arXiv:2603.02013v1 [math.CA] 2 Mar 2026

重新审视 Hardy 域上的二阶线性微分方程

MATTHIAS ASCHENBRENNER、LOU VAN DEN DRIES 和 JORIS VAN DER HOEVEN

Abstract. 我们回顾系数函数的芽属于 Hardy 域（因此具有强非振荡性）的二阶齐次线性微分方程。我们证明了 Boshernitzan（1982）提出的一个猜想：这类方程的振荡解可由芽属于一个更大 Hardy 域的振幅函数和相位函数表示，因此其振荡方式非常规律。我们给出了这类芽唯一性的精确条件，研究了它们的渐近行为，并据此获得了关于振荡解的零点和临界点的信息。

Introduction

二阶常微分线性方程广泛应用于数学的各个领域。例如，数学物理中的大多数“特殊函数”都满足这类方程，其系数通常是有理函数；解释见 [9, 第 1] 页。下文将遇到的例子包括 Airy 函数、贝塞尔函数和库仑波函数。本文研究系数函数在 $+\infty$ 非常强的意义下非振荡的二阶齐次线性微分方程的解的渐近行为。

为准确起见，下面介绍一些记号和术语： $\mathcal{C}$ 是 $+\infty$ 处连续函数芽的环 $[a,+\infty) \to \mathbb{R}$ 其中 $a \in \mathbb{R}$；对于每个 n， $\mathcal{C}^n$ 是其由那些具有 $g \in \mathcal{C}$ 次连续可微代表元 $[a,+\infty$的 n组成的子环 $\to \mathbb{R}$， $a \in \mathbb{R}$。于是 $\mathcal{C}^{n+1} \subseteq \mathcal{C}^n$；对于 $g \in \mathcal{C}^{n+1}$，我们记其导数为 $g' \in \mathcal{C}^n$。令 $f \in \mathcal{C}$，并考虑微分方程

$$(*) \qquad Y'' + fY = 0.$$

（实）解是一个芽 $y \in \mathcal{C}^2$，使得 $y'' + fy = 0$（在 $\mathcal{C}$ 中）。$(*)$ 的解构成 $\mathbb{R}$ 线性空间 $\mathcal{C}^2$ 的一个二维子空间。有些方程 $(*)$ 存在振荡解；若一个芽 $g \in \mathcal{C}$ 有一个代表元 $g\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}\,(a \in \mathbb{R})$，使得对于任意大的 $t \geqslant a$， $g(t) = 0$，且对于任意大的 $t \geqslant a$， $g(t) \neq 0$，则称它振荡。根据 Sturm分离定理 [11, 第 2 章 §6 定理 7],，如果 $(*)$ 的某个解振荡，那么 $(*)$ 的每个非零解也都振荡。在这种情况下，我们称 f 产生振荡。（因此 $f = 1$ 产生振荡。）众所周知，$(*)$ 的振荡解可以用一个相位函数 [12, 第 5] 章表示：函数 $\phi\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}\,(a \in \mathbb{R})$ 满足当 $t \to +\infty$ 趋于无穷时， $\phi(t) \to +\infty$；其芽（也记作 ϕ）属于 $\mathcal{C}^3$，且对所有充分大的 $t \geqslant a$， $\phi'(t) > 0$；并且 $(*)$ 的解恰好是芽 $y = c\cos(\phi+d)/\sqrt{\phi'}$，其中 $c,d \in \mathbb{R}$。

Date: 2026年3月。

对于 $g,\ h\in\mathcal{C}$，我们规定 $g<_{\mathrm{e}}h$（或 $h>_{\mathrm{e}}g$）当且仅当 $g(t)<h(t)$ 最终成立，也就是说，对所有充分大的 t 都成立；此处及下文中，g 也表示其芽的任意代表元。因此，$g\in\mathcal{C}$ 是非振荡的，当且仅当 $g>_{\mathrm{e}}0$、$g=0$或 $g<_{\mathrm{e}}0$成立。其他下文使用的记号和约定见本引言末尾。

映射 $g\mapsto g'\colon\mathcal{C}^{n+1}\to\mathcal{C}^n$ 在子环 $\mathcal{C}^{<\infty}:=\bigcap_n\mathcal{C}^n$ 上限制为一个导子，该子环属于 $\mathcal{C}$。如果 f 在 $(*)$ 中属于 $\mathcal{C}^{<\infty}$，那么 $(*)$ 的每个解也都属于 $\mathcal{C}^{<\infty}$。本文进一步将 f 限定为*Hardy* 型，也就是说，$f\in\mathcal{C}^{<\infty}$ 且对于每个多项式 $p\in\mathbb{Q}[Y_0,\dots,Y_n]$，芽 $p(f,\ f',\ \dots,\ f_{(n)})$ 都是非振荡的。这一概念将19世纪的思想（du Bois-Reymond、Borel、Lindel¨of）形式化，即所谓的“正则增长函数”。许多自然出现的非振荡微分代数函数——例如，任何实系数一元有理函数，以及 e^x 和 $\log x$——都具有 Hardy 胚。某些微分超越函数也属于这种情况：黎曼 ζ 函数、欧拉的 Γ 函数 [43]，甚至一些最终增长速度超过 e^x [15] 的每次迭代的函数。

若 $g\in\mathcal{C}^{<\infty}$ 是 Hardy 型的，那么 g' 也是；但 Hardy 型芽的和不一定仍是 Hardy 型的。*Hardy* 域（Bourbaki [17]）是 $\mathcal{C}^{<\infty}$ 的一个对 $\mathcal{C}^{<\infty}$ 的导子 $g\mapsto g'$ 封闭的子域，因此由能够进行代数运算的 Hardy 型芽构成。任意 Hardy 型芽 h 都生成一个 Hardy 域 $\mathbb{Q}(h,\ h',\ h'',\ \ldots\ldots)$。Hardy 域自然是一个微分域，同时也是一个有序域，其（全序、严格）序由 $<_{\mathrm{e}}$ 给出，我们也用 $<$ 表示这一序。

一个基本的 Hardy 域是有理函数芽组成的域 $\mathbb{R}(x)$，这些有理函数具有实系数，其中 $x=$ 是恒等函数的芽。Hardy [29]，发现了一个更大的 Hardy 域，它由对数指数函数（简称*LE* 函数）的芽组成：这类实值函数可通过有限步运算从实常数和恒等函数出发，使用加法、乘法、除法、取对数和取指数得到。例子包括当正 x 足够大时由 $x^r\,(r\in\mathbb{R})$ 给出的函数的芽、e^{x^2} 和 $\log\log x$。（我们将此 Hardy 域记为 H_{LE}；其精确定义见第 4 节开头。）每个 Hardy 域都可扩张为一个刘维尔闭的 Hardy 域 $H\supseteq\mathbb{R}$：它是实闭的、对取指数封闭，并且对每个 $h\in H$ 都包含一个满足 $g'=h$ 的 $g\in\mathcal{C}^1$；这样的 H 也对正芽的对数封闭，并包含 $\mathbb{R}(x)$。（H 为实闭，意即 $H[\mathrm{i}]\subseteq\mathcal{C}^{<\infty}[\mathrm{i}]$，，其中 $\mathrm{i}^2=-1$，是一个代数闭域。）关于 Hardy 域及其他基本事实，见 [13, 14, 42]。实数域的 O-极小扩张是 Hardy 域 [38] 的一个自然来源。

在本引言余下部分中，H 是一个包含 f的 *Hardy* 域。众所周知（[14, 定理 16.7], [42, 推论 2], 或下文的推论 4.13），如果方程 $(*)$ 没有振荡解，那么方程 $(*)$ 的每个解都是 H*Hardy* 型的，也就是说，包含在一个扩张 H 的 Hardy 域中。例如，艾里方程 $Y''-xY=0$ 的 $\mathbb{R}$-线性无关解 Ai，Bi：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的芽由下式给出

$$\begin{aligned}\mathrm{Ai}(t)&=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\cos\left(\frac{s^3}{3}+st\right)ds,\\ \mathrm{Bi}(t)&=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\exp\left(-\frac{s^3}{3}+st\right)+\sin\left(\frac{s^3}{3}+st\right)\right]ds\end{aligned}$$

是 H-Hardy 型的。我们关注 $(*)$ 具有振荡（因而非 Hardy 型）解的情形。我们的第一个主要结果表明，这些振荡解仍可用带有 H-Hardy 型芽的振幅与相位函数来描述：

定理 A. 假设 $(*)$ 有一个振荡解。则存在 H-*Hardy* 型芽 $g>0$、$\phi>\mathbb{R}$，使得 $(*)$ 的解恰好是芽 $cg\cos(\phi+d)$，其中 c、$d\in\mathbb{R}$。任何这样的 H-*Hardy* 型芽 g、ϕ 都位于 H 的同一个 *Hardy* 域扩张中，并且 $g^2\phi'\in\mathbb{R}$。

下一个定理给出了充分条件，确保 $(g,\ \phi)$ 在将 g 乘以正数并给 ϕ加上常数后是唯一的。为陈述该定理，我们使用更多的符号和术语：令 $H^{>}:=\{h\in H:\ h>0\}$，$H^{>\mathbb{R}}:=\{h\in H:\ h>\mathbb{R}\}$；对于 $h\in H^{>}$，令 $h^{\dagger}:=h'/h=(\log h)'$ 为 h 的对数导数；于是，对所有 $h\in H^{>\mathbb{R}}$，都有 $h^{\dagger}>0$。如果一个芽完全 H-*Hardy* 型，则称其为完全 E-Hardy 型；也就是说，它对 H 的每个 Hardy 域扩张 E 都是 E-Hardy 型。如果一个芽是完全 $\mathbb{Q}$-Hardy 型，则称其为完全 *Hardy* 型。每个完全 Hardy 型 $y\in\mathcal{C}^{<\infty}$ 都是（在 $\mathbb{Q}$ 上）微分代数的，根据 [14, 定理 14.4]（另见 [5, 定理 5.20]）。

定理 B。以下关于 H 的每个条件都能确保：如果$(*)$有一个振荡解，那么定理A中的任意 g、ϕ 都是完全 H-*Hardy* 型的，其中 g在乘以正实数后唯一，而 ϕ 在加上实数后唯一：

(a) 存在 $\lambda\in H$ 使得 $\lambda-h^{\dagger\dagger}\leqslant h^{\dagger}/n$ 对所有 $h\in H^{>\mathbb{R}}$ 和 $n\geqslant 1$均成立。(b) 对于所有能使 $\omega/4$ 产生振荡的 $\omega\in H$，都存在 $h\in H^{>\mathbb{R}}$，满足 $2h^{\dagger\dagger\prime}-(h^{\dagger\dagger})^2+(h^{\dagger})^2\leqslant\omega$;

条件 (a)、(b) 可能看起来很奇怪，但它们是最优的：若 (a) 和 (b) 均不成立，则对某个 $f\in H$，在定理 A 中存在无穷多个 H-Hardy 型但并非完美的 H-Hardy 型对 (g,ϕ)，其中等价关系由将 g 乘以一个正实常数，并将一个实常数加到 ϕ上给出：注 7.7。对于熟悉 [ADH] 的读者，我们指出，(a) 等价于 H 不是 λ-自由的；而只要 H 是 ω-自由的，(b) 就成立。因此，若 H 在 Rosenlicht 的意义下秩有限，则 (a) 成立 [43]。根据 [5]，任意 H 都有一个 Hardy 域扩张，它在 H之上是微分代数的，并满足 (b)。由 LE 函数组成的 Hardy 域 H_{LE} 满足 (b)。

如果我们的 Hardy 型芽 f 是微分代数的，那么由 f 生成的 Hardy 域 $\mathbb{Q}(f,\ f',\ \ldots)$ 满足 (a)。在这种情况下，这便于描述方程 $(*)$ 的所有解。为陈述这一结果，递归地定义 x 的（完全 Hardy 型）迭代对数 $\ell_0,\ \ell_1,\ \ldots\ldots$：$\ell_0:=x$，以及 $\ell_{n+1}:=\log\ell_n$，并令

$$\omega_n:=\frac{1}{\ell_0^2}+\frac{1}{(\ell_0\ell_1)^2}+\cdots+\frac{1}{(\ell_0\cdots\ell_n)^2}.$$

根据定理 A 前面的备注，如果 f 不产生振荡，那么方程 $(*)$ 的每个解都是完全 H-Hardy 型的。如果对某个 n，$f\leqslant\omega_n/4$，那么 f 不产生振荡；当 f 是微分代数的时，反向结论由 [14, 定理 17.7] 成立；另见 [5, 推论 7.9]。我们还可以补充：

推论 1。假设 f 是微分代数的。那么 f 产生振荡，当且仅当对所有 n，$f>\omega_n/4$。在这种情况下，存在一个 H-*Hardy* 型芽 $\phi>\mathbb{R}$，使得 $y\in\mathcal{C}^2$ 是 $(*)$ 的解，当且仅当 $y=c(\phi')^{-1/2}\cos(\phi+d)$，其中 c、$d\in\mathbb{R}$ 满足某些条件；任何这样的 ϕ 都是完全 H-*Hardy* 型的，且除相差一个实常数外唯一。

由 f 我们可以粗略了解相位 ϕ的渐近性。下一个推论给出一个例子；更多此类结果见第 5 节。关于 $g,h\in\mathcal{C}$的记号：$g\prec h$（或 $h\succ g$）当且仅当 $h(t)\neq 0$ 最终成立，且当 $t\to+\infty$时，$g(t)/h(t)\to 0$；而 $g\sim h$ 当且仅当 $g-h\prec h$，也就是说，$h(t)\neq 0$ 最终成立，且当 $t\to+\infty$时，$g(t)/h(t)\to 1$。

推论 2. 假设 $f \succ x^{-2}$ 且 $f > 0$。那么 f 生成振荡，并且定理A 中的任意 ϕ 都是完美的 H-*Hardy* 型，除相差一个实常数外唯一，且满足 $\phi \sim h$，其中 $h \in \mathcal{C}^1$ 满足 $h' = \sqrt{f}$。特别地，在 $f \sim cx^{-2+r}$ $(c, r \in \mathbb{R}^>)$ 的情况下，对这样的 ϕ，我们有 $\phi \sim \frac{2\sqrt{c}}{r} x^{r/2}$。

重要的是，定理 A 中任意两个 H-Hardy 型芽 g, ϕ 都是关于 H 微分代数的：对于 $z := 2\phi'$，我们有

$$2zz'' - 3(z')^2 + z^4 - 4fz^2 \;=\; 0, \qquad g = c\sqrt{z} \text{ for some } c \in \mathbb{R}^>.$$

推论：若 f 有一个 $\mathcal{C}^\infty$ 代表元 $(a, +\infty) \to \mathbb{R}$，其中某个 $a \in \mathbb{R}$ 满足条件，那么 g, ϕ 也有；将 "$\mathcal{C}^\infty$" 替换为 " 实解析的 " 时也同样成立；参见第 7] 节 [7, 。通常，ϕ（因此 g）可以用 f 更明确地描述：

推论 3。设 f 是微分代数的，且会产生振荡。令 ϕ如推论 1 中所述，并设 ϕ 属于包含 H 的最小刘维尔闭 *Hardy* 域：$= \mathbb{R}(f, f', f'', \dots)$。那么，对于某个 $h \in H^>$，有 $\phi' = \sqrt{h}$。

对于任意作为输入的 $f \in \mathbb{Q}(x)^\times$，我们可以检验 f 是否会产生振荡：计算 $c \in \mathbb{Q}^\times$ 和 $k \in \mathbb{Z}$，使得当 $t \to +\infty$ 时，$f(t) = ct^k + O(t^{k-1})$；那么，f 产生振荡当且仅当 $(k > -2$ 且 $c > 0)$，或 $(k = 2$ 且 $c > \frac{1}{4})$。对于会产生振荡的 $f \in \mathbb{Q}(x)^\times$，我们还可以检验是否存在某个 ϕ 满足推论 3 中的条件；参见推论 5.23 后的备注。

例 （切比雪夫方程 [34, 2。235]）。这是线性微分方程

$$(x^2 - 1)Z'' + xZ' + \alpha Z \;=\; 0 \qquad (\alpha \in \mathbb{R}^\times).$$

芽 $z \in \mathcal{C}^2$ 是其解，当且仅当 $y := (x^2 - 1)^{1/4} z$ 是 $(*)$ 的解，其中

$$f \;=\; f_\alpha \;:=\; \frac{(\alpha + \frac{1}{4})x^2 - \alpha + \frac{1}{2}}{(x^2 - 1)^2} \in H := \mathbb{R}(x).$$

如果 $\alpha > 0$，则 f 产生振荡，并且 $(*)$ 具有（刘维尔）相位函数

$$\phi \;=\; \beta \operatorname{arcosh}(x) \;:=\; \beta \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \qquad (\beta := \sqrt{\alpha},\ \phi' = \frac{\beta}{\sqrt{x^2 - 1}}).$$

如果 $\alpha < 0$，则 f 不产生振荡，并且上述切比雪夫方程具有 $\mathbb{R}$个线性无关的 Hardy 型解

$$\exp\left(-\beta \operatorname{arcosh}(x)\right), \qquad \exp\left(\beta \operatorname{arcosh}(x)\right), \qquad (\beta := \sqrt{-\alpha}).$$

$\alpha \in \mathbb{R}^\times$ 使 f_α 产生振荡的集合是一个区间，在本例中为（0，$+\infty$），这并非偶然：参见 [7, 推论 3]。）

