arXiv:2603.01994v1 [math.PR] 2 Mar 2026

无限块自旋伊辛模型

¨JONAS JALOWY、ISABEL LAMMERS 和 MATTHIAS LOWE

Abstract. 我们研究一种块平均场伊辛模型，其中 N 个自旋被划分为 s_N 个块，块内存在居里–外斯相互作用，块与块之间则存在最近邻耦合。以往的模型研究的是块数固定时的块磁化强度，而我们研究 $N \to \infty$ 和 $s_N \to \infty$同时趋于极限的情形。该模型在以下模型之间实现了插值：当 $s_N = 1$时为居里–外斯模型；当 $s_N = s$固定时为多组分平均场模型；当 $s_N = N$时，每个自旋各自处于一个块中，此时模型为一维伊辛模型。

在对 s_N施加温和的增长条件后，我们证明了大数定律和多元中心极限定理，其协方差由格林函数给出。例如，高温中心极限定理基本覆盖了截至 $s_N = o(N/(\log N)^c)$的最优范围，而低温区域的结果即使在块数固定时 $s > 2$也是新的。除了熵与能量之间常见的竞争外，证明中还遇到了一个新的障碍：当 $s_N \to \infty$时出现的维数灾难。

1. Introduction

一方面，从统计力学的角度来看，区块自旋模型十分引人入胜，参见例如 [GC08、FC11、FU12、Col14、LS18、KLSS20、JLS21] ，它们是相互作用的平均场系统模型。另一方面，这些模型后来又被重新发现，用来描述群体之间的社会互动，参见例如 [GBC09、KT20、LSV20、FKT22], ，这沿袭了在社会选择语境下对平均场模型的重新诠释，参见 [BD01、KL09、CL10], ；近来，它们还提出了有趣的统计问题，参见 [BRS19、LS20]。

区块模型的标准设定是将 N 自旋划分为 s 块，最终我们将关注热力学极限 $N \to \infty$。一般来说，自旋可以取某个集合中的值，但此处我们将范围限制为伊辛自旋 $\sigma_i \in \{-1, +1\}$。所有自旋都以平均场方式与同一区块内的其他自旋相互作用，且作用强度相同；而不同区块内自旋之间的平均场相互作用强度则不同。这可以用一个$s \times s$矩阵 $A = (A_{i,\,j})_{i,\,j=1}^{s}$来表示，其中 $A_{i,\,j}$描述区块 i与 j中任意两个粒子之间的相互作用强度。上述许多模型都包含两个区块，而 [JLS21], 采用了最一般的设定：区块数目任意（但固定），自旋可以取有限个可能值（波茨模型），并且 A是任意的正定相互作用矩阵。

在本文中，我们关注该模型的一种新扩展，它允许块数 $s = s_N$ 也随着 $N \to \infty$ 增加，并且块相互作用 $A_{i,\,j}$ 类似于带周期边界条件的一维最近邻伊辛模型，即当 $|i - j| \notin \{0, 1, s_N - 1\}$ 时，$A_{i,\,j} = 0$。特别地，这个自旋系统在 $s_N = 1$时的居里–外斯（平均场）模型、文献中已有的适用于 $s_N = 2$或其他固定 $s_N = s \in \mathbb{N}$的块模型，以及极端情形 $s_N = N$下的伊辛模型之间起到插值作用。本文的目标之一是弥合早期块模型对有限 s维磁化强度向量的研究与伊辛模型之间的差距；在伊辛模型中，我们的磁化向量将由单个自旋组成。

该模型在思想上接近所谓的 Kac-Ising 模型，参见例如 [Pre09, §4.2], [Tho79, 附录 C], ，其中每个自旋 σ_i 可以与一组邻近自旋相互作用，而这组自旋至关重要地

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：60F05，82B20。*Key words and phrases.* 伊辛模型、居里–外斯模型、区块自旋模型、相变、中心极限定理、大数定律。

取决于该自旋 i 的位置 σ_i。相比之下，在块自旋系统中，这组自旋是预先固定的区块。此外，在 Kac 模型的经典 Lebowitz–Penrose 极限中，首先取热力学极限 $N \to \infty$，然后再令相互作用范围趋于无穷大。在我们的模型中，这些极限则是同时取得的。因此，与 Kac-Ising 模型相比，我们的块模型会呈现不同的行为。特别是，参数选择恰当时，我们会看到即使在一维也会发生相变，而一维 Kac-Ising 模型则不会出现这种情况。

我们将通过分析块磁化强度向量来研究这一相变。这种块平均程序被称为粗粒化，是用于近似的标准分析工具，例如用于 Kac-Ising 模型。然而，在我们这篇短文所研究的情形中，块磁化强度向量 m构成哈密顿量的序参量/充分统计量，因为底层的微观块自旋系统先验地被结构化为块变量。这使我们能够为块磁化强度向量推导出不含近似、并沟通有限块平均场机制与完全微观伊辛链的显式大数定律（大数定律）和中心极限定理（中心极限定理）。对于经典平均场自旋模型（即没有额外区块结构的模型），例如平均场伊辛模型，关于磁化强度的此类大数定律和中心极限定理已有悠久传统。最早的结果可追溯到 Ellis 和 Newman [EN78b, EN78a, ENR80]。迄今，相关推广涵盖多个方向，例如 [CS11] 和 [EL10] 中借助 Stein 方法得到的显式误差界，以及 [MSB21, MSB25]中的 p-自旋版本。

2. Overview

2.1. 设定。 我们考虑一个由 $N \in \mathbb{N}$ 个伊辛自旋 $\sigma_i \in \{-1, +1\}$组成的自旋系统。指标集合 $\{1, \dots, N\}$ 被划分为 s_N个块，记为 S_1，……，S_{s_N}，它们大小相等$\frac{N}{s_N}$，其中 s_N 是一个非递减的整数序列。我们将本模型的哈密顿量定义为

$$H_N(\sigma) = \frac{\beta}{2}\frac{s_N}{N}\sum_{k=1}^{s_N}\sum_{i,j\in S_k}\sigma_i\sigma_j + \frac{\alpha}{2}\frac{s_N}{N}\sum_{k=1}^{s_N}\sum_{\substack{i\in S_k\\ j\in S_{k-1}\cup S_{k+1}}}\sigma_i\sigma_j, \quad \beta > 2\alpha > 0,$$

其中，在此处以及全文中，我们将分别把 $1 = s_N + 1$ 与 $s_N = 1 - 1$等同起来。相应的吉布斯测度由下式给出

$$\mu_{N,\beta,\alpha}(\mathrm{d}\sigma) = \frac{1}{Z_{N,\beta,\alpha}}\exp\{H_N(\sigma)\}\,\rho(\mathrm{d}\sigma),$$

其中参考测度 $\rho = (\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_{+1})^{\otimes N}$是 N个对称$\{+1, -1\}$值随机变量的乘积测度，而$Z_{N,\beta,\alpha} = \mathbb{E}[\exp\{H_N(\sigma)\}]$ 表示配分函数。换言之，每个自旋以强度 $\beta > 0$ 与其自身区块中的每个自旋相互作用，并以另一强度 $\alpha > 0$与其两个相邻块中的所有自旋相互作用。照例，α，β 可视为各自的逆温度，而整个系统的总逆温度由 $\beta + 2\alpha$给出。

我们关注该模型的磁化强度 $m = (m_1, \dots, m_{s_N})$，其中我们将第 k 个区块的磁化强度定义为

$$m_k = \frac{s_N}{N}\sum_{i\in S_k}\sigma_i, \qquad k = 1, \dots, s_N.$$

这是一个序参量（或充分统计量），也就是说，哈密顿量可以通过 m 重写为

$$H_N(m) = \frac{1}{2}\frac{N}{s_N}m^T A m,$$

其中 m^T 是 $m \in \mathbb{R}^{s_N}$ 的转置，而相互作用矩阵 A 是对称循环矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & 0 & \cdots & 0 & \alpha & \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{s_N \times s_N}.$$

与此一致，在两区块的情况下 $A = \begin{bmatrix} \beta & 2\alpha \\ 2\alpha & \beta \end{bmatrix}$ $s_N = 2$。 A 的特征值为

$$\lambda_j = \beta + 2\alpha \cos\left(2\pi \frac{j}{s_N}\right), \quad j = 1, \ldots, s_N,$$

这意味着，当且仅当 $\beta > 2\alpha$时， A 是正定的。

2.2. **主要结果**。 我们研究在区块数 s_N取不同值时，该模型是否存在相变。当每个块中的自旋数 $\frac{N}{s_N}$ 趋于无穷时，我们在定理 2.1 中证明了一致大数定律，并在定理 2.3 中证明了不同温度区间下的有限维中心极限定理，表明这些情形下存在相变。定义 $m^* = m^*(\beta + 2\alpha)$ 为下式的最大解:

$$x = \tanh((\beta + 2\alpha)x)$$

$\vec{m}^* = (m^*, \ldots\ldots)$ 是一个向量，其每个坐标的值均为 m^*。

定理 2.1 （一致大数定律）。 假设 $s_N = o\left(\frac{N}{\text{对数 } N}\right)$。

(i) 若 $\beta + 2\alpha \leq 1$ （高温相），则对每个 $\varepsilon > 0$,

$$\mu_{N,\beta,\alpha}\left(\sup_{k=1,\ldots,s_N} |m_k| > \varepsilon\right) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(ii) 若 $\beta + 2\alpha > 1$ （低温相），则对每个 $\varepsilon > 0$,

$$\mu_{N,\beta,\alpha}\left(\min\left\{\sup_{k=1,\ldots,s_N} |m_k - m^*|, \sup_{k=1,\ldots,s_N} |m_k + m^*|\right\} > \varepsilon\right) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

特别地，这意味着 $\mu_{N,\,\beta,\,\alpha} \circ m^{-1} \Rightarrow \frac{1}{2}\delta_{\vec{m}^*} + \frac{1}{2}\delta_{-\vec{m}^*}$，因为测度 $\mu_{N,\,\beta,\,\alpha}$ 在全局自旋翻转下保持不变。

另一方面，若 $s_N \asymp N$，则每个区块只包含有限多个自旋。在这种情况下，该模型是一个有限程自旋系统，其行为颇似一个没有相变的一维伊辛模型。

命题 2.2。 若 $N/s_N \in \mathbb{N}$ 大小固定且相等，则无论参数 $\alpha > 0$和 $\beta > 0$ 如何选择，都不会发生相变。特别地，存在唯一的无限体积测度μ_m 定义在 $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ 上，使得

$$\mu_{N,\beta,\alpha}(m \in \cdot) \Rightarrow \mu_m(\cdot)$$

（在积拓扑中）。因此，总磁化强度 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \sigma_i$ 收敛于 0.

该结果将在附录中证明。

我们的第二个主要结果确定了非临界性下区块磁化强度发生高斯涨落的尺度，其协方差为格点格林函数。

定理 2.3（有限维分布的中心极限定理）。 ***(i)*** 若 $s_N = o\big(N\ (\log\ N)^{\ -5/2}\big)$ 且$\beta + 2\alpha < 1$，则重标度磁化强度满足中心极限定理

$$\mu_{N,\beta,\alpha}\left(\sqrt{\frac{N}{s_N}}m \in \cdot\right) \Rightarrow \mathcal{N}(0,\Sigma)$$

在有限维分布的意义下亦然。若 $s_N \equiv s$ 对充分大的 N 为常数，则极限高斯分布在 $\mathbb{R}^s$ 上的协方差为 $\Sigma = (I-A)^{-1}$；否则，它定义在 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 上，其中 Σ 是有限维投影意义下的极限，即

$$\Sigma_{i,j} = \lim_{N\to\infty}(I-A)^{-1}_{i,j} = \frac{\Big(\frac{(1-\beta)-\sqrt{(1-\beta)^2-4\alpha^2}}{2\alpha}\Big)^{|i-j|}}{\sqrt{(1-\beta)^2-4\alpha^2}}, \quad i,j\in\mathbb{N}.$$

(ii) 若 $s_N = o\Big(\sqrt{N}(\log\ N)^{-1}\Big)$ 且 $\beta + 2\alpha > 1$，则当 $0 < \delta < 2m^*$ 时，重新缩放后的磁化强度满足中心极限定理

$$\mu_{N,\beta,\alpha}\left(\sqrt{\frac{N}{s_N}}(m-\overrightarrow{m}^*) \in \cdot \,\middle|\, m \in B_{\delta\sqrt{s_N}}(\overrightarrow{m}^*)\right) \Rightarrow \mathcal{N}(0,\Sigma^*)$$

如 $N\to\infty$ 且

$$\mu_{N,\beta,\alpha}\left(\sqrt{\frac{N}{s_N}}(m+\overrightarrow{m}^*) \in \cdot \,\middle|\, m \in B_{\delta\sqrt{s_N}}(-\overrightarrow{m}^*)\right) \Rightarrow \mathcal{N}(0,\Sigma^*),$$

同样是在有限维分布的意义下，其中（见下文(7.22) ）

$$\Sigma^*_{i,j} = \lim_{N\to\infty}(1-(m^*)^2)(I-A(1-(m^*)^2))^{-1}_{i,j}.$$

注记 2.4。 自然，中心极限定理蕴含弱大数定律，但仅对有限维边缘分布成立。然而，定理 2.1 中的一致大数定律对 m 的上确界范数成立。

2.3. **讨论**。 我们来谈谈如何将该模型以及定理 2.3 之类的结果视为对文献中相关结果的插值。

- $s_N = 1$ 对应于居里–外斯模型，其磁化强度 $\sqrt{N}m \Rightarrow \mathcal{N}(0,\ (1-\beta)^{-1})$ 在 $\mathbb{R}$ 上满足一个众所周知的中心极限定理，见 [EN78b]。
- $s_N = 2$ 对应于 [GC08] 引入的二分模型，或 [KT20], 的双组 Curie-Weiss 模型；关于重标度磁化向量 $\sqrt{N}(m_1,\ m_2)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的中心极限定理，见 [LS18]。关于极限单粒子压强，参见 [FU12]；关于动力学研究，参见 [Col14] 。秉承 [BD01, KL09] 的思路， [CL10], [GBC09] 引入并诠释了双区块模型，将其视为一种社会选择模型。在 [LSV20], 中，作者将区块自旋模型与随机区块模型结合起来，并在社会选择的背景下对其进行研究。

- 固定时 $s_N \in \mathbb{N}$ 对应于有限维高斯极限，参见 [KLSS20] ；关于高温和低温下的中心极限定理（未给出磁化向量的确切极限点），参见[FC11] 。这一情形也对应于 [KT22]中的多组居里–外斯模型，作者在那里证明了大数定律和中心极限定理，并在 [FKT22]中将其推广到局部极限定理。然而需要注意的是，在低温情形下，[KT22] 中的作者要求 $s_N = 2$ ，或者相互作用矩阵的各项相同。关于区块波茨模型的推广，已有 [Kim22, Mun26, JLS21]等研究。

- $s_N \to \infty$ 给出了 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$上的一个系统（或随机过程）。如果 $N/s_N \to \infty$，那么这些区块会将离散模型重整化为连续的高斯自旋模型，参见定理 2.3。
- 对于固定的 $N/s_N \in \mathbb{N}$ 每个块中的自旋，离散有限程自旋模型$\mu_{N,\ \beta,\ \alpha}$ 导出最近邻模型$\mu_{N,\ \beta,\ \alpha}(m \in \cdot)$ ，且极限唯一，见命题 2.2。

• 最后， $s_N = N$ 对应于逆温度 α 下、自旋构型为 $m = (m_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}}$的最近邻一维伊辛模型，参见 [Isi25] 或 [FV18]。

注意，对于 $N/s_N \to \infty$，即当每个块中的自旋数量不断增加时，我们的模型属于在 [BM17] 和 [DM23]中所分析的那一类模型。在那里，作者针对图上的一大类自旋模型证明了普适性结果（在 [BM17] 中，这些自旋模型可以是具有铁磁和反铁磁相互作用的伊辛或波茨类型）。他们表明，如果此类模型中的平均度增长得足够快，则这些模型会表现出普适行为。这尤其涉及全局 磁化强度。由于我们的模型要具体得多，我们可以分析（命题 2.2 除外）块磁化强度向量，而这一量在 [BM17] 和[DM23]的一般设定中并无意义。因此，尽管我们的模型落入他们的一般框架，我们的具体选择却为更加细粒度的分析开辟了可能，例如对块间关联的描述。

在极端情形 $\alpha = 0$ 下，我们有相互独立的居里-魏斯模型，构型空间上的极限分布变成平凡的乘积测度，例如，定理 2.3 (i) 对所有 $s_N = o(N)$ 均成立，因为 $\sqrt{N/s_N}m \Rightarrow \mathcal{N}(0, (1-\beta)^{-1})^{\otimes\mathbb{N}}$。对于任意 s_N 的取值，磁化强度的中心极限定理都成立；这正是独立随机变量 m_k 之和的经典中心极限定理所考虑的情形，其方差取决于 β， s_N 的取值。

对于定理 2.3(ii)，假设 $\alpha > 0$ 是必要的，因为相互独立的区块在没有相互作用时，符号 $\pm m^*$ 可以有任意组合。另一方面，假设$s_N = o(\sqrt{N}(\log N)^{-1})$ 仅是技术性的，可以放宽。不过，我们更强的假设仍传达了相同的结果含义；为避免不必要地使证明过于复杂，我们在引理 7.10 及之后的部分采用了一个更简单的步骤。

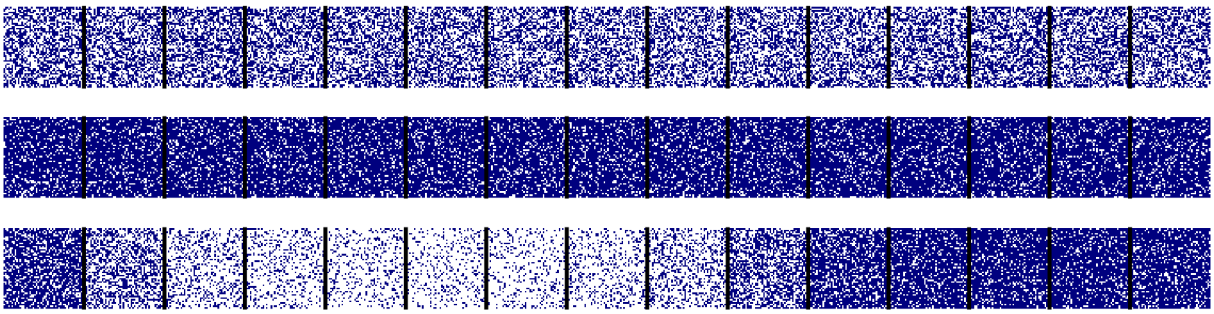

FIGURE 1. 块自旋居里-魏斯模型的三种不同模拟，其中$s_N = 15$ 个区块各含有 $N/15 = 2500$ 个自旋（每个区块本身都是一个平均场模型）。顶行显示高温区间（$\beta = 0.5$， $\alpha = 0.2$），磁化强度为零；而中间行的低温区域则出现磁化（$\beta = 0.8$， $\alpha = 0.2$）。底行显示低温区域中的一种不稳定（不太可能发生）的状态，呈现了循环相邻区块之间块相互作用的相关性。

2.4. 论文结构。 在本文余下部分，我们将证明主要结果。为清晰起见，同时也因为论证更简洁，我们先从高温区间 （$\beta + 2\alpha < 1$）开始。在所有证明中，我们都会遇到由 $s_N \to \infty$导致的维数灾难。证明的一般难点在于将磁化向量的贡献局限在较低（对数级）的维度中；为此，我们利用模型中相距较远的区块之间快速衰减的相关性。

在第3节中，我们通过对块间相互作用进行解耦，证明大数定律定理 2.1 (i)。随后，熵与能量之间的竞争便可以得到控制，因此我们

可以通过对相关构型进行计数，并应用拉普拉斯原理，证明该结果。

为了应用拉普拉斯方法证明多元中心极限定理，我们在第 4 节介绍 Hubbard–Stratonovich 变换的基础。高温中心极限定理定理 2.3(i) 的证明见第 5 节，其中维数不断增长会给拉普拉斯方法带来重大困难。请特别注意，高维高斯近似 $s_N \to \infty$ 会集中在半径为 $\approx \sqrt{s_N}$ 的壳层上，因此体积效应会与典型界相竞争。我们利用次高斯集中不等式以及 $(I-A)^{-1}$ 非对角项的衰减来控制这类效应（关于证明思路的更多内容，见第 5 节）。

定理 2.1 (ii) 和 2.3 (ii) 的 低温区域 ($\beta + 2\alpha > 1$) 在第 6 节和第 7 节中讨论。我们围绕两个均匀对称破缺态展开，并沿用先前证明中的类似步骤，只是技术上更加复杂。附录给出了命题 2.2 中有限程模型的标准证明。

3. Proof of Theorem 2.1 (i)

首先，我们将证明高温区间内的大数定律。假设本节始终有 $\beta + 2\alpha \leq 1$。第一步是证明，在吉布斯测度下，当 $N \to \infty$ 时，第一个区块的磁化强度依概率收敛于零。然后由并集界即可得到定理的结论。

命题 3.1. 假设 $s_N = o\left({}^{N}\text{对数}\, N \right)$，并令 $\varepsilon > 0$。若 $\beta + 2\alpha < 1$，则存在常数 $c_{\beta,\alpha} > 0$，使得

$$\mu_{N,\beta,\alpha}\left(|m_1| > \varepsilon\right) = \mathcal{O}\left(\exp\left\{-\frac{N}{s_N} c_{\beta,\alpha}\varepsilon^2\right\}\right). \tag{3.1}$$

若 $\beta + 2\alpha = 1$，则

$$\mu_{N,\beta,\alpha}\left(|m_1| > \varepsilon\right) = \mathcal{O}\left(\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\frac{1}{48}\varepsilon^4\right\}\right). \tag{3.2}$$

证明思路是用定义在各个区块上的相互独立的 Curie-Weiss 模型来近似该自旋系统。由于维数不断增大，使用柯西-施瓦茨界将所有区块解耦所产生的误差

$$m_k m_{k+1} \leq \frac{m_k^2}{2} + \frac{m_{k+1}^2}{2} \tag{3.3}$$

相互作用项过大，超过了收敛速度。因此，我们首先需要减少相关区块的数量。为此，可以只应用该界，直到找到某个索引 k，其对应的区块具有足够小的磁化强度。磁化强度较小的区块，其相互作用也较弱，因此我们可以直接将其忽略，从而使这些区块与后续所有部分解耦，同时显著降低误差。要应用这一策略，我们需要确保确实会出现携带较小磁化强度的区块。事实上，不难看出，所有区块磁化强度都一致地被某个常数从下方界定的概率，会随着自旋数 N 的增加而指数级趋于零。更精确地说，我们将首先证明以下引理。

引理 3.2. 设 $0 < \delta < 1$。对于 $\beta + 2\alpha < 1$ 和$s_N = o$（N）

$$\mu_{N,\beta,\alpha}\left(|m_1|, \ldots, |m_{s_N}| > \delta\right) \leq \exp\left\{-\left(\frac{1-(\beta+2\alpha)}{2} - o(1)\right) N\delta^2\right\} = o(1). \tag{3.4}$$

类似地，在临界温度 $\beta + 2\alpha = 1$处，我们得到上界

$$\mu_{N,\beta,\alpha}\left(|m_1|, \ldots, |m_{s_N}| > \delta\right) \leq \exp\left\{-\left(\frac{1}{12} - o(1)\right) N\delta^4\right\}. \tag{3.5}$$

证明。首先注意，将配分函数改写为关于磁化强度的形式，可得

$$Z_{N,\beta,\alpha} = \sum_{m_1,\ldots,m_{s_N}} \exp\left\{\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N} \beta m_k^2 + 2\alpha m_k m_{k+1}\right\} \frac{1}{2^N} \prod_{k=1}^{s_N} \binom{\frac{N}{s_N}}{\frac{N}{s_N}\frac{1+m_k}{2}},$$

其中， m_k取值于集合 $\mathcal{A}_N = \left\{-1 + 2k\frac{s_N}{N} \colon\ k = 0, \ldots\ldots, \frac{N}{s_N}\right\}$。由詹森不等式可得

$$Z_{N,\beta,\alpha} = \mathbb{E}[\exp\{H_N(m)\}] \geq \exp\{\mathbb{E}[H_N(m)]\} \geq 1$$

其中，最后一步成立是因为根据矩阵 A的正定性，对于 $m(\sigma)$的所有取值，均有 $H_N(m) = \frac{N}{s_N}\frac{1}{2} m^T A m \geq 0$。在第一步应用这一观察，并在第二步对所有相互作用应用柯西-施瓦茨界（3.3），可得

$$\begin{aligned}
&\mu_{N,\beta,\alpha}\left(|m_1|, \ldots, |m_{s_N}| > \delta\right) \\
&\leq \sum_{m_1,\ldots,m_{s_N}} \mathbb{1}_{\{|m_1|,\ldots,|m_{s_N}|>\delta\}} \exp\left\{\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N} \beta m_k^2 + 2\alpha m_k m_{k+1}\right\} \frac{1}{2^N} \prod_{k=1}^{s_N} \binom{\frac{N}{s_N}}{\frac{N}{s_N}\frac{1+m_k}{2}} \\
&\leq \sum_{m_1,\ldots,m_{s_N}} \mathbb{1}_{\{|m_1|,\ldots,|m_{s_N}|>\delta\}} \exp\left\{\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N} (\beta + 2\alpha) m_k^2\right\} \frac{1}{2^N} \prod_{k=1}^{s_N} \binom{\frac{N}{s_N}}{\frac{N}{s_N}\frac{1+m_k}{2}} \\
&\leq \left(\sum_m \mathbb{1}_{\{m>\delta\}} \exp\left\{\frac{N}{s_N}\left(\frac{\beta + 2\alpha}{2} m^2 - \log 2 + s(m)\right)\right\}\right)^{s_N},
\end{aligned}$$

