Delta\left(|\mathbf{Q}_\varepsilon|^2\right) \le -\frac{1}{\varepsilon^2}\left(|\mathbf{Q}_\varepsilon|^4 - |\mathbf{Q}_\varepsilon|^2 - \frac{\beta}{\sqrt{2}}\,\varepsilon\,|\mathbf{Q}_\varepsilon|\,|\mathbf{M}_\varepsilon|^2\right) \tag{2.8}$$

在 Ω 内。设 $x_1 \in \overline{\Omega}$ 是 $|\mathbf{Q}_\varepsilon|^2$ 的最大值点。若 $x_1 \in \partial\Omega$，则由于边界数据满足假设 (8)，有 $|\mathbf{Q}_\varepsilon(x_1)|^2 = 1$。若 $x_1 \in \Omega$，则 (2.8) 和 (2.6) 蕴含

$$|\mathbf{Q}_\varepsilon(x_1)|^3 \leq |\mathbf{Q}_\varepsilon(x_1)| + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\,\varepsilon\,|\mathbf{M}_\varepsilon(x_1)|^2 \leq \left(1+\beta^2\,\varepsilon\right)|\mathbf{Q}_\varepsilon(x_1)| + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\,\varepsilon \tag{2.9}$$

因此，$|\mathbf{Q}_\varepsilon|$ 关于 β 是一致有界的。 □

关于 Ginzburg-Landau 泛函的记号。 对于$\mathbf{Q}$分量，借助由$\mathscr{S}_0^{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ 给出的等距同构，我们可以沿用 Ginzburg–朗道文献中的结果：

$$\mathscr{S}_0^{2\times 2} \ni \mathbf{Q} \mapsto \mathbf{q} := \sqrt{2}\,(Q_{11},\, Q_{12}) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.10}$$

特别地，这使我们能够借用 [12]中的一些术语。设$\mathbf{Q}_{\rm bd}$: $\partial\Omega \to \mathscr{N}$是一个 C^2类的边界数据，由一个 C^2-映射$\mathbf{n}_{\rm bd}$: $\partial\Omega \to \mathbb{S}^1$定向，如式 (8) 所示。直接计算可知，与$\mathbf{Q}_{\rm bd}$ 相关联的向量场$\mathbf{q}_{\rm bd}$ =$((q_{\rm bd})_1, (q_{\rm bd})_2)$（如式 (2.10) 所示）满足 $(q_{\rm bd})_1 = (n_{\rm bd})_1^2 - (n_{\rm bd})_2^2$, $(q_{\rm bd})_2 = 2(n_{\rm bd})_1(n_{\rm bd})_2$，或者等价地，用复数表示，

$$\mathbf{q}_{\rm bd} = \mathbf{n}_{\rm bd}^2.$$

特别地，若 d 表示$\mathbf{n}_{\rm bd}$的边界度，则$\mathbf{q}_{\rm bd}$ 的度为 $2d$。设 $a_1, \ldots, a_{2|d|}$是 Ω 中互不相同的点。若$\mathbf{Q}^\star$: $\Omega \to \mathscr{N}$在 $\Omega \setminus \{a_1, \ldots, a_{2|d|}\}$中光滑，在 $\Omega \setminus \{a_1, \ldots, a_{2|d|}\}$中连续，在每个点$a_j$处具有度为 sign $(d)/2$ 的不可定向奇点，在 $\partial\Omega$ 上满足边界条件$\mathbf{Q}^\star = \mathbf{Q}_{\rm bd}$ 以及方程，则称其为具有奇点（$a_1, \ldots, a_{2|d|}$）且边界数据为$\mathbf{Q}_{\rm bd}$ 的典范调和映射。

$$\partial_j\left(Q_{11}^\star\,\partial_j Q_{12}^\star - Q_{12}^\star\,\partial_j Q_{11}^\star\right) = 0$$

在 Ω 中按分布的意义成立。这样的映射存在且唯一，见 [12, 定理 I.5，注 I.1]。典范调和映射属于 $W^{1,\,2}_{\rm loc}(\Omega\setminus\{a_1, \ldots, a_{2|d|}\};\ \mathscr{N})$，且其极限

$$\mathbb{W}(a_1,\, \ldots,\, a_{2|d|}) := \lim_{\sigma\to 0}\left(\frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\bigcup_{j=1}^{2|d|} B_\sigma(a_j)} |\nabla\mathbf{Q}^\star|^2\ \mathrm{d}x - 2\pi\,|d|\,|\log\sigma|\right) \tag{2.11}$$