借助定理 A 中的哈迪相位 ϕ，我们用 Hardy 型芽控制方程 $(*)$ 的振荡解的零点和临界点。接下来的两个推论将对此作出明确说明，其中 $y \in \mathcal{C}^2$ 表示方程 $(*)$ 的一个振荡解；我们还取一个 $e \in \mathbb{R}$ 和一个连续代表元 $[e, +\infty) \to \mathbb{R}$，它们对应于 f，以及一个二阶连续可微代表元 $[e, +\infty) \to \mathbb{R}$，它对应于 y，并分别记为 f、y，使得 $y'' + fy = 0$ 在 $[e, +\infty)$ 上成立。于是，$[a, +\infty)$ 的子集 $y^{-1}(0)$，即 y 的零点集，是闭集、没有聚点且无界。这给出了 $y^{-1}(0)$ 的枚举 $s_0 < s_1 < s_2 < \cdots$，其中 $s_n \to +\infty$ 作为 $n \to \infty$。必要时增大 e，并相应限制 f、y，使得对所有 $t \in [e, +\infty)$ 都有 $f(t) \neq 0$。于是，每个区间 (s_n, s_{n+1}) 恰含有 y'的一个零点 t_n，且 $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$ 枚举了 y' 中满足 $\geqslant s_0$的零点。此外：

推论 4。 存在连续函数 ζ_0、 ζ_1、 $u\colon [n_1,+\infty)\to\mathbb{R}$、$(n_1\in\mathbb{N}$、$n_1\geqslant e)$，它们具有 *Hardy* 型芽，使得 $\zeta_0(t)$ $\zeta_1(t)\to+\infty$ 当 $t\to+\infty$ 时，并且

(i) ζ_0、 ζ_1 严格递增，且彼此的复合逆为 H-*Hardy* 型；以及(ii) $s_n=\zeta_0(n)$、 $t_n=\zeta_1(n)$、 $|y(t_n)|=u(n)$，其中 $n\geqslant n_1$。

若 f 是微分代数的，则我们可以选择这样的 ζ_0、 ζ_1、 u，使它们具有微分代数芽。

若定理 A 中的 g、 ϕ 满足 $\phi\succ\log x$，如推论 2 中的 $f\succ x^{-2}$ 所示，则当 $n\to\infty$时， $|y(t_n)|\sim g(t_n)$。（相比之下，Hardy 型芽 u 最终恰好插值了 $|y|$ 的值 $|y(t_n)|$。）我们不知道是否总能将 ζ_0、 ζ_1、 u 选为具有 H-Hardy 型芽。（它们可以如此选取的一个情形见 [8]。）尽管如此，在某些情况下，用一个“Hardy 型”函数插值序列（s_n），可以很好地了解（s_n）的渐近性质：

推论5。设 $f\sim cx^{-2+r}$ $(c\in\mathbb{R}^{>},\ r\in\mathbb{R}^{\geqslant})$。

(i) *If* $r>0$, *then* $s_n\sim\left(r\pi n/2\sqrt{c}\right)^{2/r}$ *as* $n\to\infty$; *and*

(ii) *if* $r=0$ *and* $f\in\mathbb{R}(x)$, *then* $c>\frac{1}{4}$ *and* $\log s_n\sim\pi n/\sqrt{c-\frac{1}{4}}$ *as* $n\to\infty$.

本引言余下部分，我们聚焦于情形 $f\in\mathbb{R}(x)$、 $f\sim c$ $(c\in\mathbb{R}^{>})$，它在各种应用中都会出现。于是存在 $c_n\in\mathbb{R}$ $(n\geqslant 1)$，满足

$$f\ \sim\ c+c_1x^{-1}+c_2x^{-2}+\cdots,$$

这里我们使用符号 $\sim$ 并非为了比较芽，而是表示一种渐近展开：对于 $\mathcal{C}$ 中的序列（h_n），若满足 $h_0\succ h_1\succ h_2\succ\cdots$，我们称 $h\in\mathcal{C}$ 具有如下渐近展开

$$h\ \sim\ a_0h_0+a_1h_1+a_2h_2+\cdots\qquad(a_n\in\mathbb{R})$$

若对所有 n 均有 $h-(a_0h_0+\cdots+a_nh_n)\prec h_n$（此时系数序列 $a_0,a_1,a_2,\ldots$ 由 $h,h_0,h_1,h_2,\ldots$ 唯一确定）。设 ϕ 如推论 1 中所述，则 ϕ 是完全 Hardy 的，且除相差一个常数外唯一。_推论 2 给出 $\phi_\sim\sqrt{c}\,x$，因此由 ϕ 是 Hardy 型可知 $\phi'\sim\sqrt{c}$，这表明我们可以将其改进为 ϕ 的渐近展开，如下所示：令 $z:=2\phi'$，作如下“拟设”

$$\begin{aligned}z\ &\sim\ z_0+z_1x^{-1}+z_2x^{-2}+z_3x^{-3}+z_4x^{-4}+\cdots\quad(z_n\in\mathbb{R},\ z_0=2\sqrt{c}),\ \text{so}\\ \phi\ &\sim\ \frac{z_0}{2}x+\frac{z_1}{2}\log x+\text{const}-\frac{z_2}{2}x^{-1}-\frac{z_3}{4}x^{-2}-\frac{z_4}{6}x^{-3}-\cdots\end{aligned}$$

通过逐项积分。现在将 z 中的“拟设”形式地代入

$$\begin{aligned}\sigma(z)\ :=\ &\frac{2zz''-3(z')^2+z^4}{z^2},\ \text{which gives}\\ &z_0^2+(2z_0z_1)x^{-1}+(z_1^2+2z_0z_2)x^{-2}+\frac{2(z_0z_1z_2+2z_1+z_0^2z_3)}{z_0}x^{-3}+\\ &\frac{-7z_1^2+2z_0^2z_1z_3+z_0^2z_2^2+12z_0z_2+2z_0^3z_4}{z_0^2}x^{-4}+\cdots\end{aligned}$$

并通过比较等式 $\sigma(2\phi')=4f$两边 x^{-1} 的各次幂的系数，依次得到 z_1、 z_2、.....关于 c_1、c_2、.....的表达式。

依靠我们在 [7], 中得到的模型论转移结果，我们将在 [8], （作为本文的姊妹篇）中严格论证这一启发式观点。（读者将在下文第 1 节中再次见到微分有理函数 σ。）

设 $f \in \mathbb{R}(x)$ 和 $f \sim c \in \mathbb{R}^{>}$ 与前文相同，因此 f 产生振荡。设 $a \in \mathbb{R}$ 满足：f 在 $[a,+\infty)$ 上没有极点；并设 $y\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ 二阶连续可微，且 $y''+fy=0, y\neq 0$。设 $s_0 < s_1 < \cdots$ 是 y 的零点序列。由推论 5(i)，当 $n\to\infty$ 时，$s_n \sim \pi n/\sqrt{c}$。推论 4 给出一个 $n_0 \in \mathbb{N}$ 以及一个连续严格递增的 $\zeta\colon [n_0,+\infty) \to \mathbb{R}$，其为微分代数哈代芽，满足对于所有 $n \geqslant n_0$，$\zeta(n) = s_n$。在 [8] 中，我们还得到了 ζ（因而也包括 s_n）的渐近展开，并运用这些 Hardy 域技术，以直观的“代数”方式得到关于贝塞尔函数及其零点的经典结果；这些结果传统上是通过复分析证明的。同样的技术也很容易应用于其他特殊函数；有鉴于此，下面给出另一个经典的线性微分方程：

例 （库仑波方程）。这是方程 $(*)$，用于

$$f \;=\; 1 - 2\eta\, x^{-1} - l(l+1)\, x^{-2} \in \mathbb{R}(x) \qquad (\eta \in \mathbb{R},\ l \in \mathbb{N}).$$

其解是库仑波函数的芽（它们在球坐标下给出库仑势对应的薛定谔方程的解；参见 [9, §3.6]）。显然，对所有 n，$f > \omega_n/4$，因此存在一个完全 Hardy 胚 $\phi > \mathbb{R}$，除相差一个常数外唯一，使得方程 $(*)$ 的解为芽 $y = c(\phi')^{-1/2}\cos(\phi + d)$，其中 $c,\ d \in \mathbb{R}$。芽 ϕ 是微分代数的，而 $\phi \sim x$ 由推论 2 得出。事实上，上文概述的方法给出了一个渐近展开

$$\phi \;\sim\; x - \eta\log x + \mathrm{const} + \frac{1}{2}\big(l(l+1)+\eta^2\big)x^{-1} + \frac{\eta}{4}\big(l(l+1)+\eta^2-1\big)x^{-2} + \cdots$$

因此，每个库仑波函数的芽 y 都满足：对于某个 $c,\ d \in \mathbb{R}$

$$y \;=\; c\cos\!\left(x - \eta\log x + d + \frac{1}{2}\big(l(l+1)+\eta^2\big)x^{-1} + \frac{\eta}{4}\big(l(l+1)+\eta^2-1\big)x^{-2}\right) + O(x^{-3}).$$

这改进了文献中得到的关系 $y = c\cos(x - \eta\log\, x + d) + o(1)$；参见 [9, (6.7.11)], [47, (31.0.3)]。y 的零点的一个渐近展开见 [28]。（还可以利用 [8] 中的工具得到这样的渐近展开。）

在一系列影响深远的论文中，[18, 19, 20, 21, 22, 32, 33], Bremer 等人（其先驱工作见于 [44, 45]）使用非振荡相位函数 ϕ，为计算各种特殊函数及近似求出其零点提供了高效算法。这里的“非振荡”至少意味着，ϕ、ϕ'、ϕ'' 按照引言中的定义是非振荡的（见 [18, (23) 及其后的讨论]）；理想情况下，这些函数还具有如前所述的渐近展开。引述自 [32,第 1] 页：“相位函数已得到广泛研究 [.....] 尽管有着悠久的研究历史，相位函数的一项实用性质似乎一直被忽视。具体而言，当 [函数 f] 是非振荡的时，方程 [$(*)$] 的解可以用非振荡相位函数精确表示。这多少有些令人惊讶 [.....]。”上文的定理 A 和定理 B（以及 [8]）给出了一大类自然的线性微分方程（$*$），Bremer 等人的方法或许适用于这些方程，因为其解在 $+\infty$ 处可以用 Hardy 型相位函数表示，因此具有很强的非振荡性。

Boshernitzan 的工作。 定理 A 在 f 为完全 Hardy 型的情形下证明了 [14, §20] 中的猜想 4。若将自伴方程 (∗) 替换为更一般的线性微分方程，定理 A 和定理 B 仍然成立

$$(**) \qquad Y'' + f_0 Y' + f_1 Y = 0,$$

其中 $f_0,\ f_1 \in H$。Boshernitzan 的开创性论文 [16] 将定理 A 的 (∗∗) 版本作为其定理 5.4 的一部分予以宣布，但该结果的证明从未发表。（2014 年，Boshernitzan 与我们其中一人就此事进行了邮件交流，但未能得出结论。）下文的定理 5.1 是对定理 A 的加强，其中包含条件 (a)、(b)，以确保定理 B 中芽 g、ϕ 的唯一性。（参见定理 5.1 后的备注。）我们对该定理的证明依赖于我们先前关于构造微分代数 Hardy 域扩张的工作 [5, 6, 7]，相关结果将在第 4 节回顾。Boshernitzan [16, 在第 117] 页的注中确实证明了每个非齐次线性微分方程

$$Y'' + f_0 Y' + f_1 Y = g,$$

其中 $f_0,\ f_1,\ g \in H$，都有一个 H-Hardy 型解。这也可由 [7] 推出；参见下文推论 4.31。

本文的组织结构。 我们努力使不熟悉我们著作 [ADH] and [5, 6, 7] 中相关内容的读者也能读懂本文。这在一定程度上解释了本文篇幅较长的原因。第 1 节和第 2 节通过简要介绍 [ADH] 中发展的“温和”渐近分析代数方法，为后文铺垫。第 3 节和第 4 节讨论芽、二阶线性微分方程和 Hardy 域，并介绍后来会用到的 [5, 7] 中的结果。随后，我们在第 5 节证明定理 A 和定理 B，以及推论 1、2 和 3。推论 4 和 5，以及关于 (∗) 的振荡解的零点的相关结果，在第 6 节证明。最后，在第 7 节中，我们证明定理 B 中条件 (a)、(b) 对于保证相位函数“在常数意义下唯一”的最优性。

记号与约定。我们遵循 [ADH] 中的约定。因此，m、n遍历 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ 自然数集。如果 A 是一个以加法记号表示的阿贝尔群，则 $A^{\neq} := A \setminus \{0\}$。对于交换环 R（总是带有乘法单位元 1），$R^\times$ 表示 R的可逆元乘法群。因此，如果 K 是一个域，则 $K^{\neq} = K^\times$。按照约定，有序阿贝尔群和有序域的序都是全序。如果 Γ 是一个以加法记号表示的有序阿贝尔群，则 $\Gamma^> := \{\gamma \in \Gamma : \gamma > 0\}$；将 $\geqslant$、$<$或 $\leqslant$ 分别替换为 $>$时同样如此。设 S 是一个全序集，且 $A \subseteq S$。如果 A 包含 $s \in S$ 中的每个元素，且对于某个 $a \in A$有 $s \geqslant a$（分别地，对于某个 $a \in A$有 $s \leqslant a$），则称 A 在 S 中上闭（在 S中向下封闭）。我们将包含 A 且在 S中上闭的 S的最小子集记为 $A^\uparrow$，将包含 A 且在 S中向下封闭的 S的最小子集记为 $A^\downarrow$。

致谢。 Joris van der Hoeven 获得了用于 ODELIX 项目（编号 101142171）的 ERC-2023-ADG 资助。由欧盟资助。所表达的观点和意见仅代表作者本人，不一定反映欧盟或欧洲研究委员会执行机构的观点。欧盟和资助机构均不对此承担责任。

1. Differential Algebra

在本节中，我们简要回顾微分代数的一些基本概念，重点关注线性微分算子。

微分环。整个本节中，R 均为微分环：一个配备导子 $\partial\colon R \to R$ 的交换环，且包含（同构副本的）$\mathbb{Q}$ 作为子环。于是，$C_R := \ker \partial$ 是 R的子环，称为 R的常数环，并且 $\mathbb{Q} \subseteq C_R$。若上下文已明确，则记 $C = C_R$。当上下文已明确 R 的导子 ∂ 且 $a \in R$时，我们也将 $\partial(a)$ $\partial^2(a)$记作 a'、a''，并将 $\partial^n(a)$记作 $a^{(n)}$；对于 $a \in R^\times$，我们记 $a^\dagger := a'/a$（a的对数导数）。因此，对于 a、$b \in R^\times$，有 $(ab)^\dagger = a^\dagger + b^\dagger$，所以 $R^\dagger := (R^\times)^\dagger$ 是 R加法群的子群。若 R 对积分封闭，则 $\partial(R) = R$。若 R 是整环，则 R 上的导子可唯一地扩张为 R的分式域 F 上的导子；我们称配备此导子的 F 为 R的微分分式域。

微分多项式。令 $R\{Y\} = R[Y, Y', Y'', \dots]$ 表示由微分不定元 Y在 R上构成的微分多项式微分环。每个 $y \in R$都导出微分环态射 $P \mapsto P(y)\colon R\{Y\} \to R$在 R上，且具有 $Y \mapsto y$。令 $P = P(Y) \in R\{Y\}$。那么，$\deg P$表示 P的（总）次数，其中 $\deg 0 := -\infty < \mathbb{N}$。若 P的阶至多为 $r \in \mathbb{N}$，则称其满足 阶 至多为 $r \in \mathbb{N}$，如果 $P \in R[Y, Y', \dots, Y^{(r)}]$。对于 $a \in R$，令 $P_{+a} := P(a + Y)$ 且 $P_{\times a} := P(aY)$。若 P是次数为 $d \in \mathbb{N}$的齐次多项式，则其 黎卡提变换 $\mathrm{Ri}(P) \in R\{Z\}$, [ADH，第 300], 页，满足

$$\mathrm{Ri}(P)(z) = P(y)/y^d \quad \text{for } y \in R^\times,\ z = y^\dagger.$$

我们令 $R_n := \mathrm{Ri}(Y^{(n)}) \in \mathbb{Q}\{Z\}$，于是

$$R_0 = 1, \quad R_1 = Z, \quad R_2 = Z^2 + Z', \quad \dots. \tag{1.1}$$

我们有递推关系 $R_{n+1} = ZR_n + R_n'$，对 n 进行简单的归纳法可得 $R_n = Z^n +$低次数项。

线性微分算子。微分环 R 上的线性微分算子 的环 $R[\partial]$是由元素 ∂在 R 上生成的 R 的环扩张（这里使用同一符号表示 R 的导子），满足 $R[\partial]$ 作为左 R- 模以 $1 = \partial^0$、$\partial = \partial^1$、∂^2、∂^3, ... 为基自由，且对于 $a \in R$有 $\partial a = a\partial + a'$；见 [ADH，5.1]。因此，每个 $A \in R[\partial]$ 都具有如下形式

$$A = a_0 + a_1\partial + \cdots + a_n\partial^n \qquad (a_0, \dots, a_n \in R), \tag{1.2}$$

对于这样的 A 和 $y \in R$，我们令

$$A(y) := a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_n y^{(n)} \in R.$$

