arXiv:2603.01995v1 [math.DG] 2 Mar 2026

调和映射与极小子流形

Oskar Riedler

2026年3月3日

摘要

调和映射是保持拉普拉斯方程不变的映射，与极小子流形这一主题密切相关。本文首先将黎曼流形之间的调和态射刻画为弱水平共形映射，这类映射保持余维 2 极小子流形的方程。随后，我们进一步推导出调和态射对于其他余维的极小子流形所具有的额外约化性质。最后，我们将这些定理应用于一个示例，得到一族新的 R^m, $m \geq 32$ 中的 4 次面积极小超圆锥。

1. 引言

两个黎曼流形之间的映射 $\varphi\colon (M,g) \to (N,h)$ 称为调和态射，如果它保持拉普拉斯方程，即对任意局部定义的函数芽 $f : N \to \mathbb{R}$，有

$$\Delta_N f = 0 \implies \Delta_M (f \circ \varphi) = 0.$$

这里 Δ_M, Δ_N 分别表示 M, N 的拉普拉斯算子。

尽管上述定义纯粹是分析性的，源自位势论 [CC65]，但调和态射的几何理论却十分丰富。黎曼几何中对调和态射的研究始于 Fuglede [Fug78] 和 Ishihara [Ish79] 的工作，他们找到了这类对象的几何刻画。他们证明，一个映射是调和态射，当且仅当它既是弱水平共形 又是调和的。

调和态射这一概念颇具生命力，此后已在许多背景下得到研究。我们提及黎曼多面体[EF01]，、度量图 [Ura00, ABBR15]，、Weyl 空间 [LP06, LP10]，以及概率论 [BCD79, CFO90]等情形。

本文将关注调和映射与极小子流形之间的联系。特别是，我们希望利用调和映射生成这类子流形。当陪域 N 为曲面时，Baird 和 Eells 的著名定理 [BE81] 表明， φ 的纤维在正则点 $M \setminus \{d\varphi = 0\}$ 处是余维数为2的极小子流形:

定理 1.1 ([BE81])**.** 设 $\varphi\colon (M, g) \to (N, h)$ 是一个浸没水平共形映射，且维数$(N) = 2$。以下条件等价:

(i) φ 是调和的，因此是一个调和态射。

(ii) 对所有 $p \in N$， $\varphi^{-1}(\{p\})$ 都是 M 中的余维2 极小子流形。

自然会想到，是否也可能通过极小子流形对高维陪域给出类似的刻画。在下文中，我们将调和映射刻画为这样的弱水平映射：它们在正则点集上保持余维 2 子流形的极小性方程。

定理 1.2. 设 $\varphi\colon (M, g) \to (N, h)$ 为浸没水平共形映射。下列陈述等价:

(i) φ 是调和的，因而为调和态射。

(ii) 对所有极小余维2 子流形 $B \subset N$，原像 $\varphi^{-1}(B) \subset M$ 均为极小余维2子流形。

因此，调和映射与陪域中余维 2 子流形的几何密切相关。我们也关注其他维数的子流形，尤其是超曲面，即余维数为1的子流形。在这一方向上，Baird 与 Gudmundsson [BG92] 对所谓的 p-调和映射得出了若干结果。若专门考虑调和态射的情形，他们的陈述再次处理映到曲面的映射。

定理 1.3 （参见推论 3.4，见 [BG92]）。设 $\varphi\colon (M, g) \to (N, h)$ 为满足 $\dim(N) = 2$ 的浸没调和映射，并设 $B \subset N$ 为余维1的极小子流形（即一条测地线）。下列陈述等价:

(i) $d\varphi(\nabla \|d\varphi\|^2(x))$ 对所有 $x \in \varphi^{-1}(B)$，均与 B 相切。

(ii) $\varphi^{-1}(B)$ 是 M 中的一个极小余维 1 子流形。

我们将此结论推广到任意余域如下：

定理 1.4. 设 $\varphi\colon (M,g) \to (N,h)$ 是一个浸没调和映射，并设$B \subset N$ 是一个余维为 p 且满足 $p \neq 2$ 的极小子流形。以下条件等价：

(i) 对所有 $x \in \varphi^{-1}(B)$， $d\varphi(\nabla\|d\varphi\|^2(x))$ 都与 B 相切。

(ii) $\varphi^{-1}(B)$ 是 M 中的一个余维为 p 的极小子流形。

我们指出，这些定理可以视为极小子流形的约化定理，其思路与 [HL71、Pal79] 利用群作用以及 [PT86] 利用黎曼浸没相同。从这一角度看，它们是构造极小子流形新例子的有用工具。我们还提到，证明本文结论的主要技术步骤——下文的引理 3.3——可应用于比上述定理所述范围更广的一类情形和约化问题（例如，在 p-调和态射的背景下研究预设平均曲率问题）。

在本文的第二部分，我们将运用上述结果，在 $\mathbf{R}^m$ 中寻找一族新颖的面积极小锥。为此，我们将把定理 1.4 应用于两个欧几里得空间之间的多项式调和映射，从而寻找极小锥。多项式调和映射是调和映射中的一个重要类别，本身就很有研究价值 [Bai83, EY95, ABB99, Rie25]。由于我们对其一般结构或分类仍知之甚少，因此主要将讨论范围限制在二次多项式上；这类多项式已由 Ou 和 Wood [OW96, Ou97] 完成分类。

这一分类运用了所谓的 Clifford 系统，其定义见下文定义 4.4。Clifford 系统似乎非常适合用于构造面积极小者；关于构造面积极小余维 2 锥的近期工作，见 [Cui26] 。它们也出现在 Wang [Wan94] 所构造的面积极小者的 $g = 4$ 情形中。我们证明：

定理 1.5。 设 $m, n \in \mathbb{N}$， $m \geq 32$ 和 $n \geq 4$。对于 $A_1, \ldots, A_{2n} \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ 一个 *Clifford* 系统，该锥

$$C^4_{m,n} := \left\{ x \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \langle x, A_i x\rangle^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, A_{n+i} x\rangle^2 \right\}$$

是$\mathbb{R}^m$中的面积极小超曲面。

注 1.6. 对于 (m, n) 的所有取值，$C^4_{m,n}$ 的平均曲率在其正则点处消失，即 $C^4_{m,n} \setminus \{x \in \mathrm{R}^m \mid \langle x, A_i x\rangle = 0 \ \forall i \in \{1, ..., 2n\}\}$ 是 R^m中的极小锥形子流形。

例 1.7. 我们明确给出例子 $C^4_{8,2}$, $C^4_{16,4}$ 和 $C^4_{32,4}$ 。在定义域的等距变换意义下，这些锥由 m, n 的取值唯一确定。

$$C^4_{8,2} = \left\{(z_1, z_2, u_1, u_2) \in \mathbb{C}^4 \,\middle|\, \|z_1u_1 + z_2u_2\|^2 = \|\overline{z_2}z_1 - \overline{u_2}u_1\|^2\right\},$$
$$C^4_{16,4} = \left\{(z_1, z_2, u_1, u_2) \in \mathbb{H}^4 \,\middle|\, \|z_1u_1 + z_2u_2\|^2 = \|\overline{z_2}z_1 - \overline{u_2}u_1\|^2\right\},$$
$$C^4_{32,4} = \left\{(z_1, z_2, z_3, z_4, u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{H}^8 \,\middle|\, \left\|\sum_{i=1}^4 z_iu_i\right\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^2 \overline{z_{2i}}z_{2i-1} - \overline{u_{2i}}u_{2i-1}\right\|^2\right\}.$$

这里的乘法和共轭是在适当的（斜）域 C 或 H 中进行的 .