存在且有限（见 [12, 定理 I.8]）。按照 [12], 中的术语，函数 $\mathbb{W}$ 称为重整化能量。我们还定义，对于 $\varepsilon > 0$,

$$\gamma(\varepsilon) := \inf\left\{\int_{B_1}\left(\frac{1}{2}\,|\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\left(|u|^2-1\right)^2\right)\mathrm{d}x\colon\, u \in W^{1,2}(B_1,\,\mathbb{C}),\ u(x) = x \text{ for } x \in \partial B_1\right\}$$

and

$$\gamma_* := \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\gamma(\varepsilon) - \pi\,|\log\varepsilon|\right) \tag{2.12}$$

极限 γ_* 存在，有限且严格为正 [12,引理 III.3]。

关于 M 分量的 Allen-Cahn 结构。为了突出变量 $\mathbf{M}_\varepsilon$上的 Allen-Cahn 结构，如 [23], 所示，我们采用变量替换。设 $G \subseteq\Omega$ 为边界光滑的单连通域 ∂G，并设 $(\mathbf{Q}_\varepsilon,\ \mathbf{M}_\varepsilon) \in W^{1,\ 2}(\Omega\ \mathscr{S}_0^{2\times 2}) \times W^{1,\ 2}(\Omega\ \mathbb{R}^2)$ 是满足以下条件的一对

$$\int_G \left(\frac{1}{2}\left|\nabla \mathbf{Q}_\varepsilon\right|^2+\frac{1}{4\varepsilon^2}\left(\left|\mathbf{Q}_\varepsilon\right|^2-1\right)^2\right) \mathrm{d}x \leq \Lambda\left|\log \varepsilon\right|, \tag{2.13}$$

$$\left|\mathbf{Q}_\varepsilon(x)\right| \geq \frac{1}{2}, \quad \left|\mathbf{M}_\varepsilon(x)\right| \leq \Lambda \qquad \text{for almost any } x \in G, \tag{2.14}$$

其中 Λ 是一个与 ε无关的正常数。根据谱定理和提升结果 [15, 13, 8],，我们可以写成

$$\mathbf{Q}_\varepsilon=\frac{\left|\mathbf{Q}_\varepsilon\right|}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{n}_\varepsilon \otimes \mathbf{n}_\varepsilon-\mathbf{m}_\varepsilon \otimes \mathbf{m}_\varepsilon\right) \qquad \text{in } G, \tag{2.15}$$

其中 $(\mathbf{n}_\varepsilon, \mathbf{m}_\varepsilon)$ 是 G 中 $\mathbf{Q}_\varepsilon$ 的特征向量构成的正交归一标架，且 $\mathbf{n}_\varepsilon \in W^{1,2}(G, \mathbb{S}^1)$，$\mathbf{m}_\varepsilon \in W^{1,2}(G, \mathbb{S}^1)$。接着，我们逐分量定义映射 $\mathbf{u}_\varepsilon$：$G \to \mathbb{R}^2$，为 $\mathbf{u}_\varepsilon := ((u_\varepsilon)_1, (u_\varepsilon)_2)$，其中

$$(u_\varepsilon)_1 := \mathbf{M}_\varepsilon \cdot \mathbf{n}_\varepsilon, \qquad (u_\varepsilon)_2 := \mathbf{M}_\varepsilon \cdot \mathbf{m}_\varepsilon. \tag{2.16}$$

这一变量替换使我们能够有效地解耦能量。事实上，我们可以将泛函 (4)（局部化到 G）重写为

$$\mathscr{F}_\varepsilon(\mathbf{Q}_\varepsilon, \mathbf{M}_\varepsilon; G)=\int_G\left(\frac{1}{2}\left|\nabla \mathbf{Q}_\varepsilon\right|^2+g_\varepsilon(\mathbf{Q}_\varepsilon)\right) \mathrm{d}x+\int_G\left(\frac{\varepsilon}{2}\left|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon\right|^2+\frac{1}{\varepsilon}h(\mathbf{u}_\varepsilon)\right) \mathrm{d}x+R_\varepsilon \tag{2.17}$$

（见 [23, 命题 3.2]），其中

$$g_\varepsilon(\mathbf{Q}) := \frac{1}{4\varepsilon^2}\left(|\mathbf{Q}|^2-1\right)^2-\frac{2\kappa_*}{\varepsilon}(|\mathbf{Q}|-1)+\kappa_*^2, \tag{2.18}$$

$$h(\mathbf{u}) := \frac{1}{4}\left(|\mathbf{u}|^2-1\right)^2-\frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(u_1^2-u_2^2\right)+\frac{\beta^2+\sqrt{2}\beta}{2}, \tag{2.19}$$