于是 $(AB)(y) = A\big(B(y)\big)$ 对于 A、$B \in R[\partial]$ 和 $y \in R$成立。对于 (1.2) 中的 A 以及(1.1)中的 R_0、R_1、..... ，我们也令

$$\mathrm{Ri}(A) := a_0R_0 + a_1R_1 + \cdots + a_nR_n \in R\{Z\},$$

因此，$\mathrm{Ri}(A)(z) = A(y)/y$ 对 $y \in R^\times$, $z = y^\dagger$。

$A \in R[\partial]$ 的核按定义是 C_R-子模

$$\ker A = \big\{y \in R : A(y) = 0\big\}$$

R。若要指出对 R 的依赖关系，我们将 $\ker_R A$ 写作 $\ker A$。对于 $A \in R[\partial]^{\neq}$，存在唯一的 n 和 R 中的元素 a_0、.....、a_n，使得 $a_n \neq 0$。

使得 (1.2) 成立。于是，$\operatorname{order} A := n$ 是 A 的阶；若 $a_n = 1$，则称 A 为首一。令 $u \in R^\times$。对于 $A \in R[\partial]$，我们定义 $A_{\ltimes u} := u^{-1}Au \in R[\partial]$，即 A 经 u 扭曲后的结果。若 A 为首一，则 $A_{\ltimes u}$ 也为首一；并且 $A \mapsto A_{\ltimes u}$ 是环 $R[\partial]$ 的一个自同构，在 ADH 上恒等（ADH，第 243 页）；其逆为 $B \mapsto B_{\ltimes u^{-1}}$。若存在某个 $a \in R^\times$ 和 b_1、……、$b_n \in R$，使得 $A = a(\partial - b_1)\cdots(\partial - b_n)$，则称 A 在 R 上分裂。若 A 在 R 上分裂，则对于 a、$b \in R^\times$，aAb 也在 R 上分裂。对于 $r \in \mathbb{N}$，若每个阶为 $\leqslant r$ 的首一 $A \in R[\partial]$ 都在 R 上分裂，则称 R 为 r-线性闭。若对所有 $r \in \mathbb{N}$，R 都是 r-线性闭的，我们也称 R 为线性闭。

本文聚焦于二阶情形。因此，设

$$A \;=\; \partial^2 + a_1\partial + a_0, \qquad a_0, a_1 \in R.$$

还假设 $u \in R^\times$ 满足 $u^\dagger = -\frac{1}{2}a_1$。令 $\widetilde{A} := 4A_{\ltimes u}$；则

$$\widetilde{A} \;=\; 4\partial^2 + f \quad \text{where } f := 4a_0 - 2a_1' - a_1^2 \quad (\text{[ADH, example following 5.1.13]}).$$

此外，A 在 R 上可裂分当且仅当 $\widetilde{A}$ 可裂分，并且 $y \mapsto uy$: $\ker A \to \ker \widetilde{A}$ 是 C_R-模的一个同构。这些备注常常使我们能够将问题归约到 $A = 4\partial^2 + f$ 这一情形，其中 $f \in R$。（如 [ADH], 中所述，因子 4 的作用只是让后面的一些表达式更简洁。）我们定义函数

$$\omega\colon R \to R, \qquad \omega(z) \;:=\; -4R_2(z/2) \;=\; -(2z' + z^2),$$

它与施瓦茨导数有关；参见 [ADH, 5.2]。对于 $A = 4\partial^2 + f (f \in R)$ 和 $y \in R^\times$，我们有 $A(y) = y\big(f - \omega(2y^\dagger)\big)$，因此 $f \in \omega(2R^\dagger)$ 当且仅当 $R^\times \cap \ker A \neq \emptyset$。正如我们将看到的，在参数化二阶线性微分方程的解时，函数也发挥着同样重要的作用

$$\sigma\colon R^\times \to R, \qquad \sigma(y) \;:=\; \omega(-y^\dagger) + y^2 \;=\; \frac{2yy'' - 3(y')^2 + y^4}{y^2}$$

最早由 Kummer [36]研究。注意：对于 $y \in R^\times$，我们有 $\sigma(y) = \sigma(-y)$；若 i 是 R 的微分环扩张中的元素，且 $\mathrm{i}^2 = -1$，则 $\sigma(y) = \omega(-y^\dagger + y\mathrm{i})$。另需指出，对于 $f \in R$ 和 $y \in R^\times$，等式 $\sigma(y) = f$ 等价于 $P(y) = 0$，其中 $P(Y) := 2YY'' - 3(Y')^2 + Y^4 - fY^2 \in R\{Y\}$。

复合共轭。设 $\phi \in R^\times$。我们将 R^ϕ 称为 R 关于 ϕ的复合共轭：它是一个微分环，其底层环与 R 相同，但导子为 $\phi^{-1}\partial$（通常记作 δ），而非 ∂。于是存在一个 R-代数同构$P \mapsto P^\phi$：$R\{Y\} \to R^\phi\{Y\}$，且对所有 $y \in R$，都有 $P^\phi(y) = P(y)$；参见 [ADH, 5.7]。我们还有环同构 $A \mapsto A^\phi$：$R[\partial] \to R^\phi[\delta]$，其中对 $a \in R$ 和 $\partial^\phi = \phi\delta$ 有 $a^\phi = a$；借此我们将 $R[\partial]$ 与 $R^\phi[\delta]$视为相同。于是

$$\begin{aligned}
\partial^1 &= \phi\cdot\delta\\
\partial^2 &= \phi^2\cdot\delta^2 + \phi\cdot\delta(\phi)\cdot\delta\\
\partial^3 &= \phi^3\cdot\delta^3 + 3\phi^2\cdot\delta(\phi)\cdot\delta^2 + \big(\phi^2\cdot\delta^2(\phi) + \phi\cdot\delta(\phi)^2\big)\cdot\delta\\
&\;\;\vdots\\
\partial^n &= G_n^n(\phi)\cdot\delta^n + G_{n-1}^n(\phi)\cdot\delta^{n-1} + \cdots + G_1^n(\phi)\cdot\delta
\end{aligned}$$

其中 $G_k^n \in \mathbb{Q}\{X\} \subseteq R^\phi\{X\}\,(k = 1, \ldots\ldots, n)$ 是 n 次齐次的，且与 R、ϕ 无关。注意，此时对于 $n \geqslant 1$,

$$(Y^{(n)})^\phi \;=\; G_n^n(\phi)Y^{(n)} + G_{n-1}^n(\phi)Y^{(n-1)} + \cdots + G_1^n(\phi)Y' \qquad \text{in } R^\phi\{Y\}.$$

在芽的微分环的语境中，复合共轭对应于变量替换；参见第 3 节。

微分域。在本节其余部分， K 是一个微分域，即其底层环为域的微分环。于是， $C := C_K$ 是 K的子域，并且在 K中是代数闭的；参见 [ADH，4.1.1]。如果 L是 K的代数域扩张，那么 K 上的导子可唯一延拓为 L [上的导子（ADH，1.9.2]，），且微分域 L 的常数域是 C在 L [中的代数闭包（ADH，4.1.2]）。此外， $K\{Y\}$ 是一个整环；其微分分式域记为 $K\langle Y\rangle$。设 y 是微分域扩张 L中的一个元素，且 L是 K的微分域扩张。那么， $K\{y\}$ 和 $K\langle y\rangle$分别表示 L中由 y 在 K上生成的微分子环，以及 $K\{y\}$在 L中的微分分式域。若对于某个 $P \in K\{Y\}^{\neq}$有 y微分代数于 K，即 $P(y) = 0$，则称 y 在 K 上是微分代数的；否则称 y 在 K上是微分超越的。按照 [ADH],中的惯例，前缀“d-”是“微分代数的”（differentially）的缩写，因此“d-代数”意为“微分代数的”。如果每个 $y \in L$ 都在 K上是d-代数的，我们就说 L 在 K 上是d-代数的。关于此内容的更多信息，参见 [ADH，4.1] 。给定 $r \in \mathbb{N}$，如果对于每个阶为 $\leqslant r$的 $A \in K[\partial]^{\neq}$ 都有 $A(K) = K$，则称 K 是 r-线性满射的。如果 K 对积分封闭且 $K^\dagger = K$，那么 K是1-线性满射的。（参见 [ADH，5.5.22]之后的例。）如果 K 是 r-线性闭且1-线性满射的，那么它就是 r-线性满射的。

微分域上的线性微分算子。设 $A \in K[\partial]^{\neq}$ 的阶为 $r \in \mathbb{N}$。则 C-线性空间 K 的子空间 $\ker A$ 的维数为 $\leqslant r$；参见 [ADH, 4.1.14]。根据 [ADH, 5.1.21], ，若 $r \geqslant 1$，且 u 是 K 的一个微分域扩张中的非零元素，并且满足 $g := u^\dagger \in K$，则

$$A \in K[\partial](\partial - g) \quad \Longleftrightarrow \quad A(u) = 0. \tag{1.3}$$

特别地，对于 $r = 2$，$\ker A \neq \{0\} \Rightarrow A$ 在 K上分裂。若还有 $K^\dagger = K$，则 $\ker A \neq \{0\} \Leftrightarrow A$ 在 K上分裂。此外：

引理 1.1。假设 K 对积分封闭，且 $K^\dagger = K$。则

$$\dim_C \ker A = r \quad \Longleftrightarrow \quad A \textit{ splits over } K.$$

证明。我们用关于 r的归纳法证明“⇒”。$r = 0$ 的情形显然。设 $\dim_C \ker A = r \geqslant 1$。由 (1.3) 得到 $B \in K[\partial]$ 和 $g \in K$，使得 $A = B(\partial - g)$。根据 [ADH, 5.1.12], ，$\dim_C \ker B = r - 1 =$的阶为 B，因此由归纳假设，B在 K上分裂；于是 A也如此。对于“⇐”，使用 [ADH, 5.1.27(iv)] ，其中 $r = 1$。□

在本小节余下部分，$A = 4\partial^2 + f$ 其中 $f \in K$。那么

$$\ker A \neq \{0\} \quad \Longleftrightarrow \quad f \in \omega(2K^\dagger). \tag{1.4}$$

在 [ADH 中，5.2]我们还证明了：

$$A \text{ splits over } K \quad \Longleftrightarrow \quad f \in \omega(K). \tag{1.5}$$

下一个引理给出了算子 A与 B的核之间的关系：$= \partial^3 + f\partial + (f'/2)$。这一结果可追溯至 Appell [1]。（更一般的版本见 [40, 命题 4.26(1)] 。）

引理 1.2. 设 $y, z \in$核 A。则 $yz \in$核 B。此外，若 y, z是C-线性空间核 A的一组基，则 y^2, yz, z^2 是核 B的一组基。

证明。我们有

$$(yz)' \;=\; y'z + yz', \quad (yz)'' \;=\; y''z + 2y'z' + yz'' \;=\; 2y'z' - (f/2)yz,$$

因此

$$\begin{aligned}(yz)''' \;&=\; 2y''z' + 2y'z'' - (f'/2)yz - (f/2)(yz)' \\ &=\; -(f/2)(yz' + y'z) - (f'/2)yz - (f/2)(yz)' \\ &=\; -f(yz)' - (f'/2)yz,\end{aligned}$$

并且 $yz \in \ker B$。设 $ay^2 + byz + cz^2 = 0$ 其中 $a, b, c \in C$不全为零；我们断言此时 y, z 线性相关。我们有 $a \neq 0$ 或 $c \neq 0$，因此不妨设 $a \neq 0$, $z \neq 0$。于是 $u := y/z$ 满足 $au^2 + bu + c = 0$，故 $u \in C$，从而 $y \in Cz$。□

实算子的情形。在本小节中，$K = H[\mathrm{i}]$ 其中 H 是 K 上的实闭微分子域，且 $H^\dagger = H$ 并且 $\mathrm{i}^2 = -1$。于是 K 是代数闭的；因此 C是代数闭的，且 $K^\dagger$是可除的。令 $A = 4\partial^2 + f$, $f \in H$。根据 [ADH, 5.2] ，我们有：

$$A \text{ splits over } K \quad\Longleftrightarrow\quad f \in \omega(H) \cup \sigma(H^\times). \tag{1.6}$$

假设 $y \in H^\times$ and $f = \sigma(y) \notin \omega(H)$。令 $g := \frac{1}{2}(-y^\dagger + y\mathrm{i})$。那么 [ADH, p. 262]给出 $A = 4(\partial + g)(\partial - g)$。此外 $y\mathrm{i} \notin K^\dagger$：否则 $g \in K^\dagger$，故由 (1.3) 得 $\ker_K A \neq \{0\}$，于是 $\ker_H A \neq \{0\}$，从而由 (1.5) 得 $f \in \omega(H)$，矛盾。

遵循 [ADH, p. 263] ，现在我们指出一个 L of K 的微分域扩张，使得 $C_L = C$ 且 $\dim_C \ker_L A = 2$，并给出 $\ker_L A$的一组基。首先，取 $r \in K$，使得 $r^2 = y$。接下来，[ADH, 4.1.9] 给出一个元素 $e(y) \neq 0$ ，它属于 K 的某个微分域扩张，且满足 $e(y)^\dagger = \frac{1}{2}y\mathrm{i}$。（可以将 $e(y)$ 想成 $\bar{\exp}(\frac{1}{2}\mathrm{i}\int y)$。）令 $L := K(\overline{e(y)})$。那么 $y\mathrm{i} \notin K^\dagger$ 给出 $e(y) \notin K$，所以 $e(y)$ 在 K 和 $C_L = C$ 上是超越的；这是由 [ADH, 4.6.11, 4.6.12] 得出的。我们还由 [ADH, 4.6.11, 4.6.12] 得到：对于 K 的微分环扩张 R 中任意满足 $e^\dagger = \frac{1}{2}y\mathrm{i}$ 的单位 e ， R 的微分子环 $K[e, e^{-1}]$ 是一个整环， e 在 K 上是超越的，因此我们得到一个关于 K 的微分域同构 $K\langle e\rangle = K(e) \to L$ ，其中 $e \mapsto e(y)$。

接下来设

$$e(-y) \;:=\; e(y)^{-1}, \qquad y_1 \;:=\; \frac{e(y)}{r}, \qquad y_2 \;:=\; \frac{e(-y)}{r}.$$

于是 $2y_1^\dagger = -y^\dagger + y\mathrm{i}$ 和 $2y_2^\dagger = -y^\dagger - y\mathrm{i}$，因此 $L = K(y_1,\ y_2) = K\langle y_1,\ y_2\rangle$，并且

$$\omega(2y_1^\dagger) \;=\; \sigma(y) \;=\; \sigma(-y) \;=\; \omega(2y_2^\dagger) \;=\; f, \ \text{ so } \ y_1, y_2 \in \ker_L A.$$

此外，$(y_1/y_2)^\dagger = y_1^\dagger - y_2^\dagger = y\mathrm{i} \neq 0$，因此 y_1，y_2 在 C 上线性无关。

为说明这些备注，我们现在再次考虑算子

$$B \;:=\; \partial^3 + f\partial + (f'/2) \in H[\partial]$$

从而得到一个将在下文引理 5.22 的证明中用到的事实：

引理 1.3。设 $y \in H^\times$ 和 $\sigma(y) = f \notin \omega(H)$。则 维数$_{C_H}$ 核$_H B = 1$。

证明。取 r、$e(y)$、y_1、y_2、L 如上。则

$$y_1^2 \;=\; \frac{e(y)^2}{y}, \qquad y_1 y_2 \;=\; \frac{1}{y}, \qquad y_2^2 \;=\; \frac{e(-y)^2}{y}$$

是 C-线性空间 $\ker_L B$ 的一个基，由引理 1.2。现在 $e(y)$在 K上是超越的，因此 $\ker_H B = H \cap \ker_L B = C_H(1/y)$。□

分裂与导数。 本小节仅用于证明引理 6.14，从而用于证明引言中的推论 3，但不用于证明定理 A 和定理 B。设 $A \in K[\partial]^{\neq}$ 是阶为 $r \in \mathbb{N}$ 的首一 $a_0 := A(1) \neq 0$。令 A^∂ 为满足 $A^\partial \partial = \partial A - a_0^\dagger A$的 $K[\partial]$ 中唯一的元素。则 A^∂ 是阶为 r的首一式；若 $A \in H[\partial]$ 且 H 是 K的一个微分子域，则 $A^\partial \in H[\partial]$也成立。

例子。 若阶数 $A = 0$，则 $A^\partial = 1$；若阶数 $A = 1$，则 $A^\partial = \partial + (a_0 - a_0^\dagger)$。若 $A = \partial^2 + a_1\partial + a_0\ (a_0, a_1 \in K,\ a_0 \neq 0)$，则

$$A^\partial = \partial^2 + (a_1 - a_0^\dagger)\partial + (a_1' + a_0 - a_1 a_0^\dagger).$$

如果 $A(y) = 0$，其中 y 属于 K 的一个微分环扩张，则 $A^\partial(y') = 0$。此外：

引理 1.4. 设 R 是扩张 K的微分整环。假设 R 的微分分式域的常数域为 C，且 $\dim_C \ker_R A = r$。则

$$\ker_R A^\partial = \{y' : y \in \ker_R A\}$$

和 $\dim_C \ker_R A^\partial = r$。

证明。设 $y_1, \ldots\ldots, y_r$ 为 C-线性空间 $\ker_R A$ 的一个基，并反设 $c_1 y_1' + \cdots + c_r y_r' = 0$，其中 $c_1, \ldots\ldots, c_r \in C$ 不全为零。则 $y := c_1 y_1 + \cdots + c_r y_r \in \ker_R^{\neq} A$ 且 $y' = 0$，故 $y \in C^\times$。从而 $0 = A(y) = yA(1) = ya_0$，于是 $a_0 = 0$，这与本小节中关于 $a_0 \neq 0$ 的假设矛盾。□

