arXiv:2603.01996v1 [math.FA] 2 Mar 2026

复合半群的强连续性极大子空间

´尼古拉奥斯·查尔穆基斯 和 阿尔瓦罗·米格尔·莫雷诺

Abstract. 设 $(\varphi_t)_{t\geqslant 0}$ 为单位圆盘上的全纯自映射半群， $C_t f = f\circ\varphi_t$ 为与 φ_t. 相对应的复合算子半群。给定一个解析函数的不可分巴拿赫空间 X ，我们研究强连续性极大子空间的性质，在该子空间上，半群 C_t 强连续。特别地，当 X 包含多项式时，一个值得探讨的问题是：对于哪些半群，强连续性的极大子空间与多项式的范数闭包相同。

这个问题已在若干函数空间中得到研究，包括 $BMOA$、 $BMOA_p$、Bloch 空间、 Q_s 空间和解析 Morrey 空间。然而，在大多数情况下，目前只有部分结果。

我们为这个问题提出了一种统一方法，涵盖上述所有空间作为特例。此外，我们还完整刻画了那些强连续性的极大子空间与该空间中多项式的范数闭包相同的半群，从而给出了文献中若干结果的尖锐版本。

1. Introduction

Fr´echet空间 X 上的算子半群是作用于 X 的有界算子所构成的单参数族 $(T_t)_{t\geqslant 0}$ ，它满足半群律

$$T_{t+s} = T_t T_s, \text{ for all } t, s \geqslant 0$$

以及 $T_0 = I_X$，即 X. 上的恒等算子。这仅仅是算子之间的一种代数关系，因此通常还必须再施加一个解析条件。若 X 是巴拿赫空间，且对每个 $x \in X$ 都有$\lim_{t\to 0^+} \|T_t x - x\| = 0$ ，则称 $(T_t)_{t\geqslant 0}$ 为强连续算子半群。

算子半群往往与动力系统所生成的流相关联。在单位圆盘 $\mathbb{D}$上的复分析领域中，一个已被广泛研究的此类动力系统由如下柯西问题描述

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = G(x(t)), \\ x(0) = z \end{cases}$$

其中 $G:\ \mathbb{D}\to\mathbb{C}$ 是一个全纯函数，使得上述问题对所有 $t\geqslant 0$以及所有初始数据 $z\in\mathbb{D}$. 都有一个（唯一）解 $x(t) = x^z(t) =: \varphi_t(z)$ 。单参数函数族 $(\varphi_t)_{t\geqslant 0}$ 称为单位圆盘的全纯自映射半群，而G 称为该半群的无穷小生成元。由此可知，函数φ_t 是单位圆盘的单叶自映射，并且它们满足半群性质 $\varphi_{t+s} = \varphi_t\circ\varphi_s$， t， $s\geqslant 0$.。因此，作用在单位圆盘中全纯函数的Fr´echet空间 $\mathcal{H}(\mathbb{D})$上的复合算子 $(C_t)_{t\geqslant 0}$， $C_t f = f\circ\varphi_t$构成一个算子半群。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 47D03, 47D06, 30H25, 30H30, 30H35, 47G10, 47B33.

Key words and phrases. 复合半群，强连续性，不可分空间， $M_\alpha(D_s^p)$，单叶函数，Volterra算子。第一作者是INdAM小组GNAMPA的成员，并部分得到资助项目“INdAM-GNAMPA Project”（CUP E53C25002010001）“离散结构与流形之间的调和分析传递”以及研究资助“内函数的稠密性与几何性质（Young-InFun）”（PID2024-160326NA-I00）的支持。第二作者的研究部分得到西班牙科学与创新部（Ministerio de Ciencia e Innovaci´on）项目PID2022-136619NB-I00以及安达卢西亚政府（La Junta de Andaluc´ıa）项目FQM210的支持。

这种半群在限制到解析函数的巴拿赫空间 X 上时是否强连续，这一问题要复杂得多，并且首先由Berkson 和 Porta在 [6] 中针对哈代空间 H^p，$1 \leqslant p < \infty$加以考虑。 [1] 由 Littlewood 从属原理可知，C_t 在 H^p 上总是有界的，并且正如Berkson 和 Porta所证明的，$(C_t)_{t\geqslant 0}$ 是一个强连续算子半群。一方面，单叶函数 $(\varphi_t)_{t\geqslant 0}$ 的函数论与算子半群理论之间的相互作用如此成功，以至于不久之后其他作者便在各种全纯函数空间中考虑复合半群 $(C_t)_{t\geqslant 0}$ 。

我们简要介绍这条研究脉络。感兴趣的读者可以从综述文章 [25] 中获取更多信息。若多项式在给定空间中张成的子空间稠密，则强连续性问题自然分为两种情形：满足这一条件与不满足这一条件。在满足这一条件时，由三角不等式可知，只需证明

$$\lim_{t\to 0^+} \|\varphi_t^n - e_n\| = 0, \text{ for all } n \in \mathbb{N}, \quad \text{and} \quad \limsup_{t\to 0^+} \|C_t\| < +\infty.$$

其中 $e_n(z) = z^n$ 和 $\|\cdot\|$ 是相应巴拿赫空间的范数。Siskakis [24] 证明，Dirichlet 空间就是满足这一条件的一个例子。Blasco 等人 [7] 将这一结果推广到了小 Bloch 空间 $\mathcal{B}_0$ 和 $VMOA$。更值得注意的是，正如 Gumenyuk [17] 所示，同样的结论在圆盘代数 $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ 中也成立。因此，在一大类以多项式为稠密子空间的空间中，任意全纯函数半群都会导出一个强连续的复合算子半群。

另一方面，当我们考虑复合算子 C_t 在不可分空间上的作用时，尤其是多项式不能张成稠密子空间的情形，情况就变得相当微妙。Sarason[23], 最先隐含地考察了这一情形，他证明，当 $\varphi_t(z) = e^{it}z$ 时，对于 $f \in BMOA$，有 $f \circ \varphi_t \to f$ 在 $BMOA$ 范数下收敛于 $t \to 0^+$，当且仅当 $f \in VMOA$。这意味着算子半群 $C_t f(z) = f(e^{it}z)$ 在 $BMOA$ 上并非强连续；相反，存在一个最大闭子空间（本例中为 $VMOA$） $BMOA$，在该子空间上 C_t 强连续。若将 $BMOA$ 和 $VMOA$ 分别换成 Bloch 空间 $\mathcal{B}$ 和小 Bloch 空间 $\mathcal{B}$，同样的结论也成立。在两篇系列论文中，[7, 8] 作者系统地研究了这一问题。

设 X 是单位圆盘上解析函数的巴拿赫空间，即一个巴拿赫空间，使得$X \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{D})$ 且恒等映射 $I\colon X \to \mathcal{H}(\mathbb{D})$ 是连续的。此后，(φ_t) 将表示单位圆盘上全纯自映射的一个非平凡半群，C_t 表示 X上相应的复合算子半群。于是，在 $\limsup_{t\to 0^+} \|C_t\|_X < +\infty$ 的假设下，容易看出子空间

$$[\varphi_t, X] := \{f \in X : \lim_{t\to 0^+} \|f \circ \varphi_t - f\| = 0\},$$

是 X 的一个闭子空间，出于显而易见的原因，我们将其称为 (φ_t)在 X.上的强连续性的极大子空间。在 $X = \mathcal{B}$ 的情形下，即如前所述的 Bloch 空间，$\mathcal{B}_0 \subseteq [\varphi_t, \mathcal{B}]$，其中 $\mathcal{B}_0$ 是小 Bloch 空间。此外，没有任何复合算子半群在 $\mathcal{B}$ 上是强连续的，或者用我们的记号

$$[\varphi_t, \mathcal{B}] \subsetneq \mathcal{B}.$$

由于 $[\varphi_t, \mathcal{B}]$ 在某种意义上量化了 C_t 距离在 Bloch 空间上强连续有多远，一个首要的自然问题是确定半群上的条件，最好用无穷小生成元 G 来表述，使得 $[\varphi_t, \mathcal{B}]$ 尽可能小，即 $[\varphi_t, \mathcal{B}] = \mathcal{B}_0$.

我们称 $G \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ 满足消失对数布洛赫条件，如果

[1]由于我们将要处理多种全纯函数空间，为避免在引言中符号过载，具体定义请参见 [30] 。我们将要研究的空间会在后文定义。

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{1-|z|^2}{|G(z)|}\log\frac{1}{1-|z|^2}=0. \tag{1.1}$$

在 [8] 中，作者证明了，半群 (φ_t) 的无穷小生成元 G 满足消失对数布洛赫条件，是 $[\varphi_t, \mathcal{B}]=\mathcal{B}_0$的充分条件，但他们的方法不足以证明该条件的必要性。对于空间 $BMOA$ 和 $VMOA$的情形，他们还得到了另一项充分条件。

第一作者与 Daskalogiannis 最近在这一领域给出了首个完整结果。

定理 A. [11,定理 1.1] 设 (φ_t) 和 G 如上。以下条件等价

(i) G 满足对数消失 *Bloch* 条件。(ii) $[\varphi_t, \mathcal{B}]=\mathcal{B}_0$.

(iii) $[\varphi_t, BMOA]=VMOA$.

尽管这在 Bloch 空间和 $BMOA$ 的情形下给出了完整图景，但复合算子半群也在此类的各种空间中得到了研究。例如，在 [13] 中，作者考虑了所谓的 $BMOA_p$, $1\leqslant p\leqslant 2$ 空间，它们由半范数定义

$$\sup_{a\in\mathbb{D}}(1-|a|^2)\int_{\mathbb{D}}|f'(z)|^p\frac{(1-|z|^2)^{p-1}}{|1-\overline{a}z|^2}dA(z)<+\infty.$$

在此范数下，多项式的闭包记作 $VMOA_p$。对于任意全纯半群 $(\varphi_t)_{t\geqslant 0}$，作者证明强连续性的极大子空间满足

$$VMOA_p\subseteq[\varphi_t, BMOA_p]\subsetneq BMOA_p.$$

此外，类比于 $BMOA$ 情形，他们证明了对于 $VMOA_p=[\varphi_t,\ BMOA_p]$，以下条件是充分的;

$$\lim_{|I|\to 0}\frac{\left(\log\frac{2}{|I|}\right)^p}{|I|}\int_{S(I)}\frac{(1-|z|^2)^{p-1}}{|G(z)|^p}dA(z)=0,$$

其中，dA 是勒贝格面积测度，$I\subseteq\partial\mathbb{D}$ 是开弧，且 $S(I)=\{z\in\mathbb{D}\backslash\{0\}:1-|z|<|I|,\ z/|z|\in I\}$。Wu 和 Wulan [27], 也针对 Q_s 空间，以及 [14] 中的解析 Morrey 空间 $H^{2,\lambda}$，得到了类似结果。

上述结果的主要局限在于，除 [11, 4] 中的结果外，它们并未完整刻画强连续性的极大子空间何时与该空间中多项式的闭包重合。此外，所得充分条件针对每个具体例子分别提出，彼此之间的关系仍不清楚。而且，所采用的技术分别适用于各个空间，因此未能形成统一的框架。

本文的目标首先是，在上述所有情形中给出精确结果，从而为每种情形下强连续性的极大子空间的极小性建立充分且必要条件，并由此完整回答论文 [13, 14, 27] 所研究的各个具体情形中关于强连续性的极大子空间的问题。此外，我们提出了一种统一方法，将上述所有情形作为特例加以处理。这样，我们的定理便自动推广到更大的一类空间。下面我们尝试更详细地描述主要结果。

对于 $1<p<\infty$ 和 $-1<s<\infty$，加权Dirichlet空间 D_s^p 由 $\mathbb{D}$ 上的解析函数组成，其导数属于标准伯格曼空间 A_s^p，即

$$\int_{\mathbb{D}}\left|f'(z)\right|^p(1-|z|^2)^s dA(z)<\infty.$$

这些是配备范数$\|f\|_{D_s^p} = |f(0)| + \|f'\|_{A_s^p}$的Banach空间。特别地，$D_0^2 = \mathcal{D}$ 是经典Dirichlet空间，$D_{p-2}^p = B^p$ 是经典Besov空间，并且由Littlewood-Paley估计，[15] $D_1^2 = H^2$ 为Hardy空间；若 $s > p-1$，则$D_s^p = A_{s-p}^p$。

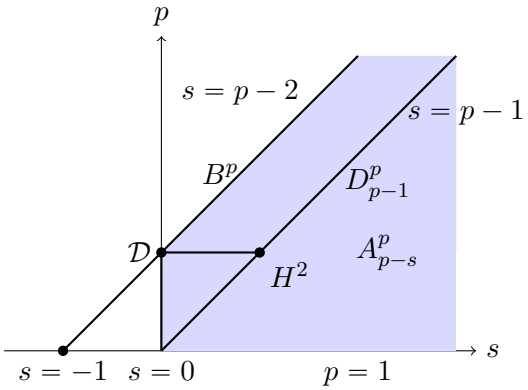

FIGURE 1. 空间族 D_s^p。蓝色区域是指数 p 的可容许区域，s.

设 $1 < p < \infty$、$p-2 \leqslant s < \infty$ 和 $0 \leqslant \alpha < \infty$，我们将空间 $M_\alpha(D_s^p)$ 定义为 D_s^p 的子空间，其中包含满足以下条件的函数 f

$$\rho_{\alpha,p,s}(f) = \sup_{a\in\mathbb{D}} (1-|a|^2)^\alpha \|f\circ\varphi_a - f(a)\|_{D_s^p} < \infty,$$

其中 $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\overline{a}z}$是单位圆盘的自同构，同时也是对合。可以将 $M_\alpha(D_s^p)$ 视为加权Dirichlet空间 D_s^p. 的 α-Möbius 不变版本。这些空间推广了若干解析函数空间，例如当 $0 < s < \infty$时的 $Q_s = M_0(D_s^2)$；特别是，当 $s = 1$时它们与 $BMOA$ 一致，当 $s > 1$时与Bloch 空间 $\mathcal{B}$ 一致；BMOA 型空间 $BMOA_p = M_0(D_{p-1}^p)$；当 $0 < \lambda < 1$时的 Morrey空间 $H^{2,\lambda} = M_{1-\lambda}(D_1^2)$；或者当 $0 < \alpha$、$1 < p < \infty$ 和 $s > p\alpha + \overline{p} - 1$. 时的增长空间 $\mathcal{A}^{-\alpha} = M_\alpha(D_s^p)^2$。我们赋予这些空间以下范数

$$\|f\|_{M_\alpha(D_s^p)} = |f(0)| + \rho_{\alpha,p,s}(f).$$

我们还考虑这些空间的“小版本”

$$m_\alpha(D_s^p) = \left\{ f \in M_\alpha(D_s^p) : \lim_{|a|\to 1^-} (1-|a|^2)^\alpha \|f\circ\varphi_a - f(a)\|_{D_s^p} = 0 \right\},$$

有关这些空间及其基本性质的详细信息，请参见第2节。

一般来说，在讨论空间 $M_\alpha(D_s^p)$ 上的强连续性问题之前，我们需要知道复合算子何时在 $M_\alpha(D_s^p)$上定义良好。请注意，对于 $\alpha \geqslant \frac{s-(p-2)}{p}$ $M_\alpha(D_s^p) = D_s^p$ （见命题 3.1）。

定理 1.1. 设 $1 < p < \infty$, $p-2 < s < \infty, 0 \leqslant \alpha < \frac{s-(p-2)}{p}$ 和 $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 为解析函数。设C_φ 复合算子 $C_\varphi f = f\circ\varphi$. 那么

(i) 若 $s > p-1$, C_φ 在 $M_\alpha(D_s^p)$上有界；(ii) 若 φ 是单叶函数，且 $2 \leqslant p < \infty$ 和 $p-2 < s \leqslant p-1$，或者 $1 < p < 2$和 $0 \leqslant s \leqslant p-1$，那么 C_φ 在 $M_\alpha(D_s^p)$上有界。