且 R_ε 是一个余项，满足

$$R_\varepsilon \to 0 \qquad \text{as } \varepsilon \to 0 \tag{2.20}$$

（参见 [23, (3.9) 和引理 4.10]）。函数 g_ε、h 根据引理 3.3 和引理 3.4]均为非负函数。此外，h 有两个非退化极小值，分别位于

$$\mathbf{u}_\pm := \left(\pm\left(\sqrt{2}\beta+1\right)^{1/2}, 0\right), \tag{2.21}$$

而$\mathbf{u}_-$ 与$\mathbf{u}_+$ 之间转变的最优代价可以显式计算：我们有

$$\begin{aligned} c_\beta &:= \inf\left\{\int_0^1 \sqrt{2h(\mathbf{u}(t))}\left|\mathbf{u}'(t)\right| \mathrm{d}t \colon \mathbf{u} \in W^{1,1}([0,\,1], \mathbb{R}^2),\ \mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_-,\ \mathbf{u}(1)=\mathbf{u}_+\right\} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{2}\beta+1\right)^{3/2}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

金兹堡-朗道能量与艾伦-卡恩能量之间的相互作用引出了修正重整化能量的如下定义：给定 Ω 中互不相同的点 a_1、.....、$a_{2|d|}$，我们定义

$$\mathbb{W}_\beta^\Omega(a_1,\dots,a_{2|d|}) := \mathbb{W}(a_1,\dots,a_{2|d|}) + c_\beta\,\mathbb{L}_\beta^\Omega(a_1,\dots,a_{2|d|}), \tag{2.23}$$

其中 $\mathbb{W}$ 是式 (2.11) 中的金兹堡-朗道重整化能量，而 $\mathbb{L}_\beta^\Omega$ 是式 (2) 中定义的相对极小连接的长度。

2.2 定理 2 的证明

证明定理 2 的下一步，是为极小化问题构造可容许竞争元，并使其满足尖锐的能量上界。

命题 2.2. 设 $a_1,\dots,a_{2|d|}$ 是 Ω中的互异点。那么，存在映射 $\mathbf{Q}_\varepsilon \in W^{1,2}\left(\Omega,\mathscr{S}_0^{2\times 2}\right)$, $\mathbf{M}_\varepsilon \in W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^2)$，满足 $\mathbf{Q}_\varepsilon = \mathbf{Q}_{\mathrm{bd}}$ 在 $\partial\Omega$ 上，并且

$$\mathscr{F}_\varepsilon(\mathbf{Q}_\varepsilon,\mathbf{M}_\varepsilon) \le 2\pi\,|d|\,|\log\varepsilon| + \mathbb{W}_\beta^\Omega\left(a_1,\cdots,a_{2|d|}\right) + 2\,|d|\,\gamma_* + \mathrm{o}_{\varepsilon\to 0}(1),$$