2. Asymptotic Differential Algebra

这里介绍 [ADH] 中研究的各种对象，并回顾其中证明的关于这些对象的一些基本事实。我们还将简要证明 Kolchin 定理（推论 2.4），并给出稍后所需的一些技术性结果（引理 2.10 和引理 2.11）。

赋值域。域 K 上的一个（Krull）赋值是一个满射 $v\colon K^\times \to \Gamma$ 到有序阿贝尔群 Γ（采用加法记号），满足通常的运算律；并通过 $v(0) = \infty$ 将其扩展到 $v\colon K \to \Gamma_\infty := \Gamma \cup \{\infty\}$，其中 Γ 上的序通过 $\gamma < \infty$ 对所有 $\gamma \in \Gamma$ 扩展为 Γ_∞ 上的全序。给定域 K 上的这种赋值 v，$\mathcal{O} = \{a \in K : va \geqslant 0\}$ 是 K 的赋值环；反之，域 K 上的每个赋值环 $\mathcal{O}$ 都产生 K 上的一个赋值 $v\colon K^\times \to \Gamma$，使得 $\mathcal{O} = \{a \in K : va \geqslant 0\}$。（参见 [ADH, 3.1]。）赋值域 K 是一个域，并配备有该域的赋值环 $\mathcal{O}$。设 K 为赋值域，设 $\mathcal{O}$ 为其赋值环，并令 $v\colon K^\times \to \Gamma$ 为相应的赋值。则 $\mathcal{O}$ 是一个局部环，其极大理想为 $o := \{a \in K : va > 0\}$。从现在起，$K$（以及任何被提及的赋值域）均具有等特征零，即 K 的剩余域 $\operatorname{res}(K) := \mathcal{O}/o$ 的特征为零。令 a、b 遍历 K，置

$$a \asymp b :\Leftrightarrow va = vb, \qquad a \preccurlyeq b :\Leftrightarrow va \geqslant vb, \qquad a \prec b :\Leftrightarrow va > vb,$$
$$a \succcurlyeq b :\Leftrightarrow b \preccurlyeq a, \qquad a \succ b :\Leftrightarrow b \prec a, \qquad a \sim b :\Leftrightarrow a - b \prec a.$$

因此 $\mathcal{O} = \{a : a \preccurlyeq 1\}$ 且 $o = \{a : a \prec 1\}$。若 $a \sim b$，则 $a,\ b \neq 0$ 且 $a \asymp b$；此外，$\sim$ 是 $K^\times$上的等价关系。

我们有剩余态射 $a \mapsto \overline{a} := a + o\colon \mathcal{O} \to \operatorname{res}(K)$，并将其扩展为环同态 $P \mapsto \overline{P}\colon \mathcal{O}[Y] \to \operatorname{res}(K)[Y]$，其中 $\overline{Y} \mapsto Y$。赋值域 K 是

若对每个满足 $P(u)=0$、$\left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)(u)\neq 0$的 $P\in\mathcal{O}[Y]$和 $u\in\mathcal{O}$，都存在 $y\in u+o$使得 $P(y)=0$，则称其为亨塞尔的。（参见 [ADH, 3.3]。）

现在设 L 是 K的赋值域扩张；那么上文所示的 L上的关系 $\asymp$、 $\preccurlyeq$等限制到 K上相应的关系。按照通常的方式，我们将 K 的值群 Γ_K 视为 L 的值群 Γ_L 的有序子群，并将 res(K) 视为 res(L) 的子域。若 $\Gamma_K=\Gamma_L$ 且 res(K) = res(L)，则称这样的赋值域扩张为即时。若 L 是 K 上的代数扩张，则群 Γ_L/Γ_K 是挠群，且域扩张 res(L) $\supseteq$ res(K) 是代数的。

赋值微分域。设 K 是一个赋值微分域，也就是说，它是一个赋值域（依照前文的约定，具有等特征零），并且其底层域上带有一个导子。若 $\partial o\subseteq o$，则称 K 的导子 ∂ 是小的；于是 $\partial\mathcal{O}\subseteq\mathcal{O}$ [ADH，4.4.2]，，因此 ∂ 在剩余域 res(K) 上诱导出一个导子，使 K 的剩余态射 $\mathcal{O}\to$ res(K) 成为微分环态射。若对所有 K 中的 $f\prec 1$，都有 $f'\preccurlyeq f$，则也称 K 是单调的。若 K 是单调的，则它具有小导数；反过来，只要 Γ 是阿基米德的，结论也成立 [ADH，6.1.2]。若 K 具有小导数，则 K 的每个在 K 上为代数扩张的赋值微分域扩张也具有小导数 [ADH，6.2.1]；同样，将“具有小导数”替换为“是单调的”也成立 [ADH，6.3.10]。

线性微分算子的刘维尔零点。设 K 为一个微分域。 K 的刘维尔扩张是指 K 的微分域扩张 E，满足 C_E在 C上代数，且对于每个 $t\in E$，存在 t_1、…、$t_n\in L$，使得 $t\in K(t_1$、…、$t_n)$；并且对于 $i=1$、…、n:

(1) t_i在 $K(t_1$、…、$t_{i-1})$上代数，或 (2) $t_i'\in K(t_1$、…、$t_{i-1})$，或 (3) $t_i'\in t_iK(t_1$、…、$t_{i-1})$。

关于刘维尔扩张的基本性质（例如以下性质），请参见 [ADH，第 462]页：

引理 2.1。设 $M|L$和 $L|K$是微分域扩张。若 $M|K$是刘维尔扩张，则 $M|L$也是刘维尔扩张。若 $M|L$和 $L|K$是刘维尔扩张，则 $M|K$也是刘维尔扩张。

在引理 4.28 的证明中，我们将使用 Kolchin 定理（推论 2.4），它给出了关于在线性微分算子 $A\in K[\partial]^{\neq}$ 的零点 $y\neq 0$位于刘维尔扩张 K中的情形的信息。我们给出 Rosenlicht 对一个更一般结果的简短证明的一个变体，因为它展示了渐近微分代数推理的有效性。为此，我们令 $m\geqslant 1$, $P\in K\{Y\}$, $\deg P<m$。

引理 2.2. 设 L 是 K 的一个微分域扩张，且 $t\in L$, $t'\in K+tK$，并假设 L 在 $K(t)$上代数。若 $y^m=P(y)$ 对某个 $y\in L$成立，则存在某个 z，使得 $z^m=P(z)$成立，其中 z 属于 K 的一个微分域扩张，且该扩张在 K上代数。

证明。我们不妨设 t 在 K 上是超越的。将 $K(t)$ 视为 Laurent 级数域 $F=K((t^{-1}))$ 的子域。我们给 F 配备赋值环 $\mathcal{O}_F=K[[t^{-1}]]$，并配备从 $K(t)$ 的导子延拓而来的连续导子，参见 [ADH，第 226] 页。于是赋值微分域 F 是单调的。因此， $K(t)$ 这个 F 的赋值微分子域也是单调的。我们给 L 配备一个位于 $\mathcal{O}_F\cap K(t)$ 之上的赋值环 $\mathcal{O}_L$；由于 L 在 $K(t)$ 上是代数的，因此 L 是单调的。我们将 K 与其在剩余态射 $a\mapsto a$ 下的像等同： $\mathcal{O}_L\to\boldsymbol{k}_L:=$ res(L)。于是， $\mathcal{K}$ 是 L 的微分剩余域 $\boldsymbol{k}_L$ 的微分子域，并且 $\boldsymbol{k}_L$ 是代数的

在 K 上。现在取满足 $y^m = P(y)$ 的 $y \in L$，并为导出矛盾而假设 $y \succ 1$。那么 $y^\dagger \preccurlyeq 1$，因此对于所有 n，都有 $y^{(n)} = y\,R_n(y^\dagger) \preccurlyeq y$，其中 $R_n = \mathrm{Ri}(Y_{(n)})$ 如 (1.1) 中所定义，于是 $y^m = P(y) \preccurlyeq y^d$，其中 $d = \deg P < m$，矛盾。因此，$y \preccurlyeq 1$，且 $z := y \in \boldsymbol{k}_L$ 具有所需性质。□

命题 2.3 (Rosenlicht [41, 第 371])。假设对于某个 y，$y^m = P(y)$ 在 K 的刘维尔扩张中成立。那么对于某个 z，$z^m = P(z)$ 在 K 的微分域扩张中成立，且该扩张在 K 上是代数的。

证明。根据定义，K 上的刘维尔序列 是微分域扩张 E（K 的扩张）中元素构成的序列（$t_1, \ldots, t_n$），满足对于 $i = 1, \ldots, n$：

(1) t_i 在 $K(t_1, \ldots, t_{i-1})$ 上是代数的，或

(2) $t_i' \in K(t_1, \ldots, t_{i-1})$，或 (3) $t_i' \in t_i K(t_1, \ldots, t_{i-1})$。

注意，对于 $i = 1, \ldots, n$，$K_i := K(t_1, \ldots, t_i)$ 是 E 的微分子域。现在对 $d \in \mathbb{N}$ 使用归纳法证明：若 $(t_1, \ldots, t_n)$ 是 K 上的刘维尔序列，且 $\mathrm{trdeg}\big(K(t_1, \ldots, t_n)|K\big) = d$，并且对于某个 $y \in K(t_1, \ldots, t_n)$，$y^m = P(y)$ 成立，则命题结论成立。$d = 0$ 时结论显然成立，因此设 $(t_1, \ldots, t_n)$ 是 K 上的刘维尔序列，且 $\mathrm{trdeg}\big(K(t_1, \ldots, t_n)|K\big) = d \geqslant 1$，并且对于某个 $y \in K(t_1, \ldots, t_n)$，$y^m = P(y)$ 成立。取满足 t_i 在 $K_{i-1} = K(t_1, \ldots, t_{i-1})$ 上超越的极大 $i \in \{1, \ldots, n\}$。那么 $t_i' \in K_{i-1} + t_i K_{i-1}$，且 $K(t_1, \ldots, t_n)$ 在 $K(t_1, \ldots, t_i)$ 上是代数的。将引理 2.2 应用于 K_{i-1}、t_i，分别代入 K、t，可得某个 z，它属于 K_{i-1} 的代数微分域扩张，且满足 $z^m = P(z)$。现在对 K 上的刘维尔序列（$t_1, \ldots, t_{i-1}, z$）应用归纳假设。□

推论 2.4 (Kolchin)。设 $A \in K[\partial]^{\neq}$，并假设 $A(y) = 0$ 对于某个 $y \neq 0$属于 K的刘维尔扩张。则对于某个 $y \neq 0$ 属于 K 的微分域扩张，$A(y) = 0$，且 $y^\dagger$ 在 K上代数。

证明。令 $r =$为阶 A，并注意到 $\mathrm{Ri}(A) = Z^r + Q$，且 $\deg Q < r$。现在应用上述命题。□

注。推论 2.4 可追溯至刘维尔 [37] 在解析情形下的结果，其中 A 的阶为 2，且 $K = \mathbb{C}(x)$，满足 $C = \mathbb{C}$, $x' = 1$。

渐近域。若一个赋值微分域 K 满足以下条件，则称其为渐近域：对所有 $f,\ g \prec 1$ 属于 $K^\times$：$f \prec g \iff f' \prec g'$。此条件可视为洛必达法则的赋值论表述；它还蕴含支配关系与导子之间的其他相容性，参见 [ADH，第 9.1.3 节及第 9.1.4 节]：

引理 2.5. 设 K 是一个渐近域，且 $f, g \in K$。那么

$$\begin{aligned} \textit{if } 0 \neq f, g \not\asymp 1, \textit{ then } f \preccurlyeq g &\iff f' \preccurlyeq g', \\ \textit{if } f \preccurlyeq g \not\asymp 1, \textit{ then } f \sim g &\iff f' \sim g'. \end{aligned}$$

渐近域的复合共轭仍然是渐近的。在本小节的其余部分，K 是一个常数域为 C的渐近域。于是 $C \subseteq \mathcal{O}$，并且如果 $\mathcal{O} = C + o$（等价地，对于 K 中的每个 $f \asymp 1$，都存在满足 $f \sim c$的 $c \in C$），则称 K为 微分赋值（简称 d-赋值）。如果 K 是 d-赋值的，则剩余态射 $\mathcal{O} \to \mathrm{res}(K)$ 将常数域 C 同构地映射到 $\mathrm{res}(K)$ 上。并非每个渐近域都能扩张为 d-赋值域；能够扩张的渐近域称为 预-d-赋值域。根据 [2,定理 4.4],

$$K \text{ is pre-d-valued} \iff f' \prec g^\dagger \text{ whenever } f \preccurlyeq 1 \prec g \text{ in } K. \tag{2.1}$$

K的渐近对 是对（Γ，ψ），其中 ψ：$\Gamma^{\neq} \to \Gamma$ 定义为

$$\psi(vg) = v(g^{\dagger}) \text{ for } g \in K^{\times} \text{ with } vg \neq 0.$$

我们定义 $\Psi := \psi(\Gamma^{\neq}) = \{v(g^{\dagger}) : g \in K^{\times} \setminus \mathcal{O}^{\times}\}$。若要强调对 K 的依赖，我们分别写作 (Γ_K, ψ_K) 和 Ψ_K，而不写作 (Γ, ψ) 和 Ψ。若 L 是 K 的渐近域扩张，则 (Γ_L, ψ_L) 扩张了渐近对 (Γ, ψ)；若 $L \supseteq K$ 是代数的，则 $\Psi_L = \Psi$。注意：K 单调当且仅当 $\Psi \subseteq \Gamma^{\geqslant}$。

例。设 C 是一个特征零的域，x 是一个不定元。那么，$K = C(x)$ 配备导子 $\partial = \frac{d}{dx}$ 和赋值 v: $K^{\times} \to \mathbb{Z}$，其中 $v(C^{\times}) = \{0\}$，且 $v(x) = -1$，是 d-赋值的，其常数域为 C，并且 $\Psi = \{1\}$，因此 K 是单调的。（我们稍后讨论的渐近域通常不是单调的。）

一个渐近对（不涉及任何渐近域）是一个对 (Γ, ψ)，由一个有序阿贝尔群 Γ 和一个映射 ψ: $\Gamma^{\neq} \to \Gamma$ 组成，并满足渐近域的渐近对所满足的一些公理；参见 [ADH, 6.5]。设 (Γ, ψ) 是一个渐近对。我们将 ψ: $\Gamma^{\neq} \to \Gamma$ 扩展为映射 $\Gamma_{\infty} \to \Gamma_{\infty}$，规定 $\psi(0) := \psi(\infty) := \infty$。若上下文已明确 (Γ, ψ)，且 $\gamma \in \Gamma$，则我们分别用 $\gamma^{\dagger}$ 和 γ' 代替 $\psi(\gamma)$ 和 $\gamma + \psi(\gamma)$。此外，令 $\Psi := \psi(\Gamma^{\neq})$；那么 $\Psi < (\Gamma^{>})'$。ψ 的以下“压缩”性质见 [ADH, 6.5.4(i)]:

引理 2.6。对于所有 $\alpha, \beta < (\Gamma^{>})'$ 属于 Γ 的情形，均有 $\psi(\alpha - \beta) >$ 最小值$\{\alpha, \beta\}$。

若 $\Psi < \gamma < (\Gamma^{>})'$，则称 $\gamma \in \Gamma$ a *gap* 是 (Γ, ψ) 中的一个间隙。（这样的 γ至多有一个。关于间隙的这一事实及其他事实，参见 [ADH，第 388] 页。）若 (Γ, ψ) 的 Ψ 有最大元，则称其为有基；若 (Γ, ψ) 具有渐近积分，则称其具有渐近积分 $\Gamma^{\neq})' = \Gamma$。如果一个渐近域的渐近对有间隙，就称该渐近域有间隙；同理，也可将“有间隙”替换为“有基”或“具有渐近积分”。任何对积分封闭的 d-赋值域都对渐近积分封闭。渐近域 K 中的一个间隙，在 K 的代数渐近域扩张中仍是间隙。

若渐近对 (Γ, ψ) 对所有 $\gamma, \delta \in \Gamma^{>}$ 都满足：$\gamma \leqslant \delta \Rightarrow \gamma^{\dagger} \geqslant \delta^{\dagger}$，则称其为 H-渐近对。每个 H-渐近对要么有间隙，要么有基，要么具有渐近积分 [ADH, 9.2.16]。若一个渐近域的渐近对是 H-渐近的，则称该渐近域为 H-渐近（或属于 H-型）。

主部。设 K 是一个带小导数的赋值微分域，并令 $\boldsymbol{k} :=$res(K)。我们将剩余态射 $\mathcal{O} \to \boldsymbol{k}$ 延拓为微分环态射 $P \mapsto P$: $\mathcal{O}\{Y\} \to \boldsymbol{k}\{Y\}$，其中 $Y \mapsto Y$。令 P、Q 遍历 $K\{Y\}^{\neq}$。我们首先将赋值 v: $K^{\times} \to \Gamma$ 延拓到 $K\{Y\}^{\neq}$，再通过

$$v(P) := \min\{va : a \in K^{\times} \text{ is a nonzero coefficient of } P,$$

并将其唯一地延拓为赋值 v: $K\langle Y\rangle^{\times} \to \Gamma$。对于每个 P，我们选取 $\mathfrak{d}_P \in K^{\times}$ 使得 $P \asymp \mathfrak{d}_P$；当 $P \sim Q$ 时，令 $\mathfrak{d}_P = \mathfrak{d}_Q$。于是 $\mathfrak{d}_P^{-1} P \in \mathcal{O}\{Y\}$，我们将 P 的主部 定义为 $D_P := \mathfrak{d}_P^{-1} P \in \boldsymbol{k}\{Y\}^{\neq}$，并将 P 的主次数 定义为 ddeg $P :=$ deg D_P。（$\mathfrak{d}_P$ 的另一种选择会将 D_P 乘以 $\boldsymbol{k}^{\times}$ 中的一个元素，因此 ddeg P 与该选择无关。）