注记 1.8. 在列出的例子中，$C^4_{8,2}$ 不是面积极小化子，而 $C^4_{32,4}$ 根据定理 1.5 是面积极小化子。对于$C^4_{16,4}$ ，它是否使面积达到最小仍是一个开问题——事实上，$C^4_{16,4}$ 是族 $C^4_{m,n}$ 中唯一一个尚不清楚是否为面积极小化子的锥（参见正文中的注记 4.13）。

文章结构

第 2 节回顾后文将用到的预备定义和事实。第 3 节证明约化定理。第 4 节将这些约化定理应用于多项式调和映射，并证明定理 1.5。

在 A 节中，我们证明：对于 (M, g) 这一黎曼流形， $x \in M$，以及 $V \subset T_xM$ 这一向量子空间，存在一个极小子流形 B ，它属于 M ，且满足 $x \in B$ 和 $T_xB = V$。这是黎曼几何中的一个标准事实，我们需要用它来证明定理 1.2，但一直未能找到明确的参考文献。

致谢

本项目由欧盟资助（ERC启动资助 101116001 – COMSCAL）。然而，所表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧洲研究理事会的立场。欧盟和资助机构均不对此承担责任。

本文包含作者在明斯特大学博士论文的成果。作者衷心感谢德国研究基金会（德国研究基金会，

德国研究联合会）——德国卓越战略 EXC 2044 390685587，明斯特数学：动力学-几何-结构。

2. 预备知识

本节回顾我们将用到的基本定义及其关系。关于调和态射的一般理论及相关文献综述，我们推荐参阅书籍 [BW03] 以及定期更新的在线书目 [Gud]。

定义 2.1。 两个黎曼流形之间的映射 $\varphi\colon (M,g) \to (N,h)$ 称为调和态射，如果对每个 $U \subseteq N$ 开集以及每个 $f\colon U \to \mathbb{R}$ 调和函数，其复合映射 $f \circ \varphi\colon \varphi^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ 仍为调和函数。

最初，这类映射是在 Brelot 调和空间的位势论框架下研究的 [CC65]。几何理论始于以下由 Fuglede 和 Ishihara 分别独立得到的定理：

定理 2.2 ([Fug78, Ish79])。 映射 $\varphi\colon (M,g) \to (N,h)$ 是调和态射，当且仅当它既是弱水平共形映射，也是调和映射。

现在我们定义定理 2.2 中出现的术语。

定义 2.3。 设 $\varphi\colon (M,g) \to (N,h)$ 是两个黎曼流形之间的光滑映射。

1. 若对所有点 $x \in M$，都有 $d\varphi(x) = 0$，或者 $d\varphi(x)$ 将水平空间 $\ker(d\varphi)^{\perp}$ 共形地映到 $T_{\varphi(x)}N$，则称 φ 是弱水平共形的。

2. 若 φ 是能量泛函 $\varphi \mapsto E_2(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M \|d\varphi\|^2 \, d\mathrm{Vol}_g$ 的驻点，则称其为调和的。这里，$\|d\varphi\|^2 = \mathrm{Tr}(d\varphi^T d\varphi)$ 表示$d\varphi$的希尔伯特-施密特范数。

注 2.4. 1. 若 $\varphi\colon (M,g) \to (N,h)$ 是弱水平共形的，则存在一个函数 $\lambda\colon M \to \mathbb{R}$，称为保角因子，使得对于所有水平向量 $v, w \in \ker(d\varphi)^{\perp}$，都有 $\lambda^2 g(v,w) = h(d\varphi\, v, d\varphi\, w)$。

2. 若 e_i 表示 M 上的局部标准正交标架，则 $\varphi\colon (M,g) \to (N,h)$ 是调和的，当且仅当张力场

$$\tau(\varphi) := \mathrm{Tr}(\nabla d\varphi) = \sum_i \nabla^{\varphi^*}_{e_i}(d\varphi(e_i)) - \sum_i d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i) \tag{1}$$

为零。此处， ∇^{φ^*} 表示拉回到 $\varphi^*(TN)$ 上的 N 的 Levi-奇维塔联络，而 ∇^M 表示 M 的 Levi-奇维塔联络。

我们还将用到另一个相关算子，即 p-张力场。它推广了张力场，是泛函 $E_p(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M \|d\varphi\|^p \, d\mathrm{Vol}_g$ 的变分。

定义 2.5. 设 $\varphi\colon (M,g) \to (N,h)$ 是黎曼流形之间的光滑映射，且 $p \in \mathbb{R}_{>0}$。φ 的 p-张力场 是 $\varphi^*(TN)$ 中由下式给出的截面：

$$\tau_p(\varphi) := \|d\varphi\|^{p-2}(\tau(\varphi) + (p-2)d\varphi(\nabla \ln \|d\varphi\|)). \tag{2}$$

下面给出调和态射的一些基本例子。

例 2.6. 1. 具有极小纤维的黎曼浸没是调和态射。经典例子包括 Hopf纤维化 $S^{2m-1} \to S^m$, $m \in \{1,2,4,8\}$、李群 G 配备双不变度量时，对其闭子群 $H \subset K$ 的商映射 $G/H \to G/K$，以及投影 $(TM, g_{\mathrm{Sasaki}}) \to (M,g)$，其中 (M,g) 是一个黎曼流形，而 g_{Sasaki} 是切丛上的佐佐木度量。

2. 对于 (M,g)、(N,h) 这两个黎曼流形，以及 $f\colon M \to \mathbb{R}$ 光滑的情形，扭曲积 $(M \times N, g + f^2 h) \to (N,h)$ 的投影是一个调和态射。经典例子包括到射影空间 $\mathbb{K}^{m+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{KP}^m$ 的商映射，其中 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}\}$，以及投影 $S^{m+1} \setminus \{(\pm 1, 0, \ldots, 0)\} \to S^m$ 到各纬线的映射。

存在许多专门的例子和构造。在第 4 节中，我们将使用多项式调和映射来应用我们的约化定理。这些构成了调和态射中一个丰富且重要的类别，另见 [BW03]第 5 章。陪域为 $\mathbb{R}^2$ ($\cong \mathbb{C}$) 和 $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ 的情形截然不同。

多项式调和映射在调和态射的一般理论中具有特殊作用，因为一般调和态射在其临界点处可由多项式调和映射建模：

定理2.7 ([Fug78])。设 $\varphi\colon (M,g) \to (N,h)$ 是一个调和态射，在 M 的任何连通分支上都不恒定。设 $x \in M$ 是 φ 的一个临界点，则 φ 在 x 处的阶有限，且 φ 在 x 处的主符号是一个齐次多项式调和映射$T_xM \to T_{\varphi(x)}N$。

本文将研究二次多项式调和映射，其分类见 Ou 和 Wood 的工作 [OW96、Ou97]。陪域为 $\mathbb{R}^n$ 的例子很少，

$n \geq 3$，且次数为 $d \geq 3$ 的例子也鲜为人知，不过可以利用 Clifford 系统进行一些一般性构造。

我们以关于到欧几里得空间的调和映射的以下结论结束本节：

定理 2.8 ([ABB99])**.** *1.* 若 $n \geq 3$，则每个从 R^m^m 到 R^m^{n}的调和态射都是多项式映射。

2. 若 $n \geq 2$，则每个弱水平共形多项式映射 P: R^m$^m \to$ R^m^n 都是调和的，因而是调和态射。

引理 2.9 ([Fug78])**.** 设 φ: $(M, g) \to$ R^m^n 光滑。那么，$\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ 弱水平共形，当且仅当

$$\langle \nabla\varphi_i(x), \nabla\varphi_j(x) \rangle = \delta_{ij} \left\| \nabla\varphi_i(x) \right\|^2$$