其中 $\mathbb{W}_\beta$ 和 γ_* 分别如(2.23)、(2.12) 所述。

证明。该结果的证明思路与 [23, 命题 4.19]类似。首先，我们按照金兹堡-朗道文献中已有的论证（例如见 [12, 1]），构造一个合适的 $\mathbf{Q}_\varepsilon$，使其在点 $a_1,\dots,a_{2|d|}$处具有不可定向奇点。接下来，我们定义一个常模长向量场 $\mathbf{M}_\varepsilon \in \in \mathrm{SBV}(\Omega,\mathbb{R}^2)$，使得 $\widetilde{\mathbf{M}}_\varepsilon(x)$ 在几乎处处的 $x \in \Omega$ 中都是 $\mathbf{Q}_\varepsilon(x)$ 的特征向量，并且 $\mathbf{M}_\varepsilon$ 的跳跃集是相对于 Ω 的一条极小连接 $\{L_1,\dots,L_q\}$，其端点为 $\{a_1,\dots,a_{2|d|}\}$。根据引理 1.8，$\mathbf{M}_\varepsilon$ 的存在性得以保证。现在，只需将 $\mathbf{M}_\varepsilon$ 定义为沿其跳跃集对 $\mathbf{M}_\varepsilon$ 进行的正则化。这可以通过求解一个“Modica-Mortola 式”的最优剖面问题 [41]来实现。在这方面，变量替换 (2.16) 很有用：我们先在每条线段 L_j附近构造合适的映射 $\mathbf{u}_\varepsilon$，使 $\mathbf{u}_\varepsilon$沿 L_j 的横截方向成为式 (2.22) 的最优过渡剖面；然后，将相应的 $\mathbf{M}_\varepsilon$ 定义为 $\mathbf{M}_\varepsilon := (u_\varepsilon)_1\mathbf{n}_\varepsilon + (u_\varepsilon)_2\mathbf{m}_\varepsilon$，其中 $(\mathbf{n}_\varepsilon,\mathbf{m}_\varepsilon)$ 是 $\mathbf{Q}_\varepsilon$的特征标架，如式 (2.15) 所示。这是可行的，因为引理1.6保证这些线段 L_j 两两不相交，并且除端点外均包含于 Ω 中。构造的详细过程见 [23]。唯一的区别是，某些 L_j可能在端点处与 Ω 的边界相接。在这种情况下，构造仍然适用（若 L_1 有一个端点位于 $\partial\Omega$ 上，式 (4.95) 仍有意义），但估计式（式 (4.96) 和 (4.97) ）中会出现由边界效应导致的误差项。不过，正则化只会影响厚度为 σ_ε 的 L_j 邻域，其中 $\sigma_\varepsilon \to 0$ 为 $\varepsilon \to 0$。由于 Ω 的边界属于 C^2类，我们因边界而引入的误差会在 $\varepsilon \to 0$时趋于零。

□

在下一个引理中，我们汇总一些由金兹堡-朗道文献得出的有用估计。

引理 2.3。 设$(\mathbf{Q}_\varepsilon^\star,\mathbf{M}_\varepsilon^\star)$ 是满足边界条件的泛函 $\mathscr{F}_\varepsilon$ 的一个极小化子$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{\rm bd}$，其中$\mathbf{Q}_{\rm bd}$ 满足 (8)。设 d 为$\mathbf{Q}_{\rm bd}$的度。那么，$(\mathbf{Q}_\varepsilon^\star,\mathbf{M}_\varepsilon^\star)$满足

$$\mathscr{F}_\varepsilon(\mathbf{Q}_\varepsilon^\star,\, \mathbf{M}_\varepsilon^\star) \le 2\pi\,|d|\,|\log\varepsilon| + \mathbb{W}_\beta^\Omega(a_1,\cdots,a_{2|d|}) + 2\,|d|\,\gamma_* + \mathrm{o}_{\varepsilon\to 0}(1) \tag{2.24}$$

对于Ω中任意互异的点 a_1，……， $a_{2|d|}$。此外，存在一个与 ε无关的常数 C，使得

$$\int_\Omega \left(\frac{\varepsilon}{2}\,|\nabla\mathbf{M}_\varepsilon^\star|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} f_\varepsilon(\mathbf{Q}_\varepsilon^\star,\, \mathbf{M}_\varepsilon^\star)\right)\mathrm{d}x \le C. \tag{2.25}$$

证明。 估计式(2.24)是命题 2.2的直接推论。为证明(2.25)，我们应用Ginzburg–朗道文献中的已有结果。首先，如(2.10)中那样，我们将$\mathbf{Q}_\varepsilon^\star$ 等同于一个映射$\mathbf{q}_\varepsilon^\star\colon\ \Omega\ \to\mathbb{R}^2$。由(2.1)、(2.4)和(2.24)，我们推出

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\,|\nabla\mathbf{q}_\varepsilon^\star|^2 + \frac{1}{8\varepsilon^2}\left(|\mathbf{q}_\varepsilon^\star|^2-1\right)^2\right)\mathrm{d}x &\le \mathscr{F}_\varepsilon(\mathbf{Q}_\varepsilon^\star,\, \mathbf{M}_\varepsilon^\star) + \beta^2\int_\Omega |\mathbf{M}_\varepsilon^\star|^4\,\mathrm{d}x\\ &\le 2\pi\,|d|\,|\log\varepsilon| + C,\end{aligned} \tag{2.26}$$

其中 C 是一个不依赖于 ε的常数。因此，由 [27, 定理 1.1], 可知，存在一个与 ε无关的常数 C，使得

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega \left(|\mathbf{Q}_\varepsilon^\star|^2-1\right)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega \left(|\mathbf{q}_\varepsilon^\star|^2-1\right)^2\mathrm{d}x \le C. \tag{2.27}$$