映射 v_A。</style}与上一小节中的 K 一样，令 $A = \sum_i a_i \partial^i \in K[\partial]^{\neq}$（对所有 $a_i \in K$）。在 [ADH, 5.6] 中，我们定义了 $v(A) := \min_i v(a_i) \in \Gamma$。对于 $y \in K^{\times}$，量 $v(Ay)$ 仅取决于 vy，而不取决于 y，因此我们可以定义 $v_A(\gamma) := v(Ay)$，其中 $\gamma := vy$。由 [ADH, 4.5.1]，映射 v_A: $\Gamma \to \Gamma$ 严格递增。远不那么

显然的是， v_A 是满射；参见 [ADH, 6.0.1]。我们为之后会用到的简单情形给出一个证明：

引理 2.7. 设 $A \in K[\partial]^{\neq}$ 的阶为 1 且 $b \in K^\times$。那么存在一个 $y \in K^\times$，使得 $v(Ay) = vb$。

证明. 不妨设 $A = \partial - s$，其中 $s \in K$。那么对于 $y \in K^\times$，有 $Ay = y\big(\partial - (s - y^\dagger)\big)$。令 $a := s - b^\dagger$。若 $a \preccurlyeq 1$，则显然 $y := b$ 可行，因此设 $a \succ 1$。我们断言此时 $y := b/a$ 可行：由 $a^\dagger/a = -(1/a)^\dagger \cdot (1/a) = -(1/a)' \prec 1$（因为 K 具有小导数），可得 $a^\dagger \prec a$，从而 $s - y^\dagger = a + a^\dagger \sim a$。□

牛顿性。设 K 是一个无基础的 H-渐近域，且 $\Gamma \neq \{0\}$。若 ϕ 属于 K，且在 K 中 $v\phi \in \Psi^\downarrow$，则称其为活跃元素；在这种情况下，复合共轭 K^ϕ 的导子 $\phi^{-1}\partial$是小的。本小节中，ϕ 遍历 K中的活跃元素。若（活跃）元素 ϕ的性质 $S(\phi)$ 满足：存在 K 中的一个活跃 ϕ_0，使得对所有 $\phi \preccurlyeq \phi_0$，$S(\phi)$ 均成立，则称该性质最终成立；参见 [ADH，第 479] 页。给定一个微分多项式 $P \in K\{Y\}^{\neq}$，其复合共轭 P^ϕ最终会变得更加明晰；特别地，ddeg P^ϕ最终为常数，如 [ADH, 11.1] 所示。ddeg P^ϕ 的最终值称为 P的牛顿次数，记作 ndeg P。对于 $r \in \mathbb{N}$，若每个阶为 $\leqslant r$ 且满足 ndeg $P = 1$ 的 $P \in K\{Y\}$ 在 $\mathcal{O}$中都有零点，则称 K 是r-牛顿的；若每个阶为 $\leqslant r$ 且满足 deg $P =$ ndeg $P = 1$ 的 $P \in K\{Y\}$ 在 $\mathcal{O}$中都有零点，则称其为r-线性牛顿的。若 K 对所有 $r \in \mathbb{N}$都是 r-牛顿的，则称其为牛顿的；类似地，我们定义“线性牛顿的”。根据 [ADH, 14.2.5], , 若 K 是 1-线性牛顿的且具有渐近积分，则 K 是 d-赋值的。根据 [ADH, 14.2.2], , 若 K 是 r-线性牛顿的，则 K 是 r-线性满射的。我们给出 $r = 1$的证明：

引理 2.8. 假设 K 是1-线性牛顿的。那么 K 是 1-线性满射(，因而对积分封闭)。

证明。设 $A \in K[\partial]^{\neq}$ 的阶为 1，且 $b \in K^\times$；需证明：$b \in A(K)$。将 A、K替换为 A^ϕ、K^ϕ，其中 ϕ 满足 $v\phi \in \Psi$，从而使 $0 \in \Psi$（于是 K 的导数较小）。由引理 2.7 可得 $g \in K^\times$，满足 $v(Ag) = b$。将 A、b 替换为 $b^{-1}Ag$、1，从而使 $v(A) = 0 \leqslant vb$。于是 $A = a_1\partial + a_0$，其中 a_0、$a_1 \in \mathcal{O}$ 满足 $a_0 \asymp 1$ 或 $a_1 \asymp 1$。先考虑 $a_0 \asymp 1$的情形，并令 $P := a_1Y' + a_0Y - b \in K\{Y\}$。对于 K中的 $\phi \prec 1$，有 $P^\phi = a_1\phi Y' + a_0Y - b \sim a_0Y - b$。因此 ndeg $P = 1$，故 P有一个零点 $y \in K$，即 $A(y) = b$。在剩余情形下，我们有 $a_0 \prec 1$ 和 $a_1 \asymp 1$。现在由 $0 \in \Psi$可得 K 中的 $e \succ 1$，满足 $e^\dagger \asymp 1$。于是 $A_{\kappa e} = a_1\partial + (a_0 + a_1e^\dagger)$，其中 $a_0 + a_1e^\dagger \asymp 1$，从而可归约到前一种情形。□

H渐近域的牛顿性可以视为赋值域中亨塞尔性的恰当类比。事实上，K 是亨塞尔的，当且仅当它是 0-牛顿的。与我们更相关的是以下结果：[ADH, 14.2.12], , 其中 $\boldsymbol{k} :=$res(K)。

引理 2.9。设 K 具有渐近积分且是 r-牛顿的，$r \geqslant 1$，并设 $P \in K\{Y\}$、$u \in \mathcal{O}$和 $A \in \boldsymbol{k}[Y]$ 满足 阶 $P \leqslant r$，$A(u) = 0, \left(\frac{\partial A}{\partial Y}\right)(u) \neq 0$，且 $D_{P^\phi} \in \boldsymbol{k}^\times A$最终成立。那么$\bar{}P$在 $\bar{u} + \mathcal{o}$中有一个零点。

我们利用此引理从 [ADH, 14.2.18] 的证明中抽出一个论证。令

$$f \in K, \qquad S := \sigma(Y) - f = \omega(-Y^\dagger) + Y^2 - f \in K\langle Y\rangle.$$

于是，对于 $y \in K^\times$，有 $\sigma(y) = f$ 当且仅当 $S(y) = 0$。令 $b \in K^\times$，并设 $Q := Y^2S(bY)$。前文在 [ADH, 14.2.18] 中进行的计算表明，$Q \in K\{Y\}$ 且

阶 $Q=2$；事实上

$$Q \;=\; b^2Y^4+\big(\omega(-b^\dagger)-f\big)Y^2+R \quad \text{where } R\in K\{Y\},$$
$$\text{with}\quad R^\phi \;=\; \phi\cdot\big(2\phi Y''Y+2(\phi/b)^\dagger Y'Y-3\phi(Y')^2\big).$$

我们还将使用来自 [ADH, 11.7.6]的如下估计：

$$\omega(-\phi^\dagger)-\omega(-\theta^\dagger)\prec\phi^2 \qquad \text{for active } \theta \text{ in } K \text{ with } \phi\succ\theta. \tag{2.2}$$

由此得到一个在引理 5.5 的证明中用到的结果：

引理 2.10. 设 K 具有渐近积分且为2-牛顿的，并设 $b\in K^\times$、 $f\in K$和 γ 在 K 中活跃，且 $b^2=f-\sigma(\gamma)\succ\gamma^2$。则存在 $y\in K^\times$，使得 $\sigma(y)=f$ 且 $y\sim b$。

证明. 由于 $b\succ\gamma$， b 在 K中活跃。对下面的最后一步使用(2.2)，我们有

$$\sigma(b)-f \;=\; \sigma(b)-\sigma(\gamma)-b^2 \;=\; \omega(-b^\dagger)-\omega(-\gamma^\dagger)-\gamma^2 \;\prec\; b^2,$$

从而 $\omega(-b^\dagger)-f\sim -b^2$。最终 $\phi\prec b$，故由引理 2.6 得$(\phi/b)^\dagger\prec b$。因此，取如上的 R、 Q，最终 $R^\phi\prec b^2$，从而 $Q^\phi\sim b^2Y^2(Y^2-1)$。引理 2.9 给出 $u\in K$，使得 $u\sim 1$ 且 $Q(u)=0$，从而对 $y:=bu\sim b$有 $\sigma(y)=f$。□

λ-自由性和 ω-自由性。在本小节中， K 是一个 H-渐近域。在[ADH, 11.6]中，我们将 K 定义为 λ-自由的，若它是无基础的、 $\Gamma\neq\{0\}$，且对所有 $\lambda\in K$，都存在一个 $g\succ 1$属于 K，使得 $\lambda+g^{\dagger\dagger}\succcurlyeq g^\dagger$。对于预 d-赋值的 K，条件“K 无基础且 $\Gamma\neq\{0\}$”实际上是多余的：

引理 2.11。设 K 是预d-赋值的。若对所有 $\lambda\in K$，都存在一个 $g\succ 1$ 属于 K，使得 $\lambda+g^{\dagger\dagger}\succcurlyeq g^\dagger$，则 K 有渐近积分。

证明。设 K 没有渐近积分。那么 K 有基或有一个间隙。两种情况都会得到满足 $\Psi\leqslant v\gamma<(\Gamma^>)'$ 的 $\gamma\in K^\times$。于是，对每个 $\gamma\in\Gamma^<$，根据引理 2.6，我们有 $\psi(\psi(\gamma)-v\gamma)>\psi(\gamma)$。令 $\lambda:=-\gamma^\dagger$，则对所有满足 $g\succ 1$ 的 $g\in K$，利用(2.1)（当 $g^\dagger\asymp\gamma$时），可得 $\lambda+g^{\dagger\dagger}=(g^\dagger/\gamma)^\dagger\prec g^\dagger$。□

λ-自由性有助于在某些微分代数的 H-渐近域扩张下保留渐近积分：根据 [6, 命题 1.3.12]， K 是 λ-自由的，当且仅当每个满足 $\operatorname{trdeg}(L|K)\leqslant 1$ 的 H-渐近域扩张 L of K 都具有渐近积分。接下来给出 ADH, 14.2.3] 的一个变体：

引理 2.12. 设 K 是d-赋值且1-线性满射的。那么 K 是 λ-自由的。

证明。 H-渐近域 K 具有渐近积分，这是 K 为 d-赋值且 $\partial K=K$ 的结果。剩下只需应用 ADH, 11.6.17]。□

下文的定理 2.15 表明，牛顿性与ω-自由性结合时效果最佳；后者比 λ-自由性更强。为介绍这一性质，回顾一下我们在第 1 节中为 $z\in K$ 定义了 $\omega(z)=-(2z'+z^2)$。若 K 是 ω-自由的，则称其为 ω-*free*：它是无基础的，且具有 $\Gamma\neq\{0\}$；并且对所有 $\omega\in K$，都存在 $g\succ 1\in K$，使得 $\omega-\omega(-g^{\dagger\dagger})\prec(g^\dagger)^2$；参见 ADH, 11.7]。若 K 是 ω-自由的，则根据 ADH, 11.7.3, 11.7.7]，它也是 λ-自由的。ω-自由性的一项重要用途，是防止微分代数的预 d-赋值 H-渐近扩张出现偏离常规的行为：

定理 2.13 ([ADH,13.6.1])。假设 K 是 ω-自由的，且 L 是 K的一个d-代数预d-赋值 H-渐近域扩张。那么 L 也具有 ω-自由性(因而具有渐近积分)，且 $\Gamma_K^\leqslant$ 在 $\Gamma_L^\leqslant$中共尾。

在 Hardy 域的语境中， ω-自由性与二阶线性微分方程的振动准则相关。（参见下文引理 4.21 后的讨论。） H-渐近域的一个重要来源是以下内容：

命题 2.14 ([ADH,11.7.15])。 </style>如果 K 无基础，且是有基H-渐近子域的并，那么 K 是 ω-自由的。

注（供熟悉模型论的读者参考；后文不会用到）。命题 2.14 有某种逆命题：假设 K 是 ω-自由的。那么 K 有一个初等扩张，它是有基 H-渐近子域的并。为此，取 K的一个 $|K|^+$-饱和初等扩张 K^*。取满足 $\Gamma^< < vy < 0$的 $y \in K^*$。那么，根据 [ADH, 13.6.7]， K^* 的H-渐近子域 $K\langle y\rangle$ 有基。向下 L¨owenheim-Skolem 定理 [ADH, B.5.10] 给出 K^* 的一个初等子结构 K_1，满足 $K\langle y\rangle \subseteq K_1$ 和 $|K_1| = |K\langle y\rangle| = |K|$。以 K替代 K_1，重复这一过程，我们构造出一个由 H渐近子域组成的初等链 (K_n)，它们都是 K^* 的子域，并满足 $K_0 = K$ ，且每个 K_n 都包含于 K_{n+1}的一个有基 H-渐近子域中。于是，根据 [ADH, B.5.13], $\bigcup_n K_n$ 就是 K所需的初等扩张。

牛顿性仅假定牛顿次数为 1 的微分多项式存在零点。在关于 K 的附加假设下，我们得到更多：

定理 2.15 ([ADH,3.1.17, 14.2.5, 14.5.3])**.** 若 K 是代数闭的、 ω-自由的且为牛顿的，则每个 $P \in K\{Y\} \setminus K$ 在 K中都有一个零点。

由此得到一个结果，它是本文主要定理的基础：

推论 2.16. 设 K 是代数闭的、 ω-自由的且为牛顿的。则 K是线性闭的且线性满射的。

证明. 通过对 $r \in \mathbb{N}$ 作归纳法，我们证明 K 是 r-线性闭的。 $r = 0$的情形是平凡的，设 $A \in K[\partial]^{\neq}$ 的阶为 $r \geqslant 1$。则由定理 2.15， $R := \operatorname{Ri}(A) \in K\{Z\} \setminus K$有一个零点 $z \in K$。在 K 的一个微分域扩张中取满足 $y^\dagger = z$的 $y \neq 0$ 。则 $A(y) = 0$ ，从而由 (1.3)， $A = B(\partial - z)$，其中 $B \in K[\partial]^{\neq}$ 的阶为 $r - 1$。由归纳假设， B 在 K上分裂，因而 A亦然。因此 K 是线性闭的，又由于由引理 2.8 可知 K 是 1-线性满射的，故 K 是线性满射的。 □

命题 2.17 ([ADH,11.7.23, 14.2.5, 14.5.7])。 若 K 是 ω-自由、牛顿的，且其值群可除，那么 H的每个在 K 上代数的 K -渐近域扩张都是 ω-自由且牛顿的。

为应用这一点，设 L 是 K的一个代数域扩张。由 [ADH, 9.5]，在 L 上唯一延拓 K 的导子，以及 L 上任意一个位于 $\mathcal{O}$ 之上的赋值环，使得 L 成为 H-渐近域。作为一个特例，设K的剩余域中的 -1不是平方，且 $L = K[\mathrm{i}]$ ，其中$\mathrm{i}^2 = -1$。那么，相应地，我们将 L 视为一个 H-渐近域，其赋值环是 L 中位于 $\mathcal{O}$之上的唯一赋值环（即 $\mathcal{O} + \mathcal{O}\mathrm{i}$）。

H-**域**。有序微分域 是一个微分域 H ，其上有一个序，使得 H H 成为有序域。同理，有序赋值微分域 是一个赋值微分域 H ，其上赋予一个序，使得 H H 成为有序

域（不假设导子、赋值或序之间存在任何关系）。设 H为一个有序微分域，且 $C = C_H$。那么 H 具有凸子环

$$\mathcal{O} := \big\{h \in H : |h| \leqslant c \text{ for some } c \in C^{>}\big\},$$

它是 H 的赋值环，并具有极大理想

$$o = \big\{h \in H : |h| \leqslant c \text{ for all } c \in C^{>}\big\}.$$

若对所有满足 $h \succ 1$ 的 $h \in H$ 都有 $h^\dagger > 0$，并且 $\mathcal{O} = C + o$，则称 H 为 H-域。

在本小节的其余部分 H 是一个 H-域，视为有序赋值微分域，其赋值环为 $\mathcal{O}$。于是 H 是 H型的d-赋值，并且对 $\phi \in H^{>}$而言 H^ϕ 是一个H-域；关于这一点以及关于 H-域的其他基本事实，见 [ADH, 10.5] 。若它是实闭的、对积分封闭，并且 $H^\dagger = H$，则称 H 刘维尔闭 。由引理 2.12，刘维尔闭 H-域是 λ-自由的。一个刘维尔闭包之 H 是 H 的刘维尔闭 H-域扩张，且作为微分域是 H [的刘维尔扩张，ADH, 10.6]。由 [27, 定理 12.1(1)], ，下列各项等价:

(1) H 在 H 上的刘维尔闭包在同构意义下唯一;