其中， $s(m) = -\frac{1+m}{2}\log\frac{1+m}{2} - \frac{1-m}{2}\log\frac{1-m}{2}$，上述表达式只是 s_N重的居里-外斯模型乘积。这类模型已得到充分研究，我们知道（例如参见 [FV18]），在高温区间，函数

$$F_{\beta+2\alpha}(m) := \frac{\beta + 2\alpha}{2} m^2 - \log 2 + s(m) \tag{3.6}$$

在 0 处达到最大值，在其他所有地方均为负，并且关于 $|m|$单调递减。在 $|m| > \delta$这一事件发生时，我们可以将 $m = \delta$ 代入 $F_{\beta+2\alpha}$，从而对吉布斯测度中的指数函数给出上界。当 m 接近零时，我们可以使用泰勒展开

$$-\log 2 + s(m) = -\frac{1}{2} m^2 - \frac{1}{12} m^4 + \mathcal{O}(m^6).$$

因此，对于 $\beta + 2\alpha < 1$，即 $1 - (\beta + 2\alpha)/2 > 0$，我们得到

$$\begin{aligned}
\mu_{N,\beta,\alpha}\left(|m_1|, \ldots, |m_{s_N}| > \delta\right) &\leq \left(\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\frac{1 - (\beta + 2\alpha)}{2}\delta^2\right\} \sum_m \mathbb{1}_{\{m>\delta\}}\right)^{s_N} \\
&\leq \exp\left\{-\frac{1 - (\beta + 2\alpha)}{2} N\delta^2\right\} \left(\frac{N}{s_N}\delta\right)^{s_N},
\end{aligned}$$

它趋于零，因为 $\log \binom{N}{s_N} = o\left(\binom{N}{s_N}\right)$。这意味着，对于任意固定的 δ，以高概率会存在磁化强度至多为 δ的块。

对于临界线 $\beta+2\alpha=1$，我们执行与上面相同的步骤。在这种情况下，二阶项相互抵消，取而代之的是，我们得到

$$\begin{aligned}\mu_{N,\beta,\alpha}\left(|m_1|,\dots,|m_{s_N}|>\delta\right) &\leq \left(\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\frac{1}{12}\delta^4\right\}\sum_m \mathbb{1}_{\{m>\delta\}}\right)^{s_N}\\ &\leq \exp\left\{-\frac{1}{12}N\delta^4\right\}\left(\frac{N}{s_N}\delta\right)^{s_N},\end{aligned}$$

它也收敛到零。 □

在上述引理中，我们证明了以高概率并非所有块的磁化强度都可能「很大」。命题 3.1 的证明思路是从第一个区块开始，然后向左、向右移动，并在两个方向上都停在第一个磁化强度足够小的区块处。对所有经过的区块应用柯西-施瓦茨界，并将其后的一切解耦。

命题 *3.1* 的证明。对于 $N\in\mathbb{N}$ 和我们稍后选定的某个固定 $\delta>0$，定义随机变量 R_N 和 L_N 如下：

$$\begin{aligned}R_N &= \inf\left\{i=1,\dots,s_N\,:\,|m_i|\leq\delta\right\}\\ L_N &= \inf\left\{i=1,\dots,s_N-1\,:\,|m_{s_N-i}|\leq\delta\right\}.\end{aligned}$$

根据 (3.4)，我们知道事件 $2\leq R_N<s_N-L_N\leq s_N$ 发生的概率为 $1-\exp\left\{-^{1-}\left(\frac{\beta+2\alpha}{2}N\delta^2\right\}\right)$。因此，我们将考虑以下内容，而不是 $\mu_{N,\,\beta,\,\alpha}(|m_1|>\varepsilon)$：

$$\mu_{N,\beta,\alpha}(|m_1|>\varepsilon,\,2\leq R_N<s_N-L_N\leq s_N)\leq \sum_{2\leq r<s_N-l\leq s_N}\mu_{N,\beta,\alpha}(|m_1|>\varepsilon,R_n=r,L_n=l).$$

我们来计算右侧的概率：为此，对于固定的 $2\leq r<s_N-l\leq s_N$，定义集合

$$\mathcal{A}_{r,l}\coloneqq\left\{R_N=r,\,L_N=l\right\}.$$

定义集合 $\mathcal{I}_{l,r}\coloneqq\{1,\dots,r,s_N-l,\dots,s_N\}$，并注意到，根据定义，在事件 $\mathcal{A}_{r,l}$ 发生时，我们知道

$$|m_r|,|m_{s_N-l}|\leq\delta\quad\text{and}\quad|m_k|>\delta\forall k\in\mathcal{I}_{l-1,r-1}\setminus\{1\}\tag{3.7}$$

我们希望计算

$$\begin{aligned}&\mu_{N,\beta,\alpha}\left(\,|m_1|>\varepsilon,\,\mathcal{A}_{r,l}\right)\\ =&\frac{1}{Z_{N,\beta,\alpha}}\sum_{m_1,\dots,m_{s_N}}\mathbb{1}_{\{|m_1|>\varepsilon\}}\mathbb{1}_{\mathcal{A}_{r,l}}\exp\left\{\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N}\beta m_k^2+2\alpha m_k m_{k+1}\right\}\frac{1}{2^N}\prod_{k=1}^{s_N}\binom{\frac{N}{s_N}}{\frac{N}{s_N}\frac{1+m_k}{2}}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

在上面的引理中，我们将 $Z_{N,\beta,\alpha}$ 从下方界定为 1。由于这里我们想忽略 r 和 s_N-l之后的所有内容，因此必须更谨慎地界定配分函数，以便为这些区块保留一个归一化常数。回想一下，$Z_{N,\beta,\alpha}$ 是一个 s_N 重求和。只保留 $k\in\mathcal{I}_{l-1,r-1}$ 的“$m_k=0$”被加项，并利用斯特林公式可知，当 n 足够大时，有 $\binom{n}{\frac{n}{2}}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}2^n\right)$，由此得到下界

$$Z_{N,\beta,\alpha}\geq\left(\frac{1}{2^{\frac{N}{s_N}}}\binom{\frac{N}{s_N}}{\frac{N}{2s_N}}\right)^{r+l-1}\widetilde{Z}_N^{r,l}\sim\left(C_1\sqrt{\frac{s_N}{N}}\right)^{r+l-1}\widetilde{Z}_N^{r,l},\tag{3.9}$$

其中 $C_1>0$ 是一个常数，且

$$\widetilde{Z}_N^{r,l}=\sum_{m_r,\dots,m_{s_N-l}}\exp\left\{\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}\left(\sum_{k=r}^{s_N-l}\beta m_k^2+\sum_{k=r}^{s_N-l-1}2\alpha m_k m_{k+1}\right)\right\}\left(\frac{1}{2^{\frac{N}{s_N}}}\right)^{s_N-r-l+1}\prod_{k=r}^{s_N-l}\binom{\frac{N}{s_N}}{\frac{N}{s_N}\frac{1+m_k}{2}}$$

这恰好是满足零边界条件的模型中所有剩余区块的配分函数。（请注意，为了简洁起见，我们在此省略了对 β 和 α 的标示。）为了也对 (3.8) 中的和给出一个界，我们将对所有 $k\in\mathcal{I}_{l-1,r-1}\cup\{s_N-l\}$，在 m_km_{k+1} 上应用柯西-施瓦茨上界 (3.3)。因此，对于哈密顿量，我们得到以下上界：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{s_N}\beta m_k^2+2\alpha m_km_{k+1}\le&\left(\sum_{k\in\mathcal{I}_{l-1,r-1}}(\beta+2\alpha)m_k^2\right)\\&+\alpha m_r^2+\alpha m_{s_N-l}^2+\sum_{k=r,\dots s_N-l}\beta m_k^2+\sum_{k=r,\dots,s_N-l-1}2\alpha m_km_{k+1}\end{aligned}$$

回顾一下，在 $\mathcal{A}_{r,l}$ 上，我们有 $m_r^2,m_{s_N-l}^2\le\delta^2$。将其代入上述观察，对于 (3.8) 中的和，我们得到以下上界

$$\begin{aligned}&\sum_{m_1,\dots,m_{s_N}}\mathbb{1}_{\{|m_1|>\varepsilon\}}\mathbb{1}_{\mathcal{A}_{r,l}}\exp\left\{\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N}\beta m_k^2+2\alpha m_km_{k+1}\right\}\frac{1}{2^N}\prod_{k=1}^{s_N}\binom{\frac{N}{s_N}}{\frac{N}{s_N}\frac{1+m_k}{2}}\\&\le\left(\sum_{m_1}\mathbb{1}_{|m_1|>\varepsilon}\exp\left\{\frac{N}{s_N}\left(\frac{\beta+2\alpha}{2}m_1^2-\log 2+s(m_1)\right)\right\}\right)\exp\left\{\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}2\alpha\delta^2\right\}\\&\quad\times\left(\sum_{m_k}\mathbb{1}_{\{|m_k|\ge\delta\}}\exp\left\{\frac{N}{s_N}\left(\frac{\beta+2\alpha}{2}m_k^2-\log 2+s(m_k)\right)\right\}\right)^{r+l-2}\widetilde{Z}_N^{r,l}.\end{aligned}$$

注意，配分函数 $\widetilde{Z}^{r,l}_N$ 会抵消，因为它也出现在 $Z_{N,\beta,\alpha}$ 的上界中。对 $\beta+2\alpha<1$ 中相互独立的居里-外斯部分应用通常的居里-外斯界，得到

$$\begin{aligned}&\mu_{N,\beta,\alpha}(|m_1|>\varepsilon,\,R_N=r,L_N=l)\\&\le\left(\sqrt{\frac{N}{s_N}}\right)^{r+l-1}\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\frac{1-(\beta+2\alpha)}{2}\varepsilon^2\right\}\frac{N}{s_N}\exp\left\{\alpha\frac{N}{s_N}\delta^2\right\}\\&\quad\times\exp\left\{-\frac{N}{s_N}(r+l-2)\frac{1-(\beta+2\alpha)}{2}\delta^2\right\}\left(\frac{N}{s_N}\right)^{r+l-2}\\&\le\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\left(\frac{1-(\beta+2\alpha)}{2}\varepsilon^2-\alpha\delta^2\right)\right\}\exp\left\{-(r+l-1)\left(\frac{N}{s_N}(1-(\beta+2\alpha))\delta^2-\frac{3}{2}\log\frac{N}{s_N}\right)\right\}.\end{aligned}$$

将 $\{|m_1|>\varepsilon\}$ 划分为 $\{2\le R_N\le s_N-L_N\le s_N\}$ 及其补集，然后结合上述观察与 (3.4)，得到

$$\begin{aligned}&\mu_{N,\beta,\alpha}(|m_1|>\varepsilon)\\&\le\mu_{N,\beta,\alpha}(|m_1|>\varepsilon,\,2\le R_N\le s_N-L_N\le s_N)+\exp\left\{-N\left(\frac{1-(\beta+2\alpha)}{2}-o(1)\right)\delta^2\right\}\\&\le\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\left(\frac{1-(\beta+2\alpha)}{2}\varepsilon^2-\alpha\delta^2\right)\right\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \sum_{2\le r<s_N-l\le s_N} \exp\left\{-(r+l-1)\left(\frac{N}{s_N}(1-(\beta+2\alpha))\delta^2-\frac{3}{2}\log\frac{N}{s_N}\right)\right\}\\
&+\exp\left\{-N\left(\frac{1-(\beta+2\alpha)}{2}-o(1)\right)\delta^2\right\}\\
\le& s_N^2\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\left(\frac{1-(\beta+2\alpha)}{2}\varepsilon^2-\alpha\delta^2\right)\right\}\exp\left\{-\left(\frac{N}{s_N}(1-(\beta+2\alpha))\delta^2-\frac{3}{2}\log\frac{N}{s_N}\right)\right\}\\
&+\exp\left\{-N\left(\frac{1-(\beta+2\alpha)}{2}-o(1)\right)\delta^2\right\}\\
\le& \exp\left\{-\frac{N}{s_N}\left(\frac{1-(\beta+2\alpha)}{2}\varepsilon^2-\alpha\delta^2-2\frac{s_N}{N}\log s_N\right)\right\}+\exp\left\{-N\left(\frac{1-(\beta+2\alpha)}{2}-o(1)\right)\delta^2\right\}.
\end{aligned}
$$

现在，由于 $s_N=o(N/\log N)$，我们有：当 N 足够大时，$2\frac{s_N}{N}\log s_N\le \frac{1-(\beta+2\alpha)}{4}$；若取 $\delta<\sqrt{\frac{1-(\beta+2\alpha)}{8\alpha}}\varepsilon$ 并定义 $c_{\beta,\alpha}:=\frac{1-(\beta+2\alpha)}{8}$，则有

$$
\mu_{N,\beta,\alpha}(|m_1|>\varepsilon)\le 2\exp\left\{-c_{\beta,\alpha}\frac{N}{s_N}\varepsilon^2\right\}.
$$

同理，对于 $\beta+2\alpha=1$，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\mu_{N,\beta,\alpha}(|m_1|>\varepsilon,\,R_N=r,L_N=l)\\
\le&\left(\sqrt{\frac{N}{s_N}}\right)^{r+l-1}\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\frac{1}{12}\varepsilon^4\right\}\frac{N}{s_N}\exp\left\{\alpha\frac{N}{s_N}\delta^4\right\}\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\frac{(r+l-2)}{12}\delta^4\right\}\left(\frac{N}{s_N}\right)^{r+l-2}\\
\le&\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\left(\frac{1}{12}\varepsilon^4-\alpha\delta^4\right)\right\}\exp\left\{-(r+l-1)\left(\frac{N}{s_N}\frac{\delta^4}{24}-\frac{3}{2}\log\frac{N}{s_N}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

因此，结合 (3.5) 可得

$$
\begin{aligned}
&\mu_{N,\beta,\alpha}(|m_1|>\varepsilon)\\
\le& s_N^2\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\left(\frac{\varepsilon^4}{12}-\alpha\delta^4\right)\right\}\exp\left\{-\left(\frac{N}{s_N}\frac{\delta^4}{24}-\frac{3}{2}\log\left(\frac{N}{s_N}\right)\right)\right\}+\exp\left\{-\left(\frac{1}{12}-o(1)\right)N\delta^4\right\}\\
\le& 2\exp\left\{-\frac{1}{48}\varepsilon^4\frac{N}{s_N}\right\},
\end{aligned}
$$

其中，最后一步成立是因为当 N 足够大时，$2\frac{s_N}{N}\log s_N\prec\frac{\varepsilon^4}{24}$，于是我们选择 $\delta<(48\alpha)^{-\frac{1}{4}}\varepsilon$。□

由此立即可知，$\sup_{i=1}^{s_N}|m_i|$ 也依概率收敛于零，因为

$$
\mu_{N,\beta,\alpha}(\exists k:|m_k|>\varepsilon)\le s_N\cdot\mu_{N,\beta,\alpha}(|m_1|>\varepsilon),
$$

从而得到以下界

$$
\mu_{N,\beta,\alpha}(\exists k:|m_k|>\varepsilon)\le 2s_N\exp\left\{-c_{\beta,\alpha}\frac{N}{s_N}\varepsilon^2\right\}
$$

在严格高温情形下，并且

$$
\mu_{N,\beta,\alpha}(\exists k:|m_k|>\varepsilon)\le 2s_N\exp\left\{-\frac{1}{48}\varepsilon^4\frac{N}{s_N}\right\}
$$

对于临界线。至此，定理 2.1 (i) 的证明完成。

4. Hubbard-Stratonovich

为了证明中心极限定理，我们需要磁化向量的重标度版本 $\sqrt{\frac{N}{s_N}}m$。我们使用哈伯德–斯特拉托诺维奇变换，通过拉普拉斯方法证明其收敛性。更具体地说，我们将吉布斯测度下重标度磁化向量的分布与一个 s_N 维正态分布进行卷积。如果协方差矩阵选择得当，所得测度便具有一个“良好”的密度，从而使我们能够计算其拉普拉斯变换，并证明其收敛到高斯分布的矩母函数。

引理4.1. 吉布斯测度下重标度磁化强度的分布满足

$$\mu_{N,\alpha,\beta}\left(\sqrt{\frac{N}{s_N}}m\in\cdot\right)\star\mathcal{N}\left(0,A^{-1}\right)=z_N\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\varphi_N\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}x\right)\right\}\mathrm{d}^{s_N}x,$$

其中

$$\begin{aligned}\varphi_N(x)&=\frac{1}{2}x^TAx-\sum_{k=1}^{s_N}\log\cosh\left(x^TAe_k\right)\\&=\frac{\beta}{2}\sum_{k=1}^{s_N}x_k^2+\frac{\alpha}{2}\sum_{k=1}^{s_N}x_k(x_{k-1}+x_{k+1})-\sum_{k=1}^{s_N}\log\cosh(\beta x_k+\alpha(x_{k-1}+x_{k+1}))\end{aligned}\tag{4.1}$$

归一化常数 z_N 由下式给出

$$z_N=\int_{\mathbb{R}^{s_N}}\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\varphi_N\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}x\right)\right\}\mathrm{d}^{s_N}x.$$

证明。对于任意可测集 $U\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{s_N})$,

$$\begin{aligned}&\mu_{N,\alpha,\beta}\left(\sqrt{\frac{N}{s_N}}m\in\cdot\right)\star\mathcal{N}\left(0,A^{-1}\right)(U)\\=&z_N\sum_{\sigma\in\{-1,+1\}^N}\frac{1}{2^N}\int_U\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{\frac{N}{s_N}}m\right)^TA\left(x-\sqrt{\frac{N}{s_N}}m\right)\right\}\exp\left\{\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}m^TAm\right\}\mathrm{d}^{s_N}x\\=&z_N\int_U\exp\left\{-\frac{1}{2}x^TAx\right\}\sum_{\sigma\in\{-1,+1\}^N}\frac{1}{2^N}\exp\left\{\sqrt{\frac{N}{s_N}}x^TAm\right\}\mathrm{d}^{s_N}x\\=&z_N\int_U\exp\left\{-\frac{1}{2}x^TAx\right\}\sum_{\sigma\in\{-1,+1\}^N}\frac{1}{2^N}\exp\left\{\sqrt{\frac{s_N}{N}}x^TA\sum_{k=1}^{s_N}\sum_{i\in S_k}\sigma_ie_k\right\}\mathrm{d}^{s_N}x\\=&z_N\int_U\exp\left\{-\frac{1}{2}x^TAx\right\}\frac{1}{2^N}\prod_{k=1}^{s_N}\prod_{i\in S_k}\left(\exp\left\{\sqrt{\frac{s_N}{N}}x^TAe_k\right\}+\exp\left\{-\sqrt{\frac{s_N}{N}}x^TAe_k\right\}\right)\mathrm{d}^{s_N}x\\=&z_N\int_U\exp\left\{-\frac{1}{2}x^TAx\right\}\frac{1}{2^N}\prod_{k=1}^{s_N}\left(2\cosh\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}x^TAe_k\right)\right)^{\frac{N}{s_N}}\mathrm{d}^{s_N}x\\=&z_N\int_U\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}x\right)^TA\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}x\right)+\sum_{k=1}^{s_N}\frac{N}{s_N}\log\cosh\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}x^TAe_k\right)\right\}\mathrm{d}^{s_N}x\\=&z_N\int_U\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\varphi_N\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}x\right)\right\}\mathrm{d}^{s_N}x.\end{aligned}$$

□

中心目标是求出函数 φ_N 的极小值点。任一极小值点都必须满足临界方程 $\nabla\varphi_N(x) = 0$。φ_N 的梯度由

$$\begin{aligned}\nabla\varphi_N(x) &= \begin{pmatrix} \beta x_1 + \alpha(x_2 + x_{s_N}) - \beta\tanh\left(x^T A e_1\right) - \alpha(\tanh\left(x^T A e_2\right) + \tanh\left(x^T A e_{s_N}\right)) \\ \vdots \\ \beta x_{s_N} + \alpha(x_1 + x_{s_N-1}) - \beta\tanh\left(x^T A e_{s_N}\right) - \alpha(\tanh\left(x^T A e_1\right) + \tanh\left(x^T A e_{s_N-1}\right)) \end{pmatrix} \\ &= Ax - A\begin{pmatrix} \tanh\left(x^T A e_1\right) \\ \vdots \\ \tanh\left(x^T A e_{s_N}\right) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

并且由于矩阵 A 可逆，我们得到临界方程

$$x = \begin{pmatrix} \tanh\left(x^T A e_1\right) \\ \vdots \\ \tanh\left(x^T A e_{s_N}\right) \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

显然，点 $x = (0, \ldots\ldots, 0)$ 总是（即无论如何选择 α，β）满足 (4.2)，因此是一个临界点。下一个引理将刻画点零是 φ_N 的极小值点的各种情形。

引理 4.2。 φ_N 在 $x = (0, \ldots\ldots, 0)$ 处的海森矩阵为

- 若 $\beta + 2\alpha < 1$，则为正定，
- 若 $\beta + 2\alpha = 1$，则为半正定，且
- 当 $\beta + 2\alpha > 1$ 时不是正（半）定的。

证明。 φ_N 的海森矩阵在点 x处为

$$\operatorname{Hess}\varphi_N(x) = A - A\sum_{k=1}^{s_N} \operatorname{sech}^2\left(x^T A e_k\right) e_k e_k^T A. \tag{4.3}$$

由于 $\operatorname{sech}(0) = 1$，上式简化为 $\operatorname{Hess}\varphi_N(0) = A - A^2$，其特征值为

$$\lambda_j = \beta - \beta^2 + (2\alpha - 4\alpha\beta)\cos\left(2\pi\frac{j}{s_N}\right) - 2\alpha^2\cos\left(4\pi\frac{j}{s_N}\right), \quad j = 1, \ldots, s_N. \tag{4.4}$$

事实上，这不难看出，因为 A^2 也是一个循环矩阵，因此我们可以轻松地计算其特征值，并结合 A的特征值，得到上述结果。海森矩阵正定，当且仅当其最小特征值为正。这导出以下三种情况：

- 如果 $2\alpha > 4\alpha\beta$（这等价于 $\beta > \frac{1}{2}$ 和 $\alpha > 0$），那么
$$\lambda_{\frac{s_N}{2}} = \beta - 2\alpha - (\beta - 2\alpha)^2$$
是最小特征值，并且始终为正，因为在此情况下满足 $0 < \beta - 2\alpha < 1$。注意，如果 s_N 是奇数，那么上述结果给出一个下界。
- 如果 $2\alpha < 4\alpha\beta$（这等价于 $\beta < \frac{1}{2}$ 和 $\alpha > 0$），那么
$$\lambda_0 = \beta + 2\alpha - (\beta + 2\alpha)^2$$
是最小的特征值，当且仅当 $0 < \beta + 2\alpha < 1$ 时它为正。

综合这两种情形可以证明，$\operatorname{Hess}\varphi_N(0)$ 为正定当且仅当 $\beta + 2\alpha < 1$，并且在临界线 $\beta + 2\alpha = 1$ 上为半正定。□

引理 4.2 表明，在高温区间（以及可能在临界情形）中，函数 φ_N 在原点处有一个极小值。下一个引理将证明，在这两种情形下，这实际上是全局最小值。随后我们将转向低温情形。

Le命题 4.3。 若 $\beta + 2\alpha \leq 1$，函数 φ_N 在 $x = (0, \ldots, 0$ 处取得全局最小值 $)$.