此外，

$$\|C_\varphi\|_{M_\alpha(D_s^p)} \lesssim \begin{cases} \log\dfrac{e}{1-|\varphi(0)|}, & \text{if } \alpha = 0, \\ \left(\dfrac{1}{1-|\varphi(0)|}\right)^\alpha, & \text{if } \alpha > 0. \end{cases}$$

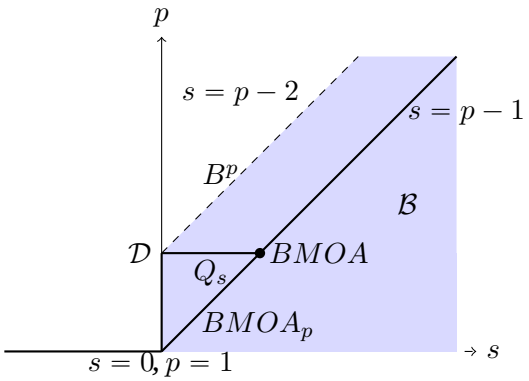

FIGURE 2. 空间族 $M_0(D_s^p)$。蓝色区域是参数 p， s 的可容许区域。

由于半群中的所有元素都是单叶函数，因此相应的复合半群 C_t 在上述 p、 s 和 α 的范围内定义良好。此外，算子的范数界使我们能够验证 $[\varphi_t$、 $M_\alpha(D_s^p)]$ 是 $M_\alpha(D_s^p)$ 的闭子空间。为简便起见，我们将此范围称为参数的容许范围。明确地说，容许范围是满足 $1 < p < \infty$、 $0 \leqslant \alpha < \frac{s-(p-2)}{p}$，且满足以下条件之一的参数集合 p、s、α： $p \geqslant 2$和 $s > p-2$，或 $1 < p < 2$ 和 $s \geqslant 0$。

接下来，我们转而研究强连续性的极大子空间。

定理 1.2。 设 p, s, α 属于容许范围，且 (φ_t) 是一个全纯函数半群。那么

$$m_\alpha(D_s^p) \subset [\varphi_t, M_\alpha(D_s^p)] \subsetneq M_\alpha(D_s^p)$$

也就是说，每个半群都会在$m_\alpha(D_s^p)$上诱导出一个强连续的复合算子半群，并且 $[\varphi_t, M_\alpha(D_s^p)]$ 是 $M_\alpha(D_s^p)$ 的真闭子空间。

最后，我们来到了问题的核心：确定无穷小生成元必须满足的充要条件，以使得 $[\varphi_t$, $M_\alpha(D_s^p)] = m_\alpha(D_s^p)$。事实证明，答案的简洁与空间 $M_\alpha(D_s^p)$ 的复杂性形成了鲜明对比。我们先给出 $\alpha = 0$ 情形下的答案，这等价于 $M_\alpha(D_s^p)$ 是 D_s^p 的 M¨obius 不变版本。

定理1.3。 设 p, s 属于容许范围。下列条件等价；

(i) $[\varphi_t, M_0(D_s^p)] = m_0(D_s^p)$,(ii) 无穷小生成元 G 满足消失的对数 *Bloch* 条件。

根据上述定理，我们由此可知，使强连续性的极大子空间成为可能的最小子空间的半群类，并不取决于参数 p， s。因此，对于对应于参数特定取值的空间 $BMOA$, $\mathcal{B}$, Q_s, $BMOA_p$ ，这样的半群是相同的。因此，在 [27, 11, 13] 中研究的问题都有相同的答案。

当 $\alpha > 0$ 时，情况有所不同。

定理1.4. 设 p、 s、 $\alpha > 0$ 属于容许范围。以下条件等价：

(i) $[\varphi_t$、 $M_\alpha(D_s^p)] = m_\alpha(D_s^p)$, (ii) 无穷小生成元 G 满足消失的 *Bloch*条件；

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{1-|z|^2}{|G(z)|} = 0.$$

我们再次指出，消失 Bloch 条件与参数无关。可以将这一结果与 [4], 的定理 16 相比较，其中作者证明了

同一消失 Bloch 条件对于平均增长空间中强连续性极大子空间上的类似问题而言是充要条件。有趣的是， [4]中采用的技术似乎与本研究所用的技术相去甚远。

定理 1.1 和 1.2 的证明相当标准，在对第3节中的空间 $M_\alpha(D_s^p)$ 作一些初步考察后即可得出。事实上，结果表明，空间 $M_\alpha(D_s^p)$ 与 Zhao [29] 引入的一类空间相同。这一识别将有助于发展空间 $M_\alpha(D_s^p)$. 的基础理论。

另一方面，定理 1.3 和定理 1.4 需要做更多工作。基本思路源自 Blasco 等人 [7] 的研究。也就是说，给定一个半群 $(\varphi_t)_{t\geqslant 0}$，存在一个全纯函数 γ，它由无穷小算子 G 定义（见第2节）

$$[\varphi_t, M_\alpha(D_s^p)] = \overline{M_\alpha(D_s^p) \cap (T_\gamma(M_\alpha(D_s^p)) \oplus \mathbb{C})}, \tag{1.2}$$

其中 T_γ 是广义Volterra算子

$$T_\gamma f(z) = \int_0^z f(\zeta)\gamma'(\zeta)d\zeta.$$

这个等式将确定强连续性最大子空间的问题转化为确定算子 T_γ. 的像的某些性质的问题。随之而来的主要困难是，我们尚未充分理解 T_γ 在空间 $M_\alpha(D_s^p)$ 上的有界性和紧性；事实上，确定哪些符号函数分别定义了空间 $M_\alpha(D_s^p)$ 上有界或紧的广义Volterra算子，仍是一个开放问题 [19] 。值得一提的是，在 [11], 中情况并非如此，因为我们已完全了解 T_γ 在 $BMOA$ 和 $\mathcal{B}$. 上的映射性质。因此，在这种情况下，充分利用符号 γ 的额外性质十分重要。这实质上是因为 γ 的行为类似于单叶函数，而这一点在定理1.3和定理1.4中起到了关键作用。

第二个难点在于，一般来说， T_γ 可能无界，因此，等式（1.2）中关于 T_γ 像的信息会有所丢失。这是证明中技术性最强的部分，需要仔细构造一个属于 T_γ 像的函数，作为证明 T_γ 非紧性的“见证”。对于 $\alpha = 0$ ，一般思路与 [11, 命题 3.6], 中的类似；而对于 $\alpha > 0$ ，则需要对这一技巧加以改进。命题 5.8 将完成这项工作。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍解析半群所需的全部符号和定义。第 3 节给出 $M_\alpha(D_s^p)$ 的基本性质，并研究这些空间上的复合算子。第 4 节阐述若干关于单叶函数的有用引理，其思路源自 Pommerenke 关于 $BMOA$ 和$\mathcal{B}$的经典结果 [22] 。第 5 节专门研究作用于 $M_\alpha(D_s^p)$上的广义Volterra算子。最后，第 6 节给出关于连续性极大子空间的主要结果及其证明。

最后，对于两个非负函数 a, b ，我们引入如下记号：若存在常数 $C > 0$ 使得 $a \leqslant Cb$, 则记作 $a \lesssim b$ ； $a \gtrsim b$ 的含义类似。特别地，若 $a \lesssim b$ 且 $a \gtrsim b$, 则记作 $a \asymp b$ ，并称 a 与b可比较。

2. Notation and definitions

令 $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ 表示单位圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ 内的解析函数空间，其中 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ 是复平面中的单位圆盘；令 $\mathcal{U}$ 表示 $\mathbb{D}$上的所有单叶函数构成的空间。

我们首先给出全纯函数半群的一个等价定义。 $\mathbb{D}$上的半群 $(\varphi_t)_{t\geqslant 0}$ 定义为一族 $\{\varphi_t : t \geqslant 0\}$ ，其元素是单位圆盘 $\varphi_t\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 上的解析自映射，并满足

(1) $\varphi_0(z) \equiv z$, (2) $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{s+t}$, t, $s \geqslant 0$, (3) $\varphi_t(z) \to z$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛，当 $t \to 0^+$。

事实证明，如果 (φ_t) 是一个半群，那么每个 $\varphi_t \in \mathcal{U}$ 都如此，见 [10, 定理 8.1。17]。此外，对于半群 (φ_t) （不包括双曲旋转）的所有成员，都存在一个共同的“不动点” $\tau \in \mathbb{D}$ ，使得

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_t(z) = \tau, \quad z \in \mathbb{D},$$

这个点称为 (φ_t)的 Denjoy-Wolff 点。半群的 Denjoy–Wolff 点概念在半群理论中发挥着关键作用；我们可以根据半群的 Denjoy–Wolff 点对半群进行分类，具体取决于 $\tau \in \mathbb{D}$ 还是 $\tau \in \partial\mathbb{D}$。在第一种情况下，我们称该半群为椭圆型；在后一种情况下，则称其为非椭圆型。

如果 (φ_t) 是一个半群，那么极限

$$G(z) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_t(z) - z}{t},$$

在 $\mathbb{D}$的紧子集上一致收敛。全纯函数 G 称为该半群的无穷小生成元。这个函数刻画了该半群，即

$$G(\varphi_t(z)) = \frac{\partial \varphi_t(z)}{\partial t} = G(z)\frac{\partial \varphi_t(z)}{\partial z}, \quad z \in \mathbb{D}, t \geqslant 0.$$

根据 Berkson-Porta 公式 [10, 定理 10.1。10] ，我们可以用该半群的 Denjoy-Wolff 点 $\tau \in \mathbb{D}$ 来表示 G

$$G(z) = (\overline{\tau}z - 1)(z - \tau)p(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

其中 $p \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ 满足 $\Re p(z) \geqslant 0$, $z \in \mathbb{D}$。反过来，任何这种形式的函数都是唯一全纯半群的无穷小生成元。

半群 (φ_t) 的几何描述由所谓的 Koening 映射给出。Koening 映射是一种共形映射，它将给定的 (φ_t) 半群共轭为一个模型半群。

当 (φ_t) 是一个 Denjoy-Wolff 点为 $\tau \in \mathbb{D}$的椭圆半群时， h是满足以下条件的唯一共形映射: $h(\tau) = 0$, $h'(\tau) = 1$ 以及

$$h(\varphi_t(z)) = e^{-\lambda t}h(z), \quad z \in \mathbb{D}, t \geqslant 0,$$

其中 $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ 满足 $\Re(\lambda) \geqslant 0$ ，且

$$\varphi_t'(\tau) = e^{-\lambda t}, \quad t \geqslant 0.$$

此外， $\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{-\lambda}{G(z)}$若 (φ_t) 是非椭圆型的， h 是满足$h(0) = 0$ 以及以下条件的唯一共形映射:

$$h(\varphi_t(z)) = h(z) + it, \quad z \in \mathbb{D}, t \geqslant 0.$$

在这种情况下，我们有 $h'(z) = \frac{i}{G(z)}$。对于无穷小生成元为 G 且 Denjoy-Wolff 点为 $\tau \in \mathbb{D}$ 的半群 (φ_t) ，我们考虑函数 $\gamma : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$，并将其称为 (φ_t) 的γ–符号（见 [7, 定义 4]）。该函数定义如下：若 $\tau \in \mathbb{D}$，则

$$\gamma(z) = \int_\tau^z \frac{\zeta - \tau}{G(\zeta)}d\zeta,$$

而如果 $\tau \in \mathbb{T}$，那么

$$\gamma(z) = \int_0^z \frac{i}{G(\zeta)}d\zeta.$$

在 $\tau \in \mathbb{T}$ then $\gamma = h$ 的情况下，Koening 映射。

设 (φ_t) 是 $\mathbb{D}$ 上的一个半群，我们考虑与之关联的复合算子半群

$$C_t f = f \circ \varphi_t, \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),$$

半群的强连续性的极大子空间也可以用无穷小生成元 G来描述。如果 X 包含常值函数且 $\limsup_{t\to 0^+} \|C_t\|_X < 8$，那么根据 [7,定理 1]

$$[\varphi_t, X] = \overline{\{f \in X : Gf' \in X\}} \tag{2.1}$$

这个定义揭示了连续性极大子空间与广义 Volterra 算子之间的关系。对于符号 $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$，相应的 Volterra 算子为

$$T_g f(z) = \int_0^z f(\zeta) g'(\zeta) d\zeta, \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),\, z \in \mathbb{D}.$$

如果 X 是定义在 $\mathbb{D}$ 上的解析函数巴拿赫空间，那么在对 X 作出适度的附加假设后，根据 [7，命题 2]

$$[\varphi_t, X] = \overline{X \cap (T_\gamma(X) \oplus \mathbb{C})},$$

这里我们用 $\mathbb{C}$ 指所有常数函数的集合。

3. Basics on $M_\alpha(D_s^p)$ and Composition operators

本节将研究 $M_\alpha(D_s^p)$ 的一些基本性质，并将 $M_\alpha(D_s^p)$ 描述为 Zhao [28] 引入的 $F(p,q,s)$ 空间。对于 $0 < p < \infty$、$-2 < q < \infty$ 和 $0 < s < \infty$，空间 $F(p,q,s)$ 由满足以下条件的 $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ 构成

$$\sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \left|f'(z)\right|^p (1-|z|^2)^q (1-|\varphi_a(z)|^2)^s dA(z) < \infty.$$

这些空间在过去 25 年中得到了深入研究；当 $q+s \leqslant -1$ 时，它们仅包含常数；而当 $q+s > -1$ 时，它们是配备预期范数的不可分巴拿赫空间，且多项式的闭包为

$$F_0(p,q,s) = \left\{ f \in F(p,q,s) : \lim_{|a|\to 1^-} \int_{\mathbb{D}} \left|f'(z)\right|^p (1-|z|^2)^q (1-|\varphi_a(z)|^2)^s dA(z) = 0 \right\}.$$

它们也始终包含在加权布洛赫空间中

$$B^\alpha = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)^\alpha \left|f'(z)\right| < \infty \right\},$$

其中 $\alpha = \frac{q+2}{p}$；事实上，当且仅当 $s > 1$ 时，这个嵌入就成为等式。$F(p,\ q,\ s)$ 的这些以及其他重要性质将有助于实现我们的目标，见 [29]。

下面这个众所周知的引理将在我们的整个研究中发挥关键作用。

引理 B. 设 μ 是 $\mathbb{D}$ 上的一个正博雷尔测度。那么

(i) 对每个 λ，$s > 0$，都存在正常数 $C_1 = C_1(\lambda, s) > 0$ 和 $C_2 = C_2(\lambda, s) > 0$，使得

$$C_1 \sup_{a\in\mathbb{D}} \frac{\mu(S(a))}{(1-|a|^2)^s} \leqslant \sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|a|^2)^\lambda}{|1-\overline{a}z|^{\lambda+s}} d\mu(z) \leqslant C_2 \sup_{a\in\mathbb{D}} \frac{\mu(S(a))}{(1-|a|^2)^s};$$

(ii) 对每个 λ，$s > 0$，$\lim_{|a|\to 1^-} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|a|^2)^\lambda}{|1-\overline{a}z|^{\lambda+s}} d\mu(z) = 0$ 当且仅当

$$\lim_{|a|\to 1^-} \frac{\mu(S(a))}{(1-|a|^2)^s} = 0.$$

Pro命题 3.1。令 $1 < p < \infty$, $p-2 \leqslant s < \infty$ 和 $0 \leqslant \alpha < \infty$，则有：