此外，我们可以将诸如 [43, 定理 2] 或 [34, 定理 1.1] 之类的估计应用于$\mathbf{q}_\varepsilon^\star$，并考虑到(2.27)，我们推出

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\mathbf{Q}_\varepsilon^\star|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\mathbf{q}_\varepsilon^\star|^2\,\mathrm{d}x \ge 2\pi\,|d|\,|\log\varepsilon| - C, \tag{2.28}$$

同样对于某个与 ε无关的 C。通过比较(2.24)与(2.28)，我们得到一致界(2.25)。

□

定理 *2* 的证明。引理 2.3 中的估计，结合 Ginzburg-Landau 文献中的经典结果（例如，参见 [35, 定理 2.4], [36, 命题 1.1], [34, 定理 1.2 和 1.3]¸[43, 定理 1]），可推出（不重新编号的）$\mathbf{Q}_\varepsilon^\star$ 子列在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中强收敛到映射 $\mathbf{Q}^\star$；该映射在 Ω 中某些点 $a_1^\star$，……， $a_{2|d|}^\star$处具有不可定向奇点。证明 $\mathbf{Q}^\star$是一个在 $a_1^\star$，……， $a_{2|d|}^\star$处具有奇点的典范调和映射，方法与 [23, 命题 4.9]完全相同。

为获得$\mathbf{M}_\varepsilon^\star$的紧性，我们应用（2.16）中所述的变量替换。金兹堡-朗道理论中的经典论证（参见 [12, 定理 III.3]）表明，存在一个有限集 $X^\star$，满足$\{a_1^\star,\ldots,a_{2|d|}^\star\}\subseteq X^\star\subseteq\Omega$，使得 $|\mathbf{Q}_\varepsilon^\star|\to 1$ 在$\Omega\backslash X^\star$上局部一致收敛。（事实上，只需稍加努力便可证明，在我们的情形下有 $X^\star = \{a_1^\star,\ldots,a_{2|d|}^\star\}$，但完成证明并不需要这一等式。）令 G 为一个光滑的单连通

定义域，其闭包包含于$\Omega\setminus X^\star$中。对于所有足够小的 ε，我们有 $|\mathbf{Q}^\star_\varepsilon|\geq 1/2$ 属于 G，因此可以按照（2.16）定义$\mathbf{u}^\star_\varepsilon$。由（2.17）和（2.20），我们知道

$$\int_G\left(\frac{\varepsilon}{2}\,|\nabla\mathbf{u}^\star_\varepsilon|^2+\frac{1}{\varepsilon}h(\mathbf{u}^\star_\varepsilon)\right)\,\mathrm{d}x\leq\int_G\left(\frac{\varepsilon}{2}\,|\nabla\mathbf{M}^\star_\varepsilon|^2+\frac{1}{\varepsilon^2}f_\varepsilon(\mathbf{Q}^\star_\varepsilon,\,\mathbf{M}^\star_\varepsilon)\right)\mathrm{d}x+\mathrm{o}_{\varepsilon\to 0}(1).$$

一致有界估计（2.25）给出

$$\int_G\left(\frac{\varepsilon}{2}\,|\nabla\mathbf{u}^\star_\varepsilon|^2+\frac{1}{\varepsilon}h(\mathbf{u}^\star_\varepsilon)\right)\,\mathrm{d}x\leq C,$$

存在某个常数 C，其不依赖于 ε、G。现在，我们可以应用向量值Modica-Mortola泛函的紧性结果（例如参见 [7] 或 [29, 定理 3.1 和 4.1]），从而得到 $\mathbf{u}^\star_\varepsilon\to\mathbf{u}^\star$ 在 $L^1(G)$ 中收敛，至少沿着一个不重新编号的子列收敛。我们定义 $\mathbf{M}^\star:=u_1^\star\mathbf{n}^\star+u_2\mathbf{m}^\star$，其中 $(\mathbf{n}^\star,\mathbf{m}^\star)$ 是 $\mathbf{Q}^\star$ 的一个特征标架。与 [23, 命题 4.11] 中完全相同的论证表明，$\mathbf{M}^\star$ 可以延拓为一个良定义的映射 $\mathrm{SBV}(\Omega;\mathbb{R}^2)$，且 $|\mathbf{M}^\star|=\left(\sqrt{2\beta}+1\right)^{1/2}$ 在 Ω 中几乎处处成立，并且 $\left(\sqrt{2\beta}+1\right)^{-1/2}\mathbf{M}^\star$ 是 $\mathbf{Q}^\star$ 的一个提升。

