arXiv:2603.01988v1 [math.RA] 2 Mar 2026

广义 Moufang 型群与 $\mathbb{Z}_2$-分次代数。

Ilya Gorshkov

摘要。 若一对 (G,T) 中， T是生成群 G 的对合正规集，且 T 中任意两个不同元素的乘积都具有奇数阶，则称其为忠实奇置换群。我们引入这类群的一个特殊子类，称为广义 *Moufang* 群p型（或 $GM(p)$型）；在这类群中， T 中任意两个不同对合的乘积都具有固定的素数阶 p。对于任意这类群(G,T)以及域 $\mathbb{F}$中的标量参数 η，我们构造一个非结合、非交换代数 $A = A_{\mathbb{F}}(G,T,\eta)$。

我们证明，将 T 视为代数 A中的元素时，其中每个元素都是本原半单幂等元，并定义了 A的 $\mathbb{Z}_2$-分次。相对于 T， A 的 Miyamoto 群同构于 $G/Z(G)$。代数 A 不含非平凡右理想，并且在参数 η取特定值时，存在对称左 Frobenius 型。

当 G 是由对合自同构扩张的奇素数周期自由 Burnside 群时， G 的有限性等价于 $A_{\mathbb{F}}(G,\ T,\ \eta)$ 的有限维性，从而为 Burnside 问题提供了一种重新表述。对于 $p = 5$ 和 $\eta = -1/3$，由 T 中两个幂等元生成的代数是左轴代数，并满足 Monster 型融合律$\mathcal{M}(4/3,\ -4/3)$。对于素数 $p > 5$，二生成代数同样是轴代数，但遵循一种更一般的融合律。

尽管代数 $A_{\mathbb{F}}(G,\ T,\ \eta)$ 最初是以 $GM(p)$-型群为基础定义的，但我们证明，它可以通过公理化一类所谓的$GM(p,\ \eta)$-型代数，得到一种内在的无群刻画。我们证明，该类中的每个代数都同构于由上述构造得到的某个代数，从而确立了这两个定义的等价性。

引言

设 G 是一个群。若 G 由正规对合集 T 生成，且 T 中任意两个元素之积的阶不超过 n，则称 $(G,\ T)$ 为一个 n-换位群， T 的元素称为 n-对合。Fischer [4] 首先研究了 3-换位群的一个特殊情形：任意两个不同的 3-换位之积的阶为 3；这类群称为 Moufang 型群。他证明了有限 Moufang 型群是可解的，且有一个指数为 2 的 3-群。在研究单 3-换位群的过程中，Fischer [5] 发现了 3 个单散在群 Fi_{22}、 Fi_{23}、 Fi_{24}。Cuypers 和 Hall [6] 推进了这一分类计划，随后得到了有限生成 3-换位群的分类。他们的结果表明，3-换位群是局部有限的。已知散在群 Baby Monster 群是一个 4-换位群。最大的散在群 Monster 群是一个 6-换位群，并且仅由三个对合生成。

设 G 是一个有限群， ω 是一个正整数集合。若 T 是 G 的正规对合集， $G=\langle T\rangle$, 且对于 T 中任意两个不同的 u 和 v， $|uv|\in\omega$，则称有序对 $(G,\ T)$ 为一个 ω-换位群。Aschbacher [1] 引入了奇对合群的概念。若 ω 是所有正奇整数构成的集合，则称 $\omega\cup\{2\}$-换位群 $(G,\ T)$ 为奇对合群。Aschbacher 描述了可解根平凡的奇对合群 [1]。

本文中，我们引入忠实奇置换群的概念。若 ω 是所有正奇数的集合，则称 ω-对合群（G,T）为忠实奇置换群。下面定义奇对合群的一个特殊子类。若忠实奇置换群（G,T）中任意两个元素的乘积的阶为 n，则称其为 n 型广义穆方群（简称GM（n）型）。

利用 Glauberman 的 Z^* 定理，我们得到以下关于有限忠实奇置换群的论述。

定理 1. 设 (G,T) 是一个有限忠实奇置换群。则 $G\simeq K(G)\rtimes\langle t\rangle$。

秩为 d 、指数为 n 的自由 Burnside 群记作 $B(d,n)$，它定义为由 d 个生成元生成的自由群 F_d 对集合 $\{g^n\mid g\in F_d\}$ 在 F_d 中的正规闭包取商所得的商群。1902 年，伯恩赛德 [2] 提出猜想：群 $B(d,n)$ 是有限群。他本人证明了，对于所有 d，群 $B(d,2)$ 和 $B(d,3)$ 都是有限群。[7], 年，Sanov 证明了对于所有 d，群 $B(d,4)$ 都是有限群。Hall [8] 证明了对于所有 d，群 $B(d,6)$ 都是有限群。

诺维科夫和 Adian [9] 证明，对于所有大于 1 的奇数 $n\geq 4361$ 和 d，群 $B(d,n)$ 都是无限群。这一结果已被多次推广。Atkarskaya、Rips 和 Tent [10] 证明，对于所有奇数 $n\geq 557$， $B(d,n)$ 都是无限群。Lysenok [11] 证明，当 $n\geq 16k$ 满足 $k>8000$ 且 d 大于 1 时，群 $B(d,n)$ 是无限群。

设 $G=\langle x_1,....,x_d\rangle$ 是一个奇素数周期为 p 的自由 Burnside 群。那么 G 有一个阶为二的自同构 t，它将自由生成元 $x_1,...,x_d$ 取逆。注意，群$G.\langle t\rangle$ 由对合集合 $T=\{t,x_1t,...,x_dt\}$ 生成。也容易看出， t 和x_it 在二面体群 $\langle t,x_it\rangle$ 中共轭。因此，$(G.\langle t\rangle,T)$ 是一个 $GM(p)$ 型群。

定理 2。 设(G,T) 是一个奇对合群，且 G 具有有界周期。若$G/Z(G)$ 是有限群，且 T 是有限集合，则 G 是有限群。

轴代数理论代表了一种当代研究路径，揭示了群论与非结合代数之间的深刻联系。它起源于 Griess 代数的构造，该代数的自同构群是散在单群 Monster 群。

轴代数最初由 [13] 引入。轴代数是一种交换但非结合的代数，由一组称为轴的特殊幂等元生成。对于每个轴 a，乘法算子 ad_a 是半单的，即该代数可以分解为其特征子空间的直和。

$\mathcal{F}$-轴代数 A 中的乘法结构由融合律 $\mathcal{F}$ 控制。如果融合律 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{Z}_2$-分次的，那么每个轴 a 都可以与A 的 $\mathbb{Z}_2$-分次以及一个阶为 2 的 A 自同构 τ_a 相关联，后者称为宫本自同构。对于给定的轴生成集 X，由相应宫本自同构生成的群称为宫本群。

Rowen 和 Segev [12] 研究由本原幂等元生成的非交换轴代数，这些幂等元的左、右乘法算子均为半单，且至多具有三个不同的特征值。

这里的“代数”是指一个非结合且非交换的 $\mathbb{F}$-代数，其中$\mathbb{F}$ 是一个特征不为 2 的域。本文构造与群 $GM(p)$-型 (G, T)及参数 $\eta \in \mathbb{F}$相关的代数 $A_{\mathbb{F}}(G, T, \eta)$。

由 $GM(p)$-型群（G, T）构造的代数维数为 $|T|$，且其 Miyamoto 群同构于 $G/Z(G)$，其中 $Z(G)$ 是 G 的中心。由生成幂等元给出的左乘算子具有 4 个特征值，整个代数是特征空间的和。特别地，证明了以下定理。

定理 3。 设 (G,T) 是一个 $GM(p)$-型群，并且 $A = A_{\mathbb{F}}(G,T,\eta)$，其中 $\eta \in \mathbb{F}$ 满足 1、$\eta(p-2)+1$、$1-\eta$ 和 $\eta-1$ 是 $\mathbb{F}$ 的不同元素。以下断言成立：

1. T 的所有元素都是 A 中的本原左半单幂等元。
2. 如果 $\mathbb{F}$ 包含 -1 的 $\frac{p-1}{2}$ 根，那么任意元素 $a \in T$ 都是 A 中的右半单幂等元。
3. A不含右理想。
4. 对于每个幂等元 $a \in T$，分解 $A = A_a^+ \oplus A_a^-$ 定义了A的一个 $\mathbb{Z}_2$-分次。关于这些分次，$Miy(A,T) \simeq G/Z(G)$。

如果元素 $1, \eta(p-2)+1, \eta-1$ 和 $1-\eta$ 互不相同，我们就称域 $\mathbb{F}$ 相对于 (p,η) 具有良特征。