对所有 $i, j \in \{1, ..., n\}$ 均成立。

3. 约化定理

为了证明引言中给出的约化定理，我们首先定义映射在某点一阶弱水平共形的含义：

定义 3.1. 设 (M, g)、(N, h) 是两个黎曼流形，$x \in M$。若淹没映射 φ: $M \to N$ 满足以下条件，则称其在 x 处一阶弱水平共形：对于第一基本形式 $\varphi^*(h)$ 的所有非零特征值 $\lambda_1, ..., \lambda_n$，有：

$$\lambda_1(x) = ... = \lambda_n(x), \qquad \nabla\lambda_1(x) = ... = \nabla\lambda_n(x). \tag{3}$$

这一概念导出了一个无穷小 Koszul 型公式，该公式由 Gudmundsson [Gud92], 提出，用于关联 M 与 N 的 Levi-奇维塔联络。下面给出该公式，并为求完整起见附上证明。

命题 3.2 ([Gud92])。设(M, g)、(N, h) 为黎曼流形，φ： $M \to N$ 为淹没映射。设 X、Y、Z 是 N 上的向量场，并记它们在 M 上的水平提升分别为 $\widehat{X}$、$\widehat{Y}$、$\widehat{Z}$。那么，在 $x \in M$ 处，只要 φ 是一阶弱水平共形的，便有：

$$h(\nabla^N_X Y, Z) = \lambda^2 \, g(\nabla^M_{\widehat{X}} \widehat{Y}, \widehat{Z}) + \widehat{X}(\ln\lambda)\, h(Y, Z) + \widehat{Y}(\ln\lambda)\, h(X, Z) - \widehat{Z}(\ln\lambda)\, h(X, Y), \tag{4}$$

其中， ∇^M、∇^N分别表示 M、N上的 *Levi*-奇维塔联络，而 λ表示 φ 在 x处的共形因子。

证明。 假设 φ 在 $x \in M$ 处一阶弱水平共形，即第一基本形式 $\varphi^*(h)$ 的一阶喷射与 $\lambda^2 g \circ \mathcal{H}$ 一致，其中 $\mathcal{H}$ 表示到水平丛的正交投影（参见定义 3.1）。注意， $X = d\varphi(X)$, $Y = d\varphi(Y)$, $Z = d\varphi(Z)$, 于是有 x 处:

$$X(h(Y,Z)) \circ \varphi = \widehat{X}(\varphi^*(h)\,(\widehat{Y},\widehat{Z})) = \widehat{X}(\lambda^2 g(\widehat{Y},\widehat{Z})) = \widehat{X}(\lambda^2) g(\widehat{Y},\widehat{Z}) + \lambda^2 \widehat{X}(g(\widehat{Y},\widehat{Z}))$$

其他复合映射也有类似的表达式。对∇^N 应用 Koszul 公式，得到:

$$\begin{aligned}
2h(\nabla^N_X Y, Z) =& X(h(Y,Z)) + Y(h(X,Z)) - Z(h(X,Y)) + h([X,Y],Z) - h([X,Z],Y) - h([Y,Z],X) \\
=& \lambda^2 \left(\widehat{X}(g(\widehat{Y},\widehat{Z})) + \widehat{Y}(g(\widehat{X},\widehat{Z})) - \widehat{Z}(g(\widehat{X},\widehat{Y})) + g([\widehat{X},\widehat{Y}],\widehat{Z}) - g([\widehat{X},\widehat{Z}],\widehat{Y}]) - g([\widehat{Y},\widehat{Z}],\widehat{X} \right) \\
& + 2\widehat{X}(\ln\lambda)\lambda^2 g(\widehat{Y},\widehat{Z}) + 2\widehat{Y}(\ln\lambda)\lambda^2 g(\widehat{X},\widehat{Z}) - 2\widehat{Z}(\ln\lambda)\lambda^2 g(\widehat{X},\widehat{Y}) \\
=& 2\lambda^2 g(\nabla^M_{\widehat{X}} \widehat{Y}, \widehat{Z}) + 2\widehat{X}(\ln\lambda) h(Y,Z) + 2\widehat{Y}(\ln\lambda) h(X,Z) - 2\widehat{Z}(\ln\lambda) h(X,Y),
\end{aligned}$$

这就是所需的关系。 □

推导约化结论所需的关键无穷小计算如下:

引理 3.3。 设 (M, g)、(N, h) 为黎曼流形， $\varphi\colon M \to N$为淹没映射，$B \subset N$ 为余维 p 子流形。假设 φ 在 $x \in \varphi^{-1}(B)$ 处一阶弱水平共形，则对所有满足 $Z \perp T_{\varphi(x)}B$ 的 $Z \in T_{\varphi(x)}N$:

$$h\left(\frac{\tau_p(\varphi)\,(x)}{\|d\varphi\|^{p-2}}, Z\right) = h(d\varphi(H_{\varphi^{-1}(B)}), Z) - h(\lambda^2 H_B, Z), \tag{5}$$

其中， λ 是 φ 在 x 处的保角因子， H_B和$H_{\varphi^{-1}(B)}$ 分别表示 B和 $\varphi^{-1}(B)$ 在 $\varphi(x)$处的平均曲率。 x $\tau_p(\varphi)(x)$ 是 φ 在 x处的 p-张力场，回顾公式 *(2)*。

证明。 设 $y = \varphi(x)$, 令

- v_1, ..., v_{m-n}是纤维 $T_x\varphi^{-1}(\{y\})$的一组标准正交基。$\frown$ $\frown$
- $b_1, ..., b_{n-p}$ T_yB的标准正交基，以及 $b_1, ...b_{n-p}$它们在$T_x\varphi^{-1}(B)$中的水平提升。

- $p_1, ..., p_p$ (T_yB)的标准正交基$^\perp$ 以及 $\widehat{p}_1, ..., \widehat{p}_p$ 它们在 T_xM中的水平提升 .

注意

$$v_1, ..., v_{m-n}, \lambda\widehat{b}_1, ..., \lambda\widehat{b}_{n-p}, \lambda\widehat{p}_1, ..., \lambda\widehat{p}_p$$

是 T_xM 的标准正交基。对于与 B 正交的 Z，我们用 $\sim Z$ 表示其水平提升。根据张力场 τ 的定义（回忆方程 (1)）：

$$\begin{aligned} h(\tau(\varphi), Z) &= h(\sum_i \nabla^{\varphi^*}_{\lambda\widehat{b}_i} \lambda b_i + \sum_i \nabla^{\varphi^*}_{\lambda\widehat{p}_i} \lambda p_i - d\varphi(\sum_i \nabla^M_{v_i} v_i + \sum_i \nabla^M_{\lambda\widehat{b}_i} \lambda\widehat{b}_i + \sum_i \nabla^M_{\lambda\widehat{p}_i} \lambda\widehat{p}_i), Z) \\ &= h(\sum_i \nabla^{\varphi^*}_{\lambda\widehat{b}_i} \lambda b_i + \sum_i \nabla^{\varphi^*}_{\lambda\widehat{p}_i} \lambda p_i, Z) - \lambda^2 g(\sum_i \nabla^M_{v_i} v_i + \sum_i \nabla^M_{\lambda\widehat{b}_i} \lambda\widehat{b}_i + \sum_i \nabla^M_{\lambda\widehat{p}_i} \lambda\widehat{p}_i, \widehat{Z}). \end{aligned} \tag{6}$$

这里，∇^{φ^*} 表示 ∇^N 到 φ^* 的拉回联络（TN）。注意 $Z \perp b_i$，因此

$$h(\sum_i \nabla^{\varphi^*}_{\lambda\widehat{b}_i} \lambda b_i, Z) = \lambda^2 h(\sum_i \nabla^N_{b_i} b_i, Z) = -\lambda^2 h(H_B, Z).$$

此外，由于 $\widehat{Z}$ 与 φ^{-1} 正交（B），有:

$$\lambda^2 g(-\sum_i \nabla^M_{v_i} v_i - \sum_i \nabla^M_{\lambda\widehat{b}_i} \lambda\widehat{b}_i, \widehat{Z}) = \lambda^2 g(H_{\varphi^{-1}(B)}, \widehat{Z}) = h(d\varphi(H_{\varphi^{-1}(B)}), Z).$$