通过应用 Ginzburg–朗道文献 [1] 中的 Γ-收敛论证，我们可以证明$\mathbf{Q}^\star_\varepsilon$ 的能量具有尖锐下界。给定 $\sigma>0$，令 $D_\sigma:=\bigcup_{x\in X^\star}B_\sigma(x)$。对于任意足够小的 σ，有（见 [23,引理 4.18]）

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\left(\mathscr{F}_\varepsilon(\mathbf{Q}^\star_\varepsilon,\,\mathbf{M}^\star_\varepsilon;\,D_\sigma)-2\pi\,|d|\,|\log\varepsilon|\right)\geq\pi\log\sigma+2\,|d|\,\gamma_*-C\sigma,\tag{2.29}$$

其中 C 是一个不依赖于 ε、σ 的常数。另一方面，我们有

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\mathscr{F}_\varepsilon(\mathbf{Q}^\star_\varepsilon,\,\mathbf{M}^\star_\varepsilon;\,\Omega\setminus D_\sigma)\geq\frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus D_\sigma}|\nabla\mathbf{Q}^\star|^2\,\mathrm{d}x+c_\beta\mathscr{H}^1\left(\mathrm{J}_{\mathbf{M}^\star}\cap(\Omega\setminus D_\sigma)\right)\tag{2.30}$$

与 [23, 式 (4.81)] 完全相同。将 (2.29) 与 (2.30) 结合起来，回想 $\mathbb{W}(a_1^\star,\,\ldots\ldots,\,a^\star_{2|d|})$ 的定义 (2.11)，并令 $\sigma\to 0$ 时取极限，我们得到

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\left(\mathscr{F}_\varepsilon(\mathbf{Q}^\star_\varepsilon,\,\mathbf{M}^\star_\varepsilon)-2\pi\,|d|\,|\log\varepsilon|\,\right)\geq\mathbb{W}(a_1^\star,\,\ldots,\,a^\star_{2|d|})+c_\beta\mathscr{H}^1(\mathrm{J}_{\mathbf{M}^\star})+2\,|d|\,\gamma_*.\tag{2.31}$$

将 (2.31) 与上界 (2.24) 比较，并考虑定理 1，我们得到

$$\mathbb{W}^\Omega_\beta\left(a_1^\star,\,\ldots,\,a^\star_{2|d|}\right)\leq\mathbb{W}\left(a_1^\star,\,\ldots,\,a^\star_{2|d|}\right)+c_\beta\mathscr{H}^1\left(\mathrm{J}_{\mathbf{M}^\star}\right)\leq\mathbb{W}^\Omega_\beta\left(a_1,\,\ldots,\,a_{2|d|}\right)$$

对于 Ω 中任意互异的点 $a_1,\,\ldots\ldots,\,a_{2|d|}$。这证明了 $(a_1^\star,\,\ldots\ldots,\,a^\star_{2|d|})$ 是 $\mathbb{W}^\Omega_\beta$ 的极小化子，而且 $\mathscr{H}^1(\mathrm{J}_{\mathbf{M}_*})=\mathbb{L}^\Omega(a_1^\star,\,\ldots\ldots,\,a^\star_{2|d|})$。于是，定理 1 推出，$\mathrm{J}_{\mathbf{M}_*}$ 由相对于 Ω 的 $\{a_1^\star,\,\ldots\ldots,\,a^\star_{2|d|}\}$ 的极小连接承载。定理证明完毕。 □

致谢 作者是 GNAMPA-INdAM 的成员。他们的研究部分得到了 GNAMPA 项目的资助，项目编号为 CUP_E53C22001930001、CUP_E53C23001670001 和 CUP_E53C25002010001。B.S. 的研究是“几何演化问题

与形状优化”项目、PRIN 项目 2022E9CF89 以及 FRA-B 类项目“VarMoCry”（液晶的变分分析与建模）的一部分；该项目由那不勒斯费德里科二世大学资助。G.C. 参与了 ANR 项目“能量极小向量值映射的奇点”（编号 ANR-22-CE40-0006）。促成本研究的部分工作是在作者参加夏季学校“非线性科学中的变分方法与偏微分方程方法”期间完成的。该暑期学校由 C.I.M.E. 基金会于 2023 年 7 月在意大利切特拉罗举办；此外，作者还参加了研讨会“24w5249——软物质数学分析”，该研讨会由班夫国际研究站于 2024 年 7 月在加拿大班夫举办。F.L.D. 感谢维罗纳大学在本研究最后阶段提供接待。同样，G.C. 感谢那不勒斯费德里科二世大学在其数次访问期间提供接待。