我们还证明，对于 $\eta = -\frac{1}{3}$ 以及一个相对于 $(5,\eta)$ 具有良特征的域 $\mathbb{F}$，二生成代数 $A_{\mathbb{F}}(G, T, \eta)$ 将是满足 Monster 型融合律的左轴代数。

命题 1. 设(G,T)是一个 $GM(5)$ 型的二生成群，且 $\eta = -\frac{1}{3}$是一个相对于$(5,\eta)$具有良特征的域。T中的每个幂等元都是 $\mathcal{M}(4/3, -4/3)$ 型的左轴。

接下来的两个命题使我们能够区分群 $GM(5)$ 型代数与群 $GM(p)$ 型代数，其中 p 是一个大于 5 的自然数。

命题 2。 设（G,T）是一个 GM（p） 型的二生成群，其中 $p > 5, \eta = -\frac{1}{p-2}$，$\mathbb{F}$ 是一个与 (p,η) 相关的特征良好的域，且 $A = A_{\mathbb{F}}$（G,T,η）。 T 中的每个幂等元都是一个 $\mathcal{GM}$（$\lambda, -\lambda$） 型的左轴。

命题 3。 设（G,T）是一个 GM（p） 型的群，其中 $p > 5$，$\mathbb{F}$ 是一个域， $\eta \in \mathbb{F}$，且 $\mathbb{F}$ 的特征与（p,η）相关且良好，并且 $A = A_{\mathbb{F}}$（G,T,η）。对于参数 η 的任意取值， T 的所有幂等元都不是 $\mathcal{M}$（$\alpha, -\alpha$） 型左轴。

作为定理2和定理3的推论，我们得到代数 $A_{\mathbb{F}}(B(n, p).\langle t\rangle, T, \eta)$ 的维数与群 $B(n, p)$ 的阶之间的联系。

推论 *1.* 设 $G = B(n,p).\langle t\rangle$，其中 p 是大于 *2* 的素数， t 是 $B(n,p)$ 的一个阶为 *2* 且反转自由生成元的自同构， $T = t^G$，$\mathbb{F}$ 是相对于 (p,η) 的良特征域。那么，当且仅当 $A_{\mathbb{F}}(G,T,\eta)$ 是有限维的， $Miy(A_{\mathbb{F}}(G,T,\eta)\ T) \simeq G/Z(G)$，其中 $Z(G)$ 是 G 的中心，且 G 是有限的。

所得结果使我们能够用非结合代数重新表述关于由 d 个元素生成、素周期为 p 的自由 Burnside 群的 Burnside猜想。

问题 1. 对于哪些 d 和 p，代数 $A_{\mathbb{F}}(B(d,p).\langle t\rangle,T,\eta)$是有限维的？其中 t 和 T 的定义见推论 *1*。

代数 $A_{\mathbb{F}}(G,\ T,\ \eta)$-型的定义涉及一个 $GM(p)$-型的群；实际上，我们是在共轭对合集合上定义代数结构。不过，这样的定义可以避免。我们通过在基 T 上定义乘法，并规定基 T的一些性质，来定义一个 $GM(\eta,\ p)$-型的代数 $A = A(T,\ \eta)$。由定义可直接得出，对于任意 $GM(p)$-型的群 $(G,\ T)$，代数 $A_{\mathbb{F}}(G,\ T,\ \eta)$ 是一个 $GM(\eta,\ p)$-型代数。但我们还将证明其逆命题。

定理 4. 设 $A(T)$是一个 $GM(p,\eta)$-型代数。那么 $(M,\{\tau_t|t\in T\}) = Miy(A,T)$是一个 $GM(p)$-群，并且 $A(T)\cong A_{\mathbb{F}}(M,\{\tau_t|t\in T\},\eta)$。

因此，关于由 d 个元素生成的素周期为 p 的自由伯恩赛德群的伯恩赛德猜想，可以改写为一个不依赖于群的定义的猜想。

问题 2. 对于哪些 p，由 $d+1$ 个元素生成的 $GM\ (p,\ \eta)$-型代数是有限维的？

如今，人们已经发展出许多求代数维数的方法。对伯恩赛德猜想的这种改写，为解决该问题开辟了新的途径。

本文组织如下。第 1 节介绍群论中的预备结果，并证明定理 1 和定理 2。第 2 节给出非结合代数的基本定义和预备结果。第 3 节证明命题 1、2 和 3，并得到关于 $A_{\mathbb{F}}\ (G,\ T,\ \eta)$-型二生成代数的有用结果。第 4 节证明定理 3。第 5 节定义 $GM\ (\eta,\ p)$-型代数，并证明定理 4。

1 群论中的元素

设 G为一个群，$a,b\in G$为对合。我们定义二面体群 $\langle a,b\rangle$ （由 a 和 b生成）的所有对合所成的集合 $I(a,b)$。

定义 1. 若 G是一个周期群，且 T 是 G 的对合的正规子集，并满足 $\langle T\rangle = G$，且对任意$a,\ |ab|$ 为奇数，则称一对 (G,T) 为忠实奇置换群。

下面介绍奇置换群的一个重要子类。

定义 2. 若忠实奇置换群 (G,T) 中任意两个不同元素的乘积的阶均为 n，则称其为广义 *Moufang* 型n，简称 $GM(n)$型。

注意，若 n 不是素数，且对合 a和 b的乘积的阶为 n，则集合 $I(a,b)$ 中存在两个对合 a'和 b'，使得 $|a'b'|<n$。因此，若 (G,T) 是一个$GM(n)$型群，则 n 是素数。

定义 3。 我们称(G,T)是由集合 D生成的 $GM(n)$型群，当且仅当 $D\subseteq T$且 $\langle D\rangle = G$。

设 G 为一个有限群，$Z(G)$为 G的中心。我们将 G的核 $K(G)$定义为 G中奇数阶的最大正规子群。定义 $Z^*(G)$为 G中包含 $K(G)$的子群，使得 $Z^*(G)/K(G) = Z(G/K(G))$。

引理 1. *[3, 推论 1（Glauberman 的 Z^*-定理）]* 设 S 为有限群 G的一个 *Sylow* 2-子群。假设 $x \in S$。 $x \in Z^*(G)$ 成立的充要条件是$C_G(x) \cap x^G = x$。

以下命题使我们能够描述有限奇对合群。

定理 1. 设 (G, T) 是一个有限忠实奇对合群。则 $G \simeq K(G) \rtimes \langle t \rangle$，其中 $|t| = 2$。

证明。 假设 G存在一个西罗2-子群，其中包含两个不同的可交换元素 $a, b \in T$。但这样一来 $|ab| = 2$；这与 (G, T) 是忠实奇对合群这一事实矛盾。由引理 1 可得 $T \subseteq Z^*(G)$。令 $^- : G \to G/K(G)$ 为自然同态。由于 $\langle T \rangle = G$，可得 $\langle T \rangle = G$。注意， T属于 $Z(G)$。因此 G 是一个初等阿贝尔2-群。假设 $|G| > 2$。令 $a, b \in T$ 满足 $a \neq b$。我们有 $ab = ab$，特别是 $|ab| = 2$；这与$|ab|$为奇数且可被 $|ab|$整除这一事实矛盾。

□

引理 2 (施赖尔引理 [15])。 有限生成群的有限指数子群是有限生成的。

以下命题是施赖尔引理的直接推论。

定理 2。 设(G, T) 是一个奇对合群，且 G 具有有界周期。若$G/Z(G)$ 是一个有限群，且 T 是一个有限集合，则 G 是一个有限群。

证明。 引理 2 表明， $Z(G)$ 是一个有限生成子群。有限指数的有限生成阿贝尔群是有限的。因此 $|G| = |G/Z(G)||Z(G)| < \infty$。 □

2 非结合代数的预备知识

设 $\mathbb{F}$ 是一个域。对于忠实奇置换群 (G, T)，我们定义一个以 T 为基的非结合且非交换 $\mathbb{F}$-代数。

定义 4. 设 (G, T) 是一个忠实奇置换群，$\Omega_T = \{|ab| | a, b \in T\} \setminus \{1\}$。对每个数 $n \in \Omega_T$，我们定义一个元素 $\eta_n \in \mathbb{F} \setminus \{0, 1\}$。令 $\Gamma_T = \{\eta_n | n \in \Omega_T\}$。我们构造一个以 T 为基的 $\mathbb{F}$-代数如下：

$$a * b = \begin{cases} a, & if\ b = a, \\ b^a + \delta(b^a), & where\ \delta(b^a) = \eta_n \sum_{x \in I(a,b) \setminus \{b^a\}} x\ \ and\ n = |ab|. \end{cases}$$

我们将这样的代数记为 $A_{\mathbb{F}}(G, T, \Gamma_T)$，并称其为奇对合代数。当 $|\Omega_T| = 1$，即 (G, T) 是一个 $GM(n)$-群时，我们记作 $A_{\mathbb{F}}(G, T, \eta)$。

集合 T 中的元素是群 G 的元素，也是代数$A_{\mathbb{F}}(G, T, \Gamma_T)$的元素。我们将固定使用以下记号。

定义 5. 设(G, T) 是一个忠实奇置换群，且 $A = A_{\mathbb{F}}(G, T, \Gamma_T)$、$\Omega \subseteq T$。我们固定使用以下记号：

1. $\langle\Omega\rangle$ 是由集合Ω生成的 G 的子群；*2.* $\langle\langle\Omega\rangle\rangle$ 是(G,T,Γ_T) $A_{\mathbb{F}}$中由集合Ω生成的子代数；*3.* 当 $|\Omega|=2$ 时，我们称代数 $\langle\langle\Omega\rangle\rangle$ 为二面体代数；*4.* $L(\Omega)$是Ω的线性张成；*5.* 若 $a,b\in T$，则 $a^b=b^{-1}ab$ 是 T中通过元素 b与 a 共轭的元素；

6. if $x=a_1+...+a_t$, *where* $a_i\in T, 1\le i\le t$, *then* $x^a=(a_1+...+a_t)^a=a_1^a+...+a_t^a$.