方程 (6) 右边还有两项尚未计算。对于这两项，我们首先注意到:

$$h(\sum_i \nabla^{\varphi^*}_{\lambda\widehat{p}_i} \lambda p_i, Z) - \lambda^2 g(\sum_i \nabla^M_{\lambda\widehat{p}_i} \lambda\widehat{p}_i, \widehat{Z}) = \lambda^2 h(\sum_i \nabla^N_{p_i} p_i, Z) - \lambda^2 \cdot \lambda^2 g(\sum_i \nabla^M_{\widehat{p}_i} \widehat{p}_i, \widehat{Z}).$$

在最后的计算中，我们应用命题 3.2，得到:

$$\begin{aligned} -\lambda^4 g(\sum_i \nabla^M_{\widehat{p}_i} \widehat{p}_i, Z) &= -\lambda^2 h(\sum_i \nabla^N_{p_i} p_i, Z) + 2\sum_i \lambda^2 \widehat{p}_i(\ln\lambda) h(p_i, Z) - \lambda^2 \widehat{Z}(\ln\lambda) \sum_i h(p_i, p_i) \\ &= -\lambda^2 h(\nabla^N_{p_i} p_i, Z) - (p-2) h(d\varphi(\nabla \ln\lambda), Z). \end{aligned}$$

这里我们利用了 $\lambda\widehat{p}_i(\lambda) h(p_i, Z) = g(\nabla \ln\lambda, \lambda\widehat{p}_i)\lambda^2 g(\lambda\widehat{p}_i, \widehat{Z})$。对 i 求和，得到$\lambda^2 g(\nabla \ln\lambda, \widehat{Z})$，因为 $\widehat{Z}$是这些 $\lambda\widehat{p}_i$的线性组合。

将 (6) 中的所有项合并后，得到:

$$h(\tau(\varphi)(x) + (p-2) d\varphi(\nabla \ln\lambda)(x), Z) = h(d\varphi(H_{\varphi^{-1}(B)}), Z) - h(\lambda^2 H_B, Z),$$

这就是所求的恒等式 (5)。 □

现在我们证明定理 1.2。

定理 *1.2* 的证明。 蕴含关系 (i) $\Longrightarrow$ (ii) 直接由引理 3.3 的方程 (5) 得出。类似地，(ii) $\Longrightarrow$ (i) 由引理 3.3 以及如下事实得出：对任意$y \in N$ 以及任意向量子空间 $V \subset T_y N$，存在极小子流形 $B \subset N$，满足$y \in B$ 和 $T_y B = V$。

□

注记 3.4. N 的任意切空间均可实现为某个极小子流形的切空间这一（纯局部的）陈述，是黎曼几何中的一个标准事实，尽管我们未能找到关于这一陈述的明确文献。它由巴拿赫空间隐函数定理得出，类似于证明在一点处具有给定导数的调和函数的存在性，例如参见 [BW03] 的附录 A.1、引理 A.1.1，或 [Bes08] 中附录 K、定理 45 附近的讨论。为方便读者，我们在附录中给出一个证明。

注意，下述约化型定理是引理 3.3 中方程(5)的直接推论：

定理 3.5. 设 (M, g)、(N, h) 为黎曼流形，$\varphi\colon M \to N$ 为淹没映射，且$B \subset N$ 是余维为 p 的子流形。假设 φ 在所有 $x \in \varphi^{-1}(B)$ 处一阶水平共形，则下列三者中任意两者蕴含第三者：

(i) $\tau_p(\varphi)(x) \in T_{\varphi(x)} B$ *for all* $x \in \varphi^{-1}(B)$.

(ii) B 在 N 中是极小的。

(iii) $\varphi^{-1}(B)$ 在 M 中是极小的。

现在，定理 1.4 由 τ_p 的定义得出：

定理 *1.4* 的证明。 回顾 $\tau_p(\varphi) = \|d\varphi\|^{p-2}(\tau(\varphi) + (p-2) d\varphi(\nabla \ln \|d\varphi|))$。若 φ 是调和态射，则对 $p \neq 2$ 有 $\tau(\varphi) = 0$，且 $\tau_p(\varphi)$ 与 $d\varphi(\nabla \|d\varphi\|^2)$ 成比例。于是定理 1.4 由定理 3.5 得出。 □

4. 示例：$\mathbb{R}^m$ 的面积极小锥

在本节中，我们将应用第3节的结果，以生成极小子流形的有趣例子。为此我们将考虑的调和映射将

是二次齐次多项式，由Ou与Wood [OW96、Ou97]分类。决定这些映射的数据本质上由所谓的*Clifford* 系统给出。在任意余维下将极小锥拉回为极小锥的相关二次多项式调和映射类，是脐点型 的那些。通过脐点型二次调和态射 P: $\mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^n$拉回 $P^{-1}(V)$（其中$V \subset \mathrm{R}^n$ 为一个向量子空间），可恢复极小子流形的经典族，即 S^{m-1} [FKM81]的FKM等距超曲面叶状分解之焦点簇上的锥。

我们在第 4.1 节展开上一段的评述，而主要部分将是在第 4.2 节构造 R^m 中一族新的余维 1 面积极小锥。这些锥是通过拉回西蒙斯锥

$$S_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \|x\|^2 = \|y\|^2\}$$

由脐点型二次调和态射 P: $\mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^{2n}$ 得到的。我们证明，若 $m \geq 32$且 $2n \geq 8$ ，则这些奇异锥是面积极小者，参见定理 4.11。

4.1. 脐点型多项式调和映射

定义 4.1. 我们称齐次多项式调和映射 P: $\mathrm{R}^m \to$$\mathrm{R}^n$ 是脐点型 的，如果存在函数 η: $\mathrm{R}^m \to \mathrm{R}$，使得

$$dP(\nabla \|dP\|^2 (x)) = \eta(x)\, P(x)$$

对所有 $x \in$$\mathrm{R}^m$ 成立。

定理 1.4 的一个直接应用，也是我们给出这一定义的动机，在于脐点型调和态射将极小锥拉回为极小锥：

推论 4.2. 设 P: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 是一个脐点型齐次多项式调和态射。

1. 对任意极小锥形子流形 $C \subset \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ ，其原像 $P^{-1}(C) \subset \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$是一个极小锥形子流形。*2.* 对任意 S^{n-1} 中的极小子流形 $B \subset S^{n-1}$ ，其拉回 $P^{-1}(\mathbb{R}_{>0} \cdot B) \cap S^{m-1}$是 S^{m-1}中的极小子流形。

证明。 注意到 $dP(\nabla \|P\|^2(x)) = \eta(x) \cdot P(x)$ 与径向向量成比例，而径向向量始终与任意锥相切，因此第 1 点由定理 1.4 得出。第 2 点则由以下事实得出

注意到子流形 $B \subset S^{n-1}$ 在 S^{n-1} 中是极小的，当且仅当锥 $\mathrm{R}_{>0} \cdot B$ 在 R^n中是极小的。 □

注4.3。推论 4.2 中第 2 点的子流形 $P^{-1}(\mathrm{R}_{>0} \cdot B) \cap S^{m-1}$ 不一定是闭的，即使 B 是闭的。