证明。 我们先从亚临界区间 $\beta + 2\alpha < 1$ 开始。临界情形的证明方法非常类似。回忆一下，任何临界点都必须满足 (4.2)，因此必须是由下式定义的函数 h 的不动点

$$x \overset{(4.2)}{=} \sum_{k=1}^{s_N} \tanh\left(x^T A e_k\right) e_k =: h(x).$$

h 的雅可比矩阵为 $\mathrm{D}\ h(x) = \sum_{k=1}^{s_N}$ 双曲正割$^2\left(x^T A e_k\right) e_k e_k^T A$，它是对角矩阵 $\sum_{k=1}^{s_N}$ 双曲正割$^2\left(x^T A e_k\right) e_k e_k^T$（其元素均不超过 1）与 A 的乘积。因此，对于 $\mathrm{D}\ h(x)$ 的谱范数，我们对任意 $x \in \mathbb{R}^{s_N}$ 得到：

$$\|\mathrm{D}\, h(x)\|_2 \leq \left\| \sum_{k=1}^{s_N} \operatorname{sech}^2\left(x^T A e_k\right) e_k e_k^T \right\|_2 \|A\|_2 \leq \|A\|_2 = \beta + 2\alpha.$$

因此，在 $\beta + 2\alpha < 1$ 的情况下，h 是一个压缩映射。根据巴拿赫不动点定理，它在 $(0, \ldots, 0)$ 处有唯一不动点，因此这也是 φ_N 的唯一极小点。

接下来，考虑临界线 $\beta + 2\alpha = 1$。这种情况下的论证类似。唯一的区别是，现在对于所有没有零分量的 x，都有 $\|\mathrm{D}\, h(x)\|_2 < 1$；而对于所有满足存在 $k \in \{1, \ldots, s_N\}$ 且 $x_k = 0$ 的 x，都有 $\|\mathrm{D}\, h(x)\|_2 = 1$。在这种情况下，$h$ 只是一个弱压缩映射。不过，块磁化强度 m_k 仅取值于 $[-1, 1]$，因此只需将讨论限制在紧集 $[-1, 1]^{s_N}$ 上。于是，根据巴拿赫不动点定理，h 有唯一不动点 $x = (0, \ldots, 0)$。□

接下来要找出低温区域中的极小值点，这并不那么直接。在这种情况下，$x = 0$ 也是一个临界点，但我们已在引理 4.2 中看到它不是极小值。为了确定极小值点，首先要证明这些解必须满足所有坐标的符号相同。由此不难进一步证明它们必定相等。

引理 4.4。 设 $\beta + 2\alpha > 1$。令 x 为 φ_N的一个极小值点。那么 x 满足

$$x_k \geq 0 \quad \textit{for some } k \in \{1, \ldots, s_N\} \Leftrightarrow x_k \geq 0 \quad \textit{for all } k \in \{1, \ldots, s_N\}.$$

证明。 设 $x \in [0, 1]^{s_N}$。再设 $J \subset \{1, \ldots, s_N\}$ 满足 $0 < |J| < s_N$，并定义 y 为

$$y_k = x_k \quad \text{for all } k \in J^c \quad \text{and} \quad y_k = -x_k \quad \text{for all } k \in J.$$

我们将证明 $\varphi_N(x) - \varphi_N(y) \leq 0$，等号成立当且仅当对所有 $k \in J$，$x_k = 0$。为此，首先注意到

$$\left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log\cosh(x) \right| = |\tanh(x)| < 1,$$

因此，对于所有 $0 \leq \widetilde{x} \leq \widetilde{y}$，都有

$$-1 < \frac{\log\cosh(\widetilde{x}) - \log\cosh(\widetilde{y})}{\widetilde{x} - \widetilde{y}} < 1. \tag{4.5}$$

注意到，考虑差值时，φ_N 的二次项会抵消，因此在第二步应用 (4.5) 中的观察，再代入 y 的定义，我们得到

$$\varphi_N(x) - \varphi_N(y) = \alpha \sum_{k=1}^{s_N} x_k x_{k+1} - y_k y_{k+1}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{k=1}^{s_N} \log\cosh(\beta y_k + \alpha(y_{k-1}+y_{k+1})) - \log\cosh(\beta x_k + \alpha(x_{k-1}+x_{k+1})) \\
\leq &\alpha \sum_{k=1}^{s_N} 2x_k x_{k+1}(\mathbb{1}_{k\in J, k+1\notin J} + \mathbb{1}_{k\notin J, k+1\in J}) \\
&+\sum_{k=1}^{s_N} (\beta y_k + \alpha(y_{k-1}+y_{k+1}) - (\beta x_k + \alpha(x_{k-1}+x_{k+1}))\mathbb{1}_{\{k-1,k,k+1\}\cap J\neq\emptyset} \\
= &\alpha \sum_{j\in J} 2x_j x_{j-1}\mathbb{1}_{\{j-1\notin J\}} + 2x_j x_{j+1}\mathbb{1}_{\{j+1\notin J\}} + \sum_{j\in J} -2\beta x_j - 2\alpha x_j - 2\alpha x_j \\
\leq &\sum_{j\in J} (-2\beta) x_j
\end{aligned}
$$

其中，最后一个不等式成立是因为 x_{j-1}，x_{j+1}，且指标函数可以用 1 作为上界。因此，$\varphi_N(x) - \varphi_N(y) \leq 0$，且当且仅当对所有 $j \in J$ 都有 $x_j = 0$ 时取等号，如所求。□

引理 4.5。设 $\beta + 2\alpha > 1$。函数 φ_N 在 $x = \vec{m}^*$ 和 $x = -\vec{m}^*$ 处取得极小值，其中 $\vec{m}^* = (m^*(\beta+2\alpha)\, .. .,\, m^*(\beta+2\alpha))$。

证明。由引理 4.4 和 (4.2) 可知，极小化元 x 满足

$$x_k = 0 \quad \text{for some } k \in \{1,\dots,s_N\} \Leftrightarrow x_k = 0 \quad \text{for all } k \in \{1,\dots,s_N\}. \tag{4.6}$$

事实上，由 (4.2) 可得，对于所有 $k = 1,\dots,s_N$，

$$\frac{\operatorname{artanh}(x_k) - \beta x_k}{\alpha} = x_{k+1} + x_{k-1} \tag{4.7}$$

假设 $x_1,\dots,x_{s_N} \geq 0$ 和 $x_k = 0$，其中某个 $k \in \{1,\dots,s_N\}$。（对于 $x_1,\dots,x_{s_N} \leq 0$，证明过程类似。）由上述结果可知

$$0 = \frac{\operatorname{artanh}(0) - \beta\cdot 0}{\alpha} = x_{k+1} + x_{k-1},$$

因此 $x_{k+1} = -x_{k-1}$，但它们符号相同，所以二者也都必须为零。归纳地，(4.6) 的右端随之成立。

由引理 4.2 可知，$x = 0$ 不是极小化子。上述观察连同引理 4.4 表明，极小化子的所有坐标必须要么严格为正，要么严格为负。假设它们严格为正（负号情形的证明可类似进行）。进一步假设 $x_k = \min\{x_1,\dots,x_{s_N}\}$。由 (4.7) 可得

$$\operatorname{artanh}(x_k) - \beta x_k = \alpha(x_{k+1} + x_{k-1}) \geq 2\alpha x_k$$

这意味着对所有 $j \in \{1,\dots,s_N\}$ 均有反双曲正切$(x_j) - \beta x_j \geq 2\alpha x_j$，这可通过考察函数 $f(x) =$ 反双曲正切$(x) - (\beta+2\alpha)x$（其中 $\beta+2\alpha > 1$ 且 $x \in \mathbb{R}_{>0}$）看出。最后，对所有 k 的方程 (4.7) 求和，得到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{s_N} \frac{\operatorname{artanh}(x_k) - \beta x_k}{\alpha} = \sum_{k=1}^{s_N} x_{k+1} + x_{k-1} = 2\sum_{k=1}^{s_N} x_k \\
\Leftrightarrow\quad &0 = \sum_{k=1}^{s_N} \operatorname{artanh}(x_k) - (\beta+2\alpha)x_k
\end{aligned}
$$

但我们上面已经看到，最后这个求和中的所有被加项都是非负的，因此它们都必须为零，也就是说，对于所有 k，x_k 都必须满足居里-魏斯方程，由此得到所需结果。□

5. Proof of Theorem 2.3 (i)

这里我们将证明高温区间内的中心极限定理。在上一节中，我们已经求出了密度函数 φ_N 的全局极小点，因此现在可以证明定理 2.3。整个本节中，我们都假设 $\beta + 2\alpha < 1$。首先，我们先介绍证明的一些初步步骤和思路。

5.1. 证明方法。 我们的目标是证明，在$\mu_{N,\alpha,\beta}$下，$\widetilde{m} \coloneqq \sqrt{\frac{N}{s_N}}\, m$ 的分布的所有有限维边缘都弱收敛于 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$上的正态分布 $\mathcal{N}(0, \Sigma)$，或者分别收敛于$\mathbb{R}^{\lim_N s_N}$ 上的该分布，其中 Σ 是由 $(I - A)^{-1}$ 的（无限版本）给出的协方差。令Z 为一个 s_N 维高斯向量（与 $\tilde{m}$独立），其分布为 $\mathcal{N}\left(0, A^{-1}\right)$。目前，我们将关注 $Z + \widetilde{m}$ 的分布，并将在证明的最后一步去除 Z 中的高斯部分。根据Cramér-Wold装置，并利用拉普拉斯变换（矩母函数），我们关注对于任意固定的、仅有有限个非零分量的$t \in \mathbb{R}^{s_N} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$，极限 $\mathbb{E}[\exp\{t^T(Z + \widetilde{m})\}]$。根据引理4.1并进行变量替换，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\exp\left\{t^T(Z+\widetilde{m})\right\}\right] =& z_N \int_{\mathbb{R}^{s_N}} \exp\left\{-\frac{N}{s_N}\varphi_N\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}x\right) + t^T x\right\} \mathrm{d}^{s_N}x \\ =& \frac{\int_{\mathbb{R}^{s_N}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}x^T A x + \frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N} \log\cosh\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}(Ax)_k\right) + t^T x\right\}\mathrm{d}^{s_N}x}{\int_{\mathbb{R}^{s_N}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}x^T A x + \frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N} \log\cosh\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}(Ax)_k\right)\right\}\mathrm{d}^{s_N}x},\end{aligned}$$

其中我们记 $(Ax)_k \coloneqq x^T A e_k$。我们将证明，上式收敛到相应正态分布的矩生成函数，其表达式为 $\exp\left\{-\frac{1}{2}t^T(A - A^2)^{-1}t\right\}$。为此，首先注意到，在原点附近，log cosh 的行为类似于一个二次函数，其偏差为

$$G(y) \coloneqq \log\cosh(y) \; - \; \frac{y^2}{2}, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

注意，

$$-\frac{y^4}{12} \le G(y) \le 0 \quad \text{for all } y \in \mathbb{R} \tag{5.2}$$

例如，通过检验 $y = 0$ 以及前两个导数即可得到这一结论。将其代入上述积分，并利用 $\sum_{k=1}^{s_N} (Ax)_k^2 = x^T A^2 x$，可得

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{t^T(Z+\widetilde{m})\right\}\right] = \frac{\int_{\mathbb{R}^{s_N}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N} G\Big(\sqrt{\frac{s_N}{N}}(Cx)_k\Big) + t^T(A - A^2)^{-\frac{1}{2}}x\right\}\mathrm{d}^{s_N}x}{\int_{\mathbb{R}^{s_N}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N} G\Big(\sqrt{\frac{s_N}{N}}(Cx)_k\Big)\right\}\mathrm{d}^{s_N}x}, \tag{5.3}$$

其中 $C \coloneqq A(A - A^2)^{-\frac{1}{2}} = A^{1/2}(I - A)^{-1/2}$ 是某个对称正定矩阵，并且我们在分子和分母中进行了变量替换 $x \mapsto (A - A^2)^{\frac{1}{2}}x$。

现在，我们希望运用拉普拉斯方法证明，积分的主导部分由 φ_N 的极小化点决定，并且恰好由我们预期的极限给出。然而，由于积分的维数 $s_N \to \infty$ 不断增长，无法直接应用该方法。直观地说（如同有限维情况下的拉普拉斯方法），我们希望将积分域限制在半径较大的球 $R \gg 0$ 内，并对 log cosh 在 0 处作泰勒近似。困难源于维数灾难：一个 s_N维正态分布

其大部分概率质量位于这个球之外，并集中在半径约为 $\sqrt{s_N}$的区域附近。为了绕过这个问题，我们需要

(i) 仔细将积分区域限制在可控区域内（见 D_N 下文）；(ii) 关键是利用 t 只有有限个坐标这一事实，将 (5.3) 视为对高斯分布的扰动；(iii) 综合以上各点，并去除 $Z \sim \mathcal{N}(0, A^{-1})$ 的贡献，从而完成定理 2.3 的证明。

我们将在以下小节中处理这些步骤。

5.2. **限制积分域**。为此，我们需要以下表示。

引理 5.1。我们可以将上述内容写成

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{t^T(Z+\widetilde{m})\right\}\right] = \mathbb{E}_{\rho_N}\left[\exp\{t^T(A-A^2)^{-\frac{1}{2}}X\}\right],$$

其中 X 表示一个 s_N 维随机变量，其分布为强对数凹分布，密度为

$$\rho_N(x) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N} G\Big(\sqrt{\frac{s_N}{N}}(Cx)_k\Big)\right\}. \tag{5.4}$$

证明。（强）对数凹测度具有如下形式 $e^{-U(x)}$ 的密度，其中 $U(x)$ 是一个（强）凸函数。类似于（4.3），我们有

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hess} U(x) &= \operatorname{Hess}\left(\frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N} G\Big(\sqrt{\frac{s_N}{N}}(Cx)_k\Big)\right)\\
&= \operatorname{Hess}\left(\frac{1}{2}x^T(I+C^2)x - \frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N}\log\cosh\Big(\sqrt{\frac{s_N}{N}}(Cx)_k\Big)\right)\\
&= I + C^2 - \sum_{k=1}^{s_N}\operatorname{sech}^2\Big(\sqrt{\frac{s_N}{N}}(Cx)_k\Big)Ce_ke_k^TC\\
&= I + C\left(I - \sum_{k=1}^{s_N}\operatorname{sech}^2\Big(\sqrt{\frac{s_N}{N}}(Cx)_k\Big)e_ke_k^T\right)C.
\end{aligned}$$

注意到 $0 \le$ 双曲正割$^2 \le 1$，因此对角矩阵 $I - \sum_{k=1}^{s_N}$ 双曲正割$^2\Big(\sqrt{\frac{s_N}{N}}(Cx)_k\Big)e_ke_k^T$ 的各分量非负。又由于 C^2 是正定的，因此 Hess $U(x)$ 严格正定，且关于洛伊纳序具有一致下界 I（即最小奇异值至少为 1）。□

记 $B_R = \{x \in \mathbb{R}^{s_N} \colon \|x\| \le R\}$ 为 s_N 维空间中半径为 R 的中心球。定义集合 $\mathcal{I}_d \colon = \{1, \dots, d, s_N - d + 1, \dots, s_N\}$，并令投影 $P_{\mathcal{I}_d} \colon \mathbb{R}^{s_N} \to \mathbb{R}^{2d}$ 表示到集合 $\mathcal{I}_d$ 的投影，即投影到前后各 d 个坐标上，其中 $1 \le 2d \le s_N$。进一步定义

$$B_R^{(2d)} = \{x \in \mathbb{R}^{s_N} : \|P_{\mathcal{I}_d}(x)\| = \Big(\sum_{j\in\mathcal{I}_d} x_j^2\Big)^{1/2} \le R\}$$

维度 1、……、d 以及 $s_N - d + 1$、……、s_N 中某个球的柱集，其中 $d < s_N$。下面这个关键引理将把有效维数降低到对数级别，从而消除维数灾难。

引理 5.2。 设 $d_N := \lceil c_6 \log N \rceil$，其中 $c_6 > 0$ 为某个常数（稍后定义），并定义

$$D_N := \begin{cases} B_{2\sqrt{s_N}} \cap B^{(2d_N)}_{2\sqrt{2d_N}} & if\ 2d_N \le s_N \\ B_{2\sqrt{2d_N}} & if\ 2d_N > s_N. \end{cases}$$

于是，存在普适常数 $c_1 > 0$，使得

$$\mathbb{E}_{\rho_N}\left[\mathbb{1}_{D_N^c}(X)\exp\{t^T(A-A^2)^{-\frac{1}{2}}X\}\right] = \mathcal{O}(\exp\{-c_1 d_N\}) \longrightarrow 0,$$

当 $N \to \infty$时。

证明。 根据 [Ver18], 中的定理 5.2.11，对每一个利普希茨函数 $f\colon \mathbb{R}^{s_N} \to \mathbb{R}$，成立

$$\|f(X) - \mathbb{E}\rho_N[f(X)]\|_{\psi_2} \le c_2 \|f\|_{\mathrm{Lip}}, \tag{5.5}$$

其中 $\|\cdot\|_{\psi_2}$ 表示次高斯范数， $c_2 > 0$ 是某个普适常数。该常数依赖于引理 5.1 的证明中 U 的凸性，我们求得其下界为 1。特别地， $f(X) - \mathbb{E}_{\rho_N}[f(X)]$ 是一个次高斯随机变量。我们希望分别将此应用于随机向量的范数，以及将该向量投影到其坐标的某些 $q_N \in \mathbb{N}$ 上所得向量的范数。投影的范数 $P_{\mathcal{I}_{q_N}}\colon \mathbb{R}^{s_N} \to \mathbb{R}^{2q_N}$ 定义了一个 1-利普希茨函数 $f(x) = \|P_{\mathcal{I}_{q_N}}(x)\|$。由 (5.5)，$\|P_{\mathcal{I}_{q_N}}(x)\| - \mathbb{E}_{\rho_N}\|P_{\mathcal{I}_{q_N}}(x)\|$ 是次高斯的，且

$$\|\|P_{\mathcal{I}_{q_N}}(x)\| - \mathbb{E}_{\rho_N}\left[\|P_{\mathcal{I}_{q_N}}(x)\|\right]\|_{\psi_2} \le c_2,$$

其中再次令 X 表示一个分布由密度为 ρ_N 的概率测度给出的随机变量。我们来计算 $\mathbb{E}_{\rho_N}[f(X)]$。Poincar´e 不等式 [BL00, Equation (1.6)]表明，对任意 $v \in \mathbb{R}^{s_N}$，

$$v^T \mathrm{Cov}(X) v = \mathrm{Var}(v^T X) \le c_N \int_{\mathbb{R}^{s_N}} \rho_N(x) \|\nabla f_v(x)\|^2 \mathrm{d}^{s_N} x = \|v\|^2,$$

其中我们用 f_v 表示函数 $x \mapsto v^T x$。由詹森不等式可得

$$\mathbb{E}_{\rho_N}\left[\|P_{\mathcal{I}_{q_N}}(X)\|\right]^2 \le \mathbb{E}_{\rho_N}\left[\|P_{\mathcal{I}_{q_N}}(X)\|^2\right] = \sum_{j\in\mathcal{I}_{q_N}} \mathbb{E}_{\rho_N}[X_j^2] = \sum_{j\in\mathcal{I}_{q_N}} e_k^T \mathrm{Cov}(X) e_k \le 2q_N.$$

因此，我们有 $\mathbb{E}_{\rho_N}\left[\|P_{\mathcal{I}_{q_N}}(X)\|\right] \le \sqrt{2q_N}$。如 [Ver18, Proposition 2.6.6] 所示的标准次高斯尾概率，蕴含存在另一个普适常数 $c_1 > 0$，使得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\|P_{\mathcal{I}_{q_N}}(X)\| > 2\sqrt{2q_N}\Big) &= \mathbb{P}\Big(\|P_{\mathcal{I}_{q_N}}(X)\| - \mathbb{E}_{\rho_N}[\|P_{\mathcal{I}_{q_N}}(X)\|] > 2\sqrt{2q_N} - \mathbb{E}_{\rho_N}[\|P_{\mathcal{I}_{q_N}}(X)\|]\Big) \\ &\le \exp\left\{-c_1(2\sqrt{2q_N} - \mathbb{E}_{\rho_N}[\|P_{\mathcal{I}_{q_N}}(X)\|])^2\right\} \le \exp\left\{-c_1 2q_N\right\}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

为了将积分域限制为所声称的 D_N，我们还需要一个观察。为此，我们将把 [Ver18, Theorem 5.2.11] 应用于另一个利普希茨函数，即 $f_{\tilde{t}}\colon x \mapsto \tilde{t}^T x$，以及向量 $\tilde{t} := (A - A^2)^{-\frac{1}{2}} t \in \mathbb{R}^{s_N}$，其利普希茨范数 $\|\tilde{t}\|$ 是一个固定常数。注意，由对称性， $\mathbb{E}_{\rho_N}[\tilde{t}^T X] = 0$，因此由 (5.5) 得 $\|\tilde{t}^T X\|_{\psi_2} \le c_2\|\tilde{t}\|$。由于 $\tilde{t}^T X$ 是一个次高斯随机变量，我们得到一个一致上界

$$\mathbb{E}_{\rho_N}\left[e^{\tilde{t}^T X}\right] \le \exp\left\{c_3\|\tilde{t}\|^2\right\} < \infty. \tag{5.7}$$

最后，让我们综合观察式（5.6）和（5.7）。

我们来考虑 $2d_N \le s_N$ 的情形，另一种情形与此类似且更简单。首先，我们将 (5.6) 应用于 $q_N = \frac{s_N}{2}$，也就是说，我们考虑整个向量的范数。由柯西-施瓦茨不等式可得

$$\mathbb{E}_{\rho_N}\left[\mathbb{1}_{B^c_{2\sqrt{s_N}}} e^{\tilde{t}^T X}\right] \le \mathbb{E}_{\rho_N}\left[e^{2\tilde{t}^T X}\right]\mathbb{P}\Big(\|X\| > 2\sqrt{s_N}\Big) = \mathcal{O}(\exp\{-c_1 s_N\}).$$

现在，对任意其他的 $q_N = d_N \to \infty$ 应用 (5.6)，再由柯西-施瓦茨不等式可得，

$$\mathbb{E}_{\rho_N}\left[\mathbb{1}_{D_N^c} e^{2\tilde{t}^T X}\right] \le c_4 \exp\left\{4c_3\|\tilde{t}\|^2\right\} \exp\left\{-c_1 2d_N\right\} \longrightarrow 0$$

5.3. **扰动的近似**。根据 (5.3) 和引理 5.2，我们目前已经证明

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\exp\left\{t^T(Z+\widetilde{m})\right\}\right] \\ =&\frac{\int_{D_N}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\|x\|^2+\frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N}G\Big(\sqrt{\frac{s_N}{N}}(Cx)_k\Big)+t^T(A-A^2)^{-\frac{1}{2}}x\Big\}\mathrm{d}^{s_N}x}{\int_{D_N}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\|x\|^2+\frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N}G\Big(\sqrt{\frac{s_N}{N}}(Cx)_k\Big)\Big\}\mathrm{d}^{s_N}x}\big(1+o(1)\big).\end{aligned} \tag{5.8}$$

现在，在分子中通过将 $x \mapsto x-(A-A^2)^{-\frac{1}{2}}t \in \tilde{D}_N$ 替换为 $\tilde{D}_N = D_N-(A-A^2)^{-\frac{1}{2}}t$，再进行一次变量替换，得到

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}t^T(A-A^2)^{-1}t\right\}\frac{\int_{\tilde{D}_N}\exp\left\{-\frac{1}{2}\|x\|^2+\frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N}G\Big(\sqrt{\frac{s_N}{N}}(Cx)_k+\sqrt{\frac{s_N}{N}}\Big((I-A)^{-1}t\Big)_k\Big)\right\}\mathrm{d}^{s_N}x}{\int_{\tilde{D}_N}\exp\left\{-\frac{1}{2}\|x\|^2+\frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N}G\Big(\sqrt{\frac{s_N}{N}}(Cx)_k\Big)\right\}\mathrm{d}^{s_N}x},$$

因为 $C(A-A^2)^{-\frac{1}{2}} = A(A-A^2)^{-1} = (I-A)^{-1}$。因此，要证明定理 2.3 (i)，只需证明当 $N \to \infty$ 时，上述商趋于 1。注意，分子和分母仅相差函数 G 中的被加项 $\sqrt{\frac{s_N}{N}}\Big((I-A)^{-1}t\Big)_k$。因此，我们必须证明在极限下可以忽略这一项。由于 t 只有有限个非零坐标，显然当 $N \to \infty$ 时，该被加项趋于零，因此我们可以进行泰勒展开

$$\sum_{k=1}^{s_N}G\Big(\sqrt{\tfrac{s_N}{N}}(Cx)_k+\sqrt{\tfrac{s_N}{N}}\big((I-A)^{-1}t\big)_k\Big)=\sum_{k=1}^{s_N}G\Big(\sqrt{\tfrac{s_N}{N}}(Cx)_k\Big)+G'\big(\xi_k\big)\sqrt{\frac{s_N}{N}}\Big((I-A)^{-1}t\Big)_k, \tag{5.9}$$

其中 ξ_k 是由 $\xi_k = \sqrt{\frac{s_N}{N}}(Cx)_k + \lambda_k\sqrt{\frac{s_N}{N}}\big((I-A)^{-1}t\big)_k$ 给出的中间值，适用于某个 $0 \le \lambda_k \le 1$；我们需要证明第二项趋于零。

引理 **5.3.** 如果 $s_N = o\big(N(\log N)^{-5/2}\big)$，则存在 $c_6 > 0$，使得对于 $d_N = c_6 \log N$，它成立 ds

$$\frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N}G'\Big(\xi_k\Big)\sqrt{\frac{s_N}{N}}\Big((I-A)^{-1}t\Big)_k = o(1)$$

对 $x \in B_{\max\{4\sqrt{s_N},4\sqrt{2d_N}\}} \cap B^{(2d_N)}_{4\sqrt{2d_N}}$ 一致。

Note that $D_N, \tilde{D}_N \subseteq B_{\max\{4\sqrt{s_N},4\sqrt{2d_N}\}} \cap B^{(d_N)}_{4\sqrt{d_N}}$.