设 (G,T) 为忠实奇置换群。注意，代数 $A_{\mathbb{F}}(G,T,\Gamma)$ 是交换的，当且仅当对每一对 $a,b\in T$，都有 $a^b=b^a$。若 $|ab|>3$，则显然不满足此条件。因此，$A_{\mathbb{F}}(G,T,\Gamma)$ 是交换的，当且仅当 (G,T) 属于 $GM(3)$ 型。

定义 6. 设 $G=\langle a,b\rangle$ 为由对合 a 和 b 生成的二面体群，其阶为 $2p$，其中 p 是素数。我们将集合 $I(a,b)$ 按如下方式枚举：$a_1=a, a_2=b, ..., a_{i+1}=a_{i-1}^{a_i}$。代数 $A_{\mathbb{F}}(G,I(a,b)\ \eta)$ 的基 $B(a,b)=\{a_1,...,a_p\}$ 称为标准基。

定义 7. 在 $\mathbb{F}$ 上的融合律 $(\mathcal{F},\circ)$ 是 $\mathbb{F}$ 中元素构成的有限集合 $\mathcal{F}$，连同一个映射 $\circ:\mathcal{F}\times\mathcal{F}\to 2^{\mathcal{F}}$。

对于较小的集合 $\mathcal{F}$，用表格形式表示融合律较为方便。图 1 和图 2 分别展示了 Monster 型和广义怪物型的融合律。

$*$	1	0	α	β
1	1	$\varnothing$	α	β
0	$\varnothing$	0	α	β
α	α	α	$1,0$	β
β	β	β	β	$1,0,\alpha$

图 1：Monster 型融合律$\mathcal{M}(\alpha,\ \beta)$

$*$	1	0	α	β
1	1	$\varnothing$	α	β
0	$\varnothing$	$0,1$	α	β
α	α	α	$1,0,\alpha$	β
β	β	β	β	$1,0,\alpha$

图 2：广义怪物型融-合律 $\mathcal{GM}(\alpha,\ \beta)$

定义 8。若融合律 $(\mathcal{F},\circ)$ 满足 $\mathbb{Z}_2$-分次条件 $\mathcal{F}=\mathcal{F}^+\cup\mathcal{F}^-$, $\mathcal{F}^+\cap\mathcal{F}^-=\emptyset$，并且对任意 $\alpha^+,\beta^+\in\mathcal{F}^+$ 以及 $\alpha^-,\beta^-\in\mathcal{F}^-$，以下陈述成立 $\alpha^-\circ\beta^-,\alpha^+\circ\beta^+\subseteq\mathcal{F}^+$,$\alpha^+\circ\beta^-,\alpha^-\circ\beta^+\subseteq\mathcal{F}^-$，则称其为 $\mathbb{Z}_2$- 分次融合律。在这种情况下，$(\mathcal{F}^+,\mathcal{F}^-)$ 称为融合律 $\mathcal{F}$ 的 $\mathbb{Z}_2$-分次。如果集合 $\mathcal{F}^-$ 为空，则称 $\mathbb{Z}_2$-分次 $(\mathcal{F}^+,\mathcal{F}^-)$ 是平凡的。

注意，融合律 $\mathcal{M}(\alpha,\beta)$ 和 $\mathcal{GM}(\alpha,\beta)$ 都是 $\mathbb{Z}_2$-分次的。在这两种情况下，分解 $(\{0,1,\alpha\},\{\beta\})$ 都是 $\mathbb{Z}_2$-分次。

定义 9. 若存在子空间 A^+ 和 A^-，使得 $A=A^+\oplus A^-$, $A^+\cap A^-=0$，且对于任意 $\alpha^+,\beta^+\in A^+$以及 $\alpha^-,\beta^-\in A^-$，以下命题成立 $\alpha^-*\beta^-,\alpha^+*\beta^+\in A^+$, $\alpha^+*\beta^-,\alpha^-*\beta^+\in A^-$，则称 $\mathbb{F}$-代数 A为 $\mathbb{Z}_2$-分次代数。在这种情况下，(A^+,A^-) 称为 A的一个 $\mathbb{Z}_2$- 分次。若子空间 A^- 为空，则称 A 的 $\mathbb{Z}_2$- 分次 (A^+,A^-) 为平凡的。

设 A 是一个非结合、非交换的 $\mathbb{F}$-代数。令 $a \in A$ 为一个幂等元，$X \in \{L, R\}$，且 $\lambda, \delta \in \mathbb{F}$。定义左乘映射和右乘映射 $L_a(b) := a * b$以及 $R_a(b) := b * a$。记 $A_\lambda(X_a) = \{v \in A : X_a(v) = \lambda v\}$。注意，可能出现$A_\lambda(X_a) = 0$。若 Ω 是 $\mathbb{F}$ 的一个元素集合，则 $A_\Omega(X_a) = \bigoplus_{\alpha\in\Omega} A_\alpha(X_a)$。

由于 a 是一个幂等元，因此 $dim(A_1(X_a)) \geq 1$。如果一个幂等元 a 满足 $dim(A_1(L_a)) = dim(A_1(R_a)) = 1$，则称其为本原幂等元。若代数 A 上的线性算子 L 可分解为 L的特征子空间之和，则称其为半单算子。若线性算子 L_a (R_a)是半单的，则称幂等元 a 是左（右）半单的。

定义 10. 设 $(\mathcal{F}, \circ)$ 是某个融合律， $a \in A$ 是一个本原半单幂等元，满足 $A = A_{\mathcal{F}}(X_a)$；并且对于任意 α、$\beta \in \mathcal{F}$以及任意 $x \in A_\alpha(X_a)$ $y \in A_\beta(X_a)$，都有$x * y \in A_{\alpha\circ\beta}(X_a)$。若 a 满足 $X = L$，则称其为左$(\mathcal{F}, \circ)$-轴；若 a满足 $X = R$，则称其为右$(\mathcal{F}, \circ)$-轴。

特别地，若对某个幂等元 a，算子 L_a 是半单的，则 a 是具有最大一般融合律的左轴。

若该代数是交换的，则 $R_a = L_a$，因此我们可以不说右$(\mathcal{F}, \circ)$-轴，而说$(\mathcal{F}, \circ)$-轴。

设$(\mathbb{F}, \circ)$为 $\mathbb{Z}_2$-分次融合律，且 $a \in A$为左（右）$(\mathbb{F}, \circ)$-轴。则$Gr(L_a) = (A_{\mathcal{F}^+}(L_a)\ A_{\mathcal{F}^-}(L_a))$ ($Gr(R_a) = (A_{\mathcal{F}^+}(R_a)\ A_{\mathcal{F}^-}(R_a))$)是 A的一个 $\mathbb{Z}_2$-分次。

定义 11. 若代数 A 由左（右）$(\mathcal{F}, \circ)$-轴生成，则称其为左（右）$(\mathcal{F}, \circ)$-轴代数。

设$(\mathcal{F}^+, \mathcal{F}^-)$为融合律$(\mathcal{F}, \circ)$的一个 $\mathbb{Z}_2$-分次，且 A为左或右$(\mathcal{F}, \circ)$-轴代数。此时，对任意 $\mathcal{F}$-轴 $a \in A$，$(A_{\mathcal{F}^+}(L_a)\ A_{\mathcal{F}^-}(L_a))$是$A$的一个 $\mathbb{Z}_2$-分次。

定义 12. 设 $Gr = (A^+, A^-)$ 是 A 的一个 $\mathbb{Z}_2$-分次。我们定义映射 $\tau(Gr) : A \to A$ 如下 $\tau(Gr)x^+ = x^+, \tau(Gr)x^- = -x^-$，其中 $x^+ \in A^+$ 和 $x^- \in A^-$。