我们希望应用推论 4.2 来生成一些有趣的极小锥实例。接下来，我们将简要介绍二次脐点型多项式调和映射的分类。为求完整，我们附上一个简短的证明。

定义 4.4。对称实 $(m \times m)$ 矩阵的元组 $(A_1, \ldots, A_n)$ 称为 R^m 上的*Clifford* 系统，若

$$A_i A_j + A_j A_i = 2\delta_{ij} \mathbb{1}_{m\times m}$$

对所有 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ 均成立。

注4.5。Clifford 系统已由 ABS64、FKM81] 分类。对于给定的 n ，R^n 上的每个 Clifford 系统都是若干不可约Clifford 系统的直和 $(\bigoplus_\ell A_1^{(\ell)}, \ldots, \bigoplus_\ell A_n^{(\ell)})$。若 $n \not\equiv 1$ 模 4，则恰有一个不可约 Clifford 系统（在 R^m 的等距共轭意义下）。若 $n \equiv 1$ 模 4，则恰有两个，且它们的维数相同。

In 表 1 下方列出了 R^n 上不可约 Clifford 系统的维数 $m(n)$。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$	$n+8$
$\underline{m}(n)$	1	2	4	8	8	16	16	16	$\cdots$	$16\,\underline{m}(n)$

表 1： 不可约 Clifford 系统的维数。文献中通常采用的约定是改为列表中相关的量 $\delta(n) = \frac{1}{2}m(n+1)$。 ⁻—

定理 4.6 ([OW96,Ou97])。 设 $P\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 是一个次数为 2 的齐次多项式调和映射。那么 P 是 *Clifford* 系统的加权和。也就是说，在定义域的一个等距变换下：

$$\mathbb{R}^m = \bigoplus_{\ell=1}^{k} \mathbb{R}^{m_\ell} \oplus \mathbb{R}^{m_0}, \qquad P((x_1, \ldots, x_k), x_0) = \sum_\ell \lambda_\ell \left(\langle x_\ell, A_1^{(\ell)} x_\ell \rangle, \ldots, \langle x_\ell, A_n^{(\ell)} x_\ell \rangle \right)$$

对于 $(A_1^{(\ell)}, \ldots, A_n^{(\ell)})$ 上的 *Clifford* 系统，$\mathbb{R}^{m_\ell}$和 $\lambda_\ell > 0$。 P是脐点型，当且仅当所有权重 λ_ℓ 都相同。

*Pr*哎。 由于 P 是齐次二次多项式，因此存在对称矩阵 s

A_1，.....， $A_n \in M_{m\times m}$(R) 使得

$$P(x) = (\langle x, A_1 x\rangle, ..., \langle x, A_n x\rangle).$$

若 P_i 表示 P的第 i个分量，则 P 为弱水平共形的条件意味着 $\langle \nabla P_i, \nabla P_j\rangle = \delta_{ij}\|\nabla_i P\|^2$，参见引理 2.9。由于 A_i 是对称的，这意味着

$$\langle x, \frac{1}{2}(A_i A_j + A_j A_i)x\rangle = \langle A_i x, A_j x\rangle = \delta_{ij}\langle x, A_i^2 x\rangle$$

对所有 $x \in$R^m，即

$$A_i A_j + A_j A_i = 2\delta_{ij}\, A_i^2 \tag{7}$$

对所有 $i, j \in \{1, ..., n\}$。设 $\lambda_1^2, ..., \lambda_k^2$ 为A_i^2的非零特征值， $E_1, .., E_k$ 为相应的特征子空间。注意，由于对所有 i, j有 $A_i^2 = A_j^2$，该分解不依赖于 i 。于是每个 A_i 分解为直和 $A_i = \bigoplus_\ell \lambda_\ell A_i^{(\ell)}$，其中 $A_i^{(\ell)}$ 是 E_ℓ的对称自同态。于是方程(7)变为

$$A_i^{(\ell)} A_j^{(\ell)} + A_j^{(\ell)} A_i^{(\ell)} = 2\delta_{ij}\,\mathrm{id}_{E_\ell},$$

由此可得该定理的第一部分。第二部分由

$$dP_i(\nabla\|\nabla P_i\|^2)\,(x) = 8\sum_\ell \lambda_\ell \langle x, (A_i^{(\ell)})^3 x\rangle = 8\sum_\ell \lambda_\ell^3 \langle x, A_i^{(\ell)} x\rangle.$$

用 $P_i(x) = \sum_\ell \lambda_\ell \langle x, A_i^{(\ell)} x\rangle$ 取商后，所得函数与 i 无关，当且仅当 λ_ℓ 全都相同。

□

例 4.7. 考虑 4×4 矩阵:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

那么 8×8 矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{4\times 4} \\ \mathbb{1}_{4\times 4} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ -B_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ -B_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & B_3 \\ -B_3 & 0 \end{pmatrix},$$

form 个 R^8 上的 Clifford 系统。相应的二次调和态射 R$^8 \to$R^4 是 ,

在对定义域和陪域进行等距同构后，等价于两个四元数的乘法 $\mathrm{H}\oplus\mathrm{H}\to\mathrm{H}$，$(x,\ y)\mapsto 2x\cdot_{\mathrm{H}} y$。

4.2. 二次调和映射所生成的极小子流形

我们简要说明，通过脐点型二次调和映射拉回向量子空间 $V\subset\mathbb{R}^n$，可以得到经典极小锥。为简单起见，我们假设该调和映射是满的：

定义 4.8. 若映射 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 满足

$$\operatorname{span}\{(\nabla\langle f,v\rangle)(x)\mid x\in\mathbb{R}^m,v\in\mathbb{R}^n\}=\mathbb{R}^m,$$

即 f 不通过 $\mathbb{R}^m$ 的任何向量子空间分解。

命题 4.9. 设 $V\subset\mathbb{R}^n$ 是一个维数为 k 的向量子空间，且 $P:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 是一个满的脐点型二次调和态射。那么 $P^{-1}(V)\cap S^{m-1}$ 是 S^{m-1} 中余维为 $n-k$ 的闭极小子流形。

证明. $P^{-1}(V)\setminus\{x\in\mathbb{R}^m\mid\|dP\|^2(x)=0\}$ 根据定理 1.4 是一个极小子流形。由于 P 是满的，根据定理 4.6 有 $\|dP\|^2(x)=0$ 当且仅当 $x=0$（回忆一下，A_i 可逆）。于是，$P^{-1}(V)\setminus\{0\}$ 是一个极小锥形子流形，其闭包为 $P^{-1}(V)$。由此可得，$P^{-1}(V)\cap S^{m-1}$ 是一个闭极小子流形。 □

注记 4.10。注意，如果 $n\geq 2$，那么根据表 1，m 总是偶数。我们假设情况如此，则：

1. 如果 $\dim(V)=m-1$，那么 $P^{-1}(V)$ 与西蒙斯锥 $S_{m/2}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{m/2}\oplus\mathbb{R}^{m/2}\mid\|x\|^2=\|y\|^2\}$ 全等。如果 $m\geq 8$，那么 $S_{m/2}$ 是 $\mathbb{R}^m$ [中的一个面积极小锥（BDGG69]）。2. 如果 $\dim(V)=m-2$，那么 $P^{-1}(V)$ 与复二次曲面全等，即为 $\mathbb{R}_{>0}\cdot V_2(\mathbb{R}^{m/2})$ 上的二帧斯蒂费尔流形 $V_2(\mathbb{R}^{m/2})=\{(x,y)\in S^{m/2-1}\times S^{m/2-1}\mid\langle x,y\rangle=0\}$ 所构成的锥。这始终是 $\mathbb{R}^m$ 中的面积极小锥，因为它由凯勒形式的某个幂校准。另见 [JXC24]，其中给出了运用 Lawlor 曲率判据 [Law91]的证明。3. 更一般地，$P^{-1}(V)$ 是 $\mathbb{R}_{>0}\cdot M_+$ 中某个 FKM 型 [FKM81]等距超曲面叶状分解的焦流形所构成的锥。

现在给出本节的主要定理。

定理 4.11. 设 $m \geq 32$ 和 $n \geq 4$。对于 $A_1, \ldots, A_{2n} \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ 一个 *Clifford* 系统，锥

$$C^4_{m,n} := \left\{ x \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \langle x, A_i x\rangle^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, A_{n+i} x\rangle^2 \right\}$$