(i) 若 $\alpha \geqslant \frac{s-(p-2)}{p}$，则

$$M_\alpha(D_s^p) = D_s^p,$$

且范数等价；

(ii) 若 $s > p-2$ 和 $0 \leqslant \alpha < \frac{s-(p-2)}{p}$，则

$$M_\alpha(D_s^p) = F(p, p(\alpha+1)-2, s-(p(\alpha+1)-2)).$$

此外，对于每个 $\beta > 0$,

$$\begin{aligned}\|f\|_{M_\alpha(D_s^p)} &\asymp |f(0)| + \left(\sup_{a\in\mathbb{D}} \frac{1}{(1-|a|^2)^{s-(p(\alpha+1)-2)}} \int_{S(a)} |f'(z)|^p (1-|z|^2)^s dA(z)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\asymp |f(0)| + \left(\sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^p \frac{(1-|z|^2)^s (1-|a|^2)^\beta}{|1-\overline{a}z|^{s-(p(\alpha+1)-2)+\beta}} dA(z)\right)^{\frac{1}{p}};\end{aligned} \tag{3.1}$$

(iii) 若 $s > p-2$ 和 $0 \leqslant \alpha < \frac{s-(p-2)}{p}$，则

$$m_\alpha(D_s^p) = F_0(p, p(\alpha+1)-2, s-(p(\alpha+1)-2)).$$

证明。对于 (i)，我们只需验证：若 $s \geqslant p-2$ 和 $\alpha \geqslant \frac{s-(p-2)}{p}$，则

$$(1-|a|^2)^{p\alpha} \|f\circ\varphi_a - f(a)\|_{D_s^p}^p \lesssim \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^p (1-|z|^2)^s dA(z), \quad \forall a\in\mathbb{D},\, f\in\mathcal{H}(\mathbb{D}).$$

现在，若 $a\in\mathbb{D}$ 和 $f\in D_s^p$，根据变量替换 $w=\varphi_a(z)$

$$\begin{aligned}(1-|a|^2)^{p\alpha} \|f\circ\varphi_a - f(a)\|_{D_s^p}^p &\leqslant (1-|a|^2)^{s-(p-2)} \|f\circ\varphi_a - f(a)\|_{D_s^p}^p \\ &= (1-|a|^2)^{s-(p-2)} \int_{\mathbb{D}} |f'(\varphi_a(z))|^p |\varphi_a'(z)|^2 |\varphi_a'(z)|^{p-2} (1-|z|^2)^s dA(z) \\ &= (1-|a|^2)^{s-(p-2)} \int_{\mathbb{D}} |f'(\varphi_a(z))|^p |\varphi_a'(z)|^2 (1-|\varphi_a(z)|^2)^{p-2} (1-|z|^2)^{s-(p-2)} dA(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} |f'(\varphi_a(z))|^p |\varphi_a'(z)|^2 (1-|\varphi_a(z)|^2)^s |1-\overline{a}z|^{2(s-(p-2))} dA(z) \\ &\leqslant 4^{s-(p-2)} \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^p (1-|w|^2)^s dA(w).\end{aligned}$$

现在，根据引理 B (i) 和 $F(p,q,s)$ 的定义，要证明 (ii) 中的等式，只需验证

$$\sup_{a\in\mathbb{D}} (1-|a|^2)^{p\alpha} \|f\circ\varphi_a - f(a)\|_{D_s^p}^p \asymp \sup_{a\in\mathbb{D}} \frac{1}{(1-|a|^2)^{s-(p(\alpha+1)-2)}} \int_{S(a)} |f'(z)|^p (1-|z|^2)^s dA(z),$$

首先我们注意到，按照与前一种情况相同的方式处理，对每个 $a\in\mathbb{D}$

$$\begin{aligned}\|f\circ\varphi_a - f(a)\|_{D_s^p}^p &= \int_{\mathbb{D}} |f'(\varphi_a(z))|^p |\varphi_a'(z)|^2 (1-|\varphi_a(z)|^2)^{p-2} (1-|z|^2)^{s-(p-2)} dA(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^p (1-|w|^2)^{p-2} (1-|\varphi_a(w)|^2)^{s-(p-2)} dA(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^p (1-|w|^2)^s \frac{(1-|a|^2)^{s-(p-2)}}{|1-\overline{a}w|^{2(s-(p-2))}} dA(w),\end{aligned}$$

然后应用引理 B (i) 以及 $\lambda = s + p\alpha - (p-2)$

$$\begin{aligned}\sup_{a\in\mathbb{D}} (1-|a|^2)^{p\alpha} \|f\circ\varphi_a - f(a)\|_{D_s^p}^p &= \sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^p (1-|w|^2)^s \frac{(1-|a|^2)^{s-(p-2)+p\alpha}}{|1-\overline{a}w|^{2(s-(p-2))}} dA(w) \\ &\asymp \sup_{a\in\mathbb{D}} \frac{1}{(1-|a|^2)^{s-(p(\alpha+1)-2)}} \int_{S(a)} |f'(z)|^p (1-|z|^2)^s dA(z).\end{aligned}$$

(iii) 的证明沿用完全相同的论证，并应用引理 B (ii)。 □

在全文中，我们将根据具体语境在 (3.1) 中的三个等价范数之间进行切换。为简化记号，我们始终用 $\|f\|_{M_\alpha(D_s^p)}$ 指代其中任意一个范数。

作为推论，我们得到关于该空间可分性的以下结果。

推论 3.2。设 $1 < p < \infty$, $p-2 \leqslant s < \infty$ 以及 $0 \leqslant \alpha < \infty$，则
(i) 若 $\alpha \geqslant \frac{s-(p-2)}{p}$，$M_\alpha(D^p_s)$ 可分，且多项式构成稠密子集；(ii) 若 $s > p-2$ 和 $0 \leqslant \alpha < \frac{s-(p-2)}{p}$，$M_\alpha(D^p_s)$ 不可分，且多项式在 $M_\alpha(D^p_s)$ 中的闭包与 $m_\alpha(D^p_s)$ 重合。

给定解析函数 $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$，与 φ 相关联的复合算子为 $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$。我们的下一个目标是研究作用于 $M_\alpha(D^p_s)$ 上的复合算子的有界性；就本文而言，只需考虑与单叶符号相关联的复合算子。

我们先研究它在 D^p_s 上的有界性。下一个结果专家们或许早已熟知；为求完整起见，我们给出一个明确的证明。

命题 3.3. 设 $1 < p < \infty$、$p-2 \leqslant s < \infty$ 和 $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 均为解析函数。则
(i) 若 $s > p-1$，则 C_φ 在 D^p_s 上有界；(ii) 若 $2 \leqslant p < \infty$、$p-2 \leqslant s \leqslant p-1$ 和 $\varphi \in \mathcal{U}$，则 C_φ 在 D^p_s 上有界；(iii) 若 $1 < p < 2$、$0 \leqslant s \leqslant p-1$ 和 $\varphi \in \mathcal{U}$，则 C_φ 在 D^p_s 上有界。

此外，

$$\|C_\varphi\|_{D^p_s} \lesssim \begin{cases} \log \dfrac{e}{1-|\varphi(0)|}, & \text{if } s = p-2, \\ \left(\dfrac{1}{1-|\varphi(0)|}\right)^{\frac{s-(p-2)}{p}}, & \text{if } s > p-2. \end{cases}$$

证明。(i) 设 $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 为解析函数，且 $s > p-1$，则 $D^p_s = A^p_{s-p}$ 的范数等价，因此由 Littlewood 从属原理可得 [30, 定理 11。6]

$$\|f \circ \varphi\|_{D^p_s} \lesssim \left(\frac{1}{1-|\varphi(0)|}\right)^{\frac{s-(p-2)}{p}} \|f\|_{D^p_s}, \quad \forall f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}).$$

现在我们处理其余情况。设 $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 为单叶函数，且 $f \in D^p_s$，则

$$\|f \circ \varphi\|_{D^p_s} = |f \circ \varphi(0)| + \left(\int_{\mathbb{D}} \left|f'(\varphi(z))\right|^p \left|\varphi'(z)\right|^p (1-|z|^2)^s dA(z)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

第一项的界由以下标准增长估计得出（见 [16,定理3.1]）

$$|f(z)| \lesssim \begin{cases} \log \dfrac{e}{1-|z|} \|f\|_{D^p_s}, & \text{if } s = p-2, \\ \dfrac{\|f\|_{D^p_s}}{(1-|z|)^{\frac{s-(p-2)}{p}}}, & \text{if } s > p-2. \end{cases}$$

应用于 $z = \varphi(0)$。

对于第二项，我们将分别处理每种情形。首先，若 $2 \leqslant p < \infty$且$p-2 \leqslant s \leqslant p-1$，通过应用施瓦茨引理以及变量替换 $w = \varphi(z)$

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{D}} \left|f'(\varphi(z))\right|^p \left|\varphi'(z)\right|^p (1-|z|^2)^s dA(z) \\ &\leqslant \int_{\mathbb{D}} \left|f'(\varphi(z))\right|^p \left|\varphi'(z)\right|^2 (1-|\varphi(z)|^2)^{p-2} (1-|z|^2)^{s-(p-2)} dA(z) \\ &\lesssim \left(\frac{1}{1-|\varphi(0)|}\right)^{s-(p-2)} \int_{\mathbb{D}} \left|f'(\varphi(z))\right|^p \left|\varphi'(z)\right|^2 (1-|\varphi(z)|^2)^s dA(z) \\ &\leqslant \left(\frac{1}{1-|\varphi(0)|}\right)^{s-(p-2)} \int_{\mathbb{D}} \left|f'(w)\right|^p (1-|w|^2)^s dA(z) \leqslant \left(\frac{1}{1-|\varphi(0)|}\right)^{s-(p-2)} \|f\|^p_{D^p_s}. \end{aligned}$$

注意，我们使用了不等式

$$(1-|z|^2)(1-|\varphi(0)|^2)\leqslant 2(1-|\varphi(z)|^2),$$

该不等式可通过将 Scwharz 不等式应用于函数 $\varphi_{\varphi(0)}\circ\varphi$ 得到。现在，如果 $1<p<2$ 和 $0\leqslant s\leqslant p-1$，根据 H¨older 不等式

$$\int_{\mathbb{D}}\left|f'(\varphi(z))\right|^p\left|\varphi'(z)\right|^p(1-|z|^2)^s dA(z)\leqslant\left(\int_{\mathbb{D}}\left|f'(\varphi(z))\right|^p\left|\varphi'(z)\right|^2(1-|z|^2)^s dA(z)\right)^{\frac{p}{2}}$$
$$\times\left(\int_{\mathbb{D}}\left|f'(\varphi(z))\right|^p(1-|z|^2)^s dA(z)\right)^{\frac{2-p}{2}}=I(f)^{\frac{p}{2}}II(f)^{\frac{2-p}{2}}.$$

对于第一项，按照前一种情况的相同方法处理

$$I(f)\lesssim\left(\frac{1}{1-|\varphi(0)|}\right)^s\int_{\mathbb{D}}\left|f'(\varphi(z))\right|^p\left|\varphi'(z)\right|^2(1-|\varphi(z)|^2)^s dA(z)\leqslant\left(\frac{1}{1-|\varphi(0)|}\right)^s\|f\|^p_{D^p_s},$$

另一方面，$II(f)=\|f'\circ\varphi\|^p_{A^p_s}$，那么由 [30,定理 11.6]

$$II(f)\lesssim\left(\frac{1}{1-|\varphi(0)|}\right)^{s+2}\|f'\|^p_{A^p_s}\leqslant\left(\frac{1}{1-|\varphi(0)|}\right)^{s+2}\|f\|^p_{D^p_s}.$$

然后将两个不等式结合起来

$$\int_{\mathbb{D}}\left|f'(\varphi(z))\right|^p\left|\varphi'(z)\right|^p(1-|z|^2)^s dA(z)\lesssim\left(\frac{1}{1-|\varphi(0)|}\right)^{s-(p-2)}\|f\|^p_{D^p_s},$$

从而完成证明。 □

由命题 3.1，这个最后的结果也涵盖了在 $M_\alpha(D^p_s)$ 上复合算子的有界性，对相同的参数范围 p 和 s，只要 $\alpha\geqslant\frac{s-(p-2)}{p}$。现在我们可以处理定理 1.1 ———

定理 *1.1* 的证明。 我们同时处理所有情况。设 $\varphi:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 解析（分别为单叶），对于每个 $a\in\mathbb{D}$，考虑由下式定义的函数 σ_a

$$\sigma_a(z)=\varphi_{\varphi(a)}\circ\varphi\circ\varphi_a(z),\quad z\in\mathbb{D},$$

它定义了一个解析（分别为单叶）函数，且 $\sigma_a(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}$ 和 $\sigma_a(0)=0$，那么由命题 3.3 可得

$$\|f\circ\sigma_a\|_{D^p_s}\lesssim\|f\|_{D^p_s},\quad\forall a\in\mathbb{D},\ f\in\mathcal{H}(\mathbb{D}).\tag{3.2}$$

现在，设 $f\in M_\alpha(D^p_s)$，那么

$$\|f\circ\varphi\|_{M_\alpha(D^p_s)}=|f(\varphi(0))|+\sup_{a\in\mathbb{D}}(1-|a|^2)^\alpha\|f\circ\varphi\circ\varphi_a-f\circ\varphi(a)\|_{D^p_s},$$

对于第一项，由 [29,命题 2.5]

$$|f(\varphi(0))|\lesssim\begin{cases}\log\dfrac{e}{1-|\varphi(0)|}\|f\|_{M_\alpha(D^p_s)}, & \text{if } \alpha=0,\\ \left(\dfrac{1}{1-|\varphi(0)|}\right)^\alpha\|f\|_{M_\alpha(D^p_s)}, & \text{if } \alpha>0.\end{cases}$$

另一方面，如果 $a\in\mathbb{D}$，由施瓦茨不等式和 (3.2)

$$(1-|a|^2)^\alpha\|f\circ\varphi\circ\varphi_a-f\circ\varphi(a)\|_{D^p_s}=(1-|a|^2)^\alpha\left\|f\circ\varphi_{\varphi(a)}\circ\sigma_a-f\circ\varphi(a)\right\|_{D^p_s}$$
$$\lesssim(1-|a|^2)^\alpha\left\|f\circ\varphi_{\varphi(a)}-f(\varphi(a))\right\|_{D^p_s}\lesssim\left(\frac{1-|\varphi(a)|^2}{1-|\varphi(0)|}\right)^\alpha\left\|f\circ\varphi_{\varphi(a)}-f(\varphi(a))\right\|_{D^p_s}$$
$$\leqslant\left(\frac{1}{1-|\varphi(0)|}\right)^\alpha\|f\|_{M_\alpha(D^p_s)},$$

证明结束。 □

为结束本节，我们引入以下测试函数，它们将在全文中发挥作用。以下结果由 [18, 引理 2.5] 推出（另见 [29, 定理 4.2]）。

引理 3.4. 设 p, s, α 属于容许范围，则以下结论成立：

(i) 对任意 $w \in \mathbb{D}$，考虑函数

$$l_\omega(z) = \log \frac{e}{1-\overline{w}z},$$

则 上确界 $\sup_{w\in\mathbb{D}} \|l_w\|_{M_0(D_s^p)} < \infty$;

(ii) 若 $\alpha, \lambda > 0$，则对任意 $w \in \mathbb{D}$，考虑函数

$$f_{w,\alpha,\lambda} = \frac{(1-|w|^2)^\lambda}{(1-\overline{w}z)^{\alpha+\lambda}},$$

Then

$$\sup_{w\in\overline{\mathbb{D}}} \|f_{w,\alpha,\lambda}\|_{M_\alpha(D_s^p)} < \infty.$$