映射 $\tau(Gr)$ 是代数 A 的一个自同构。如果分次 Gr 是某个 $(\mathcal{F}, \circ)$-轴 a 的 a$\mathbb{Z}_2$-分次，我们将 τ_a 记作 $\tau(Gr)$，并称 τ_a 是 a 的宫本对合。

引理 3. *[14, 引理 5.1]* 若 t 是 A 的一个自同构，且 a 是一个轴，则 a^t 是一个轴，且 $\tau(a^t) = \tau(a)^t$。

定义 13. 设 Ω 是代数 A 的一组$(\mathcal{F}, \circ)$-轴。群 $Miy(A, \Omega) = \langle \tau_a | a \in \Omega\rangle$称为集合Ω的 *Miyamoto* 群。

定义 14。 $\cdot$、$\cdot$之间的双线性形式 若定义在代数 A 上，且对任意 a、b、$c \in A$，均有 $(ab, c) = (b, ac)$ $((ab, c) = (a, cb))$，则称其为左（右）弗罗贝尼乌斯型。

3 由 2 个元素生成的 $A_{\mathbb{F}}(G, H, \eta)$ 代数

设 $G = \langle a, b\rangle$ 为阶为 $2p$ 的二面体群，其中 p 是素数，由对合 a和 b, $T = I(a, b)$, $\eta \in \mathbb{F} \setminus \{0, 1\}$, $A = A_{\mathbb{F}}(G, T, \eta)$, $B = B(a, b)$生成。

将矩阵 L_a 写在典范基 $B(a,b)$下。

$$Mat(L_a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \eta & \eta & \cdots & \eta & 1 \\ \eta & \eta & \cdots & 1 & \eta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \eta & 1 & \cdots & \eta & \eta \end{pmatrix}$$

我们求出矩阵 $Mat(L_a)$ 的谱。

引理 4. 矩阵 $Mat(L_a)$ 的特征值为:

1. 1 是一个重数为 1 的特征值;

2. $\lambda_1 = \eta(p-2) + 1$ 是一个重数为 1 的特征值;

3. $\lambda_2 = 1 - \eta$ 是一个重数为 $\frac{p-3}{2}$ 的特征值; —

4. $-\lambda_2 = \eta - 1$ 是一个重数为 $\frac{p-1}{2}$ 的特征值。—

证明。 该结论可由矩阵 Mat(L_a) 存在对应于特征值1、 λ_1和 $-\lambda_2$, 且具有所述重数的 p特征向量（见引理 5）得出。

□

设 λ_1 和 λ_2 是引理 4 中所述的 $\mathbb{F}$ 的元素。现在我们求矩阵 $Mat(L_a)$ 的特征空间。

引理 5。 代数 A 有矩阵 $Mat(L_a)$的特征向量构成的基。将这些特征向量写在基 $B(a,b)$中:

1. $a = (1, 0, \ldots, 0)$ 是对应于特征值 1的特征向量;

2. $z(a) = \left(\frac{p-1}{p-2}, 1, \ldots, 1\right)$ *is an eigenvector corresponding to the eigenvalue* λ_1.

3.

$$\begin{aligned} y_1(a) &= (0,1,0,\ldots,0,-1,-1,0,\ldots,0,1), \\ y_2(a) &= (0,0,1,0,\ldots,0,-1,-1,0,\ldots,0,1,0), \\ &\vdots \\ y_{\frac{p-3}{2}}(a) &= (0,\ldots,0,1,-1,-1,1,0,\ldots,0), \end{aligned}$$

是对应于特征值 λ_2的特征向量。

4.

$$\begin{aligned} x_1(a) &= (0,-1,0,\ldots,0,1), \\ x_2(a) &= (0,0,-1,0,\ldots,0,1,0), \\ &\vdots \\ x_{\frac{p-1}{2}}(a) &= (0,\ldots,0,-1,1,0,\ldots,0), \end{aligned}$$

是对应于特征值 $-\lambda_2$ 的特征向量。

证明。 容易验证，这组向量确实是矩阵$Mat(L_a)$的特征向量。也很容易证明，这组向量线性无关，因此构成代数 A 的一组基。

□

因此， L_a 是代数 A 的半单线性算子，因此 a 是左半单元素。

令 BE（L_a， a， b）$=\{a, z$（a） y_1（a）.....， $y_{(p-3)/2}$（a） x_1（a）.....， $x_{(p-1)/2}$（a）$\}$ 为 A的一组基，由线性算子 L_a的特征向量组成。

定义 15。 对于元素 $a \in T$，我们定义

$$A_a^+ = \{a(a), z(a), y_1(a), \ldots, y_{(p-3)/2}(a)\}$$

and

$$A_a^- = \{x_1(a), \ldots, x_{(p-1)/2}(a)\}$$

我们证明 A_a^+是一个子代数，来自 A_a^-的任意两个元素的乘积都属于 A_a^+，而来自 A_a^+的元素与来自 A_a^-的元素的乘积属于 A_a^-。

我们用基 BE（L_a， a， b）写出 A的乘法表。集合 BE（L_a， a， b）中的元素都是关于 a左乘的特征向量，因此左乘 a 的结果已知。

现在我们将计算子空间 A_a^+ 的基向量之间的乘积。

引理 6. 设 $\gamma = \sum_{a_j \in B(a,b)} a_j$。以下结论成立。

1. $a_i * \gamma = \gamma * a_i = (\eta(p-2) + 1)\gamma + \eta a_i$;
2. $\gamma * \gamma = r\gamma$，其中 $r = \eta(p-1)^2 + p$。

证明。 由引理 5 可知， $\gamma + \frac{1}{p-2} a_i$ 是算子 L_{a_i} 的特征向量，其特征值为 $\eta(p-2)+1$。因此，

$$a_i * \gamma = (\eta(p-2)+1)\Big(\gamma + \frac{1}{p-2} a_i\Big) - \frac{1}{p-2} a_i = (\eta(p-2)+1)\gamma + \eta a_i.$$

由于 γ 在基 $B(a, b)$ 的元素进行排列时保持不变，因此只需验证 $\gamma * a_1 = a_1 * \gamma$。我们有

$$\gamma * a_1 = a_1 + \eta(\gamma - a_1^{a_2}) + a_1^{a_2} + ... + \eta(\gamma - a_1^{a_p}) + a_1^{a_p} =$$

$$= (\eta(p-2)+1)\gamma + \eta a_1.$$

2. 根据第 1 点，我们得到

$$\gamma * \gamma = p(\eta(p-2)+1)\gamma + \eta a_1 + ... + \eta a_p = (p(\eta(p-2)+1) + \eta)\gamma = (\eta(p-1)^2 + p)\gamma.$$

□

Rema秩 1. 注意，对于 $\eta = -\frac{1}{p-2}$元素 $(2-p)\gamma$，它是该代数的单位元 A.

引理 7. 空间 A_a^+ 的基元素乘积:

1. *let* $p > 5$, *If* $i \leq \frac{p-3}{4}$ *then* $y_i(a) * a = (1-\eta)(y_{2i}(a) - y_1(a))$ *else* $y_i(a) * a = (1-\eta)(y_{p-3-2i}(a) - y_1(a))$;

2. *let* $p = 5$, *we have* $y_1(a) * a = (\eta - 1)y_1(a)$;

3. $z(a) * y_i(a) = \frac{\eta(p-3)+1}{p-2} y_i(a)$;

4. $y_i(a) * z(a) = y_i(a) + y_i(a) * a \in L(y_1, ..., y_{(p-3)/2})$;

5. $z(a) * z(a) = \frac{1+2\eta(p-2)}{(p-2)^2} a + (\eta(p-1)^2 + p)\gamma \in L(a, z)$;

6. $z(a) * a = a * z(a) = (1 + (p-2)\eta)z(a)$;

7. $y_i(a) * y_i(a), y_i(a) * y_j(a) \in A_a^+$;

8. *if* $p = 5$, *then* $y_1(a) * y_1(a) = (1 - 4\eta)z(a) - \frac{16}{3}(1 - \eta)a$.