参考文献

[1] R. Alicandro 和 M. Ponsiglione。金兹堡–朗道泛函与重整化能量：一种修订的 Γ-收敛方法。泛函分析杂志，266(8):4890–4907，2014年。[2] L. Ambrosio。有界变差的度量空间值函数。比萨高等师范学校科学年鉴，第 4 辑，17(3):439–478，1990。[3] L. Ambrosio、V. Caselles、S. Masnou 和 J.M. Morel。有限周长集的连通分支及其在图像处理中的应用。欧洲数学学会杂志，3(1):39–92，2001。[4] L. Ambrosio、N. Fusco 和 D. Pallara。有界变差函数与自由不连续性问题。牛津数学专著丛书。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，2000年。[5] R. Badal 和 M. Cicalese。二维黎曼流形上具有拓扑诱导自由不连续性的分数涡旋之间的重整化能量。变分法与偏微分方程，64:83，2025年。[6] R. Badal、M. Cicalese、L. De Luca 和 M. Ponsiglione。广义 xy 模型的 Γ-收敛分析：分数涡旋与弦缺陷。数学物理通讯，358(2):705–739，2018年。[7] S. Baldo。卡恩–希利亚德流体混合物相变的最小界面准则。*H. Poincaré* 非线性分析研究所年刊 *C* 辑，7(2):67–90，1990。[8] J. Ball 和 A. Zarnescu。液晶中的可定向性与能量极小化。《理性力学与分析档案》，202(2):493–535，2011。[9] S. Bedford。液晶的函数空间。《理性力学与分析档案》，219(2):937–984，2016。[10] G. Bellettini、R. Marziani 和 R. Scala。关于 $\mathbb{S}^1$值映射的跳跃极小提升及其与 Ambrosio-Tortorelli 型 Γ-极限的联系。预印本，arXiv:2505.08731，2025年。

[11] F. Bethuel、H. Brezis 和 F. Hélein。金兹堡-朗道泛函极小化的渐近性。变分法与偏微分方程，1(2):123–148，1993年。[12] F. Bethuel、H. Brezis 和 F. Hélein。*Ginzburg-Landau* 涡旋，《非线性微分方程及其应用进展》第 13 卷。Birkhäuser Boston, Inc.，波士顿，MA，1994年。[13] F. Bethuel 和 D. Chiron。Sobolev 空间中与提升问题相关的一些问题。载于非线性偏微分方程展望，《当代数学》第 *446* 卷，第 125–152 页。美国数学会，普罗维登斯，RI，2007年。[14] F. Bethuel 和 F. Demengel。流形之间 Sobolev 映射的延拓。变分法与偏微分方程，3(4):475–491，1995年。[15] F. Bethuel 和 X.M. Zheng。Sobolev 空间中两个流形之间光滑函数的稠密性。泛函分析杂志，80(1):60–75，1988年。[16] K. Bisht、V. Banerjee、P. Milewski 和 A. Majumdar。向列通道中的磁性纳米颗粒：一维研究。《物理学评论 *E*》，100(1):012703，2019年。[17] J. Bourgain、H. Brezis 和 P. Mironescu。提升、度与分布雅可比再探。纯粹与应用数学通讯，58(4):529–551，2005年。[18] H. Brezis、J.M. Coron 和 E.H. Lieb。带缺陷的调和映射。数学物理通讯，107(4):649–705，1986年。[19] H. Brezis 和 P. Mironescu。映到圆周的 *Sobolev* 映射——从分析、几何与拓扑的视角，《非线性微分方程及其应用进展》第 96 卷，非线性微分方程及其应用进展。Birkhäuser/Springer，纽约，[2021] ©2021年。[20] F. Brochard 和 P.G. de Gennes。液晶中磁性悬浮液的理论。《物理学杂志》，31(7):691–708，1970年。[21] M.C. Calderer、A. DeSimone、D. Golovaty 和 A. Panchenko。含铁磁性夹杂物的向列液晶复合材料的有效模型。*SIAM* 应用数学杂志，74(2):237–262，2014年。[22] G. Canevari、F. L. Dipasquale 和 B. Stroffolini。二维空间中余维一和余维二的梯度驱动奇异结构的形成：铁磁向列相的案例研究。预印本，arXiv:2505.07506，2025年。[23] G. Canevari、A. Majumdar、B. Stroffolini 和 Y. Wang。二维铁磁向列相、典范调和映射与最小连接。《理性力学与分析档案》，247(6)：论文编号 110，61 页，2023年。[24] G. Canevari 和 G. Orlandi。有界变差流形值映射的提升。泛函分析杂志，278(10):108453，2020年。