证明该引理的一个关键论证是矩阵 C 和 $(I-A)^{-1}$ 的以下性质。也就是说，C 和 $(I-A)^{-1}$ 都是对称循环矩阵，其元素远离对角线（及角点）时呈指数衰减。

引理 5.4。$(I-A)^{-1}$ 的各项满足

$$\big((I-A)^{-1}\big)_{j,k} = \frac{\kappa_1^{|j-k|}+\kappa_1^{s_N-|j-k|}}{(1-\kappa_1^{s_N})\sqrt{(1-\beta)^2-4\alpha^2}}, \qquad \kappa_1 = \frac{(1-\beta)-\sqrt{(1-\beta)^2-4\alpha^2}}{2\alpha}. \tag{5.10}$$

很容易看出，$0 < \kappa_1 < 1$。同样，对于 C，存在 $0 < \kappa_2 < 1$，使得

$$C_{j,k} = c_5\Big(\kappa_2^{|j-k|}+\kappa_2^{(s_N-|j-k|)}\Big). \tag{5.11}$$

证明。这个引理的证明是一个直接的计算，利用了所有循环矩阵都可以由离散傅里叶变换矩阵对角化这一事实。更准确地说，$s_N \times s_N$-矩阵 $I-A$ 可以写成 $I-A=F_{s_N}^{-1}\mathrm{diag}(F_{s_N}(I-A)e_1)F_{s_N}$，其中

$$(F_{s_N})_{j,k}=e^{-\frac{2\pi i}{s_N}jk}.$$

这意味着，对于 $j>k$,

$$(I-A)^{-1}=F_{s_N}^{-1}\mathrm{diag}(F_{s_N}(I-A)e_1)^{-1}F_{s_N}=F_{s_N}^{-1}\mathrm{diag}((F_{s_N}(I-A)e_1)^{-1})F_{s_N}$$

再次经过直接计算可得

$$(I-A)^{-1}_{j,k}=\frac{1}{s_N}\sum_{l=0}^{s_N-1}\frac{e^{\frac{2\pi il}{s_N}(j-k)}}{1-\beta-2\alpha\cos\left(\frac{2\pi l}{s_N}\right)}=\frac{1}{s_N}\frac{\kappa_1}{\alpha}\sum_{l=0}^{s_N-1}\frac{e^{\frac{2\pi il}{s_N}(j-k)}}{1-2\kappa_1\cos\left(\frac{2\pi l}{s_N}\right)+\kappa_1^2}$$

这里我们用到了 $\frac{\alpha}{\kappa_1}(1-\kappa_1^2)=1-\beta$。注意，下面的恒等式成立（我们将在下文证明）：

$$\frac{1}{s_N}\sum_{l=0}^{s_N-1}\frac{e^{\frac{2\pi il}{s_N}(j-k)}}{1-2\kappa_1\cos\left(\frac{2\pi l}{s_N}\right)+\kappa_1^2}=\frac{1}{1-\kappa_1^2}\frac{\kappa_1^{j-k}+\kappa_1^{s_N-(j-k)}}{1-\kappa_1^{s_N}} \tag{5.12}$$

由 (5.12)，我们得到 $(I-A)^{-1}_{jk}=\frac{\kappa_1}{\alpha}\frac{1}{1-\kappa_1^2}\frac{\kappa_1^{j-k}+\kappa_1^{s_N-(j-k)}}{1-\kappa_1^{s_N}}$，且由于

$$\frac{\alpha}{\kappa_1}(1-\kappa_1^2)=\frac{\alpha}{\kappa_1}(1+\kappa_1^2)-2\alpha\kappa_1=1-\beta-2\alpha\kappa_1=\sqrt{(1-\beta)^2-4\alpha^2},$$

其中最后一步由 (5.10) 中 κ_1 的定义得出，这就证明了 (5.10) 中 $(I-A)^{-1}$ 的表示。

现在来证明（5.12）中的恒等式：利用几何级数公式，不难看出，对于任意 $0<r<1$,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}}r^{|k|}e^{\frac{2\pi ikl}{s_N}}&=-1+\sum_{k=0}^{\infty}r^k\left(e^{\frac{2\pi ikl}{s_N}}+e^{-\frac{2\pi ikl}{s_N}}\right)=-1+\frac{1}{1-re^{\frac{2\pi il}{s_N}}}+\frac{1}{1-re^{-\frac{2\pi il}{s_N}}}\\&=-1+\frac{2-2r\cos\left(\frac{2\pi l}{s_N}\right)}{1-2r\cos\left(\frac{2\pi l}{s_N}\right)+r^2}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\left(\frac{2\pi l}{s_N}\right)+r^2},\end{aligned}$$

因此

$$\frac{1}{1-r^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}r^{|k|}e^{\frac{2\pi ikl}{s_N}}=\frac{1}{1-2r\cos\left(\frac{2\pi l}{s_N}\right)+r^2} \tag{5.13}$$

这意味着，对于任意 $m\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{s_N}\sum_{l=0}^{s_N-1}\frac{e^{\frac{2\pi il}{s_N}m}}{1-2r\cos\left(\frac{2\pi l}{s_N}\right)+r^2}&=\frac{1}{s_N}\sum_{l=0}^{s_N-1}e^{\frac{2\pi il}{s_N}m}\frac{1}{1-r^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}r^{|k|}e^{\frac{2\pi ilk}{s_N}}\\&=\frac{1}{1-r^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}r^{|k|}\frac{1}{s_N}\sum_{l=0}^{s_N-1}e^{\frac{2\pi il}{s_N}(m+k)}\\&=\frac{1}{1-r^2}\sum_{q\in\mathbb{Z}}r^{|qs_N-m|},\end{aligned}$$

其中，最后一步成立是因为，当 $m+k=0(\mathrm{mod}\ s_N)$ 时，$\frac{1}{s_N}\sum_{l=0}^{s_N-1}e^{\frac{2\pi il}{s_N}(m+k)}$ 等于一；否则，当其等于零时亦然。另请注意，不失一般性，我们现在可以假设

因为 $m < s_N$，否则我们可以直接转而考虑 $m(\mathrm{mod}\ s_N)$。剩下只需证明 $\sum_{q\in\mathbb{Z}} r^{|qs_N-m|} = \frac{r^m+r^{s_N-m}}{1-r^{s_N}}$ 。将求和按 $q = 0, q \geq 1$ 和 $q \leq -1$ 这几种情况拆分，可得第一个结论

$$\sum_{q\in\mathbb{Z}} r^{|qs_N-m|} = r^m + \sum_{q\geq 1} r^{qs_N-m} + \sum_{p\geq 1} r^{ps_N+m} = r^m + \frac{r^{s_N-m}}{1-r^{s_N}} + \frac{r^{s_N+m}}{1-r^{s_N}} = \frac{r^m + r^{s_N-m}}{1-r^{s_N}}.$$

对于 $C = (A^{-1} - I)^{-\frac{1}{2}}$，由于$A^{-1} - I$ 的特征值更为复杂，相同的计算会更加繁琐。因此，我们不计算精确常数，而是利用 [BR07] 中定理 3.4 的结果，证明存在正定常数 K 和 $0 < \kappa_2 < 1$，使得

$$(A^{-1} - I)^{-\frac{1}{2}}_{j,k} < cond \cdot K \cdot (\kappa_2^{|j-k|} + \kappa_2^{s_N-|j-k|}),$$

其中，$cond$ 表示 $A^{-1} - I$ 的特征向量矩阵的谱条件数，我们定义 $c_5 := cond \cdot K$。□

引理 *5.3* 的证明。首先，假设 $s_N \gg \log N$；另一种情况 $s_N = \mathcal{O}(\log N)$ 更简单，我们将在最后讨论。令 l 为 t中最大的非零分量，并定义$\widetilde{d}_N := \lfloor {}^{5}\log \kappa_1 \log N \rfloor$，使得 $\kappa_1^{d_N} = N^{-5}$。令 $\mathcal{I}_{\widetilde{d}_N} := \{1, \ldots, \widetilde{d}_N\} \cup \{s_N - \widetilde{d}_N + 1, \ldots, s_N\}$为靠近端点 $1, s_N$的指标，并考虑 $k \notin \mathcal{I}_{\widetilde{d}_N}$，以证明它们的$\widetilde{\ }$贡献可以忽略：对于 $k = d_N + 1, \ldots, s_N - d_N$，由 (5.10) 得

$$\begin{aligned}\left|\left((I-A)^{-1}t\right)_k\right| &= \sum_{j=1}^{l} \left|(I-A)^{-1}_{j,k} t_j\right| && (5.14)\\ &= \frac{1}{(1-\kappa_1^{s_N})\sqrt{(1-\beta)^2 - 4\alpha^2}} \sum_{j=1}^{l} (\kappa_1^{|j-k|} + \kappa_1^{s_N-|j-k|})\,|t_j| \\ &\leq \frac{2\kappa_1^{\widetilde{d}_N}}{(1-\kappa_1^{s_N})\sqrt{(1-\beta)^2 - 4\alpha^2}} \sum_{j=1}^{l} |t_j| = \mathcal{O}(N^{-5}) && (5.15)\end{aligned}$$

$\widetilde{\ }$关于 $k \notin \mathcal{I}_{\widetilde{d}_N}$ 一致，其中最后一步由 d_N 的定义得出。

接下来，我们需要为 $G'(\xi_k)$ 找到一个合适的上界。由于 $\xi_k \in \sqrt{\frac{s_N}{N}}(Cx)_k + \lambda_k \sqrt{\frac{s_N}{N}} \left((I-A)^{-1}t\right)_k$ 对某个 $0 \leq \lambda_k \leq 1$ 是泰勒定理中的中间值，我们知道

$$\xi_k = \sqrt{\frac{s_N}{N}}(Cx)_k + \mathcal{O}(N^{-5}) \tag{5.16}$$

回想一下，我们的范围限制在球 $B_{4\sqrt{s_N}}$ 内，因此

$$|\xi_k| \leq 4\|C\|\frac{s_N}{\sqrt{N}} + \mathcal{O}(N^{-5}).$$

注意，由 (5.2) 可知 $|G'(x)| \leq |x|$，因此

$$|G'(\xi_k)| \leq 4\|C\|\frac{s_N}{\sqrt{N}} + \mathcal{O}(N^{-5}). \tag{5.17}$$

结合估计式 (5.15) 和 (5.17)，我们得到一个粗略的界

$$\left|\frac{N}{s_N} \sum_{k=\widetilde{d}_N}^{s_N-\widetilde{d}_N} G'(\xi_k)\sqrt{\frac{s_N}{N}}\left((I-A)^{-1}t\right)_k\right| = \mathcal{O}(Ns_N N^{-5}). \tag{5.18}$$

接下来还需考察

$$\frac{N}{s_N}\sum_{k\in\mathcal{I}_{\widetilde{d}_N}} G'(\xi_k)\sqrt{\frac{s_N}{N}}\Big((I-A)^{-1}t\Big)_k,$$

此时，$((I-A)^{(-1)}t)_k$ 的贡献不可忽略。我们将再次利用远离对角线时的指数衰减，这次针对矩阵 C。因此，我们只需使用一致上界

$$\big|((I-A)^{-1}t)_k\big| \le \|(I-A)^{-1}\|\|t\| \le (1-\beta-2\alpha)^{-1}\|t\| =: C_{\beta,\alpha,t} \tag{5.19}$$

并证明

$$\frac{N}{s_N}\sum_{k\in\mathcal{I}_{\widetilde{d}_N}} G'(\xi_k)\sqrt{\frac{s_N}{N}}C_{\beta,\alpha,t}$$

通过对 $G'(\xi_k)$进行上界估计，证明其对于 $\xi_k = \sqrt{\frac{s_N}{N}}(Cx)_k + \lambda_k\sqrt{\frac{s_N}{N}}\big((I-A)^{-1}t\big)_k$足够小。为此，将$(Cx)_k$拆分为两个和。回顾定义 $\mathcal{I}_{d_N} := \{1,\cdots,d_N, s_N-d_N+1,\cdots,s_N\}$，其中

$$d_N = \frac{5}{-\log\kappa_2}\log N + \widetilde{d}_N = \left(\frac{5}{-\log\kappa_2}+\frac{5}{-\log\kappa_1}\right)\log N =: c_6\log N$$

并写成

$$(Cx)_k = \sum_{j\notin\mathcal{I}_{d_N}} C_{kj}x_j + \sum_{j\in\mathcal{I}_{d_N}} C_{kj}x_j$$

然后利用指数衰减性质 (5.11)，得到

$$\begin{aligned}\sum_{j\notin\mathcal{I}_{d_N}} |C_{k,j}x_j| &\le c_5\sum_{j\notin\mathcal{I}_{d_N}} (\kappa_2^{|j-k|}+\kappa_2^{(s_N-|j-k|)})\,|x_j| \\ &\le c_5\kappa_2^{d_N-\widetilde{d}_N}\sum_{j\notin\mathcal{I}_{d_N}}|x_j| = \mathcal{O}(\kappa_2^{d_N-\widetilde{d}_N}\,s_N^{3/2}) = \mathcal{O}(N^{-5}s_N^{3/2}).\end{aligned} \tag{5.20}$$

对于近端部分 $j\in\mathcal{I}_{d_N}$，我们需要使用 $x\in B^{(2d_N)}_{4\sqrt{2d_N}}$。这意味着现在我们是在一个集合上积分，其中首尾的 d_N个坐标位于半径为 $4\sqrt{2d_N}$ 的 $2d_N$ 维球内，即 $\|P_{\mathcal{I}_{d_N}}x\| \le 4\sqrt{2d_N}$，因此

$$\Big|\sum_{j\in\mathcal{I}_{d_N}} C_{k,j}x_j\Big| = |(CP_{\mathcal{I}_{d_N}}x)_k| \le \|CP_{\mathcal{I}_{d_N}}x\| \le \|C\|\cdot\|P_{\mathcal{I}_{d_N}}x\| \le 4\|C\|\cdot\sqrt{2d_N},$$

其中谱范数 $\|C\|$ 与 N 无关。由 (5.20) 可得，

$$\begin{aligned}|\xi_k| &= \sqrt{\frac{s_N}{N}}\,|(Cx)_k| + \mathcal{O}\Big(\sqrt{\frac{s_N}{N}}\Big) \\ &\le \sqrt{\frac{s_N}{N}}\Big(4\|C\|\sqrt{2d_N} + \mathcal{O}(N^{-5}s_N^{3/2})\Big) + \mathcal{O}\Big(\sqrt{\frac{s_N}{N}}\Big) = \mathcal{O}\Big(\sqrt{\frac{s_N\log N}{N}}\Big)\to 0.\end{aligned}$$

回忆定义 $G(x) = \log\cosh(x) - \frac{x^2}{2}$，因此 $G'(x) = \text{双曲正切}(x) - x$。在零点处进行泰勒展开可得 $G'(x) = -\frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)$，因此当 N 足够大时

$$G'\Big(\xi_k\Big) = \mathcal{O}\Big(\frac{s_N\log N}{N}\Big)^{3/2}$$

关于 $k\in\mathcal{I}_{\widetilde{d}_N}$ 一致成立。因此

$$\frac{N}{s_N}\sum_{k\in\mathcal{I}_{\widetilde{d}_N}} G'(\xi_k)\sqrt{\frac{s_N}{N}}C_{\beta,\alpha,t} = \mathcal{O}\Big(\frac{N}{s_N}\widetilde{d}_N\sqrt{\frac{s_N}{N}}\big(\frac{s_N\log N}{N}\big)^{3/2}\Big) = \mathcal{O}\Big(\frac{s_N}{N}(\log N)^{5/2}\Big),$$

当 $s_N = o\Big(\begin{smallmatrix} N \\ N \end{smallmatrix}$（对数）$^{5/2} \Big)$ 时收敛于零。将此与（5.18）结合即可得出该结论。

在 $s_N = \mathcal{O}(\log\ N)$ 的情形下，引理 5.3 的结论很容易证明，因为本质上 $\mathcal{I}^{c}_{\widetilde{d}_N} = \emptyset$。事实上，对于 $x \in B_{4\sqrt{2d_N}}$，对每一个 $k = 1, \dots, s_N$，我们有

$$\left|\sqrt{\frac{s_N}{N}}(Cx)_k\right| \leq \sqrt{\frac{s_N}{N}}\|C\|4\sqrt{2d_N} \leq 8c_6\|C\|\frac{\log N}{\sqrt{N}} \tag{5.21}$$

并且由 (5.19),

$$\left|\lambda_k\sqrt{\frac{s_N}{N}}\left((I-A)^{-1}t\right)_k\right| \leq C_{\beta,\alpha,t}\sqrt{\frac{s_N}{N}} \leq C_{\beta,\alpha,t}\sqrt{2}c_6\sqrt{\frac{\log N}{N}}. \tag{5.22}$$

特别地，(5.21) 与 (5.22) 表明，当 $N \to \infty$ 时有 $|\xi_k| = \mathcal{O}\left(\begin{smallmatrix} \log N \\ \sqrt{N} \end{smallmatrix}\right) \longrightarrow 0$。再次对 G' 在零附近作泰勒展开，并代入所有的 ξ_k，便得到

$$\begin{aligned}\left|\frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N} G'\Big(\xi_k\Big)\sqrt{\frac{s_N}{N}}\Big((I-A)^{-1}t\Big)_k\right| \leq& \sqrt{\frac{N}{s_N}}\|(I-A)^{-1}\|\|t\|\sum_{k=1}^{s_N} G'(\xi_k)\\ =&\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{N}{s_N}}\left(\frac{\sqrt{s_N d_N}}{\sqrt{N}}\right)^3\right)\\ =&\mathcal{O}\left(\frac{(\log N)^2}{N}\right) = o(1).\end{aligned}$$

至此完成引理 5.3 的证明。 □

5.4. **去除高斯加项**。 最后，我们已能够将各项要素结合起来，用于

定理 *2.3 (i)* 的证明。回想一下，我们已在 (5.8) 中证明

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\exp\left\{t^T(Z+\widetilde{m})\right\}\right]\exp\left\{\frac{1}{2}t^T(A-A^2)^{-1}t\right\}\\ =&\frac{\int_{\tilde{D}_N}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\|x\|^2+\frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N}G\Big(\sqrt{\frac{s_N}{N}}(Cx)_k+\sqrt{\frac{s_N}{N}}\Big((I-A)^{-1}t\Big)_k\Big)\Big\}\mathrm{d}^{s_N}x}{\int_{\tilde{D}_N}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\|x\|^2+\frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N}G\Big(\sqrt{\frac{s_N}{N}}(Cx)_k\Big)\Big\}\mathrm{d}^{s_N}x}\big(1+o(1)\big).\end{aligned}$$

我们声称，当 $N \to \infty$ 时，该式收敛于 1。由泰勒近似 (5.9) 和引理 5.3 可得

$$\begin{aligned}&\int_{\tilde{D}_N}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\|x\|^2+\frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N}G\Big(\sqrt{\frac{s_N}{N}}(Cx)_k+\sqrt{\frac{s_N}{N}}\Big((I-A)^{-1}t\Big)_k\Big)\Big\}\mathrm{d}^{s_N}x\\ =&\int_{\tilde{D}_N}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\|x\|^2+\frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N}G\Big(\sqrt{\tfrac{s_N}{N}}(Cx)_k\Big)+G'\Big(\xi_k\Big)\sqrt{\frac{s_N}{N}}\Big((I-A)^{-1}t\Big)_k\Big\}\mathrm{d}^{s_N}x\\ =&\int_{\tilde{D}_N}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\|x\|^2+\frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N}G\Big(\sqrt{\tfrac{s_N}{N}}(Cx)_k\Big)+o(1)\Big\}\mathrm{d}^{s_N}x\end{aligned}$$

因此，

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{t^T(Z+\widetilde{m})\right\}\right] \longrightarrow \exp\left\{\frac{1}{2}t^T(A-A^2)^{-1}t\right\},$$

如前所述，其中 A 和 A^2 是无限矩阵，若我们将 $t \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$视为.....。这意味着我们已经证明，$\mu_{N,\ \alpha,\ \beta} \circ \widetilde{m}^{-1} \star \mathcal{N}\left(0,\ A^{-1}\right)$ 的所有有限维边缘分布都弱收敛于$\mathcal{N}$(0，$(A-A^2)^{-1}$)（维数相应）。接下来还需要消去

独立高斯变量 Z的贡献。为此，请注意，若将上式乘以 $\mathcal{N}(0,\ A^{-1})$分布的矩母函数的倒数，我们得到

$$\exp\left\{\frac{1}{2}t^T(A-A^2)^{-1}t\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}t^TA^{-1}t\right\}=\exp\left\{\frac{1}{2}t^T((A-A^2)^{-1}-A^{-1})t\right\}$$
$$=\exp\left\{\frac{1}{2}t^T(I-A)^{-1}t\right\},$$

因为

$$(A-A^2)^{-1}-A^{-1}=(A-A^2)^{-1}(I-(A-A^2)A^{-1})$$
$$=(A-A^2)^{-1}A=(I-A)^{-1}.$$

□

6. Proof of Theorem 2.1 (ii)

低温区域中大数定律的证明策略与高温情形类似。我们将证明，对于任意固定的 $\delta>0$，以高概率，所有磁化强度不会都分别与 m^*或 $-m^*$ 相距超过 δ。之后，我们将利用这一点证明第一个区块的磁化强度依概率收敛到 m^* 或 $-m^*$，并推导出这一结论对所有区块的磁化强度一致成立。最后一步是证明通常所有区块的磁化强度符号相同。所有证明的思路都与高温情形非常相似。我们将通过选取配分函数被加项的一个合适子集（具体取决于相应的目标），给出配分函数的下界。在吉布斯测度的分子中，我们将对相关区块使用柯西-施瓦茨界 (3.3)，并看到那些相距较远的区块会与配分函数中的项相消。本章全程假设 $\beta+2\alpha>1$，并用 $m^*=m^*(\beta+2\alpha)$ 表示居里-魏斯方程的最大解

$$\tanh((\beta+2\alpha)m)=m.$$

引理 6.1。 假设 $s_N=o(N)$，则对于任意 $\varepsilon>0$，存在正常数$c_{\beta,\alpha}(\varepsilon)$ 使得

$$\mu_{N,\beta,\alpha}\left(\inf_{k=1}^{s_N}\min\{|m_k-m^*|,|m_k+m^*|\}>\varepsilon\right)\le\exp\{-Nc_{\beta,\alpha}(\varepsilon)\}\left(\frac{N}{s_N}\right)^{s_N}$$

且右端趋于 0。换言之，以高概率，并非所有区块的磁化强度都与 $+m^*$ 和 $-m^*$保持正距离。

证明。 与高温情形一样，我们先为配分函数求一个下界。为此，回忆一下，每个区块的磁化强度取值属于集合

$$\mathcal{A}_N=\left\{-1+2k\frac{s_N}{N}\ :\ k=0,\dots,\frac{N}{s_N}\right\}.$$

Then

$$Z_{N,\beta,\alpha}\ge\max_{\widetilde{m}\in\mathcal{A}_N}\exp\left\{N\left(\frac{\beta+2\alpha}{2}\widetilde{m}^2-\log 2+s(\widetilde{m})\right)-V_N\right\},$$

其中，我们只需用满足磁化向量所有分量相同的最大被加项来估计 $Z_{N,\beta,\alpha}$ 中的和，而 $V_N=s_N\left(\log\left(\sqrt{}^{N(1-\widetilde{m}^2)}{}_{s_N}\ \pi\right)+o(1)\right)$ 表示斯特林公式中的低阶项。

回想一下式（3.6）中的函数 $F_{\beta+2\alpha}(m)$，并进一步回想，在通常的 Curie-Weiss 模型中，我们知道在低温区域，$F_{\beta+2\alpha}$ 在区间$[-1,1]$ 上的最大值点为 $\pm m^*$ （参见 [Ell06]）。由于 $F_{\beta+2\alpha}$ 是连续的，且当 N

~ ~变大时，越来越精细，因此我们得到：对于每个 $\delta > 0$，都存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $N \geq N$，都存在 $\widetilde{m} \in \mathcal{A}_N$，满足

$$F_{\beta+2\alpha}(\widetilde{m}) \geq F_{\beta+2\alpha}(m^*) - \delta. \tag{6.1}$$

这意味着对所有这样的 N,

$$Z_{N,\beta,\alpha} \geq \exp\left\{N(F_{\beta+2\alpha}(m^*) - \delta) - V_N\right\}.$$

对固定的 $\varepsilon > 0$，记 A_ε 为半径为 ε、分别以 m^* 和 $-m^*$为中心的球 $B_\varepsilon(m^*)$ 与 $B_\varepsilon(-m^*)$ 的并，即 $A_\varepsilon = B_\varepsilon(m^*) \cap B_\varepsilon(-m^*)$。根据上述观察，并对所有 k 使用柯西-施瓦茨界，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mu_{N,\beta,\alpha}\left(\inf_{k=1}^{s_N} \min\left\{|m_k - m^*|, |m_k + m^*|\right\} > \varepsilon\right) \\
=&\mu_{N,\ \beta,\ \alpha}\ (m_1, \ldots, m_{s_N} \in A_\varepsilon^c) \\
\leq& \exp\left\{-NF_{\beta+2\alpha}(m^*) + N\delta + V_N\right\} \sum_{m_1,\ldots,m_{s_N}} \mathbb{1}_{\left\{m_1,\ldots,m_{s_N} \in A_\varepsilon^c\right\}} \exp\left\{\frac{1}{2}\frac{N}{s_N} m^T A m\right\} \frac{1}{2^N} \prod_{k=1}^{s_N} \binom{\frac{N}{s_N}}{\frac{N}{s_N}\frac{1+m_k}{2}} \\
\leq& \exp\left\{-NF_{\beta+2\alpha}(m^*) + N\delta + V_N\right\} \sum_{m_1,\ldots,m_{s_N}} \exp\left\{\frac{N}{s_N} \sum_{k=1}^{s_N} \left(\frac{\beta+2\alpha}{2} m_k^2 - \log 2 + s(m_k)\right)\right\} \mathbb{1}_{\left\{m_1,\ldots,m_{s_N} \in A_\varepsilon^c\right\}} \\
=& \exp\left\{-NF_{\beta+2\alpha}(m^*) + N\delta + V_N\right\} \sum_{m_1,\ldots,m_{s_N}} \exp\left\{\frac{N}{s_N} \sum_{k=1}^{s_N} F_{\beta+2\alpha}(m_k)\right\} \mathbb{1}_{\left\{m_1,\ldots,m_{s_N} \in A_\varepsilon^c\right\}} \\
=& \exp\left\{N\left(\delta + \frac{V_N}{N}\right)\right\} \prod_{k=1}^{s_N} \left(\sum_{m_k} \exp\left\{\frac{N}{s_N}(F_{\beta+2\alpha}(m_k) - F_{\beta+2\alpha}(m^*))\right\} \mathbb{1}_{\{m_k \in A_\varepsilon^c\}}\right)
\end{aligned}$$

注意，这再次是独立居里-外斯模型的 s_N 重乘积，此次处于低温区域。众所周知，$F_{\beta+2\alpha}$ 在 $\pm m^*$ 和 $F_{\beta+2\alpha}$处达到最大，而 $(m) -F_{\beta+2\alpha}(m^*)$ 在其他各处均为负，并且当 m 非负时随 m 与 m^* 的距离递减，当 m非正时随 m 与 $-m^*$ 的距离递减。这意味着，在 m 与 m^* 和 $-m^*$ 均保持一定正距离的事件上，存在正常数 $c_{\beta,\alpha}(\varepsilon)$（依赖于 α, β 和 ε），使得只要我们把 δ 取得足够小，

$$F_{\beta+2\alpha}(m) - F_{\beta+2\alpha}(m^*) \leq -\left(c_{\beta,\alpha}(\varepsilon) + \delta + \frac{V_N}{N}\right).$$

由此可得

$$\mu_{N,\beta,\alpha}\left(\inf_{k=1}^{s_N} \min\left\{|m_k - m^*|, |m_k + m^*|\right\} > \varepsilon\right) \leq \exp\left\{-Nc_{\beta,\alpha}(\varepsilon)\right\} \left(\frac{N}{s_N}\right)^{s_N}$$