是 *R*^m 中的面积极小超曲面。

注 4.12。 定理 4.11 中定义的锥 $C^4_{m,\ n}$ 等于 $P^{-1}(S_n)$，即西蒙斯锥 $S_n = \{(x,\ y) \in \mathrm{R}^n \oplus \mathrm{R}^n \mid \|x\|^2 = \|y\|^2\}$ 在全脐二次调和态射 P: $\mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^{2n}$ 下的拉回。因此，$C^4_{m,\ n}$ 在 $C^4_{m,\ n} \setminus P^{-1}(\{0\})$ 的所有点处的平均曲率均为零，无论 $(m,\ n)$ 的取值如何。

注 4.13。 1. $P^{-1}(S_n)$ 的奇异集为 $P^{-1}(\{0\})$，其维数为 $m - 2n$。由于 R^m 中一个面积极小超曲面的奇异集维数至多为 $m - 8$ [Fed70], ，定理 4.11 中的条件 $n \geq 4$ 显然是 $P^{-1}(S_n)$ 成为面积极小化子的必要条件。

2. 存在 Clifford 系统 $A_1, \ldots, A_{2n} \in M_{m\times m}$(R) 当且仅当对某个 $k \in$ N 有 $m = \underline{k}\, m(2n)$，此处 $m(2n)$ 是表 1 中的数。由于若 $n \geq 5$，则 $m(2 \cdot 4) = 16$ 且 $m(2n) \geq 32$ ，因此定理 4.11 穷尽了除 $(m, n) = (16,4)$ 之外的所有可能性。

证明定理 4.11 的最简单方法是使用次校准法。该方法由 De Philippis 与 Paolini [DPP09] 提出，用以给出西蒙斯锥是面积极小的一个简单证明。为方便读者，我们在下文第 4.3 节简要回顾相关定义与定理。证明随后在第 4.4 节给出。

4.3. 次校准法

定义 4.14。 设 $\Omega \subset \mathrm{R}^m$ 为开集，且 $E \subset \Omega$ 为开集。

1. E 在 Ω 中的周长 为

$$P(E, \Omega) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div}(g) \;\middle|\; g \in C^1_c(\Omega \to \mathbb{R}^m), \sup_x \|g(x)\| \leq 1 \right\}$$

2. E 若对所有有界开集 $A \subseteq \Omega$ 都有，则称其为极小

$$P(E \cap A, \Omega \cap A) \leq P(F \cap A, \Omega \cap A) \quad \text{whenever } (F \cup E) \setminus (F \cap E) \Subset A.$$

3. E 若对所有有界开集 $A \subseteq \Omega$ 都有，则称其为次极小

$$P(E \cap A, \Omega \cap A) \leq P(F \cap A, \Omega \cap A) \quad \text{whenever } F \subseteq E,\ E \setminus F \Subset A.$$

4. 设 ∂E 具有 C^2 正则性。向量场 $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ 称为 E 的次校准，如果

(i) 对所有 $x \in \partial E$， $\xi(x)$ 等于 ∂E 的外法向量。

(ii) 对所有 $x \in E$， $\operatorname{div}(\xi)(x) \leq 0$。

(iii) 对所有 $x \in \Omega$， $\|\xi(x)\| \leq 1$。

注记 4.15. E 是次极小的，当且仅当 ∂E 相对于取值于集合 E内的变分（即向内变分）是面积极小的。

定理 4.16 ([DPP09])。设 $E \subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ 是开集。

1. E 按照定义 *4.14* 的意义是极小的，当且仅当 ∂E 是Ω中的面积极小化子。*2.* 若 E 和$\Omega \setminus E$ 是次极小的，则 E 是极小的。*3.* 设 ∂E 具有 C^2 正则性，且 E 存在次校准，则 E 是次极小的。*4.* 设 $E_k \subset E$ 是一个满足 $E_k \xrightarrow{L^1_{loc}} E$的序列，这意味着对于所有有界的 A， $A \cap (E \setminus E_k)$ 的测度收敛到0。若 E_k 均为次极小的，则 E 是次极小的。

4.4. 定理 4.11 的证明

我们按如下方式进行：设 $s: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \|x\|^2 - \|y\|^2$ 使得 $S_n = s^{-1}(\{0\})$ 为西蒙斯锥。存在一个脐点二次调和态射 $P: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{2n}$ 使得 $C^4_{m,n} = (s \circ P)^{-1}(\{0\})$，如注释 4.12 中所说明。我们现在考虑函数

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \qquad x \mapsto \|P(x)\|^{1/2} \|x\|^2 (s \circ P)(x).$$

第一步是证明:

引理 4.17. 设 $m \geq 32$, $n \geq 4$。则 $\frac{1}{\|\nabla f\|} \nabla f$ 是.....的子校准

$$\{f < -\epsilon\} := \{x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) < -\epsilon\}$$

在 $\Omega = \mathbb{R}^m \setminus P^{-1}(\{0\})$。

证明。显然，$\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ 在 $\partial\{f<-\epsilon\}=\{f=-\epsilon\}$ 和$\|\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\|\leq 1$上处处等于外法向量。还需验证散度$(\frac{1}{\|\nabla f\|}\nabla f)\leq 0$在 $\{f<-\epsilon\}$上。为计算这一点，我们首先注意到

$$\operatorname{div}(\frac{1}{\|\nabla f\|}\nabla f)=\frac{\|\nabla f\|^2\Delta(f)-\frac{1}{2}\langle\nabla\|\nabla f\|^2,\nabla f\rangle}{\|\nabla f\|^3}. \tag{8}$$

回顾一下，对于某个 Clifford 系统 $A_1,...,A_{2n}$，$P(x)=(\langle x,A_1x\rangle,....,\langle x,A_{2n}x\rangle)$。现在我们断言：

$$\begin{aligned}
&\|\nabla(s\circ P)(x)\|^2=16\|P(x)\|^2\|x\|^2, && \left\|\nabla\|P\|^2(x)\right\|^2=16\|P(x)\|^2\|x\|^2,\\
&\langle\nabla(s\circ P)(x),\nabla\|P\|^2(x)\rangle=16\|x\|^2(s\circ P)(x), && \|\nabla\|x\|^2\|^2=4\|x\|^2,\\
&\langle\nabla(s\circ P)(x),\nabla\|x\|^2\rangle=8(s\circ P)(x), && \langle\nabla\|P\|^2(x),\nabla\|x\|^2\rangle=8\|P(x)\|^2,\\
&\Delta(s\circ P)(x)=0, && \Delta(\|P\|^2)(x)=8\|x\|^2\cdot 2n,\\
&\Delta(\|x\|^2)=2m. &&
\end{aligned}$$

断言的证明。首先指出，所有涉及与 $\nabla\|x\|^2$ 的标量积的关系都显然成立，因为对于任意齐次函数 F，$dF(\nabla\|x\|^2)=2\deg(F)F$。

其次，有：

$$\begin{aligned}
\nabla\|P\|^2(x)&=\nabla\sum_{i=1}^{2n}P_i(x)^2=2\sum_{i=1}^{2n}P_i(x)\nabla P_i(x),\\
\nabla(s\circ P)&=\nabla\sum_{i=1}^{n}P_i(x)^2-\sum_{i=1}^{n}P_{i+n}(x)^2=2\sum_{i=1}^{n}P_i(x)\nabla P_i(x)-2\sum_{i=1}^{n}P_{i+n}(x)\nabla P_{i+n}(x).
\end{aligned}$$

回顾

$$\langle\nabla P_i(x),\nabla P_j(x)\rangle=4\langle x,A_iA_jx\rangle=2\langle x,(A_iA_j+A_jA_i)x\rangle=4\|x\|^2\delta_{ij}$$