4. Univalent functions

引理 4.1. 设 p, s 属于容许范围，则存在 $0 < q < \infty$ 使得

$$Q_q \subset M_0(D_s^p), \quad \textit{and} \quad Q_{q,0} \subset m_0(D_s^p).$$

证明。 两个嵌入都基于相同的思想，我们在此详细说明第一个嵌入，并将证明分为不同情形。

如果 $s > p-1$，令 $f \in \mathcal{B}$，则

$$\begin{aligned}\|f\circ\varphi_a - f(a)\|_{D_s^p}^p &\lesssim \|f\|_{\mathcal{B}}^p \int_{\mathbb{D}} \left(\frac{|\varphi_a'(z)|}{1-|\varphi_a(z)|^2}\right)^p (1-|z|^2)^s dA(z)\\ &= \|f\|_{\mathcal{B}}^p \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{s-p} dA(z) \lesssim \|f\|_{\mathcal{B}}^p,\end{aligned}$$

因此，对于任意 $0 < q < \infty$，有 $f \in M_0(D_s^p)$ 和 $Q_q \subset M_0(D_s^p)$。

如果 $2 \leqslant p < \infty$ 且 $p-2 < s \leqslant p-1$，让我们验证：对于 $q = s-(p-2)$，有 $Q_q \subset M_0(D_s^p)$。令 $f \in Q_q$ 和 $a \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} \left|f'(z)\right|^p (1-|z|^2)^{p-2}(1-|\varphi_a(z)|^2)^{s-(p-2)} dA(z) &\leqslant \|f\|_{\mathcal{B}}^{p-2} \int_{\mathbb{D}} \left|f'(z)\right|^2 (1-|\varphi_a(z)|^2)^q dA(z)\\ &\leqslant \|f\|_{\mathcal{B}}^{p-2} \|f\|_{Q_q}^2 \lesssim \|f\|_{Q_q}^p,\end{aligned}$$

并对 $a \in \mathbb{D}$、 $f \in M_0(D_s^p)$ 取上确界。

如果 $1 < p < 2$ 且 $0 < s \leqslant p-1$，根据 H¨older 不等式，对于每个 $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$，有 $\|f\|_{D_s^p} \lesssim \|f\|_{D_s^2}$，因此显然有 $Q_s = M_0(D_s^2) \subset M_0(D_s^p)$。

若 $1 < p < 2$ 且 $s = 0$，取 $\varepsilon < \frac{2-p}{2}$ 和 $q = \frac{2\varepsilon}{p}$，则由 H¨older 不等式可得，

$$\begin{aligned}\|f\|_{D_s^p}^p &\leqslant \int_{\mathbb{D}} \left|f'(z)\right|^p (1-|z|^2)^\varepsilon (1-|z|^2)^{-\varepsilon} dA(z)\\ &\leqslant \left(\int_{\mathbb{D}} \left|f'(z)\right|^2 (1-|z|^2)^{\frac{2\varepsilon}{p}}\right)^{\frac{p}{2}} dA(z) \left(\int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{\frac{-2\varepsilon}{2-p}} dA(z)\right)^{\frac{2-p}{2}}\\ &\asymp \|f\|_{D_q^2}^p, \quad \forall f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),\end{aligned}$$

因此 $Q_q = M_0(D_q^2) \subset M_0(D_s^p)$。 □

引理 4.2. 设 p, s 属于容许范围。若 $f \in \mathcal{U}$，则

$$f \in M_0(D_s^p) \Leftrightarrow f \in \mathcal{B} \quad \textit{and} \quad f \in m_0(D_s^p) \Leftrightarrow f \in \mathcal{B}_0.$$

证明。首先，注意到根据 [29,推论 3.6]， $M_0(D_s^p) \subset \mathcal{B}$ 和 $m_0(D_s^p) \subset \mathcal{B}_0$，因此我们只需验证：若 $f \in \mathcal{U} \cap \mathcal{B}$（分别地， $\mathcal{U} \cap \mathcal{B}_0$），则 $f \in M_0(D_s^p)$（分别地， $f \in m_0(D_s^p)$）。

正如 $f \in \mathcal{U}$ 由 [5, 定理6.1] $f \in Q_s$（相应地，$Q_{s,0}$）对每个 $0 < s < \infty$所表明的，并且由引理4.1，在 $M_0(D_s^p)$（相应地， $m_0(D_s^p)$）内总存在一个 Q_s（相应地，$Q_{s,0}$）空间，因此 $f \in M_0(D_s^p)$（相应地，$m_0(D_s^p)$）。□

得到这些结果的对数版本将是有用的。

对 数Bloch空间 $\mathcal{B}_{\log}$ 定义为 $\mathbb{D}$中的解析函数 f 的空间，使得 that

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \left(\log \frac{e}{1-|z|^2}\right) (1-|z|^2) \left|f'(z)\right| < \infty,$$

并且$f \in \mathcal{B}_{\log,0}$ 如果

$$\lim_{|z|\to 1^-} \left(\log \frac{e}{1-|z|^2}\right) (1-|z|^2) \left|f'(z)\right| = 0.$$

对于 $0 < p < \infty$、 $-2 < q < \infty$ 和 $0 < s < \infty$，空间 $F_{\log}(p、\ q、\ s)$ 由满足以下条件的 $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ 组成

$$\sup_{a\in\mathbb{D}} \left(\log \frac{1}{1-|a|^2}\right)^p \int_{\mathbb{D}} \left|f'(z)\right|^p (1-|z|^2)^q (1-|\varphi_a(z)|^2)^s dA(z) < \infty,$$

而对于小 o 版本，若满足以下条件，我们称 $f \in F_{\log、\ 0}(p、\ q、\ s)$

$$\lim_{|a|\to 1^-} \left(\log \frac{1}{1-|a|^2}\right)^p \int_{\mathbb{D}} \left|f'(z)\right|^p (1-|z|^2)^q (1-|\varphi_a(z)|^2)^s dA(z) = 0.$$

特别地，对于 $0 < q < \infty$，我们用下式表示

$$Q_{q,\log,0} = F_{\log,0}(2,0,q),$$

注意，若 $q > 1$，则 $Q_{q、\ \log、\ 0} = \mathcal{B}_{\log、\ 0}$。通过标准论证并仿照引理 4.1 的证明，我们可以得到以下结果。

引理 4.3。设 p、 s 处于容许范围内，则存在 $0 < q < \infty$ 使得 t

$$Q_{q,\log,0} \subset F_{\log,0}(p, p-2, s-(p-2)) \subset \mathcal{B}_{\log,0}.$$

现在，我们将以与 [11, 推论 3.3], 相同的方式，证明 [5,定理 6.1]的对数版本。

令 ω 为属于类 $C^1(\mathbb{D})$ 的严格正权函数。我们对 ω 作如下正则性条件假设：

$$(1-|z|^2) |\nabla\omega(z)| \leqslant C_\omega \omega(z), \quad \forall z \in \mathbb{D}, \tag{4.1}$$

其中 $C_\omega > 0$。

引理 4.4. 令 $0 < s < 1$，并设 ω 是满足 (4.1) 的权函数，其中 $C_\omega < s$。再设 $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$，使得

$$\left|f'(z)\right| (1-|z|^2) \omega(z) \leqslant K, \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

其中 $K > 0$。于是，

$$\int_0^1 \frac{\sup_{a\in\mathbb{D},|z|\leqslant r} (\omega(a) |f\circ\varphi_a(z) - f(a)|)^2}{(1-r)^{1-s}} dr < +\infty.$$

证明。沿用 [11, 引理 3.1], 的证明可得，对于 $z = re^{i\theta}$

$$(\omega(a) |f\circ\varphi_a(z) - f(a)|)^2 \leqslant K^2 \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{C_\omega} \left(\frac{1}{2}\log\frac{1+r}{1-r}\right)^2,$$

然后通过应用 $1 + C_\omega - s < 1$,

$$\int_0^1 (1-r)^s \sup_{a\in\mathbb{D},|z|\leqslant r} (\omega(a) |f\circ\varphi_a(z) - f(a)|)^2 dr \lesssim \int_0^1 \frac{1}{(1-r)^{1+C_\omega-s}} \left(\log\frac{1+r}{1-r}\right)^2 dr < \infty.$$

□

命题 4.5. 设 $0 < s < 1$, $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ 为单叶函数，且 ω 为引理 *4.4* 中的权函数。另设

$$\lim_{|z|\to 1} \left|f'(z)\right| (1-|z|^2)\omega(z) = 0.$$

于是,

$$\lim_{|a|\to 1} \omega(a)^2 \int_{\mathbb{D}} \left|f'(z)\right|^2 (1-|\varphi_a(z)|^2)^s dA(z) = 0.$$

证明。设 f是这样的函数。令 $\mathbb{D}_r = D(0,r)$，并记 $\overline{f_a} = f \circ \varphi_a - f(a)$，若 $0 < R < 1$，则通过变量替换和 Fubini 定理可得,

$$\begin{aligned}
\omega(a)^2 \int_{\mathbb{D}} \left|f'(w)\right|^2 (1-|\varphi_a(w)|)^s dA(w) &\asymp \omega(a)^2 \int_0^1 \frac{1}{(1-r)^{1-s}} \int_{\mathbb{D}_r} \left|f_a'(z)\right|^2 dA(z)\, dr \\
&= \omega(a)^2 \int_0^R \frac{1}{(1-r)^{1-s}} \int_{\mathbb{D}_r} \left|f_a'(z)\right|^2 dA(z)\, dr + \omega(a)^2 \int_R^1 \frac{1}{(1-r)^{1-s}} \int_{\mathbb{D}_r} \left|f_a'(z)\right|^2 dA(z)\, dr \\
&= I + II.
\end{aligned}$$

由于 f_a 是单叶的，内积分就是像 $f_a(\mathbb{D}_r)$的归一化面积，于是

$$\int_{\mathbb{D}_r} \left|f_a'(z)\right|^2 dA(z) \leqslant \sup_{|z|\leqslant r} \left|f_a(z)\right|^2,$$

于是根据引理 4.4，若 $\varepsilon > 0$，则存在 $R_0 < 1$ 使得

$$II \leqslant \omega(a)^2 \int_{R_0}^1 \sup_{|z|\leqslant r} \left|f_a(z)\right|^2 dr < \varepsilon, \quad \forall a \in \mathbb{D}.$$

对于剩余项，按照 [11, 命题 3.2]的证明

$$I \leqslant e^{2C_\omega \delta(0,R_0)} \int_0^{R_0} \frac{1}{(1-r)^{3-s}} \int_{\mathbb{D}_r} \left|f'(\varphi_a(z))\right|^2 (1-|\varphi_a(z)|^2)\omega(\varphi_a(z))^2 dA(z)\, dr,$$

其中 δ 表示圆盘上的双曲距离。现在，根据假设，我们可以找到 $R_1 < 1$，使得如果 $|w| > R_1$, 那么

$$\omega(w)^2(1-|w|^2)^2 \left|f'(w)\right|^2 \leqslant e^{-2C_\omega \delta(0,R_0)}(1-R_0)^{3-s}\varepsilon.$$

最后，存在某个 $\delta > 0$，使得如果 $|z| \leqslant R_0$ 且 $|a| > 1-\delta$，则 $|\varphi_a(z)| > R_1$。于是

$$I \leqslant \varepsilon(1-R_0)^{3-s} \int_0^{R_0} \frac{1}{(1-r)^{3-s}} dr \leqslant \varepsilon.$$

因此，对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得对于 $|a| > 1-\delta$

$$\omega(a)^2 \int_{\mathbb{D}} \left|f'(z)\right|^2 (1-|\varphi_a(z)|^2)^s dA(z) \leqslant 2\varepsilon.$$

□

推论 4.6。设 p, s 属于容许范围。若 $f \in \mathcal{U}$，则

$$f \in F_{\log,0}(p, p-2, s-(p-2)) \Leftrightarrow f \in \mathcal{B}_{\log,0}.$$

证明。由引理 4.3，只需验证：若 $f \in \mathcal{B}_{\log,0}$，则 $f \in Q_{s,\log,0}$，且 $0 < s < 1$。令 $K > 0$，并考虑权函数 $\omega(z) = \log \frac{K}{1-|z|^2}$，则若 $z = re^{i\theta}$ ——

$$\frac{(1-|z|^2)\left|\nabla \omega(z)\right|}{\omega(z)} = \frac{2r}{\log K + \log \frac{1}{1-r}},$$

且该量在 $(0,1)$ 上一致收敛于 0，当 K 趋于无穷时，因此对每个$0 < s < 1$，都存在一个 K_s，使得 ω 满足引理 4.4 的条件；于是由命题 4.5 可得 $f \in Q_{p,\log,0}$。□

5. Integration operator and related results

鉴于 (1.2)，要理解强连续性的极大子空间的行为，我们需要了解积分算子 T_g 在 $M_\alpha(D_s^p)$ 上的作用。本节旨在探讨这一问题。

5.1. 有界性与紧性。 对于情形 $\alpha = 0$ ，积分算子已得到广泛理解，下述结果由 [19, 定理 5.1,5.2]，[12, 定理 1.4]以及 Gantmacher 定理 [1,定理 5.23]得出。

定理 C. 设 $1 < p < \infty$、 $p-2 < s < \infty$ 与 $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$。 T_g 在 $M_0(D_s^p)$ 上有界当且仅当 $g \in F_{\log}(p$、$p-2$、 $s-(p-2))$。此外，下列陈述等价：

(i) T_g 在 $M_0(D_s^p)$上是紧的；(ii) $g \in F_{\log,\,0}(p$、 $p-2$、 $s-(p-2))$；(iii) T_g 在 $M_0(D_s^p)$上是弱紧的；(iv) $T_g(M_0(D_s^p)) \subset m_0(D_s^p)$。

情形 $\alpha > 0$ 要复杂得多。事实上，对于整个容许范围内的一般解析符号，目前尚无有界性或紧性的完整刻画；只有在某些参数范围内，符号函数才在 [19, 定理5.2]中得到刻画。然而，就我们的目的而言，只需针对单叶符号得到这类结果。在这一假设下，我们能够刻画满足以下条件的单叶符号 g ： T_g 在$M_\alpha(D_s^p)$ 上有界/紧，且 $\alpha > 0$ 处于容许范围内。首先，我们需要一些前置结果。下面的引理可由 [19, 定理4.3]直接推出。

引理5.1. 设 p、 s、 $\alpha > 0$ 处于容许范围内，且 $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$。若 T_g 在 D_s^p上有界，则它在 $M_\alpha(D_s^p)$上也有界。此外，

$$\|T_g\|_{M_\alpha(D_s^p)} \lesssim \|T_g\|_{D_s^p}.$$

命题5.2. 设 p、 s、 $\alpha > 0$ 处于容许范围内，且 $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$。若存在 $\beta > 0$使得 $g \in M_0(D_{s-\beta}^p)$，则 T_g 在 $M_\alpha(D_s^p)$上有界。此外，

$$\|T_g\|_{M_\alpha(D_s^p)} \lesssim \|g - g(0)\|_{M_0(D_{s-\beta}^p)}.$$

证明。 假设存在 $\beta > 0$ 使得 $g \in M_0(D_{s-\beta}^p)$，由引理5.1可知，我们只需验证 T_g在 D_s^p上有界。令 $\gamma > \max\left(0, \frac{s}{p}\right)$，则根据 [30,命题4.27]

$$|f(z)| \lesssim \int_{\mathbb{D}} \frac{|f'(w)|\,(1-|w|^2)^\gamma}{|1-\overline{w}z|^{\gamma+1}} dA(w), \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$$

现在取 $\varepsilon = \beta + 2p - 2$，根据 H¨older 不等式

$$\begin{aligned} |f(z)|^p &\leqslant \int_{\mathbb{D}} \frac{|f'(w)|^p\,(1-|w|^2)^{\gamma p}}{|1-\overline{w}z|^{p+\gamma p-\varepsilon}} dA(w) \left(\int_{\mathbb{D}} |1-\overline{w}z|^{-\frac{\varepsilon}{p-1}}\right)^{p-1} \\ &\asymp \frac{1}{(1-|z|^2)^{\varepsilon-2p+2}} \int_{\mathbb{D}} \frac{|f'(w)|^p\,(1-|w|^2)^{\gamma p}}{|1-\overline{w}z|^{p+\gamma p-\varepsilon}} dA(w), \quad z \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