从而得证。 □

引理 6.2。 假设 $s_N = o\left(\frac{N}{\text{对数}\, N}\right)$。设 $\varepsilon > 0$，则对于 $c_{\beta,\ \alpha}(\varepsilon)$ 由引理 *6.1* 可知，

$$\mu_{N,\beta,\alpha}(\min\left\{|m_1 - m^*|, |m_1 + m^*|\right\} > \varepsilon) \leq 2\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\frac{c_{\beta,\alpha}(\varepsilon)}{4}\right\}$$

~ ~证明。 对于固定的 $\delta > 0$ （足够小，具体取值将在后文确定），我们将定义随机变量 R_N 和 L_N，定义如下

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}_N &= \inf\left\{i = 1, \ldots, s_N \,:\, \min\left\{|m_i - m^*|, |m_i + m^*|\right\} \leq \widetilde{\delta}\right\} \\
\widetilde{L}_N &= \inf\left\{i = 1, \ldots, s_N \,:\, \min\left\{|m_{s_N - i} - m^*|, |m_{s_N - i} + m^*|\right\} \leq \widetilde{\delta}\right\}.
\end{aligned}$$

根据引理 6.1，我们知道事件 $2 \le R_N < s_N - L_N \le s_N$ 以高概率发生，因此我们将估计

$$\begin{aligned}&\mu_{N,\beta,\alpha}\left(\min\{|m_1-m^*|,|m_1+m^*|\}>\varepsilon, 2\le \widetilde{R}_N < s_N - \widetilde{L}_N \le s_N\right)\\ \le &\sum_{2\le r<s_N-l\le s_N} \mu_{N,\beta,\alpha}\left(\min\{|m_1-m^*|,|m_1+m^*|\}>\varepsilon,\, \widetilde{R}_N=r, \widetilde{L}_N=l\right). \qquad (6.2)\end{aligned}$$

对于固定的 $r,\ l$，我们定义集合 $\mathcal{A}_{r,\,l} := \left\{\widetilde{R}_N = r,\ \ \widetilde{L}_N = l\right\}$。更准确地说，我们将进一步把这些集合划分为以下集合

$$\mathcal{A}^{+,+}_{r,l} := \left\{\widetilde{R}_N = r, \widetilde{L}_N = l, m_r > 0, m_{s_N-l} > 0\right\},$$

以及 $\mathcal{A}^{-,\,r\,l^{-}}$，$\mathcal{A}^{+,\,r\,l^{-}}$，$\mathcal{A}^{-,\,r\,l^{+}}$，其定义类似。当事件 $\mathcal{A}^{+,\,r\,l^{+}}$ 发生时，根据定义，以下事实成立

$$0 \le |m_r - m^*|,\ \ |m_{s_N-l} - m^*| \le \delta 和 |m_k - (\pm m^*)| > \delta \quad \forall k = 2,\ \ldots,\ r-1,\ \ s_N - l + 1,\ \ \ldots,\ \ s_N.$$

为了给配分函数作上界，我们将再次通过精心选择被加项，对 s_N 重求和作部分上界。更准确地说，定义 $\mathcal{I}_{l,\ r} := \{1,\ldots,r, s_N - l, \ldots, s_N\}$，那么对于 $k \in \mathcal{I}_{l,\ r}$，我们用被加项 $m_k = \widetilde{m}$ 给出对 m_k 的求和上界，其中 $\widetilde{m} \in \mathcal{A}_N$ 在 $\mathcal{A}_N$ 上使 $F_{\beta,\ \alpha}$ 取最大值。因此我们得到

$$\begin{aligned}Z_{N,\beta,\alpha} &= \sum_{m_1,\ldots,m_{s_N}} \exp\left\{\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N}\beta m_k^2 + \alpha m_k(m_{k-1}+m_{k+1})\right\}\frac{1}{2^N}\prod_{k=1}^{s_N}\binom{\frac{N}{s_N}}{\frac{N}{s_N}\frac{1+m_k}{2}}\\
&\ge \exp\left\{\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}\sum_{k\in\mathcal{I}_{l-1,r-1}}(\beta+2\alpha)\widetilde{m}^2\right\}\exp\left\{\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}(\beta+\alpha)2\widetilde{m}^2\right\}\prod_{\mathcal{I}_{l,r}}\frac{1}{2^{\frac{N}{s_N}}}\binom{\frac{N}{s_N}}{\frac{N}{s_N}\frac{1+\widetilde{m}}{2}}\\
&\quad\times\sum_{m_{r+1},\ldots,m_{s_N-l-1}}\exp\left\{\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}2\alpha\widetilde{m}(m_{r+1}+m_{s_N-l-1})\right\}\exp\left\{\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}\sum_{k=r+1}^{s_N-l-1}\beta m_k^2\right\}\\
&\quad\times\exp\left\{\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}\sum_{k=r+2}^{s_N-l-2}\alpha m_k(m_{k-1}+m_{k+1})\right\}\prod_{k=r+1}^{s_N-l-1}\frac{1}{2^{\frac{N}{s_N}}}\binom{\frac{N}{s_N}}{\frac{N}{s_N}\frac{1+m_k}{2}}\\
&\ge \exp\left\{\frac{N}{s_N}(r+l-1)F_{\beta+2\alpha}(\widetilde{m}) + 2\frac{N}{s_N}F_{\beta+\alpha}(\widetilde{m}) - V_{N,r,l}\right\}\exp\left\{\frac{N}{s_N}\alpha 2(\widetilde{m}-m^*)\right\}\widetilde{Z}^{r,l}_N,\end{aligned}$$

其中 $V_{N,r,l} = (r+l+1)\left(\log\left(\sqrt{\frac{N(1-\widetilde{m}^2)}{s_N}}\pi\right) + o(1)\right)$ 再次表示来自斯特林公式的低阶项，并且

$$\begin{aligned}\widetilde{Z}^{r,l}_N &= \sum_{m_r,\ldots,m_{s_N-l}}\exp\left\{\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}\left(2\alpha m^*(m_{r+1}+m_{s_N-l-1}) + \sum_{k=r+1}^{s_N-l-1}\beta m_k^2 + \sum_{k=r+2}^{s_n-l-2}\alpha m_k(m_{k-1}+m_{k+1})\right)\right\}\\
&\quad\times\prod_{k=r}^{s_N-l}\frac{1}{2^{\frac{N}{s_N}}}\binom{\frac{N}{s_N}}{\frac{N}{s_N}\frac{1+m_k}{2}}\\
&=: \sum_{m_r,\ldots,m_{s_N-l}}\exp\left\{\widetilde{H}^{r,l}_N\right\}\prod_{k=r}^{s_N-l}\frac{1}{2^{\frac{N}{s_N}}}\binom{\frac{N}{s_N}}{\frac{N}{s_N}\frac{1+m_k}{2}},\end{aligned}$$

也就是说，$\widetilde{Z}^{r,\ l}_N$ 是一个与原模型类似的模型的配分函数，但该模型只有区块m_{r+1}，……，m_{s_N-l-1}，并采用 $2m^*$-边界条件，而非周期性边界条件。

回顾式 (6.1)， $F_{\beta+2\alpha}(\widetilde{m}) \leq F_{\beta+2\alpha}(m^*) + \delta$，可知

$$Z_{N,\beta,\alpha} \geq \exp\left\{\frac{N}{s_N}(r+l-1)(F_{\beta+2\alpha}(m^*)-\delta)\right\}\exp\left\{2\frac{N}{s_N}F_{\beta+\alpha}(\widetilde{m})+V_{N,r,l}\right\}\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\alpha 2|\widetilde{m}-m^*|\right\}\widetilde{Z}_N^{r,l} \tag{6.3}$$

稍后我们将把这一点代入吉布斯测度，但首先我们要为哈密顿量找到合适的上界。为此，我们将对 $k=1,\ \ldots\ldots,\ r-1,\ \ldots\ldots,\ s_N-l,\ \ldots\ldots,\ s_N$ 应用柯西-施瓦茨界 $m_k m_{k+1} \leq \frac{m_k^2}{2} + \frac{m_{k+1}^2}{2}$，并得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{s_N}\beta m_k^2+\alpha m_k(m_{k+1}+m_{k-1}) \leq & \sum_{k\in\mathcal{I}_{l-1,r-1}}(\beta+2\alpha)m_k^2+\sum_{k=r+1}^{s_N-l-1}\beta m_k^2+\sum_{k=r+2}^{s_N-l-2}\alpha m_k(m_{k-1}+m_{k+1})\\ &+(\beta+\alpha)(m_r^2+m_{s_N-l}^2)+2\alpha m_r m_{r+1}+2\alpha m_{s_N-l-1}m_{s_N-l}\end{aligned}$$

利用在 $|m_r-m^*|,\ |m_{s_N-l}-m^*|<\delta$ 所在的集合上成立这一事实，可知

$$2\alpha(m_r m_{r+1}+m_{s_N-l-1}m_{s_N-l}) \leq 2\alpha m^*(m_{r+1}+m_{s_N-l-1})+4\alpha\widetilde{\delta}$$

因此

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N}\beta m_k^2+\alpha m_k(m_{k+1}+m_{k-1})\\ \leq&\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}\sum_{k\in\mathcal{I}_{l-1,r-1}}(\beta+2\alpha)m_k^2+\widetilde{H}_N^{r,l}+\frac{N}{s_N}2\alpha\widetilde{\delta}+\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}(\beta+\alpha)(m_r^2+m_{s_N-l}^2)\end{aligned} \tag{6.4}$$

如果现在将(6.3)和(6.4)代入吉布斯测度，我们会看到该测度对介于 s_N-l 与 r 之间的所有坐标都可因子分解，而对于其余（仍相互作用的）坐标，分子与分母相同，因而相互抵消。更确切地说，通过重新排列(6.3)和(6.4)中的各项，可得

$$\begin{aligned}&\mu_{N,\beta,\alpha}\left(\min\{|m_1-m^*|,|m_1+m^*|\}>\varepsilon,\,\mathcal{A}_{r,l}^{++}\right)\\ \leq&\exp\left\{\frac{N}{s_N}(r+l-1)\delta+V_{N,r,l}\right\}\exp\left\{\frac{N}{s_N}2\alpha|m^*-\widetilde{m}|\right\}\frac{1}{\widetilde{Z}_N^{r,l}}\\ &\times\left(\sum_{m_r}\mathbb{1}_{|m_r-m^*|\leq\widetilde{\delta}}\exp\left\{\frac{N}{s_N}(F_{\beta+\alpha}(m_r)-F_{\beta+\alpha}(\widetilde{m}))\right\}\right)^2\\ &\times\left(\sum_{m_1}\mathbb{1}_{\{\min\{|m_1-m^*|,|m_1+m^*|\}>\varepsilon\}}\exp\left\{\frac{N}{s_N}\left(F_{\beta+2\alpha}(m_1)-F_{\beta+2\alpha}(m^*)\right)\right\}\right)\\ &\times\left(\sum_{m_k}\mathbb{1}_{\{\min\{|m_k-m^*|,|m_k+m^*|\}>\widetilde{\delta}\}}\exp\left\{\frac{N}{s_N}\left(F_{\beta+2\alpha}(m_k)-F_{\beta+2\alpha}(m^*)\right)\right\}\right)^{r+l-2}\widetilde{Z}_N^{r,l}\\ \leq&\exp\left\{\frac{N}{s_N}(r+l-1)\delta+V_{N,r,l}\right\}\exp\left\{\frac{N}{s_N}2\alpha|m^*-\widetilde{m}|\right\}\left(\sum_{m_r}\mathbb{1}_{|m_r-m^*|\leq\widetilde{\delta}}\exp\left\{\frac{N}{s_N}(F_{\beta+\alpha}(m_r)-F_{\beta+\alpha}(\widetilde{m}))\right\}\right)^2\\ &\times\exp\left\{-\frac{N}{s_N}c_{\beta,\alpha}(\varepsilon)\right\}\exp\left\{-\frac{N}{s_N}(r+l-2)c_{\beta,\alpha}(\widetilde{\delta})\right\}\left(\frac{N}{s_N}\right)^{r+l-1},\end{aligned}$$

其中最后一步成立（如同引理 6.1 的证明中那样），因为我们已将模型约化为 $r-l-1$ 个独立的居里-外斯模型，并且 $c_{\beta,\alpha}(\varepsilon)c_{\beta,\alpha}(\delta)$ 是引理 6.1 中的正定常数。进一步注意到， m^* 与 $\widetilde{m}$ 之间的距离实际上相当小。事实上，由于 $\widetilde{m}$ 在集合 $\mathcal{A}_N$ 上使连续函数 $F_{\beta+2\alpha}$ 取得最大值，而该集合是一个近似

区间 $[-1,1]$ 的近似，其间距大小为 $2\frac{s_N}{N}$，特别地，这意味着 $|m^*-\widetilde{m}|<\frac{s_N}{N}$。接下来仍需为第 r 个和第 (s_N-l) 个坐标的贡献找到一个界。由于 $m^*=m^*(\beta+2\alpha)$ 使 $F_{\beta+2\alpha}$ 最大化但不使 $F_{\beta+\alpha}$最大化，我们不能应用同样的论证。相反，仍需注意

$$|\widetilde{m}-m_r|\le|\widetilde{m}-m^*|+|m^*-m_r|=\mathcal{O}\left(\frac{s_N}{N}\right)+\widetilde{\delta}$$

且函数 $F_{\beta+\alpha}$ 连续，因此存在一个小常数 $c(\delta)$，当 $\delta\to 0$ 时趋于零，使得 $|F_{\beta+\alpha}(m_r)-F_{\beta+\alpha}(\widetilde{m})|\le c(\delta)$。如果随后用被加项的个数来估计总和，则可得

$$\left(\sum_{m_r}\mathbb{1}_{|m_r-m^*|\le\widetilde{\delta}}\exp\left\{\frac{N}{s_N}(F_{\beta+\alpha}(m_r)-F_{\beta+\alpha}(\widetilde{m}))\right\}\right)\le\exp\left\{\frac{N}{s_N}c(\widetilde{\delta})\right\}\widetilde{\delta}\frac{N}{s_N}$$

因此，最终得到如下上界

$$\begin{aligned}
&\mu_{N,\beta,\alpha}\left(\min\{|m_1-m^*|,|m_1+m^*|\}>\varepsilon,\,\mathcal{A}_{r,l}^{++}\right)\\
\le&\widetilde{\delta}^2\exp\left\{\frac{N}{s_N}(r+l-1)\delta+V_{N,r,l}\right\}\exp\left\{\frac{N}{s_N}c(\widetilde{\delta})\right\}\exp\left\{-\frac{N}{s_N}c_{\beta,\alpha}(\varepsilon)\right\}\\
&\qquad\times\exp\left\{-\frac{N}{s_N}(r+l-2)c_{\beta,\alpha}(\widetilde{\delta})\right\}\left(\frac{N}{s_N}\right)^{r+l+1}\\
\le&\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\left(c_{\beta,\alpha}(\varepsilon)-c(\widetilde{\delta})-2\frac{s_N}{N}\log\frac{N}{s_N}\right)\right\}\\
&\qquad\times\exp\left\{-(r+l-1)\frac{N}{s_N}\left(\frac{r+l-2}{r+l-1}c_{\beta,\alpha}(\widetilde{\delta})-\delta-\frac{s_N}{N}\left(\log\frac{N}{s_N}+V_{N,r,l}\right)\right)\right\}
\end{aligned}$$

现在我们希望选择足够小的 δ 和 δ，使得上述表达式趋于 0。这确实可行：首先选择足够小的 $\widetilde{\delta}$，使得 $c(\widetilde{\delta})<c_{\beta,\alpha}(\varepsilon)/2$，并注意到当 N 足够大时，$2\frac{s_N}{N}\left(\log\frac{N}{s_N}+V_{N,r,l}\right)<c_{\beta,\alpha}(\varepsilon)/4$ 成立。然后选择 $\delta<c_{\beta,\alpha}(\widetilde{\delta})/4$，同样地，当 N 足够大时，有 $\frac{s_N}{N}\log\frac{N}{s_N}<c_{\beta,\alpha}(\delta)/8$。由此可得

$$\begin{aligned}
&\mu_{N,\beta,\alpha}\left(\min\{|m_1-m^*|,|m_1+m^*|\}>\varepsilon,\,\mathcal{A}_{r,l}^{++}\right)\\
\le&\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\frac{c_{\beta,\alpha}(\varepsilon)}{4}\right\}\exp\left\{-(r+l-1)\frac{N}{s_N}\frac{c_{\beta,\alpha}(\widetilde{\delta})}{8}\right\}
\end{aligned}\tag{6.5}$$

进一步注意，我们对以下情况也得到了相同的界：

$$\mu_{N,\beta,\alpha}\left(\min\{|m_1-m^*|,|m_1+m^*|\}>\varepsilon,\,\mathcal{A}_{r,l}^{--}\right)$$

通过将 $Z_{N,\beta,\alpha}$ 中的求和替换为被加项 $m_k=-\widetilde{m}$。在事件 $\mathcal{A}_{r,l}^{+-}$ 和 $\mathcal{A}_{r,l}^{-+}$ 上，我们知道块链中至少有两次符号变化。如果分别翻转包含 m_{s_N-l} 或 m_r 的整个负分量，那么该分量边界上的能量会增加（因为此时自旋方向一致），而内部的能量保持不变。注意，翻转所有坐标会使我们回到已经处理过的情形。更确切地说，在集合 $\mathcal{A}_{r,l}^{+-}\cap\{m_1>0\}$ 上，必定存在 l_1,l_2，满足 $0\le l_1\le l\le l_2<s_N-r$，使得 $m_{s_N-l_1},m_{s_N-l_2}\le 0$。定义随机变量

$$\begin{aligned}
L_N^1&:=\inf\{\widetilde{l}\ge 0:m_{s_N-\widetilde{l}}\le 0\}\\
L_N^2&:=\inf\{\widetilde{l}\ge l:m_{s_N-\widetilde{l}}\le 0\},
\end{aligned}$$

即， $S_{s_N-L_N^1}$是距离 S_1最近且磁化强度非正的区块，而 $S_{s_N-L_N^2}$是 S_{s_N-l}之后最后一个磁化强度非正的区块。对于 $N\in\mathbb{N}$以及固定的 l_1,l_2，记f_{l_1,l_2} 为：$[-1,1]^{s_N}\to[-1,1]^{s_N}$ 这个函数将一个向量中 s_N-l_2 与 s_N-l_1 之间的所有坐标翻转，同时保持其他坐标不变。于是

$$
\begin{aligned}
&\mu_{N,\beta,\alpha}\left(\min\{|m_1-m^*|,|m_1+m^*|\}>\varepsilon,\, m_1\geq 0,\, \mathcal{A}_{r,l}^{+-},\, L_N^1=l_1,\, L_N^2=l_2\right)\\
=&\frac{1}{Z_{N,\beta,\alpha}}\sum_{m_1,\dots,m_{s_N}}\exp\left\{\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}m^TAm\right\}\mathbb{1}_{\{\min\{|m_1-m^*|,|m_1+m^*|\}>\varepsilon,\, m_1\geq 0\}}\mathbb{1}_{\mathcal{A}_{r,l}^{+-}}\\
&\quad\times\mathbb{1}_{\{L_N^1=l_l^1,\,L_N^2=l_2\}}\frac{1}{2^N}\prod_{k=1}^{s_N}\binom{\frac{N}{s_N}}{\frac{N}{s_N}\frac{1+m_k}{2}}\\
=&\frac{1}{Z_{N,\beta,\alpha}}\sum_{m_1,\dots,m_{s_N}}\exp\left\{\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}f_{l_1,l_2}(m)^TAf_{l_1,l_2}(m)\right\}\mathbb{1}_{\{\min\{|m_1-m^*|,|m_1+m^*|\}>\varepsilon,\, m_1\geq 0\}}\mathbb{1}_{\mathcal{A}_{r,l}^{+-}}\\
&\quad\times\mathbb{1}_{\{L_N^1=l_l^1,\,L_N^2=l_2\}}\frac{1}{2^N}\prod_{k=1}^{s_N}\binom{\frac{N}{s_N}}{\frac{N}{s_N}\frac{1+m_k}{2}}.
\end{aligned}
$$

注意到

$$
\mathbb{1}_{\{\min\{|m_1-m^*|,|m_1+m^*|\}>\varepsilon,\, m_1\geq 0\}}=\mathbb{1}_{\{\min\{|f_{l_1,l_2}(m)_1-m^*|,|f_{l_1,l_2}(m)_1+m^*|\}>\varepsilon,\, f_{l_1,l_2}(m)_1\geq 0\}},
$$

由于 $1\notin\{s_N-l_2,\dots,s_N-l_1\}$，因此 $m_1=f_{l_1,\ l_2}(m)_1$。对所有坐标$k\in\mathcal{I}_{l_1,\ r}=\{1,\dots,r,s_N-l_1+1,\dots,s_N\}$，情况同样如此。在其他所有坐标上，它会改变符号，因此可知在集合 $\{L_N^1=l_1\,,\,L_N^2=l_2\}$ 上，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{1}_{\mathcal{A}_{r,l}^{+-}}&\overset{\mathbf{def}}{=}\mathbb{1}_{\{|m_r-m^*|<\widetilde{\delta}\}}\mathbb{1}_{\{|m_{s_N-l}+m^*|<\widetilde{\delta}\}}\prod_{k\in\mathcal{I}_{l-1,r-1}}\mathbb{1}_{\{\min\{|m_k-m^*|,|m_k+m^*|\}\geq\widetilde{\delta}\}}\\
&=\mathbb{1}_{\{|f_{l_1,l_2}(m)_r-m^*|<\widetilde{\delta}\}}\mathbb{1}_{\{|f_{l_1,l_2}(m)_{s_N-l}-m^*|<\widetilde{\delta}\}}\prod_{k\in\mathcal{I}_{l-1,r-1}}\mathbb{1}_{\{\min\{|f_{l_1,l_2}(m)_k-m^*|,|f_{l_1,l_2}(m)_k+m^*|\}\geq\widetilde{\delta}\}}\\
&=\mathbb{1}_{\mathcal{A}_{r,l}^{++}}.
\end{aligned}
$$

将其代入上式可得

$$
\begin{aligned}
&\mu_{N,\beta,\alpha}\left(\min\{|m_1-m^*|,|m_1+m^*|\}>\varepsilon,\, m_1\geq 0,\, \mathcal{A}_{r,l}^{+-},\, L_N^1=l_1,\, L_N^2=l_2\right)\\
=&\frac{1}{Z_{N,\beta,\alpha}}\sum_{m_1,\dots,m_{s_N}}\exp\left\{\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}f_{l_1,l_2}(m)^TAf_{l_1,l_2}(m)\right\}\mathbb{1}_{\{\min\{|f_{l_1,l_2}(m)_1-m^*|,|f_{l_1,l_2}(m)_1+m^*|\}>\varepsilon,\, f_{l_1,l_2}(m)_1\geq 0\}}\\
&\quad\times\mathbb{1}_{\mathcal{A}_{r,l}^{++}}\mathbb{1}_{\{L_N^1=l_l^1,\,L_N^2=l_2\}}\frac{1}{2^N}\prod_{k=1}^{s_N}\binom{\frac{N}{s_N}}{\frac{N}{s_N}\frac{1+f_{l_1,l_2}(m)_k}{2}}\\
\leq&\frac{1}{Z_{N,\beta,\alpha}}\sum_{m_1,\dots,m_{s_N}}\exp\left\{\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}m^TAm\right\}\mathbb{1}_{\{\min\{|m_1-m^*|,|m_1+m^*|\}>\varepsilon,\, m_1\geq 0\}}\\
&\quad\times\mathbb{1}_{\mathcal{A}_{r,l}^{++}}\frac{1}{2^N}\prod_{k=1}^{s_N}\binom{\frac{N}{s_N}}{\frac{N}{s_N}\frac{1+m_k}{2}}\\
&=\mu_{N,\alpha,\beta}\left(\min\{|m_1-m^*|,|m_1+m^*|\}>\varepsilon,\, m_1\geq 0,\, \mathcal{A}_{r,l}^{++}\right).
\end{aligned}
$$

因此

$$
\mu_{N,\beta,\alpha}\left(\min\{|m_1-m^*|,|m_1+m^*|\}>\varepsilon,\, m_1\geq 0,\, \mathcal{A}_{r,l}^{+-},\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{0\le l_1\le l_2\le s_N} \mu_{N,\beta,\alpha}\left(\min\{|m_1-m^*|,|m_1+m^*|\}>\varepsilon,\, m_1\ge 0,\, \mathcal{A}_{r,l}^{+-},\, L_N^1=l_1,\, L_N^2=l_2\right)\\
&\le s_N^2\mu_{N,\alpha,\beta}\left(\min\{|m_1-m^*|,|m_1+m^*|\}>\varepsilon,\, m_1\ge 0,\, \mathcal{A}_{r,l}^{++}\right)
\end{aligned}
$$

而在 $m_1\le 0$ 的情况下，使用 $\mathcal{A}_{r\,l}^{--}$, 可得到相同的结果。综合以上所有情况，我们得到了如下界

$$
\begin{aligned}
&\mu_{N,\beta,\alpha}\left(\min\{|m_1-m^*|,|m_1+m^*|\}>\varepsilon,\, \mathcal{A}_{r,l}\right)\\
\le& 2(s_N^2+1)\mu_{N,\beta,\alpha}\left(\min\{|m_1-m^*|,|m_1+m^*|\}>\varepsilon,\, \mathcal{A}_{r,l}^{++}\right)\\
\le& 2(s_N^2+1)\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\frac{c_{\beta,\alpha}(\varepsilon)}{4}\right\}\exp\left\{-(r+l-1)\frac{N}{s_N}\frac{c_{\beta,\alpha}(\widetilde{\delta})}{8}\right\}\\
\le& 4\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\frac{c_{\beta,\alpha}(\varepsilon)}{4}\right\}\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\left((r+l-1)\frac{c_{\beta,\alpha}(\widetilde{\delta})}{8}-2\frac{s_N}{N}\log s_N\right)\right\}
\end{aligned}
$$

由于上述上界关于 $r+l$ 单调递减，我们可以直接使用一致上界$r+l-1\ge 1$。因此，将其代入 (6.2)，可得

$$
\begin{aligned}
&\mu_{N,\beta,\alpha}\left(\min\left\{|m_1-m^*|,|m_1+m^*|\right\}>\varepsilon, 1<\widetilde{R}_N<s_N-\widetilde{L}_N\le s_N\right)\\
\le& s_N^2 4\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\frac{c_{\beta,\alpha}(\varepsilon)}{4}\right\}\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\left(\frac{c_{\beta,\alpha}(\widetilde{\delta})}{8}-2\frac{s_N}{N}\log s_N\right)\right\}\\
\le& 4\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\frac{c_{\beta,\alpha}(\varepsilon)}{4}\right\}\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\left(\frac{c_{\beta,\alpha}(\widetilde{\delta})}{8}-4\frac{s_N}{N}\log s_N\right)\right\},
\end{aligned}
$$

其中，对分别遍历 $2\le r\le s_N-1$ 和 $1\le l\le s_N-2$ 的求和，各自都以因子 s_N 作为上界。注意，由于我们假设 $s_N=o\left(\frac{N}{\log N}\right)$，再次取足够大的 N，有 $4\frac{s_N}{N}\log s_N<\frac{c_{\beta,\alpha}(\widetilde{\delta})}{16}$，最终得到

$$
\begin{aligned}
&\mu_{N,\beta,\alpha}\left(\min\left\{|m_1-m^*|,|m_1+m^*|\right\}>\varepsilon\right)\\
\le& \exp\left\{-\frac{N}{s_N}\left(\frac{c_{\beta,\alpha}(\varepsilon)}{4}+\mathcal{O}(1)\right)\right\}+\exp\left\{-N\left(c_{\beta,\alpha}(\widetilde{\delta})+o(1)\right)\right\}
\end{aligned}
$$

□

由并集界立即可知，$\sup_{i=1}^{s_N}\min\left\{|m_i-m^*|,|m_i+m^*|\right\}$ 依概率收敛到 0，因为

$$
\mu_{N\beta,\alpha}\left(\sup_{i=1}^{s_N}\min\left\{|m_i-m^*|,|m_i+m^*|\right\}>\varepsilon\right)\le s_N\mu_{N\beta,\alpha}\left(\min\left\{|m_1-m^*|,|m_1+m^*|\right\}>\varepsilon\right).
$$

容易 推出在这种情况下，所有 $m_i's$都必须具有相同符号，且这一结论以高概率成立 y.