(2) H 有基，或是 λ-自由的。

证明 (1) ⇒ (2) 的一个关键要素是：若 $v\gamma$ ($\gamma \in H^\times$) 是 H 中的一个间隙，则根据 ADH, 10.2.1, 10.5.10], , 存在一个 H域扩张 H ，其中有 y ，且满足 $y \prec 1$ 和 $y' = \gamma$；此外，根据 ADH, 10.2.2, 10.5.11], 还存在一个 H域扩张 H ，其中有 z ，且满足 $z \succ 1$ 和 $z' = \gamma$。另一个要素如下:

引理 2.18。若 H 是具有渐近积分的实闭域，且 $\lambda \in H$ 对 H 中所有 $g \succ 1$ 都满足 $\lambda + g^{\dagger\dagger} \prec g^\dagger$，那么对于任意 H域扩张 H 中满足 $\gamma^\dagger = -\lambda$的任意 $\gamma \neq 0$，H-渐近域 $H(\gamma)$ 都有间隙 $v\gamma$，并且 H 在 $H(\gamma)$中共尾。

证明。设 H, λ 如假设所述。结论的第一部分由 [ADH, 11.5.6, (iv) ⇒ (i) 以及 11.5.14（连同其证明后的注）]得出。共尾性则由 [ADH, 11.5.13 和 10.4.5(i)]得出。□

(2) ⇒ (1) 的证明基于以下结果:

命题 2.19 ([6, 命题1.3.15])。若 H 是一个 λ-自由的域，且 E 是 H上的刘维尔 H-域扩张，则 E 是 λ-自由的，并且 $\Gamma_H^{\leq}$ 在 $\Gamma_E^{\leq}$中共尾。

根据 [ADH, 16.4.1、16.4.8 及其证明]， H 有一个 ω-自由的牛顿刘维尔闭H-域扩张，其常数域是 C的实闭包。下文的定理 4.29 是这一事实的 Hardy 域版本，并用于证明引言中陈述的结果。下一个引理摘自 [6, 引理 1.3.18]的证明:

引理 2.20. 假设 H 不具有渐近积分， $\Gamma_H \neq \{0\}$，且 E 是对积分封闭的 H 的H-域扩张。那么， H 在某个包含 H 且常数域为 C的 E 的 ω-自由H-子域中共尾。

证明。若 H 是有基的，则由 [ADH, 11.7.17及周围备注、以 H 代替 F] 所给出的 H 的扩张 H_ω 是一个 ω-自由的 H-域，并在 H上嵌入 E，且由 H_ω的构造， H 在 H_ω 中与 $C_{H_\omega} = C$共尾。接下来，假设 H 有一个间隙 vb, $b \in H^\times$。取满足 $a' = b$ 与 $a \not\asymp 1$的 $a \in E$。则由 [ADH, 10.2.1, 10.2.2及其证明之后的备注], ， $H(a)$是 E 的一个有基 H-子域，且带有 $C_{H(a)} = C$，并且由 [ADH, 9.8.2及随后的备注]， H 在 $H(a)$中共尾。现在将前一情形应用于 $H(a)$以代替 H。□

函数 ω 与 σ 在 H-域中。设 H 为一个 H-域。在 [ADH, 11.8] 中，我们引入了 H 的一些特殊子集：

$$\begin{aligned}\Gamma(H) &:= \big\{h^\dagger : h \in H, h \succ 1\big\} \subseteq H^>,\\ \Lambda(H) &:= \big\{-h^{\dagger\dagger} : h \in H, h \succ 1\big\},\\ \Delta(H) &:= \big\{-h'^{\dagger} : h \in H, 0 \neq h \prec 1\big\}.\end{aligned}$$

这里 $\Lambda(H) = -\Gamma(H)^\dagger$ 与 $\Delta(H)$ 不相交；事实上，$\Lambda(H) < \Delta(H)$。若 H 具有渐近积分，则由 [ADH, 11.6.1, 11.8.16],

$$H \text{ is } \lambda\text{-free} \iff H = \Lambda(H)^\downarrow \cup \Delta(H)^\uparrow. \tag{2.3}$$

若 H 是刘维尔闭的，则由 [ADH, 11.8.13], $\Lambda(H)$ 向下封闭，$\Delta(H)$ 上闭，$H = \Lambda(H) \cup \Delta(H)$，且由 [ADH, 11.8.19],

$$\Gamma(H) = \{h' : h \in H^>,\ h \succ 1\}, \quad \Gamma(H) \text{ is upward closed.} \tag{2.4}$$

由 [ADH, 11.8.20、11.8.21 和 11.8.30 之前的备注、11.8.29、11.8.31]:

引理 *2.21*。函数 $\omega\colon H \to H$ 和 $\sigma\colon H^\times \to H$ 分别在 $\Lambda(H)^\downarrow$ 和 $\Gamma(H)^\uparrow$上严格递增，且 $\omega(H) < \sigma\big(\Gamma(H)\big)$。若 H 是刘维尔闭的，则 $\omega(H) = \omega\big(\Lambda(H)\big) = \omega\big(\Delta(H)\big)$ 且 $\sigma\big(H^> \setminus \Gamma(H)\big) \subseteq \omega(H)^\downarrow$。

若 H 具有渐近积分，则由 [ADH, 11.7.7, 11.8.30]可得:

$$H \text{ is } \omega\text{-free} \iff H = \omega\big(\Lambda(H)\big)^\downarrow \cup \sigma\big(\Gamma(H)\big)^\uparrow, \tag{2.5}$$

与 (2.3) 类似。我们利用这一点得到 [ADH, 11.8.33]的一个变体:

推论2.22。设 H 是刘维尔闭的。则以下条件等价：

(i) $H = \omega\big(\Lambda(H)\big) \cup \sigma\big(\Gamma(H)\big)$；*(ii)* H 是 ω-自由的，$\omega\big(\Lambda(H)\big)$ 向下封闭，且 $\sigma\big(\Gamma(H)\big)$ 上闭；*(iii)* $H = \omega(H) \cup \sigma(H^\times)$，且 $\omega(H)$向下封闭；*(iv)* 每个二阶 $A \in H[\partial]$ 都在 $H[i]$, 上分裂，且 $\omega(H)$向下封闭；这里 $H[i]$ （其中 $i^2 = -1$ ）是 H的一个代数闭包。

证明。引理 2.21 给出 $\omega(\Lambda(H)) = \omega(H) < \sigma\big(\Gamma(H)\big) \subseteq \sigma(H^\times)$，由此我们得到 (i) $\Rightarrow$ (iii)。该引理还推出

$$\sigma(H^\times) = \sigma(H^>) = \sigma\big(H^> \setminus \Gamma(H)\big) \cup \sigma\big(\Gamma(H)\big) \subseteq \omega(H)^\downarrow \cup \sigma(\Gamma(H)),$$

因此，由 (2.5) 可得 (iii) ⇒(ii)。后者还给出 (ii) ⇒(i)。(iii) ⇔(iv) 的等价性由 (1.6) 以及第 1 节中关于线性微分算子的备注得出。□

若 H 是施瓦茨闭的，就称其为 施瓦茨闭，也就是说，它是刘维尔闭的，且满足推论 2.22 中的等价条件。由 [ADH, 14.2.16, 14.2.18] 可得:

命题 2.23。假设 H 是 2-牛顿的且实闭，并且具有渐近积分。那么 $\omega\big(\Lambda(H)^\downarrow\big)$ 是向下封闭的，而 $\sigma\big(\Gamma(H)^\uparrow\big)$ 是上闭的。

因此，每个 2-牛顿的 ω-自由刘维尔闭 H-域都是施瓦茨闭的。

3. Functions and Germs

在引入处理芽和渐近关系的记号后，我们回顾二阶线性微分方程的基本事实，并讨论芽的复合。在全文中，a，b 遍历 $\mathbb{R}$，而 r 遍历 $\mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$。

芽的微分环。 设 $\mathcal{C}_a^r$ 为函数 $[a,+\infty) \to \mathbb{R}$构成的 $\mathbb{R}$-代数；这些函数在某个开 $U \supseteq [a,+\infty)$上可延拓为 $\mathcal{C}^r$-函数 $U \to \mathbb{R}$；此处 $\mathcal{C}^\omega$ 表示"解析的"。因此

$$\mathcal{C}_a \;:=\; \mathcal{C}_a^0 \;\supseteq \mathcal{C}_a^1 \;\supseteq\; \mathcal{C}_a^2 \;\supseteq\; \cdots \;\supseteq\; \mathcal{C}_a^\infty \;\supseteq\; \mathcal{C}_a^\omega.$$

注意， $\mathcal{C}_a^r[\mathrm{i}] = \mathcal{C}_a^r + \mathcal{C}_a^r\mathrm{i}$ 是连续函数 $[a,+\infty) \to \mathbb{C}$ 所成的 $\mathbb{C}$-代数 $\mathcal{C}_a[\mathrm{i}]$ 的子代数。对于 $f = g + h\mathrm{i} \in \mathcal{C}_a[\mathrm{i}]$， $g,\ h \in \mathcal{C}_a$，

$$\operatorname{Re} f \;:=\; g,\quad \operatorname{Im} f \;:=\; h,\quad \overline{f} \;:=\; g - h\mathrm{i} \;\in\; \mathcal{C}_a[\mathrm{i}],\qquad |f| \;:=\; \sqrt{g^2+h^2} \;\in\; \mathcal{C}_a.$$

设 $\mathcal{C}^r$ 为函数 $\bigcup_a \mathcal{C}_a^r$ 在 $+\infty$ 处的芽所成的 $\mathbb{R}$-代数。因此， $\mathcal{C} := \mathcal{C}^0$ 由连续函数 $[a,+\infty) \to \mathbb{R}$ $(a \in \mathbb{R})$ 在 $+\infty$ 处的芽组成，并且

$$\mathcal{C} \;=\; \mathcal{C}^0 \;\supseteq \mathcal{C}^1 \;\supseteq\; \mathcal{C}^2 \;\supseteq\; \cdots \;\supseteq\; \mathcal{C}^\infty \;\supseteq\; \mathcal{C}^\omega.$$

我们还考虑 $\mathcal{C}[\mathrm{i}]$ 的 $\mathbb{C}$-子代数 $\mathcal{C}^r[\mathrm{i}] = \mathcal{C}^r + \mathcal{C}^r\mathrm{i}$。对于 $n \geqslant 1$，我们有一个导子 $g \mapsto g'\colon \mathcal{C}^n[\mathrm{i}] \to \mathcal{C}^{n-1}[\mathrm{i}]$，使得对于 $f \in \bigcup_a \mathcal{C}_a^n[\mathrm{i}],$，(germ of f)$'$ =(germ of f')，且此导子限制为导子 $\mathcal{C}^n \to \mathcal{C}^{n-1}$。因此， $\mathcal{C}^{<\infty}[\mathrm{i}] := \bigcap_n \mathcal{C}^n[\mathrm{i}]$ 自然构成一个常数环为 $\mathbb{C}$ 的微分环，而 $\mathcal{C}^{<\infty} := \bigcap_n \mathcal{C}^n$ 是 $\mathcal{C}^{<\infty}[\mathrm{i}]$ 的一个常数环为 $\mathbb{R}$ 的微分子环。因此， $\mathcal{C}^\infty[\mathrm{i}]$ 是 $\mathcal{C}^{<\infty}[\mathrm{i}]$、 $\mathcal{C}^{<\infty}$ 的 $\mathcal{C}^\infty$，以及 $\mathcal{C}^\infty$ 的 $\mathcal{C}^\omega$ 的微分子环。

渐近关系。 对于定义在包含某个区间（$a,+\infty$）的集合上的 $\mathbb{C}$值函数，如果不会造成歧义，我们常用与其芽相同的记号。按照这一约定，给定复数的一个性质 P 以及 $g \in \mathcal{C}[\mathrm{i}]$，若对所有充分大的实数 t， $P\big(g(t)\big)$ 最终成立，我们就说 $P\big(g(t)\big)$。我们赋予 $\mathcal{C}$ 偏序 $f \leqslant g :\Leftrightarrow f(t) \leqslant g(t)$，最终成立；并赋予 $\mathcal{C}[\mathrm{i}]$ 渐近关系 $\preccurlyeq, \prec, \sim$，定义如下：对于 $f, g \in \mathcal{C}[\mathrm{i}]$,

$$\begin{aligned}
f \preccurlyeq g \quad &:\Longleftrightarrow \quad \text{there exists } c \in \mathbb{R}^> \text{ such that } |f| \leqslant c|g|,\\
f \prec g \quad &:\Longleftrightarrow \quad g \in \mathcal{C}[\mathrm{i}]^\times \text{ and } \lim_{t\to\infty} f(t)/g(t) = 0\\
&\Longleftrightarrow \quad g \in \mathcal{C}[\mathrm{i}]^\times \text{ and } |f| \leqslant c|g| \text{ for all } c \in \mathbb{R}^>,\\
f \sim g \quad &:\Longleftrightarrow \quad g \in \mathcal{C}[\mathrm{i}]^\times \text{ and } \lim_{t\to\infty} f(t)/g(t) = 1\\
&\Longleftrightarrow \quad f - g \prec g.
\end{aligned}$$

振荡。 若 $f(t) = 0$ 对任意大的 $t \geqslant a$ 都成立，且 $f(t) \neq 0$ 对任意大的 $t \geqslant a$ 都成立，我们就说 $f \in \mathcal{C}_a$ 振荡 。因此，若 $f(t) < 0$最终成立，或 $f(t) = 0$最终成立，或 $f(t) > 0$最终成立，则 $f \in \mathcal{C}_a$ 非振荡的（即不振荡）。若芽 $g \in \mathcal{C}$ 的某个（等价地，任意一个）代表元在 $\bigcup_a \mathcal{C}_a$ 中振荡，我们也称芽 $g \in \mathcal{C}$ 振荡。因此， $g \in \mathcal{C}$ 非振荡当且仅当 $g = 0$ 或 $g \in \mathcal{C}^\times$。

二阶线性微分方程。 设 $f \in \mathcal{C}_a$。我们将考虑相应的微分方程

$$\text{(L)} \qquad\qquad Y'' + fY \;=\; 0.$$

方程 (L) 的解 $y \in \mathcal{C}_a^2$ 构成 $\mathbb{R}$-线性子空间 $\mathrm{Sol}(f)$，它是 $\mathcal{C}_a^2$ 的子空间。方程 (L) 的解 $y \in \mathcal{C}_a^2[\mathrm{i}]$ 是满足 $y_1, y_2 \in \mathrm{Sol}(f)$ 的 $y_1 + y_2\mathrm{i}$，并构成 $\mathbb{C}$-线性子空间 $\mathrm{Sol}_{\mathbb{C}}(f)$，它是 $\mathcal{C}_a^2[\mathrm{i}]$ 的子空间。对于任意一对 $(c,d) \in \mathbb{C}^2$，存在唯一的方程 (L) 的解 $y \in \mathcal{C}_a^2[\mathrm{i}]$，满足 $y(a) = c$ 且 $y'(a) = d$；将 (c,d) 映射到该唯一解的映射，是 $\mathbb{C}$-线性空间之间的同构 $\mathbb{C}^2 \to \mathrm{Sol}_{\mathbb{C}}(f)$，其限制为一个

$\mathbb{R}$-线性空间之间的同构 $\mathbb{R}^2 \to \mathrm{Sol}(f)$。我们有 $f \in \mathcal{C}_a^n \Rightarrow \mathrm{Sol}(f) \subseteq \mathcal{C}_a^{n+2}$（因此 $f \in \mathcal{C}_a^\infty \Rightarrow \mathrm{Sol}(f) \subseteq \mathcal{C}_a^\infty$），并且 $f \in \mathcal{C}_a^\omega \Rightarrow \mathrm{Sol}(f) \subseteq \mathcal{C}_a^\omega$。（参见 [25, (10.5.3)]。）设 $y \in \mathrm{Sol}(f)^{\neq}$，并设 $Z := y^{-1}(0)$ 是 y 的零点集，因此 $Z \subseteq [a, +\infty)$ 在 $\mathbb{R}$ 中是闭集，且 Z 没有聚点（由罗尔定理可知）。特别地，对每个 $b \geqslant a$，$Z \cap [a, b]$ 都是有限集。因此

$$y \text{ does not oscillate} \iff Z \text{ is finite} \iff Z \text{ is bounded.}$$

若 $t_0 \in Z$ 不是 Z 的最大元素，则对某个 $t_1 > t_0$，有 $Z \cap (t_0, t_1) = \emptyset$。若 $Z \cap (t_0, t_1) = \emptyset$，则称 y 的一对零点 $t_0 < t_1$ 为相邻零点。Sturm分离定理指出，若 $y, z \in \mathrm{Sol}(f)$ 线性无关（在 $\mathbb{R}$ 上），且 $t_0 < t_1$ 是 z 的相邻零点，则 (t_0, t_1) 包含 y 的唯一零点（第 2 章 §6，定理 7]）。因此，某个 $y \in \mathrm{Sol}(f)^{\neq}$ 振荡，当且仅当每个 $y \in \mathrm{Sol}(f)^{\neq}$ 都振荡。若某个 $y \in \mathrm{Sol}(f)^{\neq}$ 振荡，则称 f 产生振荡。若 $b \geqslant a$，则 f 产生振荡当且仅当 $f|_b \in \mathcal{C}_b$ 产生振荡。因此，f 是否产生振荡只取决于它在 $\mathcal{C}$ 中的芽，由此引出元素 $\mathcal{C}$ 产生振荡的概念。根据斯图姆比较定理 [49, §27, VI], ，若 $g \in \mathcal{C}_a$ 产生振荡，且最终有 $f(t) \geqslant g(t)$，则 f 也产生振荡。