证明. 1. 我们有

$$y_i(a) * a = (a_{i+1} - a_{\frac{p+1}{2}} - a_{\frac{p+3}{2}} + a_{p+1-i}) * a =$$

$$= a_{2i+1} + \delta(a_{2i+1}) - a_p - \delta(a_p) - a_2 - \delta(a_2) + a_{p+1-2i} + \delta(a_{p+1-2i}) =$$
$$= (1 - \eta_p)(a_{2i+1} - a_p - a_2 + a_{p+1-2i}) = (1 - \eta_p)(y_{2i}(a) - y_1(a))$$

2. 与情形 1 的证明类似。

3. 令 γ 如引理 6 中所述。注意 $z(a) = \frac{1}{p-2}a + \gamma$。由引理 6 可得 $\gamma * a_l = (\eta(p-2)+1)\gamma + \eta a_l$。因此 $\gamma * y_i(a) = \eta y_i(a)$。于是

$$(\frac{1}{p-2}a + \gamma) * y_i(a) = \frac{\eta(p-3)+1}{p-2} y_i(a)$$

4. 我们有

$$y_i(a) * (\gamma + \frac{1}{p-2}a) = y_i(a) + y_i(a) * a$$

5. 由引理 6 可得 $\gamma * \gamma = (\eta(p-1)^2 + p)\gamma$。因此

$$z(a) * z(a) = (\frac{1}{p-2}a + \gamma)(\frac{1}{p-2}a + \gamma) = \frac{1}{(p-2)^2}a + \frac{1}{p-2}(\gamma * a + a * \gamma) + \gamma * \gamma =$$

$$= \frac{1 + 2\eta(p-2)}{(p-2)^2}a + (\eta(p-1)^2 + p)\gamma.$$

6. 我们有

$$z(a) * a = (\frac{1}{p-2}a + \gamma) * a = (\frac{1}{p-2} + \eta)a + (\eta(p-2)+1)\gamma =$$

$$= (\frac{1 - (\eta(p-2)+1)}{p-2} + \eta)a + (\eta(p-2)+1)z(a) = (\eta(p-2)+1)z(a)$$

7. 和 8. 直接计算可得。 □

注记 2. 由引理 7 可知， $z(a)$是 R_a 的一个特征向量，其特征值为$1 + (p-2)\eta$； $y_i(a)$ 是特征向量，对应的特征值为 $-\lambda_2$。因此， R_a 在 $A^+(a)$上是半单的。

引理 8. 子空间 A_a^+ 是 A的一个子代数。

证明。 根据定义， $Bas(A_a^+) = \{a, z, y_1, ..., y_{(p-3)/2}\}$ 是 A_a^+的一个基。由引理 7可知， $Bas(A_a^+)$中任意两个向量的乘积都是$Bas(A_a^+)$中向量的线性组合。因此， $\langle\langle Bas(A_a^+)\rangle\rangle = A_a^+$。 □

我们证明 A_a^- 在 A_a^+中元素的乘法作用下保持不变。

引理 9。 *1.* $x_i * a = (-1)^k(1-\eta)x_l$，其中 k 是 $2i$ 除以 $\frac{p-1}{2}$ 所得的整数部分， l 是 $2i$除以 $\frac{p-1}{2}$ 所得的余数；

2. $z * x_i = (\frac{\eta p-\eta-1}{p-2})x_i$;

3. 若 $i \leq \frac{p-1}{4}$ ， 则 $x_i * z = \eta x_i + \frac{\eta-1}{p-2}x_{2i}$， 否则 $x_i * z = \eta x_i - \frac{\eta-1}{p-2}x_{p-2i}$;

4. $y_j * x_i \in A_a^-$;

5. $x_i * y_j \in A_a^-$。

证明。 第 1、2 和 5 点很容易计算。
利用 $z = \frac{1}{p-2}a + \gamma$ 和引理 6 这一事实，可以很容易证明第 3、4 点。 □

由引理 7 和 9 可推得， R_a 作用于 L_a 的特征子空间。

推论 2。 以下陈述成立：

1. $A_{\lambda_1}(L_a) = A_{\lambda_1}(R_a)$;
2. $R_a(A_{\lambda_2}(L_a)) = A_{\lambda_2}(L_a)$;
3. $R_a(A_{-\lambda_2}(L_a)) = A_{-\lambda_2}(L_a)$.

简单计算可知，来自 A_a^- 的任意两个元素之积都属于 A_a^+。

引理 10. $x_i * x_j \in A_a^+$.

引理11. 线性算子 R_a 是本原的。若 $\mathbb{F}$ 包含 -1 的 $\frac{p-1}{2}$ 次单位根，则 R_a 是半单的。

证明. 由引理 7 可知， $z, y_1, \ldots, y_{\frac{p-3}{2}}$ 是 R_a 的特征向量。由于 A_a^- 是关于 R_a 的不变子空间，只需证明 A_a^- 可分解为 R_a 的特征子空间之和，并且 R_a 作用于 A_a^- 时的特征值均不为 1。

根据引理 9， R_a 作用于 A_a^-的矩阵，在基 $x_1, \ldots, x_{\frac{p-1}{2}}$ 下，是一个非零元素为 $1-h$ 和 $-(1-h)$的单项矩阵。因此，特征多项式的根为 $d(h-1)$，其中 d 是 -1的 $\frac{p-1}{2}$ 次根。由此， R_a 是一个本原算子。如果 $\mathbb{F}$ 包含 -1的 $\frac{p-1}{2}$ 次根，那么 R_a 在 A上是半单的。

□

以下 2 个命题是引理 7、9、10 的推论 .

命题 1. 设(G,T)是一个 $GM(5)$型二生成群， $\eta = -\frac{1}{3}$且 $\mathbb{F}$是相对于(p,η)的良特征域。 T 中的每个幂等元都是 $\mathcal{M}(4/3,-4/3)$型的左轴。

命题 2. 设(G,T)是一个 $GM(p)$型二生成群，其中 $p > 5$,$\eta = -\frac{1}{p-2}$, $A = A_{\mathbb{F}}(G,T,\eta)$，且 $\mathbb{F}$ 是相对于(p,η)的良特征域。 T 中的每个幂等元都是 $\mathcal{GM}(\lambda,-\lambda)$型的左轴。

命题 3. 设(H,T')是一个 $GM(p)$型群，其中 $p>5$, $A' = A(H,T',\eta)$。对于参数 η的任意取值， T' 中的任何幂等元都不是本原左 $\mathcal{M}(\alpha,-\alpha)$轴。

证明。 假设 $a \in T'$ 是 A'的本原左 $\mathcal{M}$（α, $-\alpha$）轴。令 $b \in T \setminus \{a\}$。注意， λ_2 不可能等于 0。因此， $\lambda_1 = 0$，从而 $\eta = -\frac{1}{p-2}$。由引理 7 可知，对于 $p > 5$, $y_i * z$ 在 L（a）上的投影非平凡。因此， a 不是 A'的本原左 $\mathcal{M}$（α, $-\alpha$）轴。 □

推论3。 对于每个幂等元 $c \in T$，代数 A 分解为子空间 A_c^+ 和 A_c^- 的直积，是代数 A 的 $\mathbb{Z}_2$-分次。

因此，定义了 A 的一个自同构 τ_c。

引理12。对于任意 $x \in A$, $x + x^a \in A_a^+$。

证明。 由于 x 是来自 T 的元素之和，只需证明 $b + b^a \in A_a^+$。我们有：

$$\frac{b+b^a}{2} = \frac{z - \frac{p-1}{p-2}a - \sum_2^{(p-1)/2-1} y_i + ((p-1)/2-1)y_1}{(p-3)}$$

□

引理13. 对于任意 $x \in A$, $x - x^a \in A_a^-$，结论成立。

证明. 由于 x 是来自 T的元素之和，只需证明 $b - b^a \in A_a^-$。如果$b = a$，则 $b - b^a = 0$；否则 $b - b^a = x_1$，因此 $b - b^a \in A_a^-$。 □

令我们构造一个映射 f: $\langle \tau_a, \tau_b \rangle \to G$，使得 $f(\tau_a) = a$ 且 $f(\tau_b) = b$。

引理14. 对于任意 $c, d \in T$，有 $\tau_c(d) = d^c$。

证明. 设 $d^+ = \frac{1}{2}(d + d^c)$ 和 $d^- = \frac{1}{2}(d - d^c)$。有 $d = d^+ + d^-$。由引理12和13可得 $d^+ \in A_c^+$ 且 $d^- \in A_c^-$。因此 $\tau_c(d) = \tau_c(d^+ + d^-) = d^+ - d^- = d^c$。 □

引理15。 映射 f 是一个同构。

证明。 我们定义一个同态 ϕ：$\langle \tau_a, \tau_b \rangle \to Sym_T$，使得 $\phi(\tau_c)(d) = \tau_c d$，并定义一个同态 ψ: $G \to Sym_T$，使得对任意 $c, d \in T$, $\psi(c)d = d^c$。由引理 14 可知 $\phi(\tau_c) = \psi(c)$。由于同态 ϕ 和 ψ 的核都是平凡的， $\langle \tau_a, \tau_b \rangle \simeq G$，特别地， $f = \phi\psi^{-1}$ 是一个同构。 □

我们在代数 A 上定义一个双线性形式，并证明对某个参数 η，该形式是左弗罗贝尼乌斯形式。

定义 16. 我们在代数 A 上如下定义双线性形式 $(\cdot,\cdot)$：对任意不同的元素 a、$b \in T$，令 $(a,b) = \eta$，且 $(a,a) = 1$。