其余的标量积也很容易计算。

由于 s 是调和函数，且 P 是调和态射，$\Delta(s\circ P)=0$ 显然成立。此外：

$$\Delta(\|P\|^2)(x)=\operatorname{div}\left(2\sum_{i=1}^{2n}P_i(x)\nabla P_i(x)\right)=2\sum_{i=1}^{2n}\|\nabla P_i(x)\|^2+\sum_i P_i(x)\Delta(P_i)(x)=8\cdot(2n)\cdot\|x\|^2,$$

最后一个剩余方程也随之成立。由此证明了该命题。

根据这些计算规则，可以手动或借助软件，由方程（8）计算得出，散度（$\frac{1}{\|\nabla f\|}\nabla f$）等于 ——

$$\Big((12n-47)\|x\|^{10}\|P\|^{\frac{9}{2}}+(\frac{33+198n}{8})\|x\|^{10}\|P\|^{\frac{1}{2}}(s\circ P)^2+(2m-41)\|x\|^6\|P\|^{\frac{13}{2}}$$
$$+(\frac{384n+66m-681}{16})\|x\|^6\|P\|^{\frac{5}{2}}(s\circ P)^2+(10+4m)\|x\|^2\|P\|^{\frac{9}{2}}(s\circ P)^2\Big)\cdot\frac{(s\circ P)}{\|\nabla f\|^3}.$$

对于 $m\geq 32$ 和 $n\geq 4$，大括号中的每一项都为正。另一方面，$(s\circ P)$与 f同号，因此在 $\{f<-\epsilon\}$上为负。这就完成了该命题的证明。

□

引理4.18。 $\{f<-\epsilon\}$ 在$\mathbb{R}^m$中是次极小的。

证明。 根据引理4.17 $\{f<-\epsilon\}$ 是次校准的，因此在$\mathbf{R}^m\setminus P^{-1}(\{0\})$中是次极小的。由于 $P^{-1}(\{0\})$是一个余维为 $2n\geq 2$ 的可整流集，因此对于任意开集 $E\subset\Omega$，有

$$P(E,\Omega)=P(E\setminus P^{-1}(\{0\}),\Omega\setminus P^{-1}(\{0\})),$$

因此， E 在Ω中是次极小的，当且仅当 $E\setminus P^{-1}(\{0\})$在$\Omega\setminus P^{-1}(\{0\})$中是次极小的。

□

引理4.19。由于 $\epsilon\to 0$ 有 $\{f<-\epsilon\}\xrightarrow{L^1_{loc}}\{f<0\}$。

证明。 集合 $\{f<-\epsilon\}$ 关于 ϵ 和 $\bigcup_\epsilon\{f<-\epsilon\}=\{f<0\}$是单调的。于是，对任意有限体积的 A，由测度的单调连续性可知 $A\cap(\{f<0\}\setminus\{f<-\epsilon\})$收敛于0。

□

现在我们完成证明:

定理 *4.11* 的证明。结合引理 4.18 和引理 4.19，我们得出 $\{f<0\}$ 是次极小的。与引理 4.17 中一样，可以证明 div($\frac{-\nabla f}{\|\nabla f\|}$) 是 $\{f>\epsilon\}$ 的次校准。重复引理 4.18 和引理 4.19 中的论证，便可进一步得出 $\{f>0\}$ 也是次极小的。由此，定理 4.11 可由定理 4.16 的第 2 点推出。 □

A. 极小子流形的局部存在性

定理 A.1。设 (M, g) 是一个黎曼流形， $p \in M$，且 $V \subset T_xM$ 是一个子向量空间。那么存在一个极小子流形 $B \subset M$，满足 $x \in M$ 和 $T_xB = V$。

该证明本质上与 Fuglede 给出的证明（ [BW03] 附录中的引理 A.1.1）相同，后者表明在黎曼流形的任意一点处存在具有指定导数的调和函数。尽管平均曲率方程是非线性的，且比拉普拉斯算子复杂得多，但二者具有相同的线性化。随后可通过放大程序和巴拿赫空间隐函数定理求得局部解。

我们取如下形式的坐标图

$$B_1(0)_{m-k} \times \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{m-k} \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k$$

从而 p 对应于点 (0,0)，而 V对应于平面 $\mathbb{R}^{m-k} \times \{0\}$。不失一般性，可以假设坐标标架在 (0,0) 处是同步的，即度量为 $g = g_{\text{euc}} + O(\|x\|^2)$ 的形式。

定义 A.2. 1. 设 $\alpha \in (0,1)$， $\ell \geq 2$。我们定义

$$E_1 = \{F \colon B_1(0)_{m-k} \to \mathbb{R}^k \in C^{\ell,\alpha} \mid F(0) = 0, dF(0) = 0, d^2F(0) = 0\},$$
$$E_2 = \{F \colon B_1(0)_{m-k} \to \mathbb{R}^k \in C^{\ell-2,\alpha} \mid F(0) = 0\}.$$

2. 对于 $\epsilon \in (-1, 1)$，我们令 $x \in B_1(0)_{m-k} \times \mathbb{R}^k$，并设 $g_\epsilon(x) := g(\epsilon x)$。

3. 对于 $F \in E_1$，我们令 $\Gamma(F)$ 表示图 $\{(x, F(x)) \mid x \in B_1(0)_{m-k}\}$。对于$\epsilon \in (-1, 1)$，我们令 $H(\epsilon, F) \in E_2$ 表示 $m-k+1$,...,m 个分量，即 $\Gamma(F)$ 关于 g_ϵ 的平均曲率向量的分量。

注记 A.3. 1. 由于 $F(0) = 0$、 $dF(0) = 0$ 对所有 $F \in E_1$ 都成立，因此有 $(0, 0) \in \Gamma(F)$，且$T_{(0,0)}\Gamma(F) = \mathbb{R}^{m-k} \times \{0\}$。条件 $d^2F(0) = 0$ 进一步意味着 $\Gamma(F)$ 的第二基本形式在 $(0, 0)$ 处消失。

2. E_i 在分别赋予由 $B_1(0)_{m-k}$ 的欧几里得度量诱导的 $C^{\ell,\alpha}$ 和 $C^{\ell-2,\alpha}$ 范数后，是巴拿赫空间。

3. 对于 $\epsilon \neq 0$，有 $(B_1(0)_{m-k} \times \mathbb{R}^k, g_\epsilon)$ 与 $(B_{|\epsilon|}(0)_{m-k} \times \mathbb{R}^k, \frac{g}{\epsilon^2})$ 等距同构，因此具有与 $g|_{B_{|\epsilon|}(0)_{m-k} \times \mathbb{R}^k}$ 相同的极小子流形。 g_0 是欧几里得度量。

4. $H\colon (-1,\ 1)\times E_1\to E_2$ 是连续可微的，因为 $H(\epsilon,\ F)(x)$ 由一个依赖于参数 $F(x)$、$dF(x)$、$d^2F(x)$ 和 $g_\epsilon(x,\ F(x))=g(\epsilon x,\ \epsilon F(x))$、$dg_\epsilon$、$d^2g_\epsilon$ 的（复杂）表达式给出。

注意

1. $H(\epsilon,F)=0$ 当且仅当图 $\Gamma(F)$ 关于 g_ϵ 是极小的。

2. 对于常值函数 $\mathbf{0}$，$H(0,0)=0$。

3. 更一般地，若 $H(\epsilon,F)^\alpha$ 表示 $H(\epsilon,F)$ 的 α 分量，则对于 $\alpha\in\{1,..,k\}$ 有

$$H(0,F)^\alpha=\sum_{ij=1}^{m-k}L^{ij}\partial_{ij}F^\alpha-\sum_{abij=1}^{m-k}\sum_{\beta=1}^{k}L^{ij}\partial_{ij}F^\beta F_a^\beta L^{ab}F_b^\alpha,$$