引理 6.3。

$$
\mu_{N,\beta,\alpha}\left(\sup_{k=1}^{s_N}\min\left\{|m_k-m^*|,|m_k+m^*|\right\}\le\varepsilon,\exists i: m_im_{i+1}<0\right)\le s_N^2\exp\left\{-\frac{N}{s_N}2\alpha(m^*-\varepsilon)^2\right\}
$$

证明。 首先注意，如果存在一个指标 i，使得 m_i 和 m_{i+1} 的符号不同，那么必然存在另一个指标 $j\ne i$ ，使得 m_jm_{j+1} 也满足同样的条件。因此我们得到

$$
\mu_{N,\beta,\alpha}\left(\sup_{k=1}^{s_N}\min\left\{|m_k-m^*|,|m_k+m^*|\right\}\le\varepsilon,\exists i: m_im_{i+1}<0\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^{s_N} \mu_{N,\beta,\alpha}\left(\sup_{k=1}^{s_N} \min\left\{|m_k - m^*|, |m_k + m^*|\right\} \leq \varepsilon, m_i m_{i+1} < 0\right) \\
&= \sum_{i=1}^{s_N} \mu_{N,\beta,\alpha}\left(\sup_{k=1}^{s_N} \min\left\{|m_k - m^*|, |m_k + m^*|\right\} \leq \varepsilon, m_i m_{i+1} < 0, \exists j \neq i : m_j m_{j+1} < 0\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{s_N} \sum_{j \neq i} \mu_{N,\beta,\alpha}\left(\sup_{k=1}^{s_N} \min\left\{|m_k - m^*|, |m_k + m^*|\right\} \leq \varepsilon, m_i m_{i+1} < 0, m_j m_{j+1} < 0\right) \\
&\leq s_N^2 \max_{i \neq j} \mu_{N,\beta,\alpha}\left(\sup_{k=1}^{s_N} \min\left\{|m_k - m^*|, |m_k + m^*|\right\} \leq \varepsilon, m_i m_{i+1} < 0, m_j m_{j+1} < 0\right)
\end{aligned}
$$

固定 i 和 j，我们再次为配分函数给出一个下界：

$$
\begin{aligned}
Z_{N,\beta,\alpha} &= \sum_{m_1,\ldots,m_{s_N}} \exp\left\{\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N} \beta m_k^2 + 2\alpha m_k m_{k+1}\right\} \frac{1}{2^N} \prod_{k=1}^{s_N} \binom{\frac{N}{s_N}}{\frac{N}{s_N}\frac{1+m_k}{2}} \\
&\geq \sum_{m_1,\ldots,m_{s_N}} \mathbb{1}_{m_i m_{i+1}<0} \mathbb{1}_{m_j m_{j+1}<0} \exp\left\{\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{s_N} \beta m_k^2 + 2\alpha m_k m_{k+1}\right\} \frac{1}{2^N} \prod_{k=1}^{s_N} \binom{\frac{N}{s_N}}{\frac{N}{s_N}\frac{1+m_k}{2}} \\
&\quad \times \exp\left\{\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}\beta(m_i^2 + m_j^2)\right\} \\
&=: \widetilde{Z}_{N,\beta,\alpha}.
\end{aligned}
$$

接下来我们将利用这样一个事实：在事件 $\sup_{k=1}^{s_N} \min\left\{|m_k - m^*|, |m_k + m^*|\right\} \leq \varepsilon$ 上，事件 $m_i m_{i+1},\ m_j m_{j+1} < 0$ 已经蕴含 $m_i m_{i+1},\ m_j m_{j+1} \leq -(m^* - \varepsilon)^2$。由此可得

$$
\begin{aligned}
&\mu_{N,\beta,\alpha}\left(\sup_{k=1}^{s_N} \min\left\{|m_k - m^*|, |m_k + m^*|\right\} \leq \varepsilon, m_i m_{i+1} < 0, m_j m_{j+1} < 0\right) \\
&\leq \frac{1}{\widetilde{Z}_{N,\beta,\alpha}} \exp\left\{-\frac{N}{s_N} 2\alpha(m^* - \varepsilon)^2\right\} \sum_{m_1,\ldots,m_{s_N}} \mathbb{1}_{m_i m_{i+1}<0} \mathbb{1}_{m_j m_{j+1}<0} \mathbb{1}_{\left\{\sup_{k=1}^{s_N} \min\{|m_k - m^*|, |m_k + m^*|\} \leq \varepsilon\right\}} \\
&\quad \times \exp\left\{\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{s_N} \beta m_k^2 + 2\alpha m_k m_{k+1}\right\} \frac{1}{2^N} \prod_{k=1}^{s_N} \binom{\frac{N}{s_N}}{\frac{N}{s_N}\frac{1+m_k}{2}} \exp\left\{\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}\beta(m_i^2 + m_j^2)\right\} \\
&\quad \leq \exp\left\{-\frac{N}{s_N} 2\alpha(m^* - \varepsilon)^2\right\},
\end{aligned}
$$

其中最后一步成立，因为 $\mathbb{1}_{\left\{\sup_{k=1}^{s_N} \min\{|m_k - m^*|, |m_k + m^*|\} \leq \varepsilon\right\}} \leq 1$ 并且如果去掉这个指示~函数，求和就变为 $Z_{N,\ \beta,\ \alpha}$ □

7. Proof of Theorem 2.3 (ii)

低温区域中中心极限定理的证明与高温情形的思路相似，但由于存在非唯一性，也带来了新的挑战，因此我们需要进行技术上的调整。本节中我们始终假设 $\beta + 2\alpha < 1$。回顾引理 4.5，在低温情形下，函数 φ_N 有两个极小值点，记为 $\vec{m}^*$ 和 $-\vec{m}^*$，其中 $\vec{m}^*$ 是一个 s_N维向量，每个坐标的值均为 m^*。我们希望证明，在吉布斯测度下，给定磁化强度位于以某个极小值点为中心、边长为

2δ的方框内时，$\sqrt{\frac{N}{s_N}}(m \mp \overrightarrow{m}^*) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \underline{\Sigma^*})$，其中 $\delta < 2m^*$。我们将通过证明矩母函数的收敛性来完成这一证明。

7.1. 分解积分。在本节余下部分，我们固定 A，因此有α，β，m^*。令 $Z \sim \mathcal{N}(0, A^{-1})$为一个与磁化强度独立的 s_N维高斯随机变量，并且$t \in \mathbb{R}^{s_N}$ 使得 t 只有有限个非零项，则类似于引理4.1的证明，

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left\{t^T\left(Z+\sqrt{\frac{N}{s_N}}(m-\overrightarrow{m}^*)\right)\right\}\,\middle|\, m\in[m^*-\delta,m^*+\delta]^{s_N}\right]\\
&=\exp\left\{-\sqrt{\frac{N}{s_N}}t^T\overrightarrow{m}^*\right\}\mathbb{E}\left[\exp\left\{t^T\left(Z+\sqrt{\frac{N}{s_N}}m\right)\right\}\,\middle|\, m\in[m^*-\delta,m^*+\delta]^{s_N}\right]\\
&=\exp\left\{-\sqrt{\frac{N}{s_N}}t^T\overrightarrow{m}^*\right\}c_{N,\delta}\sum_{\substack{\sigma\in\{-1,1\}^N\\ m\in[m^*-\delta,m^*+\delta]^{s_N}}}\frac{1}{2^N}\int_{\mathbb{R}^{s_N}}\exp\left\{-\frac{1}{2}y^TAy+t^Ty\right\}\exp\left\{\sqrt{\frac{N}{s_N}}y^TAm\right\}\mathrm{d}^{s_N}y\\
&=\exp\left\{-\sqrt{\frac{N}{s_N}}t^T\overrightarrow{m}^*\right\}c_{N,\delta}\left(\frac{N}{s_N}\right)^{\frac{s_N}{2}}\int_{\mathbb{R}^{s_N}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}x^TAx+\sqrt{\frac{N}{s_N}}t^Tx\right\}I_N(x,\overrightarrow{m}^*,\delta)\mathrm{d}^{s_N}x
\end{aligned}
$$

where $c_{N,\delta}=\left(\left(\frac{N}{s_N}\right)^{\frac{s_N}{2}}\int_{\mathbb{R}^{s_N}}\exp\left\{-\frac{N}{2s_N}xTAx+\sqrt{\frac{N}{s_N}}t^Tx\right\}I_N(x,\overrightarrow{m}^*,\delta)\,\mathrm{d}^{s_N}x\right)^{-1}$ and the last step follows from the change of variables $y=\sqrt{\frac{N}{s_N}}x$ and defining

$$
I_N(x,\overrightarrow{m}^*,\delta)=\sum_{\substack{\sigma\in\{-1,1\}^N\\ m\in[m^*-\delta,m^*+\delta]^{s_N}}}\frac{1}{2^N}\exp\left\{\frac{N}{s_N}x^TAm\right\}. \tag{7.1}
$$

进一步定义

$$
I_N^c(x,\overrightarrow{m}^*,\delta)=\sum_{\substack{\sigma\in\{-1,1\}^N\\ m\notin[m^*-\delta,m^*+\delta]^{s_N}}}\frac{1}{2^N}\exp\left\{\frac{N}{s_N}x^TAm\right\} \tag{7.2}
$$

并且如引理4.1的证明所示，我们有

$$
I_N(x,\overrightarrow{m}^*,\delta)+I_N^c(x,\overrightarrow{m}^*,\delta)=\exp\left\{\frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N}\log\cosh(x^TAe_k)\right\}. \tag{7.3}
$$

回忆一下 φ_N 在（4.1）中的定义。对于足够小的 $r>0$ （稍后确定），我们将把矩母函数与下式进行比较

$$
\begin{aligned}
J_N(t,r,\overrightarrow{m}^*):=&\left(\frac{N}{s_N}\right)^{\frac{s_N}{2}}\exp\left\{\frac{N}{s_N}\varphi_N(\overrightarrow{m}^*)-\sqrt{\frac{N}{s_N}}t^T\overrightarrow{m}^*\right\} \qquad (7.4)\\
&\times\int_{[m^*-r,m^*+r]^{s_N}}\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\varphi_N(x)+\sqrt{\frac{N}{s_N}}t^Tx\right\}\mathrm{d}^{s_N}x,
\end{aligned}
$$

它与矩母函数相差以下项

$$
K_N(t,r,\overrightarrow{m}^*,\delta):=\left(\frac{N}{s_N}\right)^{\frac{s_N}{2}}\exp\left\{\frac{N}{s_N}\varphi_N(\overrightarrow{m}^*)-\sqrt{\frac{N}{s_N}}t^T\overrightarrow{m}^*\right\} \tag{7.5}
$$

$$\times \int_{[m^*-r,m^*+r]^{s_N}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}x^TAx+\sqrt{\frac{N}{s_N}}t^Tx\right\} I_N^c(x,\overrightarrow{m}^*,\delta)\mathrm{d}^{s_N}x,$$

$$L_N(t,r,\overrightarrow{m}^*,\delta) := \left(\frac{N}{s_N}\right)^{\frac{s_N}{2}} \exp\left\{\frac{N}{s_N}\varphi_N(\overrightarrow{m}^*)-\sqrt{\frac{N}{s_N}}t^T\overrightarrow{m}^*\right\} \tag{7.6}$$

$$\times \int_{([m^*-r,m^*+r]^{s_N})^c} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{N}{s_N}x^TAx+\sqrt{\frac{N}{s_N}}t^Tx\right\} I_N(x,\overrightarrow{m}^*,\delta)\mathrm{d}^{s_N}x.$$

稍后，我们将写作 $J_N(t)$ $K_N(t)$ $L_N(t)$，并在上下文清楚时省略其他参数。合并这些项后，我们得到矩母函数

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{t^T\left(Z+\sqrt{\frac{N}{s_N}}(m-\overrightarrow{m}^*)\right)\right\}\middle| m\in[m^*-\delta,m^*+\delta]^{s_N}\right] = \frac{J_N(t)-K_N(t)+L_N(t)}{J_N(0)-K_N(0)+L_N(0)}. \tag{7.7}$$

这一表示受到 [EW90, (4.6)] 的启发。将会发现，在极限中只有 J_N 项会有贡献，我们将首先证明 $\frac{J_N(t)}{J_N(0)}$ 收敛于一个（无穷维）正态分布的矩母函数—随后我们将证明 K_N 项和 L_N 项的贡献在极限中可忽略不计。

7.2. **主导项 J**。 通过变量替换，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{J_N(t)}{J_N(0)} &= \frac{\int_{[m^*-r,m^*+r]^{s_N}} \exp\left\{-\frac{N}{s_N}\left(\varphi_N(x)-\varphi_N(\overrightarrow{m}^*)\right)+\sqrt{\frac{N}{s_N}}t^T(x-\overrightarrow{m}^*)\right\}\mathrm{d}^{s_N}x}{\int_{[m^*-r,m^*+r]^{s_N}} \exp\left\{-\frac{N}{s_N}\left(\varphi_N(x)-\varphi_N(\overrightarrow{m}^*)\right)\right\}\mathrm{d}^{s_N}x}\\ &= \frac{\int_{\left[-\sqrt{\frac{N}{s_N}}r,\sqrt{\frac{N}{s_N}}r\right]^{s_N}} \exp\left\{-\frac{N}{s_N}\left(\varphi_N\left(\overrightarrow{m}^*+\sqrt{\frac{s_N}{N}}y\right)-\varphi_N(\overrightarrow{m}^*)\right)+t^Ty\right\}\mathrm{d}^{s_N}y}{\int_{\left[-\sqrt{\frac{N}{s_N}}r,\sqrt{\frac{N}{s_N}}r\right]^{s_N}} \exp\left\{-\frac{N}{s_N}\left(\varphi_N\left(\overrightarrow{m}^*+\sqrt{\frac{s_N}{N}}y\right)-\varphi_N(\overrightarrow{m}^*)\right)\right\}\mathrm{d}^{s_N}y}\end{aligned} \tag{7.8}$$

引理 7.1. 对所有充分小的 $r>0$ （依赖于 A），

$$\frac{J_N(t,r,\overrightarrow{m}^*)}{J_N(0,r,\overrightarrow{m}^*)} = \mathbb{E}_{\rho_N}\left[\exp\left\{t^TX\right\}\right],$$

其中 X 表示一个 s_N 维随机变量，其分布是强对数凹的，密度为

$$\rho_N(x) \propto \exp\left\{-\frac{N}{s_N}\left(\varphi_N\left(\overrightarrow{m}^*+\sqrt{\frac{s_N}{N}}x\right)-\varphi_N(\overrightarrow{m}^*)\right)\right\}\mathbb{1}_{\left[-\sqrt{\frac{N}{s_N}}r,\sqrt{\frac{N}{s_N}}r\right]^{s_N}}(x)$$

证明. 类似于引理 5.1 的证明，令

$$U(x) = \begin{cases}\frac{N}{s_N}\left(\varphi_N\left(\overrightarrow{m}^*+\sqrt{\frac{s_N}{N}}x\right)-\varphi_N(\overrightarrow{m}^*)\right), & \text{if } x\in\left[-\sqrt{\frac{N}{s_N}}r,\sqrt{\frac{N}{s_N}}r\right]^{s_N}\\ +\infty, & \text{else.}\end{cases}$$

我们将证明，Hess $U(x)$ 在凸集 $\left[-\sqrt{\frac{N}{s_N}}r,\sqrt{\frac{N}{s_N}}r\right]^{s_N}$ 上严格正定，由此即可推出该结论。式（4.3）中 φ_N 的海森矩阵表明

$$\operatorname{Hess}U(x) = A - A\sum_{k=1}^{s_N}\operatorname{sech}^2\left(\left(\overrightarrow{m}^*+\sqrt{\frac{s_N}{N}}x\right)^TAe_k\right)e_ke_k^TA. \tag{7.9}$$

回想一下，对于 $x=0$ 我们会得到

$$\operatorname{sech}^2\left((\overrightarrow{m}^*)^TAe_k\right) = \operatorname{sech}^2((\beta+2\alpha)m^*) = 1-\tanh^2((\beta+2\alpha)m^*) = 1-(m^*)^2. \tag{7.10}$$

由于 $A-A^2(1-(m^*)^2)$是正定的，存在一个小常数 $r(\beta,\alpha)>0$，它依赖于β和 α，使得 $A-A^2(1-(m^*)^2+r(\beta,\alpha))$仍然是正定的。对于 $x\in\left[-\sqrt{\frac{N}{s_N}}r,\sqrt{\frac{N}{s_N}}r\right]^{s_N}$，我们有 $\sqrt{\frac{s_N}{N}}x=y$对某个$y\in[-r,r]^{s_N}$成立，因此根据泰勒定理，对某一中间值$\xi\in[-r,r]^{s_N}$，我们得到

$$\begin{aligned}&\operatorname{sech}^2\left(\left(\vec{m}^*+\sqrt{\frac{s_N}{N}}x\right)^T Ae_k\right)\\=&\operatorname{sech}^2\left((\vec{m}^*+y)^T Ae_k\right)\\=&\operatorname{sech}^2((\vec{m}^*)^T Ae_k)-2(\beta y_k+\alpha(y_{k-1}+y_{k+1}))\operatorname{sech}^2(\xi^T Ae_k)\tanh(\xi^T Ae_k).\end{aligned}$$

因此，对于任意这样的 x，我们有 $\operatorname{sech}^2\left(\left(\vec{m}^*+\sqrt{\frac{s_N}{N}}x\right)^T Ae_k\right)\le 1-(m^*)^2+2r(\beta+2\alpha)$，这意味着 Hess $U(x)$ 的各分量均大于 $A-A^2(1-(m^*)^2+r)$；后者在 $2(\beta+2\alpha)r<r(\beta,\ \alpha)$ 时是正定的。□

需要指出的是，分母在以下界的约束下永不为零，稍后我们将用到这一点。

推论 7.2。存在 $\varepsilon>0$，使得 $J_N(0)>\varepsilon^{s_N}>0$。

证明。注意到 (7.9) 还给出了一个粗略的一致上界

$$\left\|\operatorname{Hess}\frac{N}{s_N}\varphi_N\left(\vec{m}^*+\sqrt{\frac{s_N}{N}}x\right)\right\|\le\lambda_{\max}(A)+\lambda_{\max}(A)^2=(\beta+2\alpha)(1+\beta+2\alpha)=:\lambda_0.$$

对 $\frac{N}{s_N}\varphi_N\left(\vec{m}^*+\sqrt{\frac{s_N}{N}}x\right)$ 关于 $\left|\sqrt{\frac{s_N}{N}}x\right|\le r$ 进行泰勒展开，得到

$$\frac{N}{s_N}\left(\varphi_N\left(\vec{m}^*+\sqrt{\frac{s_N}{N}}x\right)-\varphi_N(\vec{m}^*)\right)=\frac{1}{2}x^T\operatorname{Hess}\varphi_N\left(\vec{m}^*+\sqrt{\frac{s_N}{N}}\xi_x\right)x\le\frac{\lambda_0}{2}\|x\|^2\quad(7.11)$$

对于中间值 $\xi_x\in\left[m^*,m^*+\sqrt{\frac{N}{s_N}}x\right]^{s_N}$。回忆 $J_N(0)$ 的定义 (7.4)，然后按照 (7.8) 进行变量替换，并结合 (7.11)，可得

$$\begin{aligned}J_N(0)&=\int_{\left[-\sqrt{\frac{N}{s_N}}r,\sqrt{\frac{N}{s_N}}r\right]^{s_N}}\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\left(\varphi_N\left(\vec{m}^*+\sqrt{\frac{s_N}{N}}x\right)-\varphi_N(\vec{m}^*)\right)\right\}\mathrm{d}^{s_N}x\\&\ge\int_{\left[-\sqrt{\frac{N}{s_N}}r,\sqrt{\frac{N}{s_N}}r\right]^{s_N}}\exp\left\{-\frac{\lambda_0}{2}\|x\|^2\right\}\mathrm{d}^{s_N}x\\&=\left(\sqrt{2\pi\lambda_0^{-1}}\mathcal{N}(0,\lambda_0^{-1})\left([-\sqrt{\tfrac{N}{s_N}},\sqrt{\tfrac{N}{s_N}}]\right)\right)^{s_N}\ge(\pi/\lambda_0)^{s_N}\end{aligned}$$

如所声称的。□

为简化记号，定义 $s_N\times s_N$ 维矩阵

$$(C^*)^{-1}=\operatorname{Hess}\varphi_N(\vec{m}^*)=A-A^2(1-(m^*)^2)\quad(7.12)$$

并引入函数

$$G(x):=\frac{x^T((C^*)^{-1}-A)x}{2}-(\vec{m}^*)^TAx+\sum_{k=1}^{s_N}\log\cosh\left((\vec{m}^*+x)^TAe_k\right)-\log\cosh\left((\vec{m}^*)^TAe_k\right),$$

与（5.1）不同，它被定义为所有坐标 G 的函数：$\mathbb{R}^{s_N}\to\mathbb{R}$。因此，我们得到

$$\frac{N}{s_N}G\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}y\right)=\frac{y^T(C^*)^{-1}y}{2}-\frac{N}{s_N}\left(\varphi_N\left(\vec{m}^*+\sqrt{\frac{s_N}{N}}y\right)-\varphi_N\left(\vec{m}^*\right)\right)$$

因此，（7.8）意味着

$$\begin{aligned}\frac{J_N(t)}{J_N(0)} =& \frac{\int_{\left[-\sqrt{\frac{N}{s_N}}r,\sqrt{\frac{N}{s_N}}r\right]^{s_N}} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^T(C^*)^{-1}y + \frac{N}{s_N}G\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}y\right) + t^T y\right\} \mathrm{d}^{s_N}y}{\int_{\left[-\sqrt{\frac{N}{s_N}}r,\sqrt{\frac{N}{s_N}}r\right]^{s_N}} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^T(C^*)^{-1}y + \frac{N}{s_N}G\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}y\right)\right\} \mathrm{d}^{s_N}y} \\ =& \frac{\int_{(C^*)^{-\frac{1}{2}}\left[-\sqrt{\frac{N}{s_N}}r,\sqrt{\frac{N}{s_N}}r\right]^{s_N}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{N}{s_N}G\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}(C^*)^{\frac{1}{2}}x\right) + t^T(C^*)^{\frac{1}{2}}x\right\} \mathrm{d}^{s_N}x}{\int_{(C^*)^{-\frac{1}{2}}\left[-\sqrt{\frac{N}{s_N}}r,\sqrt{\frac{N}{s_N}}r\right]^{s_N}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{N}{s_N}G\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}(C^*)^{\frac{1}{2}}x\right)\right\} \mathrm{d}^{s_N}x},\end{aligned}$$

其中在第二步中，我们又进行了一次变量替换 $x = (C^*)^{-\frac{1}{2}}y$。注意，与正定矩阵 $(C^*)^{-\frac{1}{2}}$ 相乘会保持变换后密度的引理 7.1 的表述不变

$$\widetilde{\rho}_N(x) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{N}{s_N}G\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}(C^*)^{\frac{1}{2}}x\right)\right\} \mathbb{1}_{(C^*)^{-\frac{1}{2}}\left[-\sqrt{\frac{N}{s_N}}r,\sqrt{\frac{N}{s_N}}r\right]^{s_N}}(x).$$

与高温情形一样，下一步是按照引理 5.2，限制前几个坐标中的积分区域。

Lemma 7.3. 令 $d_N = \lceil c_9 \text{对数 } N \rceil$，其中 $c_9 > 0$ 为某个常数（稍后定义），并定义

$$D_N \coloneqq (C^*)^{-\frac{1}{2}}\left[-\sqrt{\frac{N}{s_N}}r, \sqrt{\frac{N}{s_N}}r\right]^{s_N} \cap B_{2\sqrt{2d_N}}^{(2d_N)}$$