引理 16. 若 $\eta = -\frac{1}{p-2}$，则型 $(\cdot,\cdot)$ 是一个左弗罗贝尼乌斯形式。

证明. 令 $c,d,r \in T$。我们证明 $(c*d,r) = (d,c*r)$。假设 $c = d$ 且 $c \neq r$。我们有：

$$(c*c,r) = (c,r) = \eta,$$

$$(c,c*r) = (r,r^c + \eta(I(c,r) \setminus r^c)) = \eta + \eta^2(n-2) + \eta = \eta.$$

当 $c = r$ 时的情形可类似证明。当 $c = r$ 时的情形由型的对称性得出。

假设 c,d,r 是两两不同的元素，且 $d^c = r$。注意，若 $d^c = r$，则 $r^c = d$。我们有：

$$(c*d,r) = (d^c + \eta(I(d,c) \setminus d^c), r) = 1 + \eta^2 * (p-1),$$

$$(d,c*r) = (d,r^c + \eta(I(c,r) \setminus r^c)) = 1 + \eta^2 * (p-1)$$

当 $d^c \neq r$ 时的情形可类似验证。

□

4 有限生成情形

在本节中，我们固定：$(G,\ T)$ 是 $GM(p)$ 型群，$\eta \in \mathbb{F}$ 且 $\mathbb{F}$ 的特征与 $(p,\ \eta)$ 相关良好。

引理 17. 设 $a,b,c \in T$，$X = \langle\langle a,b\rangle\rangle \cap \langle\langle a,c\rangle\rangle$。若 $c \notin I(a,b)$，则 $X = L(a)$；否则 $X = \langle\langle a,b\rangle\rangle = \langle\langle a,c\rangle\rangle$。

证明。设 $c \notin I(a,b)$。子群 $\langle a,b\rangle$ 与 $\langle a,c\rangle$ 的交为 $\langle a\rangle$。特别地，$I(a,b) \cap I(a,c) = \{a\}$。设 $x \in X$。由于 $I(a,b)$ 和 $I(a,c)$ 是代数 A 的一个基的子集，因此 $x \in L(I(a,b) \cap I(a,c))$。因此，$x \in \langle\langle a\rangle\rangle$ 且 $X = L(a)$。

假设 $c \in I(a,\ b)$。在这种情况下，子群 $\langle a,\ b\rangle$ 和 $\langle a,\ c\rangle$ 重合，因此子代数 $\langle\langle a,\ b\rangle\rangle$ 和 $\langle\langle a,\ c\rangle\rangle$ 也重合。 □

对于每个 $a \in T$，我们定义子集 $\{t_i(a) | 1 \leq i \leq \frac{|T|-1}{p-1}\} = T_a \subseteq T$，使得 $\langle\langle a,\ t_i(a)\rangle\rangle \cap \langle\langle a,\ t_j(a)\rangle\rangle = L(a)$ 对于不同的 i 和 j 成立，并且 $T = \bigcup_{1 \leq i \leq \frac{|T|-1}{p-1}} I(a,\ t_i(a))$。

引理 18. 设 $a \in T$。则 a 是左本原幂等元，并且 L_a 是 A 的半单线性算子，其谱为 $\{1,\lambda_1,\lambda_2,-\lambda_2\}$。

证明。根据定义，a 是幂等元。由引理 5 可知，$\langle\langle a,t_i(a)\rangle\rangle$有一组由算子 L_a 的特征向量构成的基。设 $B(t_i(a))$ 是 L_a 的一组特征向量基，其中 $\langle\langle a,t_i(a)\rangle\rangle$。注意，对于 $i \neq j$，$B(t_i(a)) \setminus \{a\}$ 和 $B(t_j(a)) \setminus \{a\}$ 线性无关。因此，$B_a = \{a\} \cup (B(t_1(a)) \setminus \{a\}) \cup ... \cup (B(t_{(|T|-1)/(p-1)}(a)) \setminus \{a\})$ 是由 L_a 的特征向量组成的 A 的一组基。特别地，$dim(A_1(L_a)) = 1$，且 L_a 的谱为 $\{1,\lambda_1,\lambda_2,-\lambda_2\}$。

□

引理19。 设 $a \in T$。则 a 是右本原幂等元；若 $\mathbb{F}$ 含有 -1 的 $\frac{p-1}{2}$ 个根，则 R_a 是 A 的半单算子。

证明。 利用引理 18 和引理11，证明方法类似。 □

引理20。 设 $x, y \in A, a \in T$， 则 $(x * y)^a = x^a * y^a$。

证明。 由于 T 是 A的基，只需证明当 $x, y \in T$ 时引理的断言成立。设 $x, y \in T$。若 $a \in I(x, y)$，则由引理14可得引理的断言。我们假设 $a \notin I(x, y)$。由于 $x^a, y^a \in T$，我们有

$$x^a * y^a = (y^a)^{x^a} + \delta((y^a)^{x^a}) = y^{aaxa} + \delta((y^a)^{x^a}) = y^{xa} + \delta((y^a)^{x^a})$$

。注意到

$$\delta((y^a)^{x^a}) = \eta(y^a + x^a + (y^a)^{x^a} + (x^a)^{(y^a)^{x^a}} + ... + y^{xy...xya} - (y^a)^{x^a}) = \delta(y^x)^a.$$

因此

$$x^a * y^a = y^{xa} + \delta((y^a)^{x^a}) = (y^x + \delta(y^x))^a = (x * y)^a.$$

□

定义17。 设 $A_a^+ = \langle\!\langle a, t_1(a) \rangle\!\rangle_a^+ \oplus ... \oplus \langle\!\langle a, t_{(|T|-1)/(p-1)}(a) \rangle\!\rangle_a^+$， 以及 $A_a^- = \langle\!\langle a, t_1(a) \rangle\!\rangle_a^- \oplus ... \oplus \langle\!\langle a, t_{(|T|-1)/(p-1)}(a) \rangle\!\rangle_a^-$。

命题4. (A_a^+, A_a^-) 是 A的一个 $\mathbb{Z}_2$-分次。

证明. 若 G 由 T的两个元素生成，则该命题由推论3得出。由于 $A_a^+ \oplus A_a^-$包含基 A，故 $A_a^+ \oplus A_a^- = A$。我们将该命题的证明分成若干引理。

引理21. $x + x^a \in A_a^+$

证明. 由于 x 是 T中元素之和，只需证明对 $b \in T$有 $b + b^a \in A_a^+$。该论断在引理12中已证明。

□

Let $b, c \in T$ and $c \notin I(a, b)$, $(a, z, y_1, ..., y_k, x_1, ..., x_{k+1}) = BE(L_a, a, b)$, and $(a, z', y_1', ..., y_k', x_1', ..., x_{k+1}') = BE(L_a, a, c)$.

引理22. $x_i * x_j' \in A_a^+$

证明. 由于集合 $\{x_1, ..., x_{k+1}\}$ 与 $\{x_1', ..., x_{k+1}'\}$ 不相交，不失一般性，我们可以假设 $i = j = 1$。我们有

$$W = x_1 * x_1' = (-b + b^a) * (-c + c^a) = b * c + b^a * c^a - b^a * c - b * c^a.$$

由引理20可知 $b^a * c^a = (b * c)^a$ 和 $b^a * c = (b * c^a)^a$。我们有

$$W = b * c + (b * c)^a - b * c^a - (b * c^a)^a$$

设 $x = b * c - b * c^a$。因此， $W = x + x^a$。由引理21可得 $W \in A^+$.

□

因此， A_a^- 中两个元素的乘积属于 A_a^+。

让我们验证 A_a^- 中的元素与 A_a^+ 中的元素的乘积属于 A_a^-。由于 A_a^- 是算子 L_a 的特征空间，对于任意元素 $x \in A_a^-$， $a * x$ 都属于 A_a^-。

引理23. 设 $x \in A$。我们有 $x - x^a \in A_a^-$。

证明. 由于 x 是 T 中元素的线性组合，要证明引理中的陈述，只需证明 $b - b^a \in A_a^-$，其中 $b \in T$。这一陈述已在引理14中证明。 □

引理24. 设 $x \in A_a^-$。我们有 $x * a \in A_a^-$。

证明. 空间 A_a^- 有一组特征向量构成的基 L_a。我们可以假设 x 是 L_a 的特征向量，其特征值为 $-\lambda_2$，且属于子代数 $\langle\langle a, \ b\rangle\rangle$，其中 $b \in T$。该引理的结论由推论3得出。 □

引理 25. 设 $c, d \in T$。我们有 $(c + c^a) * (d - d^a) \in A_a^-$。

证明。我们有

$$W = (c + c^a) * (d - d^a) = a * d - c^a * d^a + c^a * d - c * d^a.$$

由引理20可得 $c^a * d^a = (c * d)^a$ 以及 $c * d^a = (c^a d)^a$。由引理23可得 $W \in A_a^-$。

□

引理 26. 设 $c, d \in T$。我们有 $(c - c^a) * (d + d^c) \in A_a^-$。

证明。 证明与引理 25 的证明类似。 □

引理 27. 我们有 $z * x_i', x_i' * z \in A_a^-$.