那么由 Fubini 定理，若 $f \in D_s^p$

$$\|T_g f\|_{D_s^p}^p \leqslant \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^p\,(1-|w|^2)^{\gamma p} \int_{\mathbb{D}} \frac{|g'(z)|^p\,(1-|z|^2)^{s-\beta}}{|1-\overline{w}z|^{p+\gamma p-\varepsilon}} dA(z)\,dA(w). \tag{5.1}$$

现在将内积分记为 $I(g,w)$，固定 $w \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ 并考虑 $N(w) = \min\left\{n \in \mathbb{N}: 2^n(1-|w|^2) \geqslant 1\right\}$，对每个 $0 \leqslant k < N(w)$ 集合 $S_k(w) = S\left((1-2^k(1-|w|^2))e^{i\arg w}\right)$，

$S_{-1}(w)=\varnothing$ 和 $S_{N(w)}=\mathbb{D}$。那么 $|1-wz|\eqsim 2^k(1-|w|^w)$，若 $z\in S_k(w)\backslash S_{k-1}(w)$，则

$$\begin{aligned}I(g,w)&=\sum_{k=0}^{N(w)}\int_{S_k(w)\backslash S_{k-1}(w)}\frac{|g'(z)|^p\,(1-|z|^2)^{s-\beta}}{|1-\overline{w}z|^{p+\gamma p-\varepsilon}}dA(z)\\&\lesssim(1-|z|^2)^{\varepsilon-p-\gamma p}\sum_{k=0}^{N(w)}\frac{1}{2^{p+\gamma p-\varepsilon}}\int_{S_k(w)}\left|g'(z)\right|^p(1-|z|^2)^{s-\beta}dA(z)\\&\lesssim\|g-g(0)\|^p_{M_0(D^p_{s-\beta})}(1-|z|^2)^{\varepsilon-p-\gamma p+s-\beta-(p-2)}\sum_{k=0}^{N(w)}\frac{1}{2^{p+\gamma p-\varepsilon-s+\beta+p-2}}\\&=\|g-g(0)\|^p_{M_0(D^p_{s-\beta})}(1-|z|^2)^{s-\gamma p}\sum_{k=0}^{N(w)}\frac{1}{2^{\gamma p-s}}\lesssim\|g-g(0)\|^p_{M_0(D^p_{s-\beta})}(1-|z|^2)^{s-\gamma p}\end{aligned}$$

将其与 (5.1) 结合

$$\|T_gf\|^p_{D^p_s}\lesssim\|g-g(0)\|^p_{M_0(D^p_{s-\beta})}\int_{\mathbb{D}}\left|f'(z)\right|^p(1-|z|^2)^sdA(z)\leqslant\|g-g(0)\|^p_{M_0(D^p_{s-\beta})}\|f\|^p_{D^p_s}.$$

□

Prop命题 5.3. 设 $p,s,\alpha>0$ 属于容许范围，且 $g\in\mathcal{U}$。以下结论成立：(i) 若 $g\in M_0(D^p_s)$，则存在 $\beta>0$ 使得 $g\in M_0(D^p_{s-\beta})$；(ii) T_g 在 $M_\alpha(D^p_s)$ 上有界，当且仅当 $g\in M_0(D^p_s)$。

此外，

$$\|g-g(0)\|_{M_0(D^p_s)}\lesssim\|T_g\|_{M_\alpha(D^p_s)}\lesssim\|g-g(0)\|_{M_0(D^p_{s-\beta})}.$$

证明。为验证 (i)，重新考察容许范围可知，除 $1<p<2$ 和 $s=0$ 的情形外，总可以取 $\beta>0$ 使得 p，并且 $s'=s-\beta$ 满足容许范围，因此由引理 4.2 可得

$$g\in M_0(D^p_s)\Leftrightarrow g\in\mathcal{B}\Leftrightarrow g\in M_0(D^p_{s-\beta}).$$

对于 $1<p<2$ 和 $s=0$ 的情形，若取 $\beta<\frac{2-p}{2}$ 和 $\beta<\beta'<\frac{2-p}{2}$，我们可以重复引理 4.1 的证明来验证

$$Q_{\frac{2(\beta'-\beta)}{p}}\subset M_0(D^p_{-\beta})\subset\mathcal{B},$$

因此，按照引理 4.2 的相同论证，我们得到

$$g\in M_0(D^p_0)\Leftrightarrow g\in\mathcal{B}\Leftrightarrow g\in M_0(D^p_{-\beta}).$$

为证明 (ii) 中的等价性，首先由 (i) 和命题5.2 可得充分性。反过来，通过对函数进行检验

$$f_\zeta(z)=\frac{1}{(1-\overline{\zeta}z)^\alpha},\quad z,\zeta\in\mathbb{D}.$$

那么我们知道 $\sup_{\zeta\in\mathbb{D}}\|f_\zeta\|_{M_\alpha(D^p_s)}<\infty$，因此

$$\begin{aligned}\|T_g\|^p_{M_\alpha(D^p_s)}&\gtrsim\sup_{a\in\mathbb{D}}\frac{1}{(1-|a|^2)^{s-(p(\alpha+1)-2)}}\int_{S(a)}\frac{|g'(z)|^p\,(1-|z|^2)^s}{\left|1-\overline{\zeta}z\right|^{p\alpha}}dA(z)\\&\geqslant\frac{1}{(1-|\zeta|^2)^{s-(p(\alpha+1)-2)}}\int_{S(\zeta)}\frac{|g'(z)|^p\,(1-|z|^2)^s}{\left|1-\overline{\zeta}z\right|^{p\alpha}}dA(z)\\&\asymp\frac{1}{(1-|\zeta|^2)^{s-(p-2)}}\int_{S(\zeta)}\left|g'(z)\right|^p(1-|z|^2)^sdA(z),\end{aligned}$$

最后，对 $\zeta\in\mathbb{D}$ 取上确界，证明即告结束。 □

既然我们已经刻画了使 T_g 有界的单叶符号，现在来讨论紧性。为此，我们证明以下引理。

引理 5.4。 设 p、 s、 $\alpha>0$ 属于容许范围，则以下结论成立：

(i) 乘法算子

$$Mf(z)=zf(z),\quad z\in\mathbb{D},$$

是有界的；

(ii) 经典 *Volterra* 算子

$$Tf(z)=\int_0^z f(\zeta)d\zeta,$$

在 $M_\alpha(D_s^p)$ 上是紧的；

(iii) 对于每个多项式 P， T_P在 $M_\alpha(D_s^p)$上是紧的。

证明。 首先，我们注意到，根据命题 5.3， T 是有界的，因此 M 也有界

$$\begin{aligned}\|Mf\|^p_{M_\alpha(D_s^p)}&=\sup_{a\in\mathbb{D}}\frac{1}{(1-|a|^2)^{s-(p(\alpha+1)-2)}}\int_{S(a)}\left|f(z)+zf'(z)\right|^p(1-|z|^2)^s dA(z)\\&\lesssim\|Tf\|^p_{M_\alpha(D_s^p)}+\|f\|^p_{M_\alpha(D_s^p)}\lesssim\|f\|_{M_\alpha(D_s^p)},\end{aligned}$$

这就证明了 (i)。

现在来验证 (ii)。首先，若 $s>p-1$，则由 [19, 定理 5.2],可知 T的紧性，因此我们只需验证情形 $s\leqslant p-1$。

设 $\{f_n\}$ 是 $M_\alpha(D_s^p)$上的一个一致有界序列，且 $\{f_n\}$ 在 $\mathbb{D}$的紧子集上一致收敛到零，我们需要验证

$$\lim_{n\to\infty}\|Tf_n\|_{M_\alpha(D_s^p)}=0,$$

为简化记号，令 $\beta=s-(p(\alpha+1)-2)$，我们将范数分成两项

$$\begin{aligned}\|Tf_n\|^p_{M_\alpha(D_s^p)}&\lesssim|f_n(0)|^p\sup_{a\in\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|z|^2)^s(1-|a|^2)^\beta}{|1-\overline{a}z|^{2\beta}}dA(z)\\&\quad+\sup_{a\in\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}}|f_n(z)-f_n(0)|^p\frac{(1-|z|^2)^s(1-|a|^2)^\beta}{|1-\overline{a}z|^{2\beta}}dA(z)\\&=I(f_n)+II(f_n),\end{aligned}$$

对于第一项，只需注意到上确界有限；然后，由于 f_n 逐点收敛到 0，我们得到

$$\lim_{n\to\infty}I(f_n)=0.$$

对于第二项，根据 [9, 引理 2.1] （注意，该引理要求 $2\beta<2+s$，这等价于 $s<2(p-1)+2p\alpha$，而这由 $s\leqslant p-1$成立），于是

$$II(f_n)\lesssim\sup_{a\in\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}}\left|f_n'(z)\right|^p\frac{(1-|z|^2)^{s+p}(1-|a|^2)^\beta}{|1-\overline{a}z|^{2\beta}}dA(z).$$

令 $\varepsilon>0$，我们来检查是否存在 $n_0\in\mathbb{N}$，使得若 $n\geqslant n_0$，则

$$II(f_n')=\sup_{a\in\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}}\left|f_n'(z)\right|^p\frac{(1-|z|^2)^{s+p}(1-|a|^2)^\beta}{|1-\overline{a}z|^{2\beta}}dA(z)<\varepsilon.$$

取 $R>0$ 使得 $(1-R^2)^p\leqslant\frac{\varepsilon}{2\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|^p_{M_\alpha(D_s^p)}}$；另一方面， f_n'（因为 f_n确实）在 $D(0,\ R)$上一致收敛于零，于是存在 $n_0\in\mathbb{N}$，使得若 $n\geqslant n_0$，则对所有 $z\in D(0,\ R)$都有 $|f_n'(z)|^p\leq\frac{\varepsilon}{2S}$，其中

$$S=\sup_{a\in\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|z|^2)^{s+p}(1-|a|^2)^\beta}{|1-\overline{a}z|^{2\beta}}dA(z)<\infty,$$

综合以上，我们得到对于每个 $n \geqslant n_0$

$$\begin{aligned} II(f_n') &\leqslant \sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\overline{D(0,R)}} \left|f_n'(z)\right|^p \frac{(1-|z|^2)^{s+p}(1-|a|^2)^\beta}{|1-\overline{a}z|^{2\beta}} dA(z) \\ &\quad + \sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\{z\in\mathbb{D}:|z|>R\}} \left|f_n'(z)\right|^p \frac{(1-|z|^2)^{s+p}(1-|a|^2)^\beta}{|1-\overline{a}z|^{2\beta}} dA(z) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + (1-R^2)^p \left\|f_n\right\|^p_{M_\alpha(D_s^p)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

于是我们得到

$$\lim_{n\to\infty} \|Tf_n\|_{M_\alpha(D_s^p)} = 0,$$

因此 T 在 $M_\alpha(D_s^p)$上是紧的。
证明 (i) 和 (ii) 后，(iii) 由 [26, 命题 2.2 (ii)] 得出。 □

对于每个 $\alpha \geqslant 0$，考虑有界算子族

$$\mathcal{L}_\alpha = \left\{ L_{a,\alpha} : L_{a,\alpha}(f) = (1-|a|^2)^\alpha (f\circ\varphi_a - f(a)),\, a\in\mathbb{D} \right\},$$

在 D_s^p上，那么在 $o-O$ Perfekt 于 [20] 中引入的 types 空间的背景下，我们有

$$M_\alpha(D_s^p) = M(D_s^p, \mathcal{L}_\alpha) \quad \text{and} \quad m_\alpha(D_s^p) = M_0(D_s^p, \mathcal{L}_\alpha).$$

命题 5.5 节。设 p、s、α 属于容许范围。设 $g\in\mathcal{U}$，则下列条件等价：(i) T_g 在 $M_\alpha(D_s^p)$ 上是紧的；(ii) $g\in m_0(D_s^p)$；(iii) T_g 在 $M_\alpha(D_s^p)$ 上是弱紧的；(iv) $T_g(M_\alpha(D_s^p)) \subset m_\alpha(D_s^p)$。

证明。(i) 蕴含 (iii) 是由定义得出的。
为证明 (iii) 与 (iv) 等价，首先由 [20, 定理 2.2] 以及前面的观察可知

$$(m_\alpha(D_s^p))^{\star\star} \simeq M_\alpha(D_s^p).$$

还可以验证，$M_\alpha(D_s^p)$ 在带有弱-$\star$ 拓扑的 $m_\alpha(D_s^p)$ 的对偶空间中连续嵌入，因此通过一个逼近论证可得 $T_g^{\star\star} = T_g$。然后由 Gantmacher 定理 [1, 定理 5 可得等价性。(iii) 蕴含 (ii): 令 $g\in U$，考虑$\{a_n\}\subset\mathbb{D}$ 使得 $|a_n|\to 1^-$，不失一般性，可以假设 $\lim_{n\to\infty} a_n = \zeta\in\mathbb{T}$；为证明 $g\in m_0(D_s^p)$，只需验证

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1-|a_n|^2)^{s-(p-2)}} \int_{S(a_n)} \left|g'(z)\right|^p (1-|z|^2)^s dA(z) = 0.$$

let

$$f_n(z) = \frac{1}{(1-\overline{a_n}z)^\alpha}, \quad \text{and} \quad f_0(z) = \frac{1}{(1-\overline{\zeta}z)^\alpha},$$

根据引理 3.4，我们知道 $sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \|f_n\|_{M_\alpha(D_s^p)} < \infty$。现在考虑 $h_n = f_n - f_0$，那么它们在 $M_\alpha(D_s^p)$ 上也一致有界。此外，f_n 在一个更大的圆盘上一致收敛到 f，于是 $\lim_{n\to\infty}\|h_n\|_{D_s^p} = 0$，那么

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(1-|a_n|^2)^{s-(p-2)}} \int_{S(a_n)} \left|g'(z)\right|^p (1-|z|^2)^s dA(z) \\ &\asymp \frac{1}{(1-|a_n|^2)^{s-(p(\alpha+1)-2)}} \int_{S(a_n)} \left|f_n(z)g'(z)\right|^p (1-|z|^2)^s dA(z) \\ &\lesssim \frac{1}{(1-|a_n|^2)^{s-(p(\alpha+1)-2)}} \int_{S(a_n)} \left|(T_g f_0)'(z)\right|^p (1-|z|^2)^s dA(z) + \|T_g(h_n)\|^p_{M_\alpha(D_s^p)} \end{aligned}$$

对于第一项，根据 (iv) $T_g(M_\alpha(D_s^p)) \subset m_\alpha(D_s^p)$，特别是 $T_g f_0 \in m_\alpha(D_s^p)$，这意味着

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1-|a_n|^2)^{s-(p(\alpha+1)-2)}} \int_{S(a_n)} \left|(T_g f_0)'(z)\right|^p (1-|z|^2)^s dA(z) = 0,$$

对于第二项，由 [21, 推论3.3], 对每个 $\varepsilon > 0$ 存在 $N > 0$ 使得

$$\|T_g(h_n)\|_{M_\alpha(D_s^p)} \leqslant N \|h_n\|_{D_s^p} + \varepsilon \|h_n\|_{M_\alpha(D_s^p)},$$

利用族 h_n 在 $M_\alpha(D_s^p)$ 上一致有界以及$\lim_{n\to\infty} \|h_n\|_{D_s^p}$ =0这一事实，我们得出

$$\|T_g(h_n)\|_{M_\alpha(D_s^p)} = 0.$$

尚需验证(ii)蕴含(i)。首先，由于 $g \in m_0(D_s^p) \cap \mathcal{U}$，命题 5.3 (i)的同一论证表明 $g \in m_0(D_{s-\beta}^p)$，因此存在多项式序列 $\{P_n\}$使得$\lim_{n\to\infty} \|g - P_n\|_{M_0(D_{s-\beta}^p)} = 0$。若现在考虑相应的Volterra算子$T_{P_n}$，由引理 5.4可知它们是紧的，并且由命题5.2

$$\|T_g - T_{P_n}\|_{M_\alpha(D_s^p)} = \|T_{g-P_n}\|_{M_\alpha(D_s^p)} \lesssim \|g - P_n\|_{M_0(D_{s-\beta}^p)} \to 0,$$

因此， T_g 可以在算子范数下由一列紧算子逼近，那么 T_g就是紧的。□

5.2. **一个技术性引理**。 本节旨在证明一个与 [11,命题 3.5] 类似的结果，但处于 $M_\alpha(D_s^p)$的背景下。我们分别处理 $\alpha = 0$ 和 $\alpha > 0$ 这两种情况。首先，如果 $\alpha = 0$，则 $M_0(D_s^p)$ 的莫比乌斯不变性使我们能够毫不费力地改写[11, 命题 3.5] 。

命题 5.6。 设 $1 < p < \infty$、 $p-2 < s < \infty$ 和 $g \in M_0(D_s^p) \backslash F_{\log,\,0}(p、\ p-2、\ s-(p-2))$。存在一个函数 $F \in M_0(D_s^p)$ 使得 $T_g F \in M_0(D_s^p) \backslash m_0(D_s^p)$.