那么存在一个普适常数 $c_{10} > 0$，使得当 $N \to \infty$ 时

$$\mathbb{E}_{\widetilde{\rho}_N}\left[\mathbb{1}_{D_N^c}(X)\exp\left\{t^T(C^*)^{\frac{1}{2}}X\right\}\right] = \mathcal{O}\left(\exp\left\{-c_{10}d_N\right\}\right) \to 0.$$

利用引理 7.1 的强对数凹性，该引理的表述可完全按照引理 5.2 得出（同样，$2d_N > s_N$ 情形更为简单），因此我们省略证明。最后，我们可以在 $\widetilde{D}_N = D_N + (C^*)^{\frac{1}{2}}t$ 的条件下再次进行变量替换 $x \mapsto x + (C^*)^{\frac{1}{2}}t \in \widetilde{D}_N$，于是积分变为

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\frac{J_N(t)}{J_N(0)} \\ &= \lim_{N\to\infty}\exp\left\{\frac{1}{2}t^TC^*t\right\}\frac{\int_{\widetilde{D}_N}\exp\left\{-\frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{N}{s_N}G\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}(C^*)^{\frac{1}{2}}x + \sqrt{\frac{s_N}{N}}C^*t\right)\right\}\mathrm{d}^{s_N}x}{\int_{\widetilde{D}_N}\exp\left\{-\frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{N}{s_N}G\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}(C^*)^{\frac{1}{2}}x\right)\right\}\mathrm{d}^{s_N}x}. \qquad (7.13)\end{aligned}$$

再次，我们将证明右侧的商收敛于 1。与高温情形一样，分子与分母仅相差函数 G 内部的项 $\sqrt{\frac{s_N}{N}}C^*t$ t，我们将证明在极限下可以忽略该项。由于 t 只有有限个非零坐标，显然当 $N \to \infty$ 时该项趋于零，因此我们进行泰勒展开

$$\frac{N}{s_N}G\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}(C^*)^{\frac{1}{2}}x + \sqrt{\frac{s_N}{N}}C^*t\right) = \frac{N}{s_N}G\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}(C^*)^{\frac{1}{2}}x\right) + \frac{N}{s_N}\nabla G(\xi)^T\sqrt{\frac{S_N}{N}}C^*t,$$

其中 $\xi = \sqrt{\frac{s_N}{N}}(C^*)^{\frac{1}{2}}x + \lambda\sqrt{\frac{s_N}{N}}C^*t$ 是某个 $\lambda \in [0,1]$ 的中间值。我们需要证明

$$\sqrt{\frac{N}{s_N}}\nabla G(\xi)^TC^*t = \sqrt{\frac{N}{s_N}}\sum_{k=1}^{s_N}(\nabla G(\xi))_k(C^*t)_k$$

很小。

引理 7.4。 如果 $s_N = o\left(\frac{N}{(\log N)^4}\right)$ 并且 $d_N = c_9 \log N$ 对于某个常数 $c_9 > 0$, 那么

$$\sqrt{\frac{N}{s_N}} \nabla G(\xi)^T C^* t = o(1)$$

在 $x \in (C^*)^{-\frac{1}{2}} \left[-\sqrt{\frac{N}{s_N}} 2r, \sqrt{\frac{N}{s_N}} 2r\right]^{s_N} \cap B_{4\sqrt{d_N}}^{(2d_N)}$ 中一致成立。

注意，对于足够大的 N， $D_N, \widetilde{D}_N \in (C^*)^{-\frac{1}{2}} \left[-\sqrt{\frac{N}{s_N}} 2r, \sqrt{\frac{N}{s_N}} 2r\right]^{s_N} \cap B_{4\sqrt{d_N}}^{(2d_N)}$。与高温区间一样，证明上述结论的一个关键论证是矩阵 $(C^*)^{\frac{1}{2}}$ 和 C^* 的各项远离对角线和角处的衰减性质。

引理 7.5。 设 $C^* = \left(A - A^2(1-(m^*)^2)\right)^{-1}$，则存在常数 c_7、$c_8 > 0$ 和 $0 < \kappa_3$、$\kappa_4 < 1$，使得

$$C^*_{j,k} = c_7 \left(\kappa_3^{|j-k|} + \kappa_3^{s_N - |j-k|}\right) \tag{7.14}$$

and

$$(C^*)^{\frac{1}{2}}_{j,k} = c_8 \left(\kappa_4^{|j-k|} + \kappa_4^{s_N - |j-k|}\right). \tag{7.15}$$

我们省略证明，因为它分别遵循引理 5.4 中对循环带状矩阵 $A - A^2(1-(m^*)^2)$ 的逆矩阵和平方根所采用的相同步骤。

引理 *7.4* 的证明。 与引理 5.3 的证明一样，我们先考虑 $s_N \gg \log N$ 的情形，然后根据已有的计算推导出 $s_N = \mathcal{O}(\log N)$ 的情形。回顾一下， t 只有有限多个非零分量，并设 l 为非零分量的最大指标。定义 $\widetilde{d}_N = -\frac{5}{\log \kappa_3} \log N$，使得 $\kappa_3^{d_N} = N^{-5}$。同样，定义 $\mathcal{I}_{\widetilde{d}_N} = \{1, \ldots, \widetilde{d}_N\} \cup \{s_N - \widetilde{d}_N + 1, \ldots, s_N\}$ 为靠近端点 $1, s_N$ 的指标，我们先考虑 $k \notin \mathcal{I}_{\widetilde{d}_N}$，以便说明它们的贡献可以忽略。对于 $k = d_N + 1, \ldots, s_N - d_N$，由引理 7.5 可得

$$\begin{aligned} |(C^* t)_k| &\le \sum_{j=1}^{s_N} |C^*_{k,j} t_j| = \sum_{j=1}^{l} |C^*_{k,j} t_j| \\ &= c_7 \sum_{j=1}^{l} \left(\kappa_3^{|j-k|} + \kappa_3^{s_N - |j-k|}\right) |t_j| \le c_7 2 \kappa_3^{\widetilde{d}_N} \sum_{j=1}^{l} |t_j| = \mathcal{O}(N^{-5}) \end{aligned}$$

关于 $k \notin \mathcal{I}_{\widetilde{d}_N}$ 一致，其中最后一步由 d_N 的定义可得。接下来，我们需要为 $(\nabla G(\xi))_k$ 找到一个合适的界。由于 $\xi = \sqrt{\frac{s_N}{N}} (C^*)^{\frac{1}{2}} x + \lambda \sqrt{\frac{s_N}{N}} C^* t$ 对于某个 $\lambda \in [0,1]$ 是泰勒定理中的中间值，我们知道

$$\xi_k = \sqrt{\frac{s_N}{N}} \left((C^*)^{\frac{1}{2}} x\right)_k + \lambda \sqrt{\frac{s_N}{N}} (C^* t)_k = \sqrt{\frac{s_N}{N}} \left((C^*)^{\frac{1}{2}} x\right)_k + \mathcal{O}(N^{-5}),$$

对于 $k \notin \mathcal{I}_{\widetilde{d}_N}$。回想一下， x 被限制在集合 $(C^*)^{-\frac{1}{2}} \left[-\sqrt{\frac{N}{s_N}} 2r, \sqrt{\frac{N}{s_N}} 2r\right]^{s_N}$ 中，因此

$$|\xi_k| \le 2r + \mathcal{O}(N^{-5}) = \mathcal{O}(1).$$

注意到

$$\begin{aligned} |\left(\nabla G(\xi)\right)_k| &= \left| \left(\left((C^*)^{-1} - A\right)\xi\right)_k - m^*(\beta + 2\alpha) + \left(A \sum_{j=1}^{s_N} \tanh\left((\vec{m}^* + \xi)^T A e_j\right) e_j \right)_k \right| \\ &\le (1-(m^*)^2) |(A^2 \xi)_k| + (1-m^*)(\beta + 2\alpha), \end{aligned}$$

其中该不等式成立，是因为根据定义有 $(C^*)^{-1} = A - A^2(1-(m^*)^2)$，并且由于 $-1 \leq$双曲正切 ≤ 1。综合以上所有观察，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{N}{s_N}}\left|\sum_{k\notin\mathcal{I}_{\widetilde{d}_N}}(\nabla G(\xi))_k(C^*t)_k\right| \\
\leq&\sqrt{\frac{N}{s_N}}\sum_{k\notin\mathcal{I}_{\widetilde{d}_N}}\left((1-(m^*)^2)|(A^2\xi)_k|+\mathcal{O}(1)\right)\mathcal{O}(N^{-5}) \\
\leq&\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{N}{s_N}}N^{-5}\right)\sum_{k\notin\mathcal{I}_{\widetilde{d}_N}}\left((1-(m^*)^2)\|A^2\|2r+\mathcal{O}(1)\right)=o(1).
\end{aligned}$$

尚需证明

$$\sqrt{\frac{N}{s_N}}\sum_{k\in\mathcal{I}_{\widetilde{d}_N}}(\nabla G(\xi))_k(C^*t)_k\to 0,$$

但对于 $k\in\mathcal{I}_{\widetilde{d}_N}$，$(C^*t)_k$的贡献不可忽略。我们将再次利用远离对角线的指数衰减，这次针对 $(C^*)^{\frac{1}{2}}$。因此，我们只需使用一致上界

$$|(C^*t)_k|\leq\|C^*\|\|t\|\leq C_{\beta,\alpha,t} \tag{7.16}$$

通过对所有特征值取界，并且我们旨在证明

$$\sqrt{\frac{N}{s_N}}\sum_{k\in\mathcal{I}_{\widetilde{d}_N}}(\nabla G(\xi))_k C_{\beta,\alpha,t}\to 0 \tag{7.17}$$

通过对 $\xi=\sqrt{\frac{s_N}{N}}(C^*)^{\frac{1}{2}}x+\lambda\sqrt{\frac{s_N}{N}}\overline{C^*t}$ 的 $(\nabla G(\xi))_k$取界，其中 $\lambda\in[0,1]$。回顾定义 $\mathcal{I}_{d_N}=\{1,\dots,d_N,s_N-d_N+1,\dots,s_N\}$，对于

$$d_N=-\frac{5}{\log\kappa_4}\log N+\widetilde{d}_N=\left(-\frac{5}{\log\kappa_4}-\frac{5}{\log\kappa_3}\right)\log N=:c_9\log N$$

并拆分

$$\left((C^*)^{\frac{1}{2}}x\right)_k=\sum_{j\notin\mathcal{I}_{d_N}}(C^*)^{\frac{1}{2}}_{kj}x_j+\sum_{j\in\mathcal{I}_{d_N}}(C^*)^{\frac{1}{2}}_{kj}x_j.$$

由引理 7.5 可得

$$\sum_{j\notin\mathcal{I}_{d_N}}\left|(C^*)^{\frac{1}{2}}_{kj}x_j\right|\leq c_8\sum_{j\notin\mathcal{I}_{d_N}}(\kappa_4^{|j-k|}+\kappa_4^{s_N-|j-k|})|x_j|\leq 2c_8\kappa_4^{d_N}\sum_{j\notin\mathcal{I}_{d_N}}|x_j|=\mathcal{O}\left(N^{-5}d_N\sqrt{\frac{N}{s_N}}\right).$$

对于近端部分 $j\in\mathcal{I}_{d_N}$，我们需要使用具有较小投影范数的 $x\in B^{(2d_N)}4\sqrt{2d_N}$，即

$$\left|\sum_{j\in\mathcal{I}_{d_N}}(C^*)^{\frac{1}{2}}_{k,j}x_j\right|=\left|\left((C^*)^{\frac{1}{2}}P_{\mathcal{I}_{d_N}}x\right)_k\right|\leq\|(C^*)^{\frac{1}{2}}P_{\mathcal{I}_{d_N}}x\|\leq\|(C^*)^{\frac{1}{2}}\|\|P_{\mathcal{I}_{d_N}}x\|\leq 4\|(C^*)^{\frac{1}{2}}\|\sqrt{2d_N}, \tag{7.18}$$

其中谱范数 $\|(C^*)^{\frac{1}{2}}\|$在 N 上一致有界。总之，

$$|\xi_k|=\sqrt{\frac{s_N}{N}}\left|\left((C^*)^{\frac{1}{2}}x\right)_k\right|+\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}\right)$$

$$\leq \sqrt{\frac{s_N}{N}}\left(4\|(C^*)^{\frac{1}{2}}\|\sqrt{2d_N}+\mathcal{O}\left(N^{-5}d_N\sqrt{\frac{N}{s_N}}\right)\right)+\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}\right)$$
$$=\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}\log N}\right)\longrightarrow 0$$

在其他 而言， ξ 按分量很小，我们可以对双曲正切做泰勒展开，从而得 g

$$\nabla G(\xi)=\left((C^*)^{-1}-A\right)\xi-(\overrightarrow{m}^*)^TA+A\sum_{k=1}^{s_N}\tanh\left((\overrightarrow{m}^*+\xi)^TAe_k\right)e_k$$
$$=-(1-(m^*)^2)A^2\xi-(\overrightarrow{m}^*)^TA+A\sum_{k=1}^{s_N}\Big(\tanh\left((\overrightarrow{m}^*)^TAe_k\right)+\operatorname{sech}^2\left((\overrightarrow{m}^*)^TAe_k\right)(Ae_k)^T\xi$$
$$-\operatorname{sech}^2\left(\widetilde{\xi}^TAe_k\right)\tanh\left(\widetilde{\xi}^TAe_k\right)\xi^T(Ae_k)(Ae_k)^T\xi\Big)e_k, \tag{7.19}$$

其中 $\widetilde{\xi}$是介于 $\overrightarrow{m}^*$和 $\overrightarrow{m}^*+\xi$之间的另一个中间值。回想一下，对于每个 $k=1$、.....、 s_N，都有 $\tanh\left((\overrightarrow{m}^*)^TAe_k\right)=\tanh\left((\beta+2\alpha)m^*\right)=m^*$，因此

$$A\sum_{k=1}^{s_N}\tanh\left((\overrightarrow{m}^*)^TAe_k\right)e_k=(\overrightarrow{m}^*)^TA,$$

并由 (7.10) 得,

$$\sum_{k=1}^{s_N}\operatorname{sech}^2\left((\overrightarrow{m}^*)^TAe_k\right)(Ae_k)^T\xi e_k=(1-(m^*)^2)\sum_{k=1}^{s_N}(Ae_k)^T\xi e_k=(1-(m^*)^2)A^2\xi.$$

因此，将 $\tilde{\lambda}_k=\operatorname{sech}^2\left(\widetilde{\xi}^TAe_k\right)\tanh\left(\widetilde{\xi}^TAe_k\right)$写作一个取值于 $[-1,1]$、依赖于 ξ 和 k的值，方程 (7.19) 化为

$$\nabla G(\xi)=A\sum_{k=1}^{s_N}\tilde{\lambda}_k(\xi^TAe_k)^2e_k$$

这意味着

$$\nabla G(\xi)=A\sum_{k=1}^{s_N}\tilde{\lambda}_k(\beta\xi_k+\alpha(\xi_{k-1}+\xi_{k+1}))^2e_k$$

这对 $k\in\mathcal{I}_{\widetilde{d}_N}$ 一致成立

$$|(\nabla G(\xi))_k|=\Big|\beta\tilde{\lambda}_k(\beta\xi_k+\alpha(\xi_{k-1}+\xi_{k+1}))^2+\alpha\tilde{\lambda}_{k-1}(\beta\xi_{k-1}+\alpha(\xi_{k-2}+\xi_k))^2$$
$$+\alpha\tilde{\lambda}_{k+1}(\beta\xi_{k+1}+\alpha(\xi_k+\xi_{k+2}))^2\Big|$$
$$\leq(\beta+2\alpha)^3\max_{j=k-2}^{k+2}\xi_j^2=\mathcal{O}\left(\frac{s_N}{N}\log N\right). \tag{7.20}$$

最终，我们得到所要证明的结论 (7.17),

$$\sqrt{\frac{N}{s_N}}\sum_{k\in\mathcal{I}_{\widetilde{d}_N}}(\nabla G(\xi))_kC_{\beta,\alpha,t}=\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{N}{s_N}}\widetilde{d}_N\frac{s_N}{N}\log N\right)=\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}(\log N)^2\right),$$

对 $s_N=o\left(\frac{N}{(\log N)^4}\right)$ 收敛到 0。

在 $s_N < 2d_N = 2c_9 \log N$ 的情形下，引理 7.4 的陈述很容易证明。事实上，对每一个 $x \in B_{4\sqrt{2d_N}}$，回顾中间值 $\xi = \sqrt{s_N}(C^*)^{\frac{1}{2}}x + \lambda\sqrt{s_N}C^*t$。由 (7.16) 和 (7.18) 中的计算，我们得到对每一个 $k = 1, \dots, s_N$，

$$|\xi_k| \leq \sqrt{\frac{s_N}{N}} 4 \|(C^*)^{\frac{1}{2}}\| \sqrt{2d_N} + \sqrt{\frac{s_N}{N}} C_{\beta,\alpha,t} = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{s_N d_N}{N}}\right) \longrightarrow 0,$$

当 $N \to \infty$ 时。因此，我们可以应用 (7.19) 中的泰勒展开，类似于 (7.20)，得到 $|(\nabla G(\xi))_k| = \mathcal{O}\left(\frac{s_N d_N}{N}\right)$，最终

$$\sqrt{\frac{N}{s_N}} \sum_{k=1}^{s_N} (\nabla G(\xi))_k C_{\beta,\alpha,t} = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}} s_N \log N\right) = \mathcal{O}\left(\frac{(\log N)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{N}}\right) = o(1).$$

证明至此完成。 □

由引理 7.3 和引理 7.4 可得，(7.13) 渐近等价于

$$\frac{J_N(t)}{J_N(0)} \sim \exp\left\{\frac{1}{2} t^T C^* t\right\} = \mathbb{E}[e^{tY}], \tag{7.21}$$

其中 $Y \sim \mathcal{N}(0, C^*)$。

暂且假设 K_N 和 L_N 在极限中没有贡献，我们将在接下来的小节中验证这一点。于是，由 (7.21)、(7.7) 并去掉高斯加项可知，矩母函数收敛

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{\sqrt{\frac{N}{s_N}} t^T (m - \overrightarrow{m}^*)\right\} \middle| m \in [m^* - \delta, m^* + \delta]^{s_N}\right] \longrightarrow \mathbb{E}\left[e^{t^T \widetilde{Y}}\right],$$

其中 $\widetilde{Y} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma^*)$，且 Σ^* 是 $C^* - A^{-1}$ 的有限维投影极限。回忆定义

$$C^* = (\operatorname{Hess} \varphi_N(\overrightarrow{m}^*))^{-1} = \left(A - A^2(1 - (m^*)^2)\right)^{-1}$$

我们可以计算得

$$C^* - A^{-1} = \left(A - A^2(1 - (m^*)^2)\right)^{-1} - A^{-1} = (1 - (m^*)^2)\left(I - A(1 - (m^*)^2)\right)^{-1}.$$

在引理 5.4 中，我们计算了高温区间内 $(I - A)^{-1}$ 的显式矩阵系数。由于矩阵 $\left(I - A(1 - (m^*)^2)\right)^{-1}$ 具有相同的结构，因此可立即得出

$$\begin{aligned}
&(1 - (m^*)^2)\left(\left(I - A(1 - (m^*)^2)\right)^{-1}\right)_{j,k} \\
=&(1 - (m^*)^2)\frac{\kappa_5^{|j-k|} + \kappa_5^{s_N - |j-k|}}{(1 - \kappa_5^{s_N})\sqrt{(1 - \beta(1 - (m^*)^2))^2 - 4\alpha^2(1 - (m^*)^2)^2}},
\end{aligned}$$

其中

$$\kappa_5 = \frac{(1 - \beta(1 - (m^*)^2)) - \sqrt{(1 - \beta(1 - (m^*)^2)) - 4\alpha^2(1 - (m^*)^2)^2}}{2\alpha(1 - (m^*)^2)}.$$

特别地，在 $s_N \to \infty$ 的情形下，

$$\Sigma^*_{j,k} = \frac{(1 - (m^*)^2)\kappa_5^{|j-k|}}{\sqrt{(1 - \beta(1 - (m^*)^2))^2 - 4\alpha^2(1 - (m^*)^2)^2}}. \tag{7.22}$$

这就完成了定理 2.3 (ii) 的证明，接下来只需证明 K_N- 项和 L_N- 项在极限下没有贡献。

7.3. 可忽略项 K。为了控制在 (7.5) 中定义的项 K_N，我们先来求 I_N^c 的一个上界。

引理 7.6。对于所有 $0 < \delta < 2m^*$，存在某个 $\varepsilon(\delta)\ r(\delta) > 0$ 使得

$$I_N^c(x, \overrightarrow{m}^*, \delta) \le s_N \exp\left\{-\frac{N}{s_N}\varepsilon\right\} \exp\left\{\frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N} \log\cosh(x^T A e_k)\right\}$$

对于所有 $x \in [m^* - r, m^* + r]^{s_N}$，因此对于所有 $t \in \mathbb{R}^{s_N}$,

$$K_N(t, r, \overrightarrow{m}^*, \delta) \le s_N \exp\left\{-\frac{N}{s_N}\varepsilon\right\} J_N(t, r, \overrightarrow{m}^*).$$

证明。回顾一下，$I_N^c(t)$ 是关于 $m \in ([m^* - \delta, m^* + \delta]^{s_N})^c$ 的求和，并且显然

$$([m^* - \delta, m^* + \delta]^{s_N})^c = \bigcup_{k=1}^{s_N} \{|m_k - m^*| > \delta\}.$$

对于任意固定的 k，我们利用 (7.1) 和 (7.2) 写出

$$\sum_{\substack{\sigma\in\{-1,1\}^N \\ m_k > m^* + \delta}} \frac{1}{2^N} \exp\left\{\frac{N}{s_N} x^T A m\right\} = (I_N(x, \overrightarrow{m}^*, \delta) + I_N^c(x, \overrightarrow{m}^*, \delta))\widetilde{\mathbb{P}}(m_k > m^* + \delta),$$

其中 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 是与左侧求和中的权重相对应的概率测度。由切尔诺夫界可得，对于所有 $\gamma > 0$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\sigma\in\{-1,1\}^N \\ m_k > m^* + \delta}} \frac{1}{2^N} \exp\left\{\frac{N}{s_N} x^T A m\right\} \\
\le &(I_N(x) + I_N^c(x)) \exp\left\{-\frac{N}{s_N}\gamma(\beta + 2\alpha)(m^* + \delta)\right\} \widetilde{\mathbb{E}}\left[\exp\left\{\gamma(\beta + 2\alpha)\sum_{i\in S_k}\sigma_i\right\}\right] \\
= &\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\gamma(\beta + 2\alpha)(m^* + \delta)\right\} \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_N\in\{-1,1\}} \frac{1}{2^N} \prod_{i\in S_k} \exp\left\{(\gamma(\beta + 2\alpha) + x^T A e_k)\sigma_i\right\} \\
&\times \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{s_N} \prod_{i\in S_l} \exp\left\{x^T A e_l \sigma_i\right\} \\
= &\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\gamma(\beta + 2\alpha)(m^* + \delta)\right\} \exp\left\{\frac{N}{s_N} \log\cosh\left(\gamma(\beta + 2\alpha) + x^T A e_k\right)\right\} \qquad (7.23) \\
&\times \exp\left\{\frac{N}{s_N}\sum_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{s_N} \log\cosh\left(x^T A e_l\right)\right\}.
\end{aligned}$$

接下来，我们对其进行泰勒展开

$$\log\cosh\left(\gamma(\beta + 2\alpha) + x^T A e_k\right) = \log\cosh\left((\overrightarrow{\gamma} + x)^T A e_K\right)$$

在 x附近，我们得到

$$\begin{aligned}
&\log\cosh\left(\gamma(\beta + 2\alpha) + x^T A e_k\right) \\
= &\log\cosh\left(x^T A e_k\right) + \gamma\frac{\partial}{\partial y_k} \log\cosh\left(y^T A e_k\right)\Big|_{y=\xi} + \gamma\frac{\partial}{\partial y_{k-1}} \log\cosh\left(y^T A e_k\right)\Big|_{y=\xi}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\gamma\frac{\partial}{\partial y_{k+1}}\log\cosh\left(y^TAe_k\right)\Big|_{y=\xi}\\
=&\log\cosh\left(x^TAe_k\right)+\gamma(\beta+2\alpha)\tanh\left(\xi^TAe_k\right),
\end{aligned}
$$

其中，ξ是介于 x和 $x+\gamma\vec{\gamma}$之间的中间值。然后，我们对双曲正切 $\left(\xi^TAe_k\right)=\tanh(\beta\xi_k+\alpha(\xi_{k-1}+\xi_{k+1}))$ 在（m^*，m^*，m^*）处，针对（ξ_{k-1}，ξ_k，ξ_{k+1}）再次进行泰勒展开（回想一下 $|\xi_k-m^*|\le\gamma+|x_k-m^*|\le\gamma+r$），得到

$$
\tanh\left(x^TAe_k\right)=\tanh((\beta+2\alpha)m^*)+(\beta+2\alpha)r\,\mathrm{sech}^2(\xi^TAe_k)
$$

对于一个中间值 ξ，但由于 $\mathrm{sech}\ \le 1$，我们可以将 r 取得足够小，使得 $(\beta+2\alpha)r\,\mathrm{sech}^2\left(\xi^TAe_{2k-1}\right)\le\frac{\delta}{2}$，并利用 m^* 的定义，得到

$$
\log\cosh\left(\gamma(\beta+2\alpha)+x^TAe_k\right)\le\log\cosh\left(x^TAe_k\right)+\gamma(\beta+2\alpha)m^*+\gamma\frac{\delta}{2}(\beta+2\alpha).
$$