[25] S. Conti、V. Crismale、A. Garroni 和 A. Malusa。考虑晶格对称性的尖锐界面能量的相场近似。预印本，arXiv:2601.07497，2026年。[26] J. Dávila 和 R. Ignat。取值于 S^1 的 BV 函数的提升。巴黎科学院数学报告，337(3):159–164，2003年。[27] M. del Pino 和 P.L. Felmer。Ginzburg-Landau 能量的局部极小值点。*Math. Z.*，225(4):671–684，1997年。[28] H. Federer。几何测度论。数学科学基础丛书，第153卷。Springer-Verlag New York, Inc.，纽约，1969年。[29] I. Fonseca 和 L. Tartar。具有两个势阱的系统的相变梯度理论。爱丁堡皇家学会会刊*A*辑，111(1-2):89–102，1989年。[30] M. Giaquinta、G. Modica 和 J. Souček。变分法中的笛卡尔流。，数学及其边界领域成果第37卷。数学及其边界领域成果。第三辑：现代数学综述丛书 /数学及相关领域成果。第三辑：现代数学综述丛书/。Springer-Verlag，柏林，1998年。笛卡尔流。[31] M. Goldman、B. Merlet 和 V. Millot。具有拓扑诱导自由间断的 Ginzburg-Landau 模型。傅里叶研究所年刊，70(6):2583–2675，2020年。[32] A. Hatcher。代数拓扑。剑桥大学出版社，剑桥，2002年。[33] R. Ignat 和 X. Lamy。BV 中取值于 $\mathbb{RP}^{d-1}$ 的映射的提升及其在单轴Q张量中的应用。附录讨论流形值映射的内禀BV能量。变分法与偏微分方程，58(2):68，2019年3月。[34] R.L. Jerrard。广义Ginzburg-Landau泛函的下界。*SIAM*数学分析杂志，30(4):721–746，1999年。[35] F.H. Lin。Ginzburg-Landau 涡旋的一些动力学性质。纯粹与应用数学通讯，49(4):323–359，1996年。[36] F.H. Lin。非线性波动方程的涡旋动力学。纯粹与应用数学通讯，52(6):737–761，1999年。[37] B. Merlet。关于取值于 $\mathbb{S}^1$ 的映射提升的两点说明。巴黎科学院数学报告，343(7):467–472，2006年。[38] A. Mertelj、D. Lisjak、M. Drofenik 和 M. Copic。磁性片晶在液晶悬浮液中的铁磁性。《自然》，504:237–241，2013年。[39] P. Mironescu、E. Russ 和 Y. Sire。Besov空间中的提升。非线性分析，2019年。[40] P. Mironescu 和 J. Van Schaftingen。分数阶Sobolev映射在紧覆盖空间中的提升。分析与偏微分方程，14(6):1851–1871，2021年。

[41] L. Modica 和 S. Mortola。一个 Γ^--收敛的例子。意大利数学联合会通报 *B (5)*，14(1):285–299，1977年。[42] D. Mucci。射影空间中的映射：液晶与共形能量。离散与连续动力系统*B*，17(2):597–635，2012年。[43] É. Sandier。单位向量场能量的下界及其应用。泛函分析杂志，152(2):379–403，1998年。[44] R. Schoen 和 K. Uhlenbeck。调和映射的边界正则性与狄利克雷问题。微分几何杂志，18(2):253–268，1983年。[45] R. J. Wilson。图论导论。培生教育/普伦蒂斯·霍尔，英格兰哈洛，第5版，2010年。

Giacomo Canevari 维罗纳大学 Strada Le Grazie 15,37134 维罗纳，意大利电子邮件地址：giacomo.canevari@univr.it

Federico LuigiDipasquale 南方高等学院 Via Mezzocannone4, 80138 那不勒斯，意大利电子邮件地址：f.dipasquale@ssmeridionale.it

Bianca Stroffolini 数学与应用系 “Renato Caccioppoli”，那不勒斯费德里科二世大学 Via Cintia, MonteS. Angelo, 80126 那不勒斯，意大利电子邮件地址：bstroffo@unina.it