证明。 若 $g \in M_0(D_s^p) \backslash m_0(D_s^p)$，则函数 $F \equiv 1$ 满足所需性质。另一方面，若 $g \in F_{\log}(p,\ p-2,\ s-(p-2)) \backslash F_{\log,\,0}(p,\ p-2,\ s-(p-2))$，则由定理 C 可知 $T_g(M_0(D_s^p)) \subset M_0(D_s^p)$ 且 $T_g(M_0(D_s^p)) \nsubseteq m_0(D_s^p)$；因此，我们可以找到一个函数 F，正如定理的结论所述。

因此，我们可以将问题归结为情形 $g \in m_0(D_s^p) \backslash F_{\log}(p,\ p-2,\ s-(p-2))$。对于一点 w，记 $w^\star$ 为 0 与 w 之间的双曲中点，并定义函数

$$\beta_w(z) = \log \frac{e}{1 - \varphi_{w^\star}(z)\overline{w}},$$

这些函数的基本性质总结于 [11, 引理 3.4] 中。此外，由于 $M_0(D_s^p)$ 的 Möbius 不变性以及引理 3.4，我们得到，对每个 $w \in \mathbb{D}$，都有 $\|\beta_w\|_{M_0(D_s^p)} \lesssim 1$。随后，我们基本上可以仿照 [11, 命题 3.5] 的证明（另见命题 5.8），构造一个区间序列 I_n 和一个形如以下形式的函数序列 F_n

$$F_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \beta_{w_k}(z),$$

对于某个 $w_k \in \mathbb{D}$，使得

(1) $0 \leqslant a_k \leqslant 2^{-k}$; (2)

对所有 $n \in \mathbb{N}$，均有

$$\frac{1}{|I_n|^{s-(p-2)}} \int_{S(I_n)} (\Re F_n(z))^p \left|g'(z)\right|^p (1-|z|^2)^s dA(z) \geqslant 1;$$

(3) 对所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有 $\|T_g F_n\|_{M_0(D_s^p)} \leqslant \max\{\|T_g F_{n-1}\|_{M_0(D_s^p)} + 2^{-n} C(g),\ C(g)\}$，其中$C(g)$ 是一个仅取决于 g 的正常数。

构造出这些序列后，函数 $F := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \beta_{w_k}$ 满足所需的假设。 $F \in M_0(D_s^p)$ 作为

$$\|F\|_{M_0(D_s^p)} \lesssim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \|\beta_{w_k}\|_{M_0(D_s^p)} \lesssim \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty.$$

现在，反复应用性质 (3)，我们得到

$$\|T_g F_n\|_{M_0(D_s^p)} \leqslant \max\{\|T_g F_0\|_{M_0(D_s^p)} + \sum_{r=1}^{n} 2^{-r} C(g), C(g)\} \leqslant \|g\|_{M_0(D_s^p)} + C(g),$$

于是，根据 Fatou 引理，若 $I \subset \mathbb{T}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{|I|^{s-(p-2)}} \int_{S(I)} \left|g'(z)F(z)\right|^p (1-|z|^2)^s dA(z) &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{|I|^{s-(p-2)}} \int_{S(I)} \left|g'(z)F_n(z)\right|^p (1-|z|^2)^s dA(z) \\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \|T_g F_n\|^p_{M_0(D_s^p)} \leqslant \|g\|_{M_0(D_s^p)} + C(g),\end{aligned}$$

因此 $T_g F \in M_0(D_s^p)$。最后，由 (2) 可轻易得到 $T_g F \notin m_0(D_s^p)$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|I_n|^{s-(p-2)}} \int_{S(I_n)} \left|g'(z)F(z)\right|^p (1-|z|^2)^s dA(z) \\ &\geqslant \frac{1}{|I_n|^{s-(p-2)}} \int_{S(I_n)} (\Re F_n(z))^p \left|g'(z)\right|^p (1-|z|^2)^s dA(z) \geqslant 1.\end{aligned}$$

□

现在处理 $\alpha > 0$ 的情形会带来两个主要困难。首先，缺乏 Möbius 不变性，迫使我们构造另一类测试函数；其次，我们需要对假设中的符号 g 施加更强的条件。在这个引理中，我们构造一些测试函数。

引理 5.7. 设 $1 < p < \infty$、 $p-2 < s < \infty$ 和 $0 < \alpha < \frac{s-(p-2)}{p}$。若 $g \in \bigcap_{0<\beta<\frac{s-(p-2)}{p}} M_\beta(D_s^p)$，则存在一族函数 $\{\beta_w^\alpha\}_{w\in\mathbb{D}}$，使得。

(i) 上确界 $\sup_{w\in\mathbb{D}} \|\beta_w^\alpha\|_{M_\alpha(D_s^p)} < \infty$;
(ii) $\beta_w^\alpha \in H^\infty$ 对每个 $w \in \mathbb{D}$;
(iii) 对于每个 $z \in S(w)$

$$|\beta_w^\alpha(z)| \gtrsim \frac{1}{(1-|w|^2)^\alpha};$$

(iv) 对于所有 $\delta > 0$，存在 $\delta' > 0$ 使得，

$$\sup_{|I|\geqslant\delta} \frac{1}{|I|^{s-(p(\alpha+1)-2)}} \int_{S(I)} \left|g'(z)\beta_w^\alpha(z)\right|^p (1-|z|^2)^s dA(z) \leqslant 1, \quad 1-|w| \leqslant \delta'.$$

证明。如果 $\alpha > 0$，对于每个 $\lambda > 0$ 和 $w \in \mathbb{D}$，考虑引理 3.4 中给出的测试函数 ，

$$f_{w,\alpha,\lambda}(z) = \frac{(1-|a|^2)^\lambda}{(1-\overline{w}z)^{\alpha+\lambda}},$$

对于这一族函数，(i)、(ii) 和 (iii) 显然成立；为证明 (iv)，我们固定 $\lambda = \frac{s-(p-2)}{p} - \alpha$ 并取 $\beta_w^\alpha = f_{w,\,\alpha,\,\lambda}$。我们来检验这一族是否满足 (iv)，首先只需注意到

$$\sup_{|I|\geqslant\delta} \frac{\int_{S(I)} |g'(z)\beta_w^\alpha(z)|^p (1-|z|^2)^s dA(z)}{|I|^{s-(p(\alpha+1)-2)}} \leqslant \frac{(1-|w|^2)^{s-(p(\alpha+1)-2)}}{\delta^{s-(p(\alpha+1)-2)}} \int_{\mathbb{D}} \left|g'(z)\right|^p \frac{(1-|z|)^s}{|1-\overline{w}z|^{s-(p-2)}} dA(z),$$

我们来关注右侧的积分。

按照命题5.2证明中的思路，固定 $w \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ 并考虑 $N(w) = \min\left\{n \in \mathbb{N}\colon 2^n(1-|w|^2) \geqslant 1\right\}$，对于每个 $0 \leqslant k < N(w)$ 集合 $S_k(w) = S\left((1-2^k(1-|w|^2))e^{i\arg w}\right)$、$S_{-1}(w) = \varnothing$ 和 $S_{N(w)} = \mathbb{D}$。那么对于每个 $0 < \gamma < \frac{s-(p-2)}{p}$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} |g'(z)|^p \frac{(1-|z|)^s}{|1-\overline{w}z|^{s-(p-2)}} dA(z) &= \sum_{k=0}^{N(w)} \int_{S_k(w)\backslash S_{k-1}(w)} |g'(z)|^p \frac{(1-|z|^2)^s}{|1-\overline{w}z|^{s-(p-2)}} dA(z) \\ &\lesssim (1-|w|^2)^{-(s-(p-2))} \sum_{k=0}^{N(w)} \frac{1}{2^{k(s-(p-2))}} \int_{S_k(w)} |g'(z)|^p (1-|z|^2)^s dA(z) \\ &\leqslant (1-|w|^2)^{-p\gamma} \|g\|^p_{M_\gamma(D^p_s)} \sum_{k=0}^{N(w)} \frac{1}{2^{kp\gamma}} \\ &\leqslant C(\gamma)(1-|w|^2)^{-p\gamma} \|g\|^p_{M_\gamma(D^p_s)}.\end{aligned}$$

固定 $\gamma = \frac{s-(p-2)}{2p} - \frac{\alpha}{2}$，我们得到

$$\sup_{|I|\geqslant\delta} \frac{\int_{S(I)} |g'(z)\beta^\alpha_w(z)|^p (1-|z|^2)^s dA(z)}{|I|^{s-(p(\alpha+1)-2)}} \lesssim \frac{(1-|w|^2)^{\frac{s-(p-2)-p\alpha}{2}}}{\delta^{s-(p(\alpha+1)-2)}} \|g\|^p_{M_\gamma(D^p_s)},$$

根据假设 $g \in M_\gamma(D^p_s)$ 和 $\frac{s-(p-2)-p\alpha}{2} > 0$，因此固定 $\delta > 0$ 后，存在 $\delta' > 0$ 使得

$$\sup_{|I|\geqslant\delta} \frac{\int_{S(I)} |g'(z)\beta^\alpha_w(z)|^p (1-|z|^2)^s dA(z)}{|I|^{s-(p(\alpha+1)-2)}} \leqslant 1, \quad 1-|w| \leqslant \delta'.$$

□

命题 5.8。设 $1 < p < \infty$、$p-2 < s < \infty$ 和 $0 < \alpha < \frac{s-(p-2)}{p}$。若 $g \in \bigcap_{0<\beta<\frac{s-(p-2)}{p}} M_\beta(D^p_s)\backslash M_0(D^p_s)$，则存在一个函数 $F \in M_\alpha(D^p_s)$，使得 $T_gF \in M_\alpha(D^p_s)\backslash m_\alpha(D^p_s)$。

证明。我们将构造一列弧 I_n、一列正数 $\{\delta_n\}$以及一列具有如下形式的函数 F_n

$$F_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \beta^\alpha_{w_k}(z),$$

对于某个 $w_k \in \mathbb{D}$，使得

（1） $0 \leqslant a_k \leqslant 2^{-k}$，（2）

$|I_k| > \delta_n$ 若 $k \leqslant n$，（3）

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立

$$\frac{1}{|I_n|^{s-(p(\alpha+1)-2)}} \int_{S(I_n)} |F_n(z)g'(z)|^p (1-|z|^2)^s dA(z) \geqslant \frac{1}{2},$$

（4）对于所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有 $\|T_gF_n\|_{M_\alpha(D^p_s)} \leqslant$ 最大值 $\left(\|T_gF_{n-1}\|_{M_\alpha(D^p_s)} + 2^{-n}C(g), C(g)\right)$，其中$C(g)$ 是一个仅依赖于 g 的正常数。

我们将进行递归定义。首先，取 $a_0 = 1$, $w_0 = 1$, $I_0 = \mathbb{T}$ 和 $\delta_0 = 1$，使得$F_0 \equiv 1$。对于递归步骤，假设 $I_1, \ldots I_{n-1}, w_1, \ldots, w_{n-1}, \delta_1, \ldots \delta_{n-1}$ 以及 $a_1, \ldots, a_{n-1}$。由于根据引理 5.7 (ii)，$g \in \bigcap_{0<\beta<\frac{s-(p-2)}{p}} M_\beta(D^p_s) \subset m_\alpha(D^p_s)$ 且 $F_{n-1} \in H^\infty$，我们可以找到$0 < \delta_n < |I_{n-1}|$ 使得

$$\sup_{|I|\leqslant\delta_n} \frac{1}{|I_n|^{s-(p(\alpha+1)-2)}} \int_{S(I)} |F_{n-1}(z)g'(z)|^p (1-|z|^2)^s dA(z) \leqslant \frac{1}{2^p}, \tag{5.2}$$

现在，根据引理 5.7，存在 $0 < \delta'_n < \delta_n$，使得若 $1 - |w| < \delta'_n$，则

$$\sup_{|I| \geqslant \delta_n} \frac{1}{|I_n|^{s-(p(\alpha+1)-2)}} \int_{S(I)} \left|\beta_w^\alpha(z) g'(z)\right|^p (1-|z|^2)^s dA(z) \leqslant 1. \tag{5.3}$$

此外，由引理 5.7 (iii)，由于 $g \notin M_0(D_s^p)$，存在某个 $w_n \in \mathbb{D}$，使得 $1-|w_n| \leqslant \delta'_n$

$$\frac{1}{|I_{w_n}|^{s-(p(\alpha+1)-2)}} \int_{S(I_{w_n})} \left|\beta_{w_n}^\alpha(z) g'(z)\right|^p (1-|z|^2)^s dA(z) \geqslant 2^{pn}.$$

另一方面，由于 $g \in M_\alpha(D_s^p)$，上确界

$$M_n^p := \sup_{|I| \leqslant \delta_n} \frac{1}{|I|^{s-(p-2)}} \int_{S(I)} \left|\beta_{w_n}^\alpha(z) g'(z)\right|^p (1-|z|^2)^s dA(z) \geqslant 2^{pn}, \tag{5.4}$$

实际上是一个最大值，并在某个区间 $I_n \subset \mathbb{T}$、$|I_n| \leqslant \delta'_n$ 处取得。我们断言该函数

$$F_n := F_{n-1} + M_n^{-1} \beta_{w_n}$$

满足所需的性质。
显然，由 (5.4) 可知 $a_n = M_n^{-1} \leqslant 2^{-n}$，而 (2) 根据 δ_n 的定义成立。(3) 由 (5.2) 和 (5.4) 得出

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|I_n|^{s-(p(\alpha+1)-2)}} \int_{S(I_n)} \left|F_n(z) g'(z)\right|^p (1-|z|^2)^s dA(z)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geqslant \left(\frac{M_n^{-p}}{|I_n|^{s-(p(\alpha+1)-2)}} \int_{S(I_n)} \left|\beta_{w_n}^\alpha(z) g'(z)\right|^p (1-|z|^2)^s dA(z)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&- \left(\frac{1}{|I_n|^{s-(p(\alpha+1)-2)}} \int_{S(I_n)} \left|F_{n-1}(z) g'(z)\right|^p (1-|z|^2)^s dA(z)\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