这里，$L=(\mathbb{1}_{(m-k)\times(m-k)}+dF^T\cdot dF)^{-1}$ 是 $\Gamma(F)$ 的第一基本形式。第二个复杂的加项源于平均曲率是通过将 $\sum_{ij}L^{ij}\partial_{ij}F^\alpha\,e_\alpha$ 投影到 $\Gamma(F)$ 的法丛上得到的；这里 e_α 表示 $\mathbf{R}^k$ 的标准基。

4. 记 $D_2H(\epsilon,F)\ K$ 为 H 在点 (ϵ,F) 沿方向 $K\in E_1$ 的盖托导数，则可得：

$$D_2H(0,\mathbf{0})\,K=\sum_{i=1}^{m-k}\partial_{ii}K.$$

利用单位球 $B_1(0)_{m-k}$ 上拉普拉斯算子的格林函数，可以构造拉普拉斯算子 $E_1\to E_2$，$K\mapsto\sum_{i=1}^{m-k}\partial_{ii}K$ 的一个右逆。显式公式可参见 [BW03] 中引理 A.1.1 的证明。正因如此，我们需要空间 $C^{\ell,\ \alpha}$，而不仅仅是 C^ℓ。

E_1 于是它分解为拉普拉斯算子的核与右逆的像的直和，后者也是一个巴拿赫空间。巴拿赫空间隐函数定理表明，方程 $H(\epsilon,\ \cdot)=0$ 在 ϵ 的某个 0 邻域内有解。这些解于是构成 $(B_{|\epsilon|}(0)_{m-k}\times\mathbf{R}^k,\ g)\subset(M,\ g)$ 中的极小 $C^{\ell,\ \alpha}$-子流形。由于黎曼度量是光滑的，根据椭圆正则性，这些流形也是光滑的，参见 [Tay23] 中第 14 章定理 4.4。定理 A.1 得证。

□

参考文献

[ABB99] Rachel Ababou、Paul Baird 和 Jean Brossard。半共形多项式与调和态射。*Math. Z.*，231(3):589–604，1999。[ABBR15] Omid Amini、Matthew Baker、Erwan Brugallé 和 Joseph Rabinoff。调和态射的提升 I：度量化复形与 Berkovich骨架。*Res. Math.Sci.*，2:Art. 7, 67，2015。[ABS64] M. F. Atiyah、R. Bott 和 A. Shapiro。Clifford模。*Topology*，3(suppl):3– 38，1964。[Bai83] Paul Baird。具有对称性的调和映射、调和态射与度量变形，数学研究札记第 87 卷。Pitman（高级出版计划），美国马萨诸塞州波士顿，1983。[BCD79] Alain Bernard、Eddy A. Campbell 和 Alexander M. Davie。布朗运动与广义解析函数和内函数。格勒诺布尔傅里叶研究所年刊，29(1):xvi, 207–228，1979。[BDGG69] E. Bombieri、E. De Giorgi 和 E. Giusti。极小锥与 Bernstein问题。*Invent. Math.*，7:243–268，1969。[BE81] Paul Baird 和 James Eells。调和映射的守恒律。载于几何研讨会，乌得勒支*1980*（乌得勒支，*1980*），数学讲义第 894 卷，第 1–25 页。Springer，柏林—纽约，1981。[Bes08] Arthur L. Besse。*Einstein*流形。数学经典。Springer-Verlag，柏林，2008。1987 年版重印。[BG92] Paul Baird 和 Sigmundur Gudmundsson。 p-调和映射与极小子流形。*Math. Ann.*，294(4):611–624，1992。[BW03] Paul Baird 和 John C. Wood。黎曼流形之间的调和态射，伦敦数学会专著新编第 29 卷。The Clarendon Press，牛津大学出版社，牛津，2003。[CC65] Corneliu Constantinescu 和 Aurel Cornea。调和空间的紧化。*Nagoya Math. J.*，25:1–57，1965。[CFO90] Laszlo Csink、P. J. Fitzsimmons 和 Bernt Øksendal。调和态射的随机刻画。*Math. Ann.*，287(1):1–18，1990。

[Cui26] Hongbin Cui. 关于 $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$ 中的 FKM等参超曲面及新的面积极小锥。预印本, arXiv:2510.14650 [math.DG] (2026), 2026.[DPP09] Guido De Philippis 和 Emanuele Paolini. 西蒙斯锥极小性的一个简短证明。Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, 121:233–241, 2009.[EF01] J. Eells 和 B. Fuglede. 黎曼多面体之间的调和映射, 剑桥数学丛书第 142 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2001。M. Gromov 作序。[EY95] James Eells 和 Paul Yiu. 欧几里得球面之间的多项式调和映射。Proc. Amer. Math. Soc., 123(9):2921–2925, 1995.[Fed70] Herbert Federer. 余维一的面积极小可求长流及任意余维的模二面积极小平坦链的奇异集。Bull. Amer. Math. Soc., 76:767–771, 1970.[FKM81] Dirk Ferus, Hermann Karcher 和 Hans Friedrich Münzner. Clifford代数与新的等参超曲面。Math. Z., 177(4):479–502, 1981.[Fug78] Bent Fuglede. 黎曼流形之间的调和态射。格勒诺布尔傅里叶研究所年刊，28(2):vi, 107–144, 1978.[Gud] Sigmundur Gudmundsson. 调和映射文献目录。https://www.maths.lth.se/matematiklu/personal/sigma/harmonic/bibliography.html.[Gud92] Sigmundur Gudmundsson. 调和映射的几何。博士论文, 利兹大学（纯数学系），1992.[HL71] 项武义和 H. Blaine Lawson, Jr. 低共齐性的极小子流形。J. Differential Geometry, 5:1–38, 1971.[Ish79] Tôru Ishihara. 保持调和函数的黎曼流形映射。J. Math. Kyoto Univ., 19(2):215–229, 1979.[JXC24] Xiaoxiang Jiao, Jialin Xin 和 Hongbin Cui. Stiefel流形上的面积极小锥。Adv. Math. (China), 53(5):929–952, 2024.[Law91] Gary R. Lawlor. 锥为面积极小锥的一个充分判据。Mem. Amer. Math. Soc., 91(446):vi+111, 1991.[LP06] Eric Loubeau 和 Radu Pantilie. Weyl 空间之间的调和映射与扭量映射。Comm. Anal. Geom., 14(5):847–881, 2006.

[LP10] Eric Loubeau 和 Radu Pantilie. Weyl 空间之间的调和映射与扭量映射 II. 格勒诺布尔傅里叶研究所年刊, 60(2):433–453, 2010.[Ou97] Ye-Lin Ou. 二次调和映射与 O-系统。格勒诺布尔傅里叶研究所年刊, 47(2):687–713, 1997.[OW96] Ye-Lin Ou 和 John C. Wood. 欧几里得空间之间二次调和映射的分类。*Algebras Groups Geom.*, 13(1):41–53, 1996.[Pal79] Richard S. Palais. 对称临界性原理。*Comm. Math. Phys.*, 69(1):19–30, 1979.[PT86] Richard S. Palais 和 Chuu-Lian Terng. 极小子流形的变量约化。*Proc. Amer. Math. Soc.*, 98(3):480–484, 1986.[Rie25] Oskar Riedler. 球面上的多项式调和映射与特征族。*Math. Z.*, 311(3):论文第 56 号，25 页，2025.[Tay23] Michael E. Taylor. 偏微分方程 *III*：非线性方程，应用数学科学第 117 卷。Springer, Cham，第三版，2023.[Ura00] Hajime Urakawa. 调和态射及格林核比较定理的离散类比。*Glasg. Math. J.*, 42(3):319–334, 2000.[Wan94] Qi Ming Wang. 关于 $\mathbb{R}^n$中的一类极小超曲面。*Math. Ann.*, 298(2):207–251, 1994.