证明。 注意， z 可以线性表示为 a 和形如 $x + x^a$的元素的线性组合。因此，由引理 25 和 26 可得引理的断言。

□

引理 28. 我们有 $x_i * y_j', \ y_i * x_j' \in A_a^-$。

证明。 注意， y_i 可以表示为两个形如 $x + x^a$的元素之和。引理的断言由引理 25 和 26 得出。

□

因此，由引理 24、27 和 28 可知，乘积 $x * y$ 和 $y * x$ 属于 A_a^-，其中$x \in A_a^+$和$y_a \in A_a^-$。

我们证明A_a^+是一个子代数。注意，A_a^+ 有一个基，由 a 和形如 $l + l^a$的向量组成，其中 $l \in T$。

引理 29. 设 $x, y \in T$。那么$(x + x^a) * (y + y^a) \in A_a^+$。

证明。我们有

$$(x + x^a) * (y + y^a) = x * y + x^a * y^a + x^a * y + x * y^a$$

。该引理的结论由引理21得出。 □

引理 30. 设 $x \in A_a^+$。我们有 $x * a \in A_a^+$。

证明. 我们可以假设 x 属于一个二元生成子代数。该引理的结论由引理 7 得出。

□

因此，已证明 (A_a^+, A_a^-) 是代数 A 的一个 $\mathbb{Z}_2$-分次。 □

对任意 $a \in T$，我们将用 τ_a 代替 $\tau(A_a^+, A^- a)$。由于 $(A_a^+, A^- a)$ 是一个 $\mathbb{Z}_2$-分次，τ_a 是 A 的一个自同构。

命题5. 群 $Miy(A,T)$ 同构于 $G/Z(G)$。

证明. 我们将同态 $\phi: G \to Sym(T)$ 定义为集合 T 上的共轭作用。显然，$\phi(G)$ 同构于 $G/C_G(T)$。由于 T包含 G 的一个生成集，我们有 $C_G(T) = Z(G)$。由于 a, b与 $\tau_a b$ 位于子代数 $\langle\langle a, b\rangle\rangle$ 中，由引理14可得 $\tau_a b = b^a$。因此，$\phi(a) = \tau_a$。

□

定义18. 我们按如下规则在代数 A 上定义一个对称双线性形式 $(\cdot, \cdot)$：对任意不同的元素 a, $b \in T$，我们令 $(a, b) = \eta$，以及 $(a, a) = 1$。

引理31. 若 $\eta = -\frac{1}{n-2}$,—则 $(\cdot, \cdot)$ 是左弗罗贝尼乌斯形式。

证明. 由于该型是双线性形式，只需证明对于任意三个元素 $a, b, c \in T$，有 $(a * b, c) = (b, a * c)$。注意，若 $a \in \langle\langle b, c\rangle\rangle$，则该引理的结论可由引理 16 得出。我们将假设 $a \notin \langle\langle b, c\rangle\rangle$。我们有：

$$(a * b, c) = (b^a + \delta(a^b), c) = \eta + \eta^2(n-1),$$

$$(b, a * c) = (b, c^a + \delta(a^c))) = \eta + \eta^2(n-1).$$

因此，$(a * b, c) = (b, a * c)$。 □

定义19. 设 $f(\cdot, \cdot)$ 是代数 A 上的对称形式。形式 $(\cdot, \cdot)$的根为 $Rad_f(A) = \{x \in A | (x, y) = 0$ 对于每个 $y \in A\}$。若上下文已明确所讨论的双线性形式，我们就简写为 $Rad(A)$。

引理32. $Rad(A) = 0.$

证明. 令 $x \in Rad(A)$。根据型的定义，我们有 $x = (\alpha_1, ..., \alpha_n) * T$。

$$(x, a) = \alpha_1 + \eta(\alpha_2 + ... + \alpha_n) = 0$$

对任意元素 $a \in T$，此等式均成立。因此，x 是一个以该矩阵为系数的齐次线性方程组的解

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \eta & \cdots & \eta \\ \eta & 1 & \cdots & \eta \\ \eta & \eta & \cdots & \eta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta & \eta & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

用矩阵 X 求解齐次方程组后，我们发现不存在非零解。

□

命题 6. 代数 A 不含右理想。

证明。 假设 A 包含一个非平凡的右理想 I。我们证明，对于任意$a \in T$， $\tau_a(I) = I$ 。

引理 33. 如果 $a \in T$，那么 $\tau_a(I) \leq I$。

证明。 设 $s \in A$。元素 $s_1 = s - \frac{a*s}{\lambda_2}$ 在 $A_{\lambda_2}(a)$ 上的投影为平凡投影。元素$s_2 = s_1 - \frac{a*s_1}{\lambda_1}$在 $A_{\lambda_1}(a)$ 上的投影为平凡投影。我们有 $s_3 = \frac{}{2\ \lambda_1+\lambda+2()(\lambda_2+1)}(s_2 - a * s_2)$ 等于元素 s 在子空间 A_a^-上的投影。因此 $\tau_a(s) = s - 2s_3$。特别地，如果 s 是右理想 I中的一个元素，那么 $\tau_a(s) \in I$。 □

引理 34. 非平凡理想不包含来自 T 的元素。

证明。 令 $a \in T \cap I$。由于 a在 Mia（A， T）的作用下的轨道为 T，应用引理 33 可得 $T \subseteq I$。由于 T生成代数 A，因此 $I = A$。 □

引理 35。 代数 A 不含非平凡右理想。

证明。令 I 为一个右理想。我们证明 I 属于型（$\cdot, \cdot$）的根。为此，只需证明对于任意 $w \in I$ 和任意 $a \in T$，有（a, w） $= 0$。令 σa 为 w 在子空间 L（a）上的投影，其中某个 $\sigma \in \mathbb{F}$。适当选取参数后，字 $w, a*w, a*$（$a*w$） $a*$（$a*$（$a*w$））的线性组合为 σa。特别地，若 $\sigma \neq 0$，则 $a \in I$；这与引理 34 矛盾。由于（a, w）是到 a 上的投影，因此（a, w）$= \sigma = 0$。因此， w是型（$\cdot, \cdot$）的根中的元素。根据引理32，型的根是平凡的，因此 I 是平凡的。 □

引理 35 完成了该命题的证明。 □

定理 3 的陈述 1 和 2 在引理 18 和 19 中得到证明。定理 3 的陈述 3 在命题 6 中得到证明。定理 3 的陈述 4 在命题 4 和 5 中得到证明。

5 GM（p， η）型代数

在本节中，我们将定义其定义独立于 $GM(p)$-群、但其 Miyamoto 群为 $GM(p)$-群的代数。我们还将证明，该定义等价于 $A_{\mathbb{F}}(G,\ T,\ \eta)$-型代数的定义。

设 $\eta \in \mathbb{F}$，并且令 $\mathbb{F}$ 的特征与 (p， η) 良好相关。令 p 为大于 2 的素数。我们定义一个 GM (p， η)-型代数。

定义 20。 我们称一个具有基 T的 $\mathbb{F}$-代数 A（T） 为 GM（p， η）-型代数，如果满足以下陈述：

1. T 中的每个元素都是幂等元；*2.* 对于任意一对元素 $a, b \in T$, $\langle\langle a, b\rangle\rangle \simeq A_{\mathbb{F}}(\langle a, b\rangle, I(a, b)\ \eta)$，它们构成一个维数为 p 的二面体代数；*3.* 对于任意元素 $a \in T$，都存在一个子集 $\Omega_a = \{t_1, ...\} \subseteq T$，使得 $T = \{a\} \bigcup_{t \in \Omega_a} (I(a, t) \setminus \{a\})$；

4. 对于任意 $a \in T$，由规则 $\phi_a(b) = b^a$ 定义的线性映射 $\phi_a: A \to A$，对任意$b \in T$，都是 A 的一个自同构。

在本节结束之前，我们固定一个 $GM(p,\eta)$-型的代数 $A = A(T)$。

注意，$GM(p,\eta)$-型代数的定义意味着，对于任意 $GM(p)$-型群 (G,T)，代数 $A_{\mathbb{F}}(G,T,\eta)$ 都是 $GM(p,\eta)$-型代数。