最后，为了得到 (4)，令 $I \subset \mathbb{T}$，我们考虑两种不同的情况。首先，如果 $|I| \geqslant \delta_n$，那么根据 (5.3)

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|I|^{s-(p(\alpha+1)-2)}} \int_{S(I)} \left|g'(z) F_n(z)\right|^p (1-|z|^2)^s\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant M_n^{-1} \left(\frac{1}{|I|^{s-(p(\alpha+1)-2)}} \int_{S(I)} \left|g'(z) \beta_{w_n}^\alpha(z)\right|^p (1-|z|^2)^s\right)^{\frac{1}{p}} + \|T_g F_{n-1}\|_{M_\alpha(D_s^p)} \\
&\leqslant 2^{-n} + \|T_g F_{n-1}\|_{M_\alpha(D_s^p)},
\end{aligned}$$

另一方面，如果 $|I| < \delta_n$，那么由 (5.2) 和 (5.4) 可知

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|I|^{s-(p(\alpha+1)-2)}} \int_{S(I)} \left|F_n(z) g'(z)\right|^p (1-|z|^2)^s dA(z)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \left(\frac{M_n^{-p}}{|I|^{s-(p(\alpha+1)-2)}} \int_{S(I)} \left|\beta_{w_n}^\alpha(z) g'(z)\right|^p (1-|z|^2)^s dA(z)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \left(\frac{1}{|I|^{s-(p(\alpha+1)-2)}} \int_{S(I)} \left|F_{n-1}(z) g'(z)\right|^p (1-|z|^2)^s dA(z)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant 1 + \frac{1}{2} = C(g).
\end{aligned}$$

既然我们已经构造了这个序列，证明便可按如下方式完成。首先，由引理 5.7 (i) 可知

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left\|\beta_{w_k}^{\alpha}\right\|_{M_\alpha(D_s^p)} \lesssim \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty,$$

则 $F:=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \beta_{w_k}^{\alpha} \in M_\alpha(D_s^p)$，我们来验证 F 满足所需性质。通过迭代 (4),

$$\|T_g F_n\|_{M_\alpha(D_s^p)} \leqslant \max\left(\|T_g F_0\|_{M_\alpha(D_s^p)} + C(g)\sum_{r=0}^{n} 2^{-r}, C(g)\right) \leqslant \|g\|_{M_\alpha(D_s^p)} + C(g).$$

现在，由 Fatou 引理，若 $I \subset \mathbb{T}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{|I|^{s-(p(\alpha+1)-2)}}\int_{S(I)} \left|g'(z)F(z)\right|^p (1-|z|^2)^s dA(z) &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{|I|^{s-(p(\alpha+1)-2)}}\int_{S(I)} \left|g'(z)F_n(z)\right|^p (1-|z|^2)^s dA(z)\\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \|T_g F_n\|_{M_\alpha(D_s^p)}^p \leqslant \|g\|_{M_\alpha(D_s^p)} + C(g),\end{aligned}$$

因此 $T_g F \in M_\alpha(D_s^p)$。为验证 $T_g F \notin m_\alpha(D_s^p)$，只需注意到若 n 足够大，则由 (2)、(4) 和 (5.3)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|I_n|^{s-(p(\alpha+1)-2)}}\int_{S(I_n)} \left|F(z)g'(z)\right|^p (1-|z|^2)^s dA(z) \geqslant \frac{1}{|I_n|^{s-(p(\alpha+1)-2)}}\int_{S(I_n)} \left|F_n(z)g'(z)\right|^p (1-|z|^2)^s dA(z)\\ &- \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^p \frac{1}{|I_n|^{s-(p(\alpha+1)-2)}}\int_{S(I_n)} \left|\beta_{w_n}^{\alpha}(z)g'(z)\right|^p (1-|z|^2)^s dA(z) \geqslant 1 - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^p > 0.\end{aligned}$$

□

最后，应用命题 5.5 使我们能够针对单叶符号将这最后一个命题再稍作推进。

推论 5.9. 设 p、s、$\alpha > 0$ 属于容许范围。若 $g \in \mathcal{U}$ 使得 $g \in \bigcap_{0<\beta<\frac{s-(p-2)}{p}} M_\beta(D_s^p)\backslash m_0(D_s^p)$，那么存在一个函数 $F \in M_\alpha(D_s^p)$，使得 $T_g F \in M_\alpha(D_s^p)\backslash m_\alpha(D_s^p)$。

证明。我们分两种情况讨论：一方面，如果 $g \in \bigcap_{0<\beta<\frac{s-(p-2)}{p}} M_\beta(D_s^p)\backslash M_0(D_s^p)$ 该结论由命题 5.8 得出。另一方面，如果 $g \in M_0(D_s^p)\backslash m_0(D_s^p)$ 根据命题 5.3 (ii)，$T_g(M_\alpha(D_s^p)) \subset M_\alpha(D_s^p)$ 并且根据命题 5.5 $T_g(M_\alpha(D_s^p)) \nsubseteq m_\alpha(D_s^p)$，因此存在 $F \in M_\alpha(D_s^p)$，使得 $T_g F \in M_\alpha(D_s^p)\backslash m_\alpha(D_s^p)$。□

6. Main results on semigroups

6.1. 关于 $[\varphi_t,\ M_\alpha(D_s^p)]$的基本性质。 我们的主要目标是研究参数容许范围内 $M_\alpha(D_s^p)$ 的强连续性的极大子空间。

引理 6.1. 设 p、s、α 属于容许范围。则有：

(i) 若 $s > p-1$，则 $H^\infty \subset M_\alpha(D_s^p)$; (ii) 若 $2 \leqslant p < \infty$ 且 $p-2 \leqslant s \leqslant p-1$，则 $B^p \subset M_\alpha(D_s^p)$; (iii) 若 $1 < p < 2$ 且 $0 \leqslant s \leqslant p-1$，则 $\mathcal{D} \subset M_\alpha(D_s^p)$。

证明。(i) 设 $f \in H^\infty$ 和 $a \in \mathbb{D}$，由 $|f'(z)| \lesssim \frac{\|f\|_{H^\infty}}{1-|z|^2}$，$z \in \mathbb{D}$ 可得

$$\begin{aligned}\|f\circ\varphi_a - f(a)\|_{D_s^p}^p &\lesssim \|f\|_{H^\infty}^p \int_{\mathbb{D}} \left(\frac{|\varphi_a'(z)|}{1-|\varphi_a(z)|^2}\right)^p (1-|z|^2)^s dA(z)\\ &= \|f\|_{H^\infty}^p \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{s-p} dA(z) \lesssim \|f\|_{H^\infty}^p,\end{aligned}$$

因此 $f \in M_0(D_s^p) \subset M_\alpha(D_s^p)$。

(ii) 由于 Besov空间 在 Mobi¨us 变换下保持不变，并且 $s \geqslant p-2$，如果 $f \in B^p$ 且 $a \in \mathbb{D}$，则

$$\|f \circ \varphi_a - f(a)\|_{D_s^p}^p \leqslant \|f \circ \varphi_a - f(a)\|_{B^p}^p = \|f - f(0)\|_{B^p}^p \leqslant \|f\|_{B^p}^p ,$$

因此 $f \in M_0(D_s^p) \subset M_\alpha(D_s^p)$。

(iii) 设 $f \in \mathcal{D}$，在这种情况下，我们将利用命题 3.1，即只需证明

$$\sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \left|f'(z)\right|^p \frac{(1-|z|^2)^s (1-|a|^2)^{s-(p-2)}}{\left|1-\overline{a}z\right|^{2(s-(p-2))}} dA(z) < \infty.$$

由 H¨older 不等式和引理 3.10]可得 $a \in \mathbb{D}$ [30,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{D}} \left|f'(z)\right|^p \frac{(1-|z|^2)^s (1-|a|^2)^{s-(p-2)}}{\left|1-\overline{a}z\right|^{2(s-(p-2))}} dA(z) \\
&\leqslant (1-|a|^2)^{s-(p-2)} \left(\int_{\mathbb{D}} \left|f'(z)\right|^2 dA(z)\right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{\frac{2s}{2-p}}}{\left|1-\overline{a}z\right|^{4+\frac{4s}{2-p}}} dA(z)\right)^{\frac{2-p}{2}} \\
&\asymp \|f\|_{\mathcal{D}}^p (1-|a|^2)^{s-(p-2)} \left(\frac{1}{(1-|a|^2)^{2+\frac{2s}{2-p}}}\right)^{\frac{2-p}{2}} = \|f\|_{\mathcal{D}}^p ,
\end{aligned}$$

因此 $f \in M_0(D_s^p) \subset M_\alpha(D_s^p)$。 □

命题 6.2。 设 α、p、s 属于容许范围，且 (φ_t) 是 $\mathbb{D}$ 上的一个半群，则：

(i) 若 $\alpha \geqslant \frac{s-(p-2)}{p}$，则

$$[\varphi_t, D_s^p] = [\varphi_t, M_\alpha(D_s^p)] = M_\alpha(D_s^p) = D_s^p;$$

(ii) 若 $s > p-2$ 和 $0 \leqslant \alpha < \frac{s-(p-2)}{p}$，则

$$m_\alpha(D_s^p) \subset [\varphi_t, M_\alpha(D_s^p)].$$

证明。 设 X_0 是 $M_\alpha(D_s^p)$ 中多项式的闭包，若我们证明 $X_0 \subset [\varphi_t, M_\alpha(D_s^p)]$，则结论成立。

设 $f \in X_0$ 和 $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是多项式序列，满足 $\lim_{n\to\infty} \|f - P_n\|_{M_\alpha(D_s^p)} = 0$，则对每个 $t \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
\|f \circ \varphi_t - f\|_{M_\alpha(D_s^p)} &\leqslant \|(f-P_n)\circ\varphi_t\|_{M_\alpha(D_s^p)} + \|P_n \circ \varphi_t - P_n\|_{M_\alpha(D_s^p)} + \|P_n - f\|_{M_\alpha(D_s^p)} \\
&\leqslant (1 + \|C_t\|_{M_\alpha(D_s^p)}) \|f - P_n\|_{M_\alpha(D_s^p)} + \|P_n \circ \varphi_t - P_n\|_{M_\alpha(D_s^p)} .
\end{aligned}$$

根据定理 1.1 中得到的复合算子范数估计，

$$\sup_{t\in[0,1]} \|C_t\|_{M_\alpha(D_s^p)} < \infty,$$

因此，应用该极限$_{n\to\infty} \|f - P_n\|_{M_\alpha(D_s^p)} = 0$，第一项趋于零。为完成证明，我们只需验证对每个多项式 P

$$\lim_{t\to 0^+} \|P \circ \varphi_t - P\|_{M_\alpha(D_s^p)} = 0.$$

事实上，根据引理 6.1，只需验证对每个多项式

$$\lim_{t\to 0^+} \|P \circ \varphi_t - P\|_X = 0$$

对于 $X = H^\infty$、B^p 和 $\mathcal{D}$，我们即可完成证明，而这些结论早已为人所知。对于 H^∞，由 [17, 命题 3.2]，；对于 B^p，由 $p \geqslant 2$ 推论 3.3]，其中 [3,；对于 $\mathcal{D}$，由 [24, 定理 1],，因此结论成立。 □

特别地，我们得到了 [24] 的以下推广。

推论 6.3. 设 p, s 属于容许范围，则 $\mathbb{D}$ 上的每个半群 (φ_t) 都会在加权*Dirichlet*空间 D_s^p 上诱导出一个强连续的复合算子半群。

本节最后一部分旨在验证：只要 $M_\alpha(D_s^p)$ 不可分，那么对于 $\mathbb{D}$上的任意半群 (φ_t)，$[\varphi_t, M_\alpha(D_s^p)] \subsetneq M_\alpha(D_s^p)$。在这种情况下，我们将分别讨论 $\alpha = 0$ 和 $\alpha > 0$两种情形。

下述引理由 [13, 注记 1]得出（另见 [2, 定理 1.1]）。

引理 D. 设 $X \subset \mathcal{H}(\mathbb{D})$ 是一个巴拿赫空间，且 (φ_t) 是 $\mathbb{D}$上的一个半群。假设$\bigcap_{s\in(0,\infty)} Q_s \subset X \subset \mathcal{B}$，那么 $[\varphi_t, X] \subsetneq X$。

命题 6.4. 设 p、s 属于容许范围，且 (φ_t) 是 $\mathbb{D}$ 上的一个半群，则

$$[\varphi_t, M_0(D_s^p)] \subsetneq M_0(D_s^p).$$

证明。 结合命题 3.1, [29,、推论 3.6] 和引理 4.1，我们得到 tha t

$$\bigcap_{s\in(0,\infty)} Q_s \subset M_0(D_s^p) \subset \mathcal{B},$$

结论由引理 D 得出。 □

对于 $\alpha > 0$ 的情形，我们采用不同的方法。在 Morrey空间的背景下（记住 $H^{2,\lambda} = M_{1-\frac{\lambda}{2}}(D_1^2)$），Galanopoulos、Merchan 和 Siskakis [14], 证明了以下结果。

定理 E. [14, 定理 3.5] 设 $0 < \alpha < \frac{1}{2}$，并设 X 是 $\mathbb{D}$ 上的解析函数巴拿赫空间，满足 $M_\alpha(D_1^2) \subset X \subset \mathcal{B}^{\alpha+1}$。那么，对于 $\mathbb{D}$ 上的每个半群 (φ_t)，都有 $[\varphi_t, X] \subsetneq X$。特别地，$[\varphi_t, M_\alpha(D_1^2)] \subsetneq M_\alpha(D_1^2)$。

本结果的证明基于以下引理。

引理 F. 设 $0 < \alpha < \frac{1}{2}$，对 $\mathbb{D}$ 上的每个半群 (φ_t)，存在函数 $f \in M_\alpha(D_1^2)$，使得

$$\liminf_{t\to 0} \|f \circ \varphi_t - f\|_{\mathcal{B}^{\alpha+1}} \geqslant 1.$$

事实上，本引理中的函数正是测试函数

$$f_{\zeta,\alpha}(z) = \frac{1}{(1-\bar{\zeta}z)^\alpha}, \quad \zeta \in \mathbb{T},\, z \in \mathbb{D},\, 0 < \alpha < \frac{1}{2}.$$

其中对 $\zeta \in \mathbb{T}$ 作了仅依赖于该半群的特定选取。
然后由引理 3.4，我们可以仿照 [14, 定理 3.5]的证明，对我们的整个空间范围得到一个等价结果。

命题 6.5. 设 p、s、$\alpha > 0$ 属于容许范围，并设 X 为 $\mathbb{D}$ 上解析函数的巴拿赫空间，使得 $M_\alpha(D_s^p) \subset X \subset \mathcal{B}^{\alpha+1}$。则对 $\mathbb{D}$ 上的每个半群 (φ_t)，我们有 $[\varphi_t, X] \subsetneq X$。

定理 *1.2* 的证明。 嵌入 $m_\alpha(D_s^p) \subset [\varphi_t, M_\alpha(D_s^p)]$ 由命题 6.2 得出；另一方面，$[\varphi_t, M_\alpha(D_s^p)]$是 $M_\alpha(D_s^p)$ 的真子空间，在情形 $\alpha = 0$ 下由命题 6.4 得出，若 $\alpha > 0$ 则由命题 6.5 得出。 □

6.2. **刻画** $[\varphi_t, M_\alpha(D_s^p)] = m_\alpha(D_s^p)$。 现在我们来处理定理1.3和定理 1.4 的证明。

定理*1.3*的证明。 我们首先证明该条件的充分性，即 (ii) 蕴含 (i)。设 (φ_t) 为椭圆半群，不失一般性，我们可以假设 Denjoy-Wolff 点为 $\tau = 0$，则

$$\gamma'(z) = \frac{z}{G(z)} = -\frac{1}{p(z)},$$

由于 $\Re p \geqslant 0$，根据 Alexander-Noshiro-Warschawski 判据，γ 是单叶的；并且根据假设，G 满足趋于零的对数 Bloch条件，这等价于 $\gamma \in \mathcal{B}_{\log,\,0}$。接下来