将其代入 (7.23)，最终得到

$$
\sum_{\substack{\sigma\in\{-1,1\}^N\\ m_k>m^*+\delta}}\frac{1}{2^N}\exp\left\{\frac{N}{s_N}x^TAm\right\}\le\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\gamma(\beta+2\alpha)\frac{\delta}{2}\right\}\exp\left\{\frac{N}{s_N}\sum_{l=1}^{s_N}\log\cosh\left(x^TAe_l\right)\right\}.
$$

同理，我们可以得到 $\{m_k<m^*-\delta\}$ 的相同上界。因此，令 $\varepsilon=\gamma(\beta+2\alpha)\frac{\delta}{2}>0$，可得

$$
I_N^c(x,\vec{m}^*,\delta)\le s_N\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\varepsilon\right\}\exp\left\{\frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N}\log\cosh(x^TAe_k)\right\}
$$

将其代入 $K_N(t)$ 并进行变量替换，可得

$$
\begin{aligned}
K_N(t)\le&s_N\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\varepsilon\right\}\left(\frac{N}{s_N}\right)^{\frac{s_N}{2}}\\
&\times\int_{[m^*-r,m^*+r]^{s_N}}\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\left(\varphi_N(x)-\varphi_N(\vec{m}^*)\right)+\sqrt{\frac{N}{s_N}}t^T(x-\vec{m}^*)\right\}\mathrm{d}^{s_N}x\\
=&s_N\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\varepsilon\right\}J_N(t).
\end{aligned}
$$

□

由 (7.21) 可知，$J_N(t)J_N(0)$ 有界（当 $N\to\infty$ 时），因此 $K_N(t)J_N(0)=\mathcal{O}\left(s_N\exp\{-\varepsilon\frac{N}{s_N}\}\right)$ 可以忽略。

7.4. 可忽略项 L。最后，让我们处理 (7.6) 中定义的 $L_N(t)$ 项。我们要证明，在极限意义下它是可忽略的，即 $L_N(t)\,J_N(0)\to 0$。为此，我们先作如下观察。

引理 7.7. 对于 $0<\delta<2m^*$ 和 $0<r<m^*$，有

$$
\begin{aligned}
&L_N(t,r,\vec{m}^*,\delta)\\
\le&K_N(t,r,-\vec{m}^*,(2m^*-\delta))+\left(\frac{N}{s_N}\right)^{\frac{s_N}{2}}\exp\left\{\frac{N}{s_N}\varphi_N(\vec{m}^*)-\sqrt{\frac{N}{s_N}}t^T\vec{m}^*\right\}\\
&\times\int_{\mathbb{R}^{s_N}\setminus([m^*-r,m^*+r]^{s_N}\cup[-m^*-r,-m^*+r]^{s_N})}\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\varphi_N(x)+\sqrt{\frac{N}{s_N}}t^Tx\right\}\mathrm{d}^{s_N}x.
\end{aligned}
\tag{7.24}
$$

证明. 回忆一下，我们在 (7.6) 中将 L_N 定义为对.....的积分

$$\begin{aligned}&([m^*-r,m^*+r]^{s_N})^c\\=&\mathbb{R}^{s_N}\setminus([m^*-r,m^*+r]^{s_N}\cup[-m^*-r,-m^*+r]^{s_N})\cup[-m^*-r,-m^*+r]^{s_N},\end{aligned}\tag{7.25}$$

其中我们分离出了区域$[-m^*-r,-m^*+r]^{s_N}$，最终得到 $K_N(t,\ r,\ -\overrightarrow{m}^*,\ (2m^*-\delta))$。 L_N 的被积函数包含 I_N，它在 (7.1) 中被定义为对.....内自旋的求和

$$[m^*-\delta,m^*+\delta]^{s_N}\subset([-m^*-(2m^*-\delta),-m^*+(2m^*-\delta)]^{s_N})^c,$$

其中我们使用了 $\delta<2m^*$。根据 I_N^c 的定义 (7.2)，可得

$$I_N(x,\overrightarrow{m}^*,\delta)\le I_N^c(x,-\overrightarrow{m}^*,2m^*-\delta),\tag{7.26}$$

由此得到 K_N，如 (7.5) 所示。我们将剩余的积分上界估计为

$$I_N\le I_N+I_N^c=\exp\left\{\frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N}\log\cosh\left(x^TAe_k\right)\right\},\tag{7.27}$$

其中我们使用了 (7.3)。这个对数双曲余弦项补全了函数 φ_N，由观察 (7.25)、(7.26) 和 (7.27) 即可得到所需结论。

□

引理 7.7 的第一项是 K_N，我们已在引理 7.6 中对其进行了控制。(7.24) 中第二项的积分区域与两个全局极小点都相距甚远，因此我们预期其贡献在极限下可以忽略。在高温区间，我们利用密度函数的次高斯行为，忽略了所有距离原点“过远”的积分区域。在低温区域，显然，(7.24) 中的积分在原点“附近”不具备这种行为。远离原点时，我们可以再次利用分布具有次高斯尾部这一事实。

引理 7.8. 设 $\lambda_{\min}$、$\lambda_{\max}>0$ 分别为矩阵 A 的最小和最大特征值。令$R>2\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$ 满足 $c_{11}=\frac{\lambda_{\min}}{2}-\frac{\lambda_{\max}}{R}>0$，则对任意 $\|x\|>R\sqrt{N}$，有

$$\frac{N}{s_N}\varphi_N\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}x\right)\ge c_{11}\|x\|_2^2.$$

证明. 利用 $\log\cosh(z)\le|z|$ 和 $\|x\|_1\le\sqrt{s_N}\|x\|_2$，经过简单计算可得

$$\begin{aligned}\frac{N}{s_N}\varphi_N\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}x\right)&=\frac{1}{2}x^TAx-\frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N}\log\cosh\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}x^TAe_k\right)\ge\frac{1}{2}x^TAx-\frac{N}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N}\sqrt{\frac{s_N}{N}}|x^TAe_k|\\&=\frac{1}{2}x^TAx-\sqrt{\frac{N}{s_N}}\|Ax\|_1\ge\frac{1}{2}x^TAx-\sqrt{N}\|Ax\|_2\ge\frac{1}{2}x^TAx-\frac{1}{R}\|x\|_2\|Ax\|_2\\&\ge\left(\frac{\lambda_{\min}}{2}-\frac{\lambda_{\max}}{R}\right)\|x\|_2^2.\end{aligned}$$

□

在假设 $s_N=o\left(\frac{\sqrt{N}}{\log N}\right)$ 下，以下粗略估计已足够。

引理 7.9. 若 $s_N=o\left(\frac{\sqrt{N}}{\log N}\right)$，且对于 $0<\delta<2m^*$ 和 $0<r<m^*$，有

$$\frac{L_N(t,r,\overrightarrow{m}^*,\delta)}{J_N(0,r,\overrightarrow{m}^*)}\le e^{\mathcal{O}(\sqrt{N})}\int_{\Delta_N^r}\exp\left\{-\frac{N}{s_N}\left(\varphi_N\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}x\right)-\varphi_N(\overrightarrow{m}^*)\right)\right\}\mathrm{d}^{s_N}x+o(1),$$

其中

$$\Delta_N^r=B_{R\sqrt{N}}\setminus\left(\left[\sqrt{\frac{N}{s_N}}(m^*-r),\sqrt{\frac{N}{s_N}}(m^*+r)\right]^{s_N}\cup\left[\sqrt{\frac{N}{s_N}}(-m^*-r),\sqrt{\frac{N}{s_N}}(-m^*+r)\right]^{s_N}\right)$$

证明。 首先注意，推论 7.2 给出 $J_N(0)^{-1} = e^{\mathcal{O}(s_N)} = e^{\mathcal{O}(\sqrt{N})}$。

我们的目标是对引理 7.7 中的各项进行界定，其中第一项 K_N 已在引理 7.6 中得到界定。对积分 (7.24) 作变量替换后，剩下需要界定的是

$$\int_{\Delta_N^r \cup B^c_{R\sqrt{N}}} \exp\left\{-\frac{N}{s_N}\left(\varphi_N\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}x\right) - \varphi_N(\overrightarrow{m}^*)\right) + t^T\left(x - \sqrt{\frac{N}{s_N}}\overrightarrow{m}^*\right)\right\} \mathrm{d}^{s_N}x.$$

由于引理 7.8、柯西-施瓦茨不等式和高斯尾界，远离原点处的积分可以忽略

$$\begin{aligned}
&\int_{B^c_{R\sqrt{N}}} \exp\left\{-\frac{N}{s_N}\left(\varphi_N\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}x\right) - \varphi_N(\overrightarrow{m}^*)\right) + t^T\left(x - \sqrt{\frac{N}{s_N}}\overrightarrow{m}^*\right)\right\} \mathrm{d}x \\
&\leq \exp\left\{\frac{N}{s_N}\varphi_N(\overrightarrow{m}^*) + \sqrt{N}\|t\|m^*\right\} \int_{B^c_{R\sqrt{N}}} \exp\left\{-c_{11}\|x\|^2 + \|t\|\|x\|\right\} \mathrm{d}x \\
&\leq \exp\left\{N\left(\frac{\beta+2\alpha}{2}(m^*)^2 - \log\cosh((\beta+2\alpha)m^*) + o(1)\right)\right\} \exp\left\{2c_{11}R^2N\right\} (2\pi 2c_{11})^{\frac{s_N}{2}} = o(1),
\end{aligned}$$

因为 $\frac{\beta+2\alpha}{2}(m^*)^2 - \log\cosh((\beta+2\alpha)m^*) < 0$。另一方面，在 Δ_N^r 上，我们使用类似的界 $t^T\left(x - \sqrt{\frac{N}{s_N}}\overrightarrow{m}^*\right) = \mathcal{O}(\sqrt{N})$，从而得到所需结论。 □

最后一步，我们需要以下一致能隙。

引理 7.10。 若 $s_N = o\left(\frac{\sqrt{N}}{\log N}\right)$ 且 $0 < r < m^*$，则存在 $\rho > 0$（它仅依赖于 r，而不依赖于 N），使得

$$\inf_{x \in \Delta_N^r} \varphi_N\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}x\right) \geq \varphi_N(\overrightarrow{m}^*) + \rho.$$

有了这个引理，$L_N(t)/J_N(0) = o(1)$ 的证明便完成了。事实上，引理 7.9 和引理 7.10 蕴含

$$\frac{L_N(t, r, \overrightarrow{m}^*, \delta)}{J_N(0, r, \overrightarrow{m}^*)} \leq e^{-\rho N/s_N + \mathcal{O}(\sqrt{N})} + o(1) \to 0. \tag{7.28}$$

请注意，这是定理 2.3 (ii) 的证明中唯一用到假设 $s_N = o\left(\frac{\sqrt{N}}{\text{对数 } N}\right)$ 的步骤。我们认为，通过大幅收紧界，这一假设可以减弱；但为了方便第 42 页的读者，我们认为，在这个更强的假设下采用不那么技术性的论证，仍能传达该结果的相同含义。

引理 7.10 的证明。 为了求出 φ_N 在 Δ_N^r 上的极小值，我们回顾一下在第 4 节中证明的以下性质：

- 具有全为严格正坐标或全为严格负坐标的 φ_N 的唯一临界点是向量 $\pm\overrightarrow{m}^*$，见引理 4.5 的证明。
- 唯一一个含有零坐标的临界点是零向量，根据引理 4.2，它不是极小值。
- 对于任意坐标全为正或全为负的点 x，以及任意满足 $|J| \leq \frac{s_N}{2}$ 的子集 $J \subset \{1, \ldots, s_N\}$，若我们定义 y 为坐标翻转后的点

$$\begin{aligned}
y_k &= x_k \quad \text{for all } k \notin J \\
y_k &= -x_k \quad \text{for all } k \in J,
\end{aligned} \tag{7.29}$$

那么引理 4.4 的证明表明存在严格的能隙

$$\varphi_N(x) - \varphi_N(y) \le -2\beta \sum_{j\in J} |x_j|. \tag{7.30}$$

这些观察综合起来意味着，对于所有区块的翻转副本，$\inf_{x\in\Delta_N^r} \varphi_N\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}x\right)$ 必须在边界$\partial\Delta_N^r$或内部取得

$$\prod_{k=1}^{s_N}\left[\sqrt{\frac{N}{s_N}}(\varepsilon_k m^* - r), \sqrt{\frac{N}{s_N}}(\varepsilon_k m^* + r)\right], \tag{7.31}$$

对于所有 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{s_N} \in \{-1, +1\}$ 的选择。

显然，根据引理 7.8，极小值不可能在$\partial B^c_{R\sqrt{N}}$ 处取得。在边界$\partial\left[\sqrt{\frac{N}{s_N}}(m^* - r)\ \sqrt{\frac{N}{s_N}}(m^* + r)\right]^{s_N}$上，我们利用其内部的严格凸性。事实上，我们已在引理 7.1 中证明，Hess $\frac{N}{s_N}\left(\varphi_N\left(\vec{m}^* + \sqrt{\frac{s_N}{N}}x\right) - \varphi_N(\vec{m}^*)\right)$ 对 $x \in \left[-\sqrt{\frac{N}{s_N}}r, \sqrt{\frac{N}{s_N}}r\right]^{s_N}$ 一致地严格正定。对于海森矩阵的最小奇异值 $\lambda_{\min} > 0$，可得

$$\inf_{x\in\partial\left[\sqrt{\frac{N}{s_N}}(m^*-r), \sqrt{\frac{N}{s_N}}(m^*+r)\right]^{s_N}} \varphi_N\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}x\right) - \varphi_N(\vec{m}^*) \ge \lambda_{\min} r^2. \tag{7.32}$$

还需控制翻转盒 (7.31) 内可能存在的临界点。对于此类翻转盒中任意满足 (7.29) 的 y，存在 $x \in \left[\sqrt{\frac{N}{s_N}}(m^* - r)\ \sqrt{\frac{N}{s_N}}(m^* + r)\right]^{s_N}$ 和 $J \subset \{1, \dots, s_N\}$，使得 (7.30) 给出

$$\varphi_N\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}x\right) - \varphi_N\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}y\right) \le -\sum_{j\in J} 2\beta\sqrt{\frac{s_N}{N}}x_j \le -2\beta|J|(m^* - r) \le -2\beta(m^* - r) < 0.$$

因此，

$$\varphi_N\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}y\right) - \varphi_N(\vec{m}^*) \ge 2\beta(m^* - r) + \varphi_N\left(\sqrt{\frac{s_N}{N}}x\right) - \varphi_N(\vec{m}^*) \ge 2\beta(m^* - r).$$

当 $\rho = \min\{\lambda_{\min} r^2, 2\beta(m^* - r)\}$ 时，结论成立。 □

Appendix A. Proof of Proposition 2.2

命题 2.2 的结论由 [Geo11] 中的定理 8.39 得出。固定满足 $\frac{1}{c} \in \mathbb{N}$ 的 $0 < c < 1$，并假设对所有 N，都有 $s_N = cN \in \mathbb{N}$。那么每个区块都包含 $\frac{1}{c}$ 个自旋，且 m_k 可以取 $\mathcal{A}_c = \{-1 + 2cl$ 中的值：$l = 0, \cdots, \frac{1}{c}\}$，其中对每个 l，

$$\mathbb{P}(m_k = 1 - 2lc) = \mathbb{P}(m_k = -(1 - 2lc)) = \mathbb{P}\left(\{\sigma_1, \dots, \sigma_{\frac{1}{c}}\} \text{ contains } l \text{ many -1-spins}\right) = \frac{\binom{\frac{1}{c}+l-1}{l}}{2^{\frac{1}{c}}}.$$

那么，$\mu_{N,\beta,\alpha}(m \in \cdot)$的行为类似于具有最近邻相互作用自旋 $m_1, \dots, m_{cN}$的一维伊辛模型在吉布斯测度下的磁化强度分布，其先验分布由上述权重给出。用 [Geo11] 的术语来说，吉布斯测度可以用势来描述，而势是构成能量函数的基本要素（参见[Geo11，第 2.1]节）。对于我们的系统，势为 $\Phi = (\Phi_E)_{E\subset\mathbb{N}}$，其中

$$\Phi_E(\sigma) = \begin{cases} \frac{\alpha}{c}m_i m_{i+1} + \frac{\beta}{2c}m_i^2 & \text{if } E = \{i, i+1\} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

根据 [Geo11],中的定理 8.39，如果满足以下条件，该自旋模型不会发生相变

$$\sup_{i\in\{1,\dots,s_N\}}\left(\sup_{x,y}|\Phi_{\{i-1,i\}}(x)-\Phi_{\{i-1,i\}}(y)|+\sup_{x,y}|\Phi_{\{i,i+1\}}(x)-\Phi_{\{i,i+1\}}(y)|\right)<\infty. \tag{A.1}$$

注意，对任意 $i\in\{1,\dots,s_N\}$ 以及任意 x， $y\in\mathcal{A}_c$

$$|\Phi_{\{i-1,i\}}(x)-\Phi_{\{i-1,i\}}(y)|\le 2\frac{\alpha}{c}+\frac{\beta}{2c},$$

因此，(A.1) 式左侧至多为 $2\frac{\alpha}{c}+\frac{\beta}{c}<\infty$。所以，势 Φ 存在唯一的无限体积吉布斯测度 μ_m。乘积拓扑中的弱收敛定义为所有有限维边缘分布的收敛。这由 μ_m 的 DLR 方程推出。这是我们的第一个断言。

关于最后一个结论，注意 Georgii（参见 [Geo11]，第 7 章，尤其是第 7.3 节）证明，在紧空间上的伊辛型相互作用这一设定下，所有吉布斯测度的集合（Φ）是一个（Choquet）单纯形，其极点为遍历测度。因此，唯一性意味着 μ_m 的遍历性。根据遍历定理，总磁化强度 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i=\frac{1}{s_N}\sum_{k=1}^{s_N}m_k$ 在 μ_m 下几乎必然收敛到一个常数。由于我们的系统关于自旋翻转对称，即对于所有 σ 和 E， $\Phi_E(\sigma)=\Phi_E(-\sigma)$，这个极限只能是 0。□

Acknowledgements

作者感谢 Thomas Lebl´e 提出的宝贵建议以及富有启发性的讨论。IL 和 ML 得到德国研究联合会在德国卓越战略 EXC 2044 - 390685587 下的资助，项目为 Mathematics M¨u nster：动力学 - 几何 - 结构。JJ 得到德国研究联合会优先计划 SPP 2265“随机几何系统”的资助。

References

[BD01] William A. Brock 和 Steven N. Durlauf。社会互动下的离散选择。 *Rev. Econom. Stud.*，68 2 235 260，2001 ( )：–。[BL00] S.G. Bobkov 和 M. Ledoux。从布伦–明可夫斯基不等式到布拉斯坎普–利布不等式，再到对数 Sobolev 不等式。 *Geometric and Functional Analysis*，10：1028–1052，2000。[BM17] Anirban Basak 和 Sumit Mukherjee。波茨模型平均场的普适性。 *Probability Theory and Related Fields* 168 3 557 600, 2017 ，( )：–。[BR07] Michele Benzi 和 NADER RAZOUK。稀疏矩阵函数近似的衰减界与 o(n) 算法。 *ETNA. Electronic Transactions on Numerical Analysis [electronic only]*，28，01 2007。[BRS19] Quentin Berthet、Philippe Rigollet 和 Piyush Srivastava。伊辛块模型中的精确恢复。*Ann. Statist.*，47(4)：1805–1834，2019。[CL10] Rama Cont 和 Matthias L ¨ *J. Math.* owe。社会距离、异质性与社会互动。*Econom.* 46 4 572 590, 2010 ，( )：–。[Col14] Francesca Collet。二部 Curie-Weiss 模型的宏观极限：动力学方法。 *J. Stat. Phys.* 157 6 1301 1319, 2014 ，( )：–。[CS11] Sourav Chatterjee 和 Qi-Man Shao。利用可交换对的 Stein 方法进行非正态逼近及其在 Curie-Weiss 模型中的应用。 *Ann. Appl. Probab.*，21(2)：464–483，2011。[DM23] Nabarun Deb 和 Sumit Mukherjee。平均场伊辛模型中的涨落。 *The Annals of Applied Probability* 33 3 1961 2003, 2023 ，( )：–。[EL10] Peter Eichelsbacher 和 Matthias L¨owe。统计力学中出现的相依随机变量的 Stein 方法。 *Electron. J. Probab.*，15：第 30 号，962–988，2010。[Ell06] Richard S. Ellis。 *Entropy, large deviations, and statistical mechanics*。数学经典。施普林格出版社，柏林，2006。1985 年原版重印。[EN78a] Richard S. Ellis 和 Charles M. Newman。统计力学中出现的相依随机变量之和的极限定理。 *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*，44(2)：117–139，1978。[EN78b] Richard S. Ellis 和 Charles M. Newman。Curie-Weiss 模型的统计。 *J. Statist. Phys.*，19 2 149 161，1978 ( )：–。

[ENR80] Richard S. Ellis、Charles M. Newman 和 Jay S. Rosen。统计力学中出现的相依随机变量之和的极限定理。II. 条件化、多重相与亚稳态。 *Z.*，(): –。[EW90] Richard S. Ellis 和 Kongming Wang。Curie-Weiss-Potts 模型经验向量的极限定理。 *Stochastic Process. Appl.*，35(1)：59–79，1990。[FC11] Micaela Fedele 和 Pierluigi Contucci。多物种统计力学平均场模型的标度极限。 *J. Stat. Phys.*，144(6)：1186–1205，2011。[FKT22] M. Fleermann、W. Kirsch 和 G. Toth。多群体居里–外斯模型的局部中心极限定理。*J. Theoret. Probab.*，35(3)：2009–2019，2022。[FU12] Micaela Fedele 和 Francesco Unguendoli。二部平均场模型的严格结果。 *J. Phys.*，(): 。[FV18] S. Friedli 和 Y. Velenik。 *Statistical mechanics of lattice systems*。剑桥大学出版社，剑桥，2018。一本具体的数学入门书。[GBC09] Ignacio Gallo、Adriano Barra 和 Pierluigi Contucci。简单社会互动平均场模型的参数估计。 *Math. Models Methods Appl. Sci.*，19(增刊)：1427–1439，2009。[GC08] Ignacio Gallo 和 Pierluigi Contucci。二部平均场自旋系统。存在性与求解。 *Math.*：论文。[Geo11] Hans-Otto Georgii。 *Gibbs measures and phase transitions* 9 *De Gruyter Studies in Mathematics* 2011 *Gibbs measures and phase transitions* 9 *De Gruyter Studies in Mathematics* 2011 *Gibbs measures and phase transitions* 9 *De Gruyter Studies in Mathematics* 2011。Walter de Gruyter & Co.，柏林，第二版，。[Isi25] Ernst Ising。铁磁性理论的贡献。 *Zeitschrift für Physik*，25，02 1925。[JLS21] Jonas Jalowy、Matthias L¨owe 和 Holger Sambale。区块波茨模型中的磁化强度涨落，2021。[Kim22] Daecheol Kim。含三自旋的双组分居里–外斯–波茨模型的能量景观。 *Journal of Statistical Physics* 188 2 15, 2022 ，(): 。[KL09] Holger Kn¨opfel 和 Matthias L¨owe。异质人口中的意见形成——霍普菲尔德模型的一种新方法。 *Math. Semesterber.*，56(1)：15–38，2009。[KLSS20] Holger Kn¨opfel、Matthias L¨owe、Kristina Schubert 和 Arthur Sinulis。一般块自旋伊辛模型的涨落结果。 *J. Stat. Phys.*，178(5)：1175–1200，2020。[KT20] Werner Kirsch 和 Gabor Toth。具有异质耦合的 Curie-Weiss 模型中的两个群体。 *J.*，(): –。[KT22] *Theoret. Probab.* 33 4 2001 2026, 2020 Werner Kirsch 和 Gabor Toth。利用矩方法研究多群体居里–外斯模型的极限定理。 *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*，25，09 2022。[LS18] Matthias L¨owe 和 Kristina Schubert。 *Electron. Commun. Probab.* 23 12 2018 区块自旋伊辛模型中的涨落。，：页码，。[LS20] Matthias L¨owe 和 Kristina Schubert。临界线上的区块自旋伊辛模型精确恢复。 *Electron. J. Stat.*，14(1)：1796–1815，2020。[LSV20] Matthias L¨owe、Kristina Schubert 和 Franck Vermet。具有社会互动和随机通信结构的多群体二元选择——随机图方法。 *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 556 124735, 05 2020 ：。[MSB21] Somabha Mukherjee、Jaesung Son 和 Bhaswar B. Bhattacharya。 p-自旋 Curie-Weiss 模型中的磁化强度涨落。 *Comm. Math. Phys.*，387(2)：681–728，2021。[MSB25] Somabha Mukherjee、Jaesung Son 和 Bhaswar B. Bhattacharya。 p-自旋 Curie-Weiss 模型中最大似然估计量的相变。 *Bernoulli*，31(2)：1502–1526，2025。[Mun26] Kyunghoo Mun。均匀多组分居里–外斯–波茨模型的动力学相变。 *J. Stat. Phys.*，193(2)：论文第 16 号，2026。[Pre09] Errico Presutti。 *Scaling limits in statistical mechanics and microstructures in continuum mechanics*。施普林格出版社，2009。[Tho79] Colin J. Thompson。 *Mathematical statistical mechanics*。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1979。1972 年原版重印。[Ver18] Roman Vershynin。 *High-dimensional probability* 47 *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics* 2018 *High-dimensional probability* 47 *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics* 2018 *High-dimensional probability* 47 *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics* 2018。剑桥大学出版社，剑桥，。数据科学应用导论，附 Sara van de Geer 撰写的前言。

Jonas Jalowy: *Paderborn University, Warburger Str. 100, 33098 Paderborn, Germany*
Email address: jjalowy@math.upb.de

Isabel Lammers: *Universität Münster, Einsteinstrasse 62, Münster 48149, Germany*
Email address: isabel.lammers@uni-muenster.de

Matthias Löwe: *Universität Münster, Einsteinstrasse 62, Münster 48149, GermanyEmail address*:
matthias.loewe@uni-muenster.de