定义 21. 对于任意元素 $a \in T$，我们定义子空间

$$A_a^+ = L(\langle\langle a,t\rangle\rangle_a^+ | t \in \Omega_a)$$

$$A_a^- = L(\langle\langle a,t\rangle\rangle_a^+ | t \in \Omega_a)$$

显然，$A = A_a^+ \oplus A_a^-$。我们证明 (A_a^+, A_a^-) 是代数 A 的 $\mathbb{Z}_2$-分次。

命题7. 设 $a \in T$，则 (A_a^+, A_a^-) 是代数 A 的 $\mathbb{Z}_2$-分次。

证明. 我们将该命题的证明分成若干引理。证明对于任意 $x \in A$，元素 $x + \phi_a(x) \in A_a^+$。

引理 36. 对于任意 $x \in A$, $x + \phi_a(x) \in A_a^+$成立。

证明. 注意，x可以分解为和 $x = \alpha_1 x_1, ..., \alpha_k x_k$，其中 $x_1, ..., x_k \in T$。由线性性可得 $x + \phi_a(x) = \alpha_1(x_1 + x_1^a) + ... + \alpha_1(x_k + x_k^a)$。由引理12可知 $x_1 + x_1^a, ..., x_k + x_k^a \in A_a^+$。因此，$x + \phi_a(x) \in A_a^+$。 □

现在我们可以证明 A_a^+ 是一个子代数。

引理 37. 子空间 A_a^+ 是一个子代数。

证明. 设 $x \in \langle\langle a,b\rangle\rangle_a^+$, $y \in \langle\langle a,d\rangle\rangle_a^+$。只需证明 $x * y$可以表示为$w + \phi_a(w)$，其中 $w \in A$。注意，$\langle\langle a,b\rangle\rangle_a^+$中的任意元素都可以表示为形如 $g + g^a$的元素之和，其中 $g \in I(a,b)$。如果 $\langle\langle a,b\rangle\rangle = \langle\langle a,d\rangle\rangle$，则由推论3可得引理中的断言。我们可以假设 $x = b + b^a, y = d + d^a$。我们有：

$$(b + b^a) * (d + d^a) = b * d + b^a * d^a + b^a * d + b * d^a.$$

由于 ϕ_a是一个自同构，且 $\phi_a(b) = b^a$，$\phi_a(d) = d^a$，因此 $b*d+b^a*d^a+b^a*d+b*d^a = (b*d+b^a*d) + \phi_a(b*d+b^a*d)$。于是，根据引理 36，$A_a^+$ 中任意两个元素的乘积都属于 A_a^+，因此 A_a^+ 是一个子代数。

□

引理 38。设 $x, y \in A_a^-$。则 $x * y \in A_a^+$

证明。注意，A_a^-的任意元素都可以表示为 $w - \phi_a(w)$，其中 $w \in A$。因此，只需证明元素$(b-b^a) * (d-d^a)$，其中 b，$d \in T$，可以表示为 $w + \phi_a(w)$。我们有：

$$(b - b^a) * (d - d^a) = (b * d - b^a * d) + \phi_a(b * d - b^a * d).$$

因此可得 根据引理 8，A_a^- 中任意两个元素的乘积都属于 A_a^+。

□

引理 39. 设 $x \in A_a^-$, $y \in A_a^+$。则 $x * y, y * x \in A_a^-$

证明。注意，A_a^- 的任意元素都可以表示为 $w-\phi_a(w)$，其中 $w\in A$；而 A_a^+ 的任意元素都可以表示为 $w'+\phi_a(w')$，其中 $w'\in A$。我们将证明，元素 $(b-b^a)*(d+d^a)$，其中 $b,d\in T$，可以表示为 $w-\phi_a(w)$。我们有：

$$(b-b^a)*(d+d^a)=(b*d-b^a*d)-\phi_a(b*d-b^a*d).$$

我们将证明，元素 $(b+b^a)*(d-d^a)$（其中 b，$d\in T$）可以表示为$w-\phi_a(w)$。我们有：

$$(b+b^a)*(d-d^a)=(b*d-b*d^a)-\phi_a(b*d-b*d^a).$$

□

由引理37、38、39可得命题的断言。

□

对于任意 $a\in T$，我们定义线性映射 τ_a：$A\to A$如下：$\tau_a(x)=x$，$\tau_a(y)=-y$，其中 $x\in A_a^+$，$y\in A_a^-$。命题7表明，(A_a^+,A_a^-)是 Z_2-分次的 A。因此，τ_a 是 A的自同构。

注意，对于任意 a，$b\in T$，引理14表明，ϕ_a和 τ_a在子代数 $\langle\langle a,b\rangle\rangle$ 上的限制一致。由于 T是 A的基，ϕ_a 和 τ_a 在整个代数A上相等。

证明群 $G=\langle\phi_a|a\in T\rangle$ 是一个 $GM(p)$-群。

引理40. 对于任意 $\theta\in G$ 和任意 $b\in T$，有 $\theta(b)\in T$。

证明. 我们有$\theta=\phi_{g_1}...\phi_{g_k}$，其中 $g_1,...,g_k\in T$。只需证明$\phi_{g_1}(b)\in T$。注意到 $b,g_1\in\langle\langle b,g_1\rangle\rangle$，并且$\phi_{g_1}(b)=b^{g_1}\in I(b,g_1)\subseteq T$。 □

下述结论是引理 3 的推论。

引理41. 我们有 $\phi_a\phi_b\phi_a=\phi_{\phi_a(b)}$。

引理 42. 设 $a,b\in T$。则 $|\phi_a\phi_b|=p$。

证明。注意，算子 $\phi_a\phi_b$ 在子代数 $\langle\langle a,b\rangle\rangle$ 上的限制的阶为 p。因此，$|\phi_a\phi_b|$ 可被 p整除。假设 $|\phi_a\phi_b|=n>p$。令 $D=\langle\phi_a,\phi_b\rangle$。那么，引理40表明，对于任意 $g\in D$，都有 $a^g\in T$。引理41表明 $|a^D|=n$。因此$|I(a,b)|=n$，但代数 $\langle\langle a,b\rangle\rangle$ 的定义表明 $|I(a,b)|=p$；矛盾。

□

由引理42可得定理 4。

定理 4。设 $A(T)$是一个 $GM(p,\eta)$型代数。那么，$M=Miy(A,T)$是一个 $GM(p)$型群，并且 $A(T)\cong A_{\mathbb{F}}(M,T,\eta)$。

证明。引理42蕴含 M是一个 GM（p）群。令 $B=A_{\mathbb{F}}$（M，T，η）。代数 B 中的乘法记作 $\circ$。由于 T是 A 和 B中的一组基，只需证明对任意 a，$b\in T$，都有$a*b=a\circ b$。由定义可知 $\langle\langle a,b\rangle\rangle_*=\langle\langle a,b\rangle\rangle_\circ$，因此上述断言成立。

□

参考文献

[1] M. Aschbacher，关于由奇换位生成的有限群。II。《代数杂志》，26，451–459（1973）。[2] W. Burnside，关于不连续群理论中的一个悬而未决问题。《纯粹与应用数学季刊》，33，230–238（1902）。[3] G. Glauberman，无核群中的中心元素。《代数杂志》，4，403–420（1966）。[4] B. Fischer，《有限阶分配拟群》。《数学杂志》，83(4)，267–303（1964）。[5] B. Fischer，由3-换位生成的有限群。I。《数学发明》13，232–246（1971）。[6] H. Cuypers，J.I. Hall，具有平凡中心的3-换位群。《代数杂志》，178，149–193（1995）。[7] I. N. Sanov，指数4的伯恩赛德问题的解。列宁格勒国立大学学报数学系列，10，166–170（1940）。[8] M. Hall Jr.，指数6的伯恩赛德问题的解。《伊利诺伊数学杂志》，2(4)，764–786（1958）。[9] P. S. Novikov，S. I. Adjan，无限周期群。III，《苏联数学汇报》，2(3)，665–685（1968）。[10]A. Atkarskaya，E. Rips，K. Tent，奇指数的伯恩赛德问题。arXiv:2303.15997[11] I. G. Lysenok，偶指数的无限Burnside群。《数学汇报》，60(3)，453–654（1996）。[12] L. Rowen，Y. Segev，非交换代数中的Jordan型轴。《代数及其应用杂志》，22(4)，15页（2023）。[13] J.I. Hall，F. Rehren，S. Shpectorov，泛轴代数与Sakuma定理。《代数杂志》421，394–424（2015）。[14] J.I. Hall，F. Rehren，S. Shpectorov，Jordan型本原轴代数。《代数杂志》，437，79–115（2015）。[15] O. Schreier，自由群的子群。汉堡大学数学研讨会论文集5，161–183（1927）。

IlyaB. Gorshkov Sobolev数学研究所，新西伯利亚，俄罗斯，电子邮箱：ilygor8@gmail.com