根据推论 4.6 和定理 C (iv)， $T_\gamma(M_0(D_s^p)) \subset m_0(D_s^p)$，因此由定理 1.2 和 (1.2) 可得结论

$$m_0(D_s^p) \subset [\varphi_t, M_0(D_s^p)] = \overline{(T_\gamma(M_0(D_s^p)) \oplus \mathbb{C}) \cap M_0(D_s^p)} = \overline{T_\gamma(M_0(D_s^p)) \oplus \mathbb{C}} \subset m_0(D_s^p).$$

现在证明逆命题，假设 (φ_t)和 $[\varphi_t,\ M_0(D_s^p)] = m_0(D_s^p)$，根据半群的分类，我们有两种不同的情形。

若 (φ_t) 是椭圆半群，像之前一样推理可知 γ 是单叶的，并且根据哈纳克不等式，属于 $\mathcal{B}$，因此由引理 4.2 可得 $\gamma \in M_0(D_s^p)$，我们将证明 $\gamma \in F_{\log,\ 0}(p,\ p-2,\ s-(p-2))$。为证明这一点，假设 $\gamma \in M_0(D_s^p)\backslash F_{\log,\ 0}(p,\ p-2,\ s-(p-2))$。由命题 5.6，存在一个函数 $F \in M_0(D_s^p)$，使得 $T_\gamma F \in M_0(D_s^p)\backslash m_0(D_s^p)$，但根据 (1.2)

$$T_\gamma F \in T_\gamma(M_0(D_s^p)) \cap M_0(D_s^p)) \subset [\varphi_t, M_0(D_s^p)] = m_0(D_s^p),$$

这就产生了矛盾。因此 $\gamma \in F_{\log,\ 0}(p,\ p-2,\ s-(p-2))$ 根据推论 4.6，这等价于 $\gamma \in \mathcal{B}_{\log,\ 0}$，也就是说， G 满足消失对数 Bloch条件。

还需证明非椭圆半群不可能满足 $[\varphi_t,\ M_0(D_s^p)] = m_0(D_s^p)$。反设 (φ_t) 为非椭圆型且 $[\varphi_t,\ M_0(D_s^p)] = m_0(D_s^p)$，不妨设 Denjoy-Wolff 点为 $\tau = 1$。令 h 为 Koenigs 函数，并令 $H(z) = \log(h(z) - w_0)$，其中 $w_0 \in \mathbb{C}\backslash h(\mathbb{D})$，则根据 Koebe 畸变定理， $H \in \mathcal{B}$；此外，由于 $h(\mathbb{D})$ 在无穷远处为星形，且 $h - w_0$ 是一个单叶非零函数，所以 H 也是单叶的，从而由引理 4.2 $H \in M_0(D_s^p)$可知。现在我们区分两种不同的情形。

若 $H \in M_0(D_s^p)\backslash F_{\log,\ 0}(p,\ p-2,\ s-(p-2))$，根据命题 5.6，存在函数 $F \in M_0(D_s^p)$，使得 $T_H F \in M_0(D_s^p)\backslash m_0(D_s^p)$。注意，这等价于 $T_h(\frac{F}{h-w_0}) \in M_0(D_s^p)\backslash m_0(D_s^p)$，因为在此情形下 $\gamma = h$。如果我们证明 $\frac{F}{h-w_0} \in M_0(D_s^p)$，那么根据 (1.2) 就会得到矛盾。对于每个 $z \in \mathbb{D}$

$$\left|\left(\frac{F}{h-w_0}\right)'(z)\right|^p \lesssim \frac{|F'(z)|^p}{|h(z)-w_0|^p} + \frac{|F(z)h'(z)|^p}{|h(z)-w_0|^{2p}} \leqslant \left\|(h-w_0)^{-1}\right\|_{H^\infty}^p \left(\left|F'(z)\right|^p + \left|(T_H F)'(z)\right|^p\right),$$

那么如果 $I \subset \mathbb{T}$

$$\frac{1}{|I|^{s-(p-2)}} \int_{S(I)} \left|\left(\frac{F}{H}\right)'(z)\right|^p (1-|z|^2)^s dA(z) \lesssim \left\|(h-w_0)^{-1}\right\|_{H^\infty}^p \left(\|F\|_{M_0(D_s^p)}^p + \|T_H F\|_{M_0(D_s^p)}^p\right),$$

因此 $\frac{F}{h-w_0} \in M_0(D_s^p)$ 且 $T_h(\frac{F}{H}) \in [\varphi_t,\ M_0(D_s^p)] = m_0(D_s^p)$，从而导致矛盾。

另一方面，若 $H \in F_{\log,\ 0}(p,\ p-2,\ s-(p-2))$，那么根据定理 C，我们知道算子 T_H 在 $M_0(D_s^p)$ 上是紧的。接着，仿照定理 1 的证明， $[11,\ 1]$的谱是平凡的。特别地，存在 $f \in M_0(D_s^p)$ 使得

$$f(z) - T_H f(z) \equiv 1.$$

解这个一阶常微分方程可得 $f = h - w_0$，特别是 $h \in M_0(D_s^p)$。事实上，由于 $h'(z)G(z) \equiv i \in M_0(D_s^p)$，根据 (2.1) 可知 $h \in [\varphi_t,\ M_0(D_s^p)] = m_0(D_s^p)$，因此由引理 4.2 可得 $h \in \mathcal{B}_0$。但是，Koening 映射的像总是包含一个无限半条带，这意味着 h不可能属于 $\mathcal{B}_0$，从而导致矛盾，并完成证明。□

定理*1.4* 的证明。

在这种情况下，我们先在假设 (φ_t) 是椭圆半群的条件下证明等价性。不失一般性，设 Denjoy-Wolff 点为 $\tau = 0$，则 γ 是单叶的，且属于 $\mathcal{B}_0$；事实上，由引理 4.2 $\gamma \in M_0(D_s^p)$可知这一点，因此根据命题 5.3 (ii)， T_γ 在 $M_\alpha(D_s^p)$ 上总是有界的，于是我们可以化简 (1.2)，得到

$$[\varphi_t, M_\alpha(D_s^p)] = \overline{T_\gamma(M_\alpha(D_s^p)) \oplus \mathbb{C}},$$

因此，(i) 等价于嵌入 $T_\gamma(M_\alpha(D_s^p)) \subset m_\alpha(D_s^p)$；根据命题 5.5 和引理 4.2，该嵌入等价于 $\gamma \in \mathcal{B}_0$，即 G 满足消失 Bloch 条件。

还需证明非椭圆半群不可能满足 $[\varphi_t,\ M_\alpha(D_s^p)] = m_\alpha(D_s^p)$。假设 (φ_t) 是非椭圆型的，且 $[\varphi_t,\ M_0(D_s^p)] = m_0(D_s^p)$；不失一般性，假设 Denjoy-Wolff 点为 $\tau = 1$。设 h 为 Koenigs 函数，~~且对~~ $w_0 \in \mathbb{C}\backslash h(\mathbb{D}),\ H(z) = \log(h(z) - w_0)$，则 H 是属于 $M_0(D_s^p)$的单叶函数。我们分两种情况讨论。

若 $H \in M_0(D_s^p)\backslash m_0(D_s^p)$，根据推论 5.9，存在函数 $F \in M_\alpha(D_s^p)$ 使得 $T_H F \in M_\alpha(D_s^p)\backslash m_\alpha(D_s^p)$，这等价于 $T_h(\frac{F}{h-w_0}) \in M_\alpha(D_s^p)\backslash m_\alpha(D_s^p)$。现在仿照定理1.3的证明，我们可以验证 $\frac{F}{h-w_0} \in M_\alpha(D_s^p)$ 并得到矛盾。

若 $H \in m_0(D_s^p)$，根据命题 5.5 $T_{\log H}$在 $M_\beta(D_s^p)$ 上是紧的，对每个 $0 < \beta < \frac{s-(p-2)}{p}$都成立，因此再次仿照定理1.3的证明，对每个 β，都存在 $f_\beta \in M_\beta(D_s^p)$ 使得

$$f_\beta(z) - T_{\log H} f_\beta(z) \equiv 1,$$

解一阶常微分方程可得 $f_\beta = h - w_0$，因此特别地，对每个 $0 < \beta < \frac{s-(p-2)}{p}$，都有 $h \in M_\beta(D_s^p)$，~~这意味着~~

$$h \in \bigcap_{0<\beta<\frac{s-(p-2)}{p}} M_\beta(D_s^p)\backslash m_0(D_s^p),$$

注意到，由引理 4.2 以及事实 $h \notin \mathcal{B}_0$ 可得 $h \notin m_0(D_s^p)$。最后，由推论 5.9，存在一个函数 $F \in M_\alpha(D_s^p)$，使得 $T_h F \in M_\alpha(D_s^p)\backslash m_\alpha(D_s^p)$，从而得出矛盾并完成证明。□

References

[1] Charalambos D. Aliprantis 和 Owen Burkinshaw。 *Positive operators*， *Pure Appl. Math.*第 119 卷，*Academic Press* 1985 。Academic Press，纽约，NY，。[2] Austin Anderson、Mirjana Jovovic 和 Wayne Smith。BMOA 与 H^∞ *J.* 上的复合半群。， *Math. Anal. Appl.* 449 1 843 852, 2017 ( ): –。[3] Austin Anderson、Mirjana Jovovic 和 Wayne Smith。Besov 空间上的复合半群。*Complex Anal. Oper. Theory*, 19(3):17，2025。编号/编号 64。[4] Irina Ar´evalo、Manuel D. Contreras 和 Luis Rodr´ıguez-Piazza。混合范数空间上的复合算子半群与积分算子。 *Rev. Mat. Complut.*，32(3):767–798，2019。[5] Rauno Aulaskari、Peter Lappan、Jie Xiao 和 Ruhan Zhao。关于 α-Bloch 空间及 Dirichlet 空间的乘子。 *J. Math. Anal. Appl.*，209(1):103–121，1997。[6] Earl Berkson 和 Horacio Porta。解析函数半群与复合算子。 *Mich. Math.*， :–。[7] Oscar *J.* 25 101 115, 1978 Blasco、Manuel D. Contreras、Santiago D´ıaz-Madrigal、Josep Mart´ınez、Michael Papadimitrakis 和 Aristo menis G. Siskakis。解析函数空间中的复合算子半群与积分算子。 *Ann. Acad. Sci. Fenn.*， *Math.*，38(1):67–89，2013。[8] Oscar Blasco、Manuel D. Contreras、Santiago D´ıaz-Madrigal、Josep Mart´ınez 和 Aristomenis G. Siskakis。BMOA 中的复合算子半群与 Sarason 定理的推广。 *Integral Equations Oper. Theory* 61 1 45 62, 2008 ， ( ): –。[9] Daniel Blasi 和 Jordi Pau。Besov 型空间的刻画及其在 Hankel 型算子中的应用。 *Mich. Math. J.*，56(2):401–417，2008。[10] Filippo Bracci、Manuel D. Contreras 和 Santiago D´ *Continuous semigroups of holomorphic*ıaz-Madrigal。。 *self-maps of the unit disc* 2020 《Springer 数学专著》。施普林格：施普林格，。[11] Nikolaos Chalmoukis 和 Vassilis Daskalogiannis。全纯半群与消失平均振荡的 Sarason 刻画。 *Revista Matemática Iberoamericana*，39(1):321–340，2022 年 4 月。[12] Jiale Chen。积分算子在 $F(p、q、s)$ 空间上的一些性质。 *Acta Math. Sci.*， *Ser. B*, *Engl. Ed.* 44 1 173 188, 2024 ， ( ): –。[13] Vassilis Daskalogiannis 和 Petros Galanopoulos。BMOA 型空间中的复合算子半群与积分算子。 *Complex Anal. Oper. Theory*，15(8):30，2021。编号/编号 117。[14] Petros Galanopoulos、Noel Merch´an 和 Aristomenis G. Siskakis。解析 Morrey 空间中的复合算子半群。 *Integral Equations Oper. Theory*，92(2):15，2020。编号/编号 12。[15] John B. Garnett。 *Bounded analytic functions*， *Grad. Texts Math.*第 236 卷。纽约，NY：施普林格，修订版第 1 版，2006 年。[16] Daniel Girela 和 Jos´e ´Angel Pel´aez。Dirichlet 型空间中解析函数的增长性质与零点序列。 *J. Aust. Math. Soc.*，80(3):397–418，2006。

[17] Pavel Gumenyuk。单位圆盘中单参数半群的角极限与非限制极限。

J. Math.，（）：–。

Anal. Appl. 417 1 200 224, 2014

[18] Joaqu´ın M. Ortega 和 Joan F`abrega。 *BMOA* 中的逐点乘子与 Corona 型分解。*Ann. Inst. Fourier*，46(1):111–137，1996。[19] Jordi Pau 和 Ruhan Zhao。一般函数空间族上的 Carleson 测度、Riemann-Stieltjes 算子与乘法算子。 *Integral Equations Oper. Theory*，78(4):483–514，2014。[20] Karl-Mikael Perfekt。以振荡定义的空间中的对偶性与距离公式。 *Ark. Mat.*，51 2 345 361，2013（）：–。[21] Karl-Mikael Perfekt。作用于 o-O 型空间的算子的弱紧性。 *Bull. Lond. Math. Soc.*，47 4 677 685，2015（）：–。[22] Christian Pommerenke。关于单叶函数、Bloch 函数与 VMOA。 *Math. Ann.*，236 208，1978 3 199（）：–。[23] Donald Sarason。消失平均振荡函数。 *Trans. Am. Math. Soc.*，207:391–405，1975。[24] Aristomenis G. Siskakis。Dirichlet 空间上的复合算子半群。 *Result. Math.*，30(1-2):165–173，1996。[25] Aristomenis G. Siskakis。解析函数空间上的复合算子半群：综述。载于 *Studies on composition operators. Proceedings of the Rocky Mountain Mathematics Consortium*、 *Laramie*、*WY USA* *1996* 229 252 1998 、*July 8–19*，第 – 页。普罗维登斯，RI：美国数学会，。[26] Aristomenis G. Siskakis 和 Ruhan Zhao。解析函数空间上的 Volterra 型算子。载于 *Function spaces. Proceedings of the 3rd conference*、 *Edwardsville*、 *IL*、 *USA*、 *May 19–23*，1998 年，第 299–311 页。普罗维登斯，RI：美国数学会，1999 年。[27] Fanglei Wu 和 Hasi Wulan。 $\mathcal{Q}_p$ 空间上的复合算子半群。 *J. Math. Anal. Appl.*，496 2 15，2021 124845（）：。编号/编号 。[28] Ruhan Zhao。 *On a general family of function spaces*， *Ann. Acad. Sci. Fenn.*第 105 卷， *Math.*，*Diss.*。赫尔辛基：芬兰科学学会，1996 年。[29] Ruhan Zhao。关于 $F(p、q、s)$ 空间。 *Acta Math. Sci.*、*Ser. B*、 *Engl. Ed.*，41(6):1985–2020，2021。[30] Kehe Zhu。 *Operator theory in function spaces*，*Pure Appl. Math.*第 139 卷， *Marcel Dekker*。纽约等地：Marcel Dekker, Inc.，1990 年。

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Universitá degli studi di Milano Bicocca, viaRoberto Cozzi, 55 20125, Milano, Italy*Email address*: nikolaos.chalmoukis@unimib.it

Departamento de Analisis Matemático, Universidad de Málaga, Campus de Teatinos, 29071Malaga, Spain*Email address*: alvarommorenolopez@uma.es