例 3.1。设 $k \in \mathbb{R}^\times$。则 $y \in \mathcal{C}_a^2$ 满足 $y'' + k^2 y = 0$，当且仅当存在某个 $c,\ d \in \mathbb{R}$ 以及所有的 $t \geqslant a$，

$$y(t) = c \cos k(t + d).$$

对于 $c \neq 0$，如所示的任意 $y \in \mathcal{C}_a^2$ 都会发生振荡。因此，如果 $f(t) \geqslant \varepsilon$，最终对于某个 $\varepsilon \in \mathbb{R}^>$ 而言，则 f 会产生振荡。

现在设 $g \in \mathcal{C}_a^1$，$h \in \mathcal{C}_a^0$。上文关于（L）的解的注也给出了关于 $\mathcal{C}_a^2$ 中微分方程的解的信息

$$(\widetilde{\mathrm{L}}) \qquad Y'' + gY' + hY = 0.$$

为了解释这一点，令 $f := -\frac{1}{2}g' - \frac{1}{4}g^2 + h \in \mathcal{C}_a$，并设 $G \in (\mathcal{C}_a^2)^\times$ 由 $G(t) := \exp\left(-\frac{1}{2}\int_a^t g(s)\, ds\right)$ 给出。则 $y \in \mathcal{C}_a^2$ 是（L）的解，当且仅当 Gy 是（$\widetilde{\mathrm{L}}$）的解。因此，（$\widetilde{\mathrm{L}}$）的解 $y \in \mathcal{C}_a^2$ 构成 $\mathcal{C}_a^2$ 的一个 $\mathbb{R}$-线性子空间 V，其维数为 2，其中当 $g,\ h \in \mathcal{C}_a^\infty$ 时 $V \subseteq \mathcal{C}_a^\infty$，将 $\mathcal{C}_a^\infty$ 替换为 $\mathcal{C}_a^\omega$ 时同样成立。因此：

$$\text{some } y \in V^{\neq} \text{ oscillates} \iff \text{all } y \in V^{\neq} \text{ oscillate} \iff f \text{ generates oscillation.}$$

($\widetilde{\mathrm{L}}$)在 $\mathcal{C}_a^2[\mathrm{i}]$ 中的解构成 $\mathbb{C}$-线性空间 $\mathcal{C}_a^2[\mathrm{i}]$的2维子空间 $V + V\mathrm{i}$。此外，

Sonin-P定理´olya与Trench。设 $f \in \mathcal{C}_a$。对于 $y \in \mathcal{C}_a^1$，若 $y'(t) = 0$，则称 $t \geqslant a$ 为 y 的临界点；若 y 在 t处具有局部极值，则称其为 y 的极值点。现设 $y \in \mathrm{Sol}(f)^{\neq}$。我们已经指出，$y$的零点集 $y^{-1}(0)$没有聚点。若 $f \in \mathcal{C}_a^\times$ 且 $y'(t) = 0,\ t \geqslant a$，则 $y''(t) \neq 0$（鉴于 $y''(t) = -f(t)y(t)$），故 t 在 y的临界点集 $(y')^{-1}(0)$中是孤立的，并且 t 是 y的极值点。此外：

引理 3.2. 假设 $f \in \mathcal{C}_a^\times$, $y \in \mathrm{Sol}(f)^{\neq}$ 和 $s_0 < s_1$ 是 y 的相邻零点。那么在区间 (s_0, s_1) 内，y 恰有一个临界点。

证明。如果 $t_0 < t_1$ 是 y 在区间（s_0, s_1）内的临界点，那么 y''（根据罗尔定理），因此 y（鉴于 $y'' = -fy$）会在区间（t_0, t_1）内有一个零点。□

引理 *3.3*（*Sonin-P´olya*，参见 [49, §27, XI]）。设 $f \in (\mathcal{C}_a^1)^\times$，$y \in \mathrm{Sol}(f)^{\neq}$，并令 $t_0 < t_1$ 为 y的临界点。若 f 递增，则 $|y(t_0)| \geqslant |y(t_1)|$。若 f递减，则 $|y(t_0)| \leqslant |y(t_1)|$。若 f 严格递增或严格递减，则这些不等式为严格不等式。

证明。令 $u := y^2 + \big((y')^2/f\big) \in \mathcal{C}_a^1$。于是 $u' = -f'(y'/f)^2,$，因此若 f递增，则 u 递减；并且由于 $u(t_i) = y(t_i)^2$ 对于 $i = 0,\ 1$ 成立，我们得到 $|y(t_0)| \geqslant |y(t_1)|$。其他情形类似；对于严格不等式，利用 $(y')^{-1}(0)$ 没有聚点即可。□

引理 3.3 的证明中，函数 u 在 y 的临界点处与函数 y^2 一致。下一命题中的函数 v 起到类似作用，但事实证明，在第 6 节中它对我们而言更方便。为陈述此命题，设 $y_1,\ y_2 \in \mathrm{Sol}(f)$，其朗斯基行列式为 $w = y_1y_2' - y_1'y_2$。于是 $w \in \mathbb{R}$，并且

$$w \neq 0 \iff y_1,\, y_2 \text{ are } \mathbb{R}\text{-linearly independent.}$$

设 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ 满足 $c_1^2 + c_2^2 = 1$ 和 $y := c_1y_1 + c_2y_2 \in \mathrm{Sol}(f)$。以下观察归功于 Trench [48, 定理 1]:

命题 3.4. 假设 $w \neq 0$，并考虑

$$v := \frac{|w|}{\sqrt{(y_1')^2 + (y_2')^2}} \in \mathcal{C}_a^1.$$

那么对于 $t \geqslant a$，有：$y'(t) = 0 \implies |y(t)| = v(t)$。

这可由下一个初等引理即时推出，将其应用于 $a_i = y_i'(t), b_i = y_i(t)$ $(i = 1,2)$，其中 $t \geqslant a$，且 c_1, c_2 如上。

引理 3.5. 设 $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ 满足 $a_1^2 + a_2^2 > 0$，并令

$$r := c_1a_1 + c_2a_2, \qquad s := c_1b_1 + c_2b_2.$$

若 $r = 0$，则 $|s| = |a_1b_2 - a_2b_1|/\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$。

证明。对于 $d := a_1b_2 - a_2b_1$ 我们有

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

于是 $dc_1 = b_2r - a_2s$，$dc_2 = -b_1r + a_1s$。从而 $d^2(c_1^2 + c_2^2) = (b_2r - a_2s)^2 + (-b_1r + a_1s)^2$。利用 $c_1^2 + c_2^2 = 1$ 即得关于 $r = 0$ 的所需结果。□

芽的复合。设 $g \in \mathcal{C}$ 满足 $\lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$；等价地，$g \geqslant 0$与 $g \succ 1$。则复合运算

$$f \mapsto f \circ g \ :\ \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \qquad (f \circ g)(t) \ :=\ f\big(g(t)\big) \ \text{ eventually},$$

是环 $\mathcal{C}$ 到环 $\mathbb{R}$ 的单射端同态，并且在子环 $f_1, f_2 \in \mathcal{C}$ 上为恒等映射。我们有：$f_1 \leqslant f_2 \Leftrightarrow f_1 \circ g \leqslant f_2 \circ g$，同理可得 $\preccurlyeq, \prec, \sim$。接下来假设 g 也最终严格递增。那么它的复合逆 $g^{\mathrm{inv}} \in \mathcal{C}$ 最终由 $g^{\mathrm{inv}}\big(g(t)\big) = t$ 给出，并且 g^{inv} 也最终严格递增，且满足 $g^{\mathrm{inv}} \geqslant 0$ 和 $g^{\mathrm{inv}} \succ 1$。于是，$f \mapsto f \circ g$ 是环 $\mathcal{C}$ 的自同构，其逆为 $f \mapsto f \circ g^{\mathrm{inv}}$。特别地，$g \circ g^{\mathrm{inv}} = g^{\mathrm{inv}} \circ g = x$（其中 x 是恒等函数的芽）。此外，若 $h \in \mathcal{C}$ 最终严格递增且满足 $g \leqslant h$，则 $h^{\mathrm{inv}} \leqslant g^{\mathrm{inv}}$。为第 6 节的使用，我们注意到:

引理 3.6。设 g、$h \in \mathcal{C}$ 最终严格递增，且 g、$h \succ 1$，并假设 $h \in \mathcal{C}^1$、$h^\dagger \preccurlyeq 1/x$。则 $g \sim h^{\mathrm{inv}} \Rightarrow g^{\mathrm{inv}} \sim h$。

这由在 [5, 中取 $f = h^{\mathrm{inv}}$ 推论 2.6] 得出。

可微芽的复合共轭。设 $\ell \in \mathcal{C}^1$、$\ell'(t)$最终 > 0（因此 ℓ 最终严格递增），且 $\ell(t) \to +\infty$ 为 $t \to +\infty$。则 $\phi := \ell' \in \mathcal{C}^\times$，并且 ℓ 的复合逆 $\ell^{\mathrm{inv}} \in \mathcal{C}^1$ 满足

$$\ell^{\mathrm{inv}} \geqslant t \text{ for all } t \in \mathbb{R}, \qquad (\ell^{\mathrm{inv}})' = (1/\phi) \circ \ell^{\mathrm{inv}} \in \mathcal{C}.$$

$\mathcal{C}$ 的 $\mathbb{R}$-代数自同构 $f \mapsto f^\circ := f \circ \ell^{\mathrm{inv}}$（逆为 $g \mapsto g \circ \ell$）将 $\mathcal{C}^1$ 映到自身，并且对 $f \in \mathcal{C}^1$ 满足一个有用的恒等式：

$$(3.1) \quad (f^\circ)' = (f \circ \ell^{\mathrm{inv}})' = (f' \circ \ell^{\mathrm{inv}}) \cdot (\ell^{\mathrm{inv}})' = (f'/\ell') \circ \ell^{\mathrm{inv}} = (\phi^{-1} f')^\circ.$$

因此，若 $n \geqslant 1$ 且 $\ell \in \mathcal{C}^n$，则 $\ell^{\mathrm{inv}} \in \mathcal{C}^n$，并且 $f \mapsto f^\circ$ 将 $\mathcal{C}^n$ 映到自身，对每个 n 均如此。因此，若 $\ell \in \mathcal{C}^{<\infty}$，则 $\ell^{\mathrm{inv}} \in \mathcal{C}^{<\infty}$，并且 $f \mapsto f^\circ$ 将 $\mathcal{C}^{<\infty}$ 映到自身；将 $\mathcal{C}^\infty$ 或 $\mathcal{C}^\omega$ 替换为 $\mathcal{C}^{<\infty}$时也同样成立。

4. Hardy Fields

在本节中，我们将 Hardy 域纳入第 1 节和第 2 节所建立的代数框架。随后，我们在 Hardy 域的背景下讨论振荡的复合与生成。为后续各节做准备，我们还将回顾 [5, 7] 的主要结果，并建立若干引理。

Hardy 域。一个*Hardy* 域 是 $\mathcal{C}^{<\infty}$的微分子域。例子：$\mathbb{R}$；$\mathbb{R}$的任意子域；域 $\mathbb{R}(x)$，其中 x 是 $\mathbb{R}$上恒等函数的芽；以及 H_{LE}，即 LE 函数（的芽）的 Hardy 域：$\mathcal{C}^{<\infty}$的最小子域，它扩张 $\mathbb{R}(x)$，每当包含 f 时便包含 e^f，并且每当包含使 $f(t) > 0$ 最终成立的 f 时便包含 $\log f$。在本节的其余部分 H 是一个 *Hardy* 域。$\mathcal{C}$ 的偏序到 H 的限制是全序，并使 H 成为一个有序域，因此 H 中没有芽振荡。我们有 $C_H \subseteq \mathbb{R}$，并且根据第2节关于 H-域的小节，H 具有赋值环

$$\mathcal{O} = \{f \in H : |f| \leqslant n \text{ for some } n\},$$

带有极大理想

$$o = \{f \in H : |f| \leqslant 1/n \text{ for all } n \geqslant 1\},$$

并据此将 H 视为有序赋值微分域。于是 H是带小导数的 H-渐近的；若 $H \supseteq \mathbb{R}$，则 H 是一个 H-域。此外，$K := H[\mathrm{i}]$ 是 $\mathcal{C}^{<\infty}[\mathrm{i}]$ 的微分子域，其常数域为 $K \cap \mathbb{C}$；而 $\mathcal{O} + \mathcal{O}\mathrm{i} = \{f \in K : f \preccurlyeq 1\}$ 是 K 的唯一赋值环，它与 H 的交为 $\mathcal{O}$。如此一来，K 是 H 的赋值微分域扩张，且带小导数、H- 渐近，并具有与 K 相同的渐近对（Γ, ψ）。将 $\mathcal{C}[\mathrm{i}]$ 上的渐近关系 $\preccurlyeq, \prec, \sim$限制到 K，恰好就是 K 作为赋值域所具有的渐近关系 $\preccurlyeq, \prec, \sim$；将 K换成 H时也同样如此。对于满足 $f, g \succ 1$ 的 $f, g \in K$，我们有

$$(4.1) \qquad \psi(vf) \geqslant \psi(vg) \iff f^\dagger \preccurlyeq g^\dagger \iff |f| \leqslant |g|^n \text{ for some } n.$$

因此，集合 $\Psi = \{\psi(\gamma) : \gamma \in \Gamma^{\neq}\}$ 是有限的，当且仅当有序阿贝尔群 Γ 的（阿基米德）秩有限。当 H 在其常数域上的超越次数有限时，情况便是如此，依据 [43, 命题 5]（另见 [5, 引理 5.26]）。

Hardy 型芽。若芽 $y \in \mathcal{C}$ 属于某个 Hardy 域（因而 $y \in \mathcal{C}^{<\infty}$），则称其为*Hardy* 型；若其属于 H 的某个 Hardy 域扩张，则称其为 H-*Hardy* 型。（因此，y 是 Hardy 型的，当且仅当 y 是 $\mathbb{Q}$-Hardy 型的。）若对于 H 的每个 Hardy 域扩张 E，y 都是 E-Hardy 型的，则称 $y \in \mathcal{C}$ 为完全 H-*Hardy* 型；若其为完全 $\mathbb{Q}$-Hardy 型，则称其为完全 *Hardy* 型。注意：$y \in \mathcal{C}$ 是完全 H-Hardy 型的，当且仅当 y 包含于 H 的每个极大 Hardy 域扩张中；若 Hardy 域不存在真 Hardy 域扩张，则称其为极大。（根据佐恩引理，每个 Hardy 域都有一个极大 Hardy 域扩张。）因此，完全 H-Hardy 型芽构成 H 的一个 Hardy 域扩张 E(H)，即 H 的完美包，它等于 H 的所有极大 Hardy 域扩张的交集。我们还考虑 H 的 d-完美包：该 Hardy 子域

$$\mathrm{D}(H) := \big\{ f \in \mathrm{E}(H) : f \text{ is d-algebraic over } H \big\}$$

H（包含 H）的 E。若 H 满足 $H = \mathrm{E}(H)$，则称其为完美；若满足 $H = \mathrm{D}(H)$，则称其为 d-完美。若 H 是 d-完美的，则根据 [5, 命题 4.2]，$H \supseteq \mathbb{R}$ 和 H 是刘维尔闭的 H-域。特别地，$\mathrm{D}(H) \supseteq \mathbb{R}$ 是刘维尔闭的 H-域，而且 H 是预 d-赋值的。从 H 转到 D(H) 的 Hardy 子域 $H(\mathbb{R})$，通常可以让我们安排 $H \supseteq \mathbb{R}$，从而使 H 成为一个 H-域。同样，D(H) 中 H 的代数闭包 H^{rc} 是有序域 H 的实闭包，因此我们通常可以用 H^{rc} 替换 H。关于这一点，我们注意到：

引理 4.1。H 的值群 Γ_H 在 $\Gamma_{H(\mathbb{R})}$ 中共尾，而 $\Gamma_{H^{\mathrm{rc}}}$ 是 Γ_H 的可除包。若 *Hardy* 域 H、$H(\mathbb{R})$、H^{rc} 中有一个是 λ-自由的，则三者全都是；在这种情况下，$H(\mathbb{R})$ 的值群为 Γ_H。

证明。Γ_H 在 $\Gamma_{H(\mathbb{R})}$ 中的共尾性由 [ADH, 10.3.2, 10.5.15], 得出，而关于 $\Gamma_{H^{\mathrm{rc}}}$ 的断言则由 [ADH, 3.1.9]得出。若 H 是 λ-自由的，则由 [6, 命题1.3.3], , $H(\mathbb{R})$亦然，且具有相同的值群；而若 $H(\mathbb{R})$是 λ-自由的，则由 [6,引理1.3.13, 1.3.14], H亦然。由 [ADH, 11.6.8], H 是 λ-自由的当且仅当 H^{rc} 是 λ-自由的。□

设 $H \supseteq \mathbb{R}$。如同 [ADH第 460], 页所述，H 的*Hardy-Liouville*闭包 Li(H)是 H 的最小Hardy 域扩张 L，且它是一个刘维尔闭的 H-域。我们有Li(H) $\subseteq$ D(H), 并且Li(H)是其微分子域 H的刘维尔扩张。若 H 是有基的或 λ-自由的，则由第2节，Li(H)是 H-域 H在 H上在同构意义下唯一的刘维尔闭包。注意Li($\mathbb{R}$) $\supseteq H_{\mathrm{LE}}$; 但尽管Li($\mathbb{R}$)包含满足 $g' = \mathrm{e}^{x^2}$的 $g \in \mathcal{C}^1$，H_{LE} 中却没有这样的 g（据刘维尔）。关于下一个结果，见 [5, 命题6.9] 或 [14, 引理11.6(6)]:

命题 4.2。若 $\phi \in H$ 且 $\phi \preccurlyeq 1$，则 余弦ϕ，正弦 $\phi \in \mathrm{D}(H)$。

光滑与解析 Hardy 域。我们还考虑具有额外正则性要求的 Hardy 域：若 $H \subseteq \mathcal{C}^\infty$，则称 H 为 $\mathcal{C}^\infty$-*Hardy* 域（或称为光滑 *Hardy* 域）；若 $H \subseteq \mathcal{C}^\omega$，则称 $\mathcal{C}^\omega$为-*Hardy* 域（或称为解析 *Hardy* 域）。若 H 是一个 $\mathcal{C}^\infty$-Hardy 域，且 $y \in \mathcal{C}^\infty$ 是 H-Hardy 型的，则 y 生成一个 $\mathcal{C}^\infty$-Hardy 域扩张 $H\langle y\rangle$，其扩张基域为 H；用 $\mathcal{C}^\infty$替换 $\mathcal{C}^\omega$ 时，结论也成立。此外，若 $H \subseteq \mathcal{C}^\infty$ 且 E是 H的一个 d-代数 Hardy 域扩张，则 $E \subseteq \mathcal{C}^\infty$；用 $\mathcal{C}^\infty$替换 $\mathcal{C}^\omega$ 时，结论也成立；参见 [7, 推论 7.8]。特别地，若 $H \subseteq \mathcal{C}^\infty$, 则 D($H$) $\subseteq \mathcal{C}^\infty$；用 $\mathcal{C}^\infty$替换 $\mathcal{C}^\omega$ 时，结论也成立。

Hardy 域与复合。设 $\ell \in \mathcal{C}^1$ 满足 $\ell >_{\mathrm{e}} \mathbb{R}$ 和 $\ell' \in H$。那么 $\ell \in \mathcal{C}^{<\infty}$, $\phi := \ell'$ 在 H, $\phi > 0$中是活跃的，并且我们有一个 Hardy 域 $H(\ell)$。$\mathbb{R}$-代数自同构 $f \mapsto f^\circ := f \circ \ell^{\mathrm{inv}}$ of $\mathcal{C}$ 限制为一个有序域同构 $H \to H^\circ := H \circ \ell^{\mathrm{inv}}$。恒等式 $(f^\circ)' = (\phi^{-1} f')^\circ$ 来自 (3.1)，有效

对每个 $f \in \mathcal{C}^1$均成立，这表明 H° 仍是一个 Hardy 域，并且 $h \mapsto h^\circ$: $H^\phi \to H^\circ$是有序赋值微分域的同构。此外，若 $H \subseteq \mathcal{C}^\infty$和 $\ell \in \mathcal{C}^\infty$，则 $H^\circ \subseteq \mathcal{C}^\infty$；将 $\mathcal{C}^\infty$换成 $\mathcal{C}^\omega$ 时也同样成立。

例 4.3。设 $d \in \mathbb{R}$。我们有 Hardy 域 $H\circ(x+d)$，其中 $H\circ(x+d) \subseteq \mathcal{C}^\infty$当 $H \subseteq \mathcal{C}^\infty$且 $H\circ(x+d) \subseteq \mathcal{C}^\omega$当 $H \subseteq \mathcal{C}^\omega$。映射 $h \mapsto h\circ(x+d)$: $H \to H\circ(x+d)$ 是有序赋值微分域的同构。（取上文的 $\ell = x - d$。）

下一个引理是 [13, 推论 6.5]。

引理 4.4。芽 ℓ^{inv} 是 *Hardy* 型的。此外，若 ℓ 是 $\mathcal{C}^\infty$-*Hardy* 型的，则 ℓ^{inv} 也是 $\mathcal{C}^\infty$-*Hardy* 型的；将 $\mathcal{C}^\omega$ 替换为 $\mathcal{C}^\infty$时，结论同样成立。

证明。将 H 替换为 $\mathrm{Li}\big(H(\mathbb{R})\big)$，我们可使 Hardy 域 H 同时包含 ℓ和 x。于是 $\ell^{\mathrm{inv}} = x \circ \ell^{\mathrm{inv}}$ 是 Hardy 域 $H^\circ = H \circ \ell^{\mathrm{inv}}$的一个元素。□

引理 4.4 的证明表明，ℓ 和 ℓ^{inv} 都是 $\mathbb{R}(x)$-Hardy 型；此外（参见 [14, 引理 14.10]）：

引理 4.5. 我们有

$$\mathrm{trdeg}\big(\mathbb{R}\langle x, \ell^{\mathrm{inv}}\rangle|\mathbb{R}\big) \;=\; \mathrm{trdeg}\big(\mathbb{R}\langle x, \ell\rangle|\mathbb{R}\big),$$

因此，如果 ℓ 在 $\mathbb{R}$上是d-代数的，那么 ℓ^{inv}也如此，且

$$\mathrm{trdeg}\big(\mathbb{R}\langle \ell^{\mathrm{inv}}\rangle|\mathbb{R}\big) \;\leqslant\; 1 + \mathrm{trdeg}\big(\mathbb{R}\langle \ell\rangle|\mathbb{R}\big).$$

这可由在以下引理中取 $H(x)$、x 作为 H、h 得到：

引理 4.6. 设 $h \in H$。那么

$$\mathrm{trdeg}\big(\mathbb{R}\langle x, \ell^{\mathrm{inv}}, h^\circ\rangle|\mathbb{R}\big) \;=\; \mathrm{trdeg}\big(\mathbb{R}\langle x, \ell, h\rangle|\mathbb{R}\big), \tag{4.2}$$

因此，如果 ℓ、h 在 $\mathbb{R}$上是d-代数的，那么 h°也如此，且

$$\mathrm{trdeg}\big(\mathbb{R}\langle h^\circ\rangle|\mathbb{R}\big) \;\leqslant\; \mathrm{trdeg}\big(\mathbb{R}\langle x, h\rangle|\mathbb{R}\big) + \mathrm{trdeg}\big(\mathbb{R}\langle \ell\rangle|\mathbb{R}\big).$$

证明。令 $H = \mathbb{R}\langle x、\ \ell、\ h\rangle = \mathbb{R}(x)\langle \ell、\ h\rangle$，并设 $\phi := \ell'$。令 ∂和 $\delta = \phi^{-1}\partial$分别为 H 和 H^ϕ 的导子，则有 $\phi = 1/\delta(x)$，且对于 $f \in H$ 和 $n \geqslant 1$，

$$\partial^n(f) \in \mathbb{Q}\big[\delta(f), \delta^2(f), \dots, \phi, \delta(\phi), \delta^2(\phi), \dots\big]$$

根据第 1 节中关于复合共轭的小节。微分域 H 和 H^ϕ 具有相同的底层域，前者作为域由 x 和 $\ell^{(n)}$、$h^{(n)}$在 $\mathbb{R}$ 上生成，因此将上述结论应用于 $f = \ell$ 和 $f = h$ 可知，H^ϕ 作为微分域由 x、ℓ和 h在 $\mathbb{R}$上生成。我们还有一个微分域同构 $h \mapsto h^\circ$: $H^\phi \to H^\circ = H \circ \ell^{\mathrm{inv}}$。由此得到 $H^\circ = \mathbb{R}\langle \ell^{\mathrm{inv}}、\ x、\ h^\circ\rangle$ 以及 (4.2)。□

推论 4.7. 如果 $H \supseteq \mathbb{R}$ 是 d-代数的，那么 $H^\circ \supseteq \mathbb{R}$也是。

正弦曲线的加法。回顾对于 ϕ，$\theta \in \mathbb{R}$ 我们有

$$\begin{aligned}\cos(\phi+\theta) &= \cos(\phi)\cos(\theta) - \sin(\phi)\sin(\theta),\\ \cos(\phi-\theta) &= \cos(\phi)\cos(\theta) + \sin(\phi)\sin(\theta).\end{aligned}$$

还要记住双射 arccos：$[-1,1] \to [0,\pi]$，它是余弦函数在 $[0,\pi]$ 上的反函数。因此，对于任意 a，$b \in \mathbb{R}$，我们都有 $d \in \mathbb{R}$，使得

$$a\cos(\phi) + b\sin(\phi) \;=\; \sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos(\phi+d) \text{ for all } \phi \in \mathbb{R}:$$

对于 a、b 不同时为 0 的情形，当 $b \leqslant 0$ 时，$d = \arccos\left(a/\sqrt{a^2+b^2}\right)$ 成立；当 $b \geqslant 0$ 时，$d = -\arccos\left(a/\sqrt{a^2+b^2}\right)$ 成立。为后续使用，我们记录以下一些推论：

引理 4.8。设 $y \in \mathcal{C}$。则

$y = a$ 余弦 $x + b$ 正弦 x 对于某些 a、$b \in \mathbb{R}$ $\iff$ $y = c$ 余弦$(x+d)$ 对于某些 c、$d \in \mathbb{R}$。

推论 4.9。设 $\phi \in \mathcal{C}$。则 $\mathbb{R}$ 余弦 $\phi + \mathbb{R}$ 正弦 $\phi = \{c$ 余弦$(\phi + d)$：c，$d \in \mathbb{R}\}$。

下面是证明引理 5.2 和 6.14 时要用到的两个事实：

推论 4.10。设 $H \supseteq \mathbb{R}$ 是实闭且对积分封闭的，并令 g、$h \in H$。则存在 $u \in H$ 使得 $-\pi \leqslant u \leqslant \pi$ 且 g 余弦 $\phi + h$ 正弦 $\phi = \sqrt{g^2+h^2}\cdot$余弦$(\phi+u)$ 对所有 $\phi \in \mathcal{C}$ 成立：若 $h < 0$，则对 $u =$ 反余弦 $\left(g/\sqrt{g^2+h^2}\right)$ 成立；若 $h > 0$，则对 $u = -$反余弦 $\left(g/\sqrt{g^2+h^2}\right)$ 成立。

证明。在区间 $(-1,1)$ 上，反余弦函数是实解析的，其导数为 $t \mapsto -1/\sqrt{1-t^2}$。因此，对于 $h \neq 0$，反余弦$\left(g/\sqrt{g^2+h^2}\right) \in H$。□

推论 4.11。设 $a \in \mathbb{R}$，且 g、$\phi \in \mathcal{C}_a^1$ 在 H 中有芽，使得 $g(t) \neq 0$ 最终成立，并且当 $t \to +\infty$ 时，$\phi(t) \to +\infty$。那么存在一个实数 $b \geqslant a$，使得若 s_0、$s_1 \in [b, +\infty)$ 是 $s_0 < s_1$ 的任意一对相继零点，则 $y := g$ 余弦 ϕ，而 y' 在区间 (s_0, s_1) 内恰有一个零点。

证明。通过增大 a，我们使得对所有 $t \geqslant a$，$g(t) \neq 0$ 且 $\phi'(t) > 0$。必要时将 g 替换为 $-g$，进一步使得对所有 $t \geqslant a$，$g(t) > 0$。设 $s_0, s_1 \in [a, +\infty)$ 是 $s_0 < s_1$ 的相继零点。稍后我们会对 s_0 施加适当的下界 $b \geqslant a$。于是 $\phi(s_1) = \phi(s_0) + \pi$，因为 s_1 是 $\cos\phi$ 在 s_0 之后的下一个零点。另外

$$\begin{aligned} y' &= g'\cos\phi - g\phi'\sin\phi = \sqrt{g'^2 + (g\phi')^2}\cos(\phi+u), \quad \text{where} \\ u &= \arccos\left(g'/\sqrt{g'^2+(g\phi')^2}\right), \quad \text{so } 0 < u(t) < \pi \text{ for all } t \geqslant a. \end{aligned}$$

根据罗尔定理，y' 在 (s_0, s_1) 内有一个零点。设 $t \in (s_0, s_1)$ 是 y' 的一个零点。那么

$$\phi(s_0) < \phi(t) < \phi(s_0) + \pi, \quad \phi(t) + u(t) \in \phi(s_0) + \mathbb{Z}\pi,$$

因此 $\phi(t) + u(t) = \phi(s_0) + \pi$。取足够大的 $b \geqslant a \in \mathbb{R}$，使得 u 在 $[b, +\infty)$ 上可微，且对所有 $t \geqslant b$，$\phi'(t) + u'(t) > 0$；这是可能的，因为根据推论 4.10，$u \preccurlyeq 1$ 是 H-Hardy 型的，并且当 $t \to +\infty$ 时，$\phi(t) + u(t) \to +\infty$。现在假设 $b \leqslant s_0$，我们得出结论：$t \in (s_0, s_1)$ 由 $\phi(t) + u(t) = \phi(s_0) + \pi$ 唯一确定。□

Hardy 域上的振荡。在本小节中，我们假设 $f \in H$，并考虑线性微分方程

$$4Y'' + fY = 0 \tag{4L}$$

在 H 上。根据第 3 节中关于 (L) 的事实，(4L) 的每个解 $y \in \mathcal{C}^2$ 都属于 $\mathcal{C}^{<\infty}$。(4L) 的解构成 $\mathbb{R}$-线性空间 $\mathcal{C}^{<\infty}$ 的一个二维子空间 V。令 $A := 4\partial^2 + f \in H[\partial]$，则有 $V = \ker_{\mathcal{C}^{<\infty}} A$，且 $V + V\mathrm{i} = \ker_{\mathcal{C}^{<\infty}[\mathrm{i}]} A$。此外，如果 $f \in \mathcal{C}^\infty$，则 $V \subseteq \mathcal{C}^\infty$；将 $\mathcal{C}^\infty$ 换成 $\mathcal{C}^\omega$，结论同样成立。根据 [14,定理 16.7]（或 [5, 命题 6.1]）：

命题 4.12。如果 $f/4$ 不产生振荡，那么 $V \subseteq \mathrm{D}(H)$。

命题 4.12 对更一般的二阶线性微分方程也有推论：设 $g,h\in H$，并考虑线性微分方程

$$(\widetilde{\mathrm{L}}) \qquad Y''+gY'+hY \;=\; 0$$

在 H 上。再次根据第 3 节中关于 (L) 的事实，($\widetilde{\mathrm{L}}$) 的解 $y\in\mathcal{C}^2$ 位于 $\mathcal{C}^{<\infty}$ 中。为了将 (L) 化为方程 (4L)，我们取

$$f \;:=\; \omega(g)+4h \;=\; -2g'-g^2+4h\in H,$$

某个 $a\in\mathbb{R}$ 以及 g 在 $\mathcal{C}^1_a$中的一个代表元，同样记为 g，并令 $G\in(\mathcal{C}^2)^\times$为 $t\mapsto\exp\left(-\frac{1}{2}\int_a^t g(s)\,ds\right)$：$\mathbb{R}^{\geqslant a}\to\mathbb{R}$ 的芽，从而 $G\in\mathrm{Li}\big(H(\mathbb{R})\big)\subseteq\mathrm{D}(H)$。于是 $y\mapsto Gy$ 是从 $\mathcal{C}^2$ 中 (4L) 的解所构成的 $\mathbb{R}$-线性空间到 $\mathcal{C}^2$ 中 ($\widetilde{\mathrm{L}}$) 的解所构成的 $\mathbb{R}$-线性空间上的一个同构，并且 $y\in\mathcal{C}^2$ 振荡当且仅当 Gy 振荡。利用 $\frac{f}{4}=-\frac{1}{2}g'-\frac{1}{4}g^2+h$，我们由此从第 3 节和命题 4.12得到：– –

推论 4.13 （参见 [14, 定理 16。8]）。以下各项等价：

（i） $\mathcal{C}^2$ 中的某个（$\widetilde{\mathrm{L}}$）的解发生振荡；

（ii） $\mathcal{C}^2$ 中的（$\widetilde{\mathrm{L}}$）的所有非零解都发生振荡；

（iii）$=\frac{1}{2}g'-\frac{1}{4}g^2+h$产生振荡。

此外，如果 $-\frac{1}{2}g'-\frac{1}{4}g^2+h$不产生振荡，那么 $\mathcal{C}^2$ 中（$\widetilde{\mathrm{L}}$）的所有解都属于D（H）。

令 $A:=\partial^2+g\partial+h\in H[\partial]$，并令 $f=\omega(g)+4h$ 和 G 如上。则由（1.3）和命题 4.12 可得：

推论 4.14。以下各项等价：

（i） $f/4$ 不产生振荡；（ii） A 在 H的某个 *Hardy* 域扩张上可分裂；（iii） A 在D（H）上可分裂。

回顾 $K=H[\mathrm{i}]$。我们有 $A_{\ltimes G}=\partial^2+\frac{f}{4}$和 $G^\dagger=-\frac{1}{2}g\in H$，因此：

推论 4.15. A 在 $K\iff\partial^2+\frac{f}{4}$ 上分裂，在 K上分裂。

ω Hardy 域的无 性。设 $f\in H$和 $A:=4\partial^2+f$。由 (1.5) 可得：

$$\ker_H A\neq\{0\} \quad\Longrightarrow\quad A \text{ splits over } H \quad\Longleftrightarrow\quad f\in\omega(H),$$

并且，若 $H\supseteq\mathbb{R}$ 是刘维尔闭的，且 A 在 H上分裂，则由引理 1.1，$\dim_{\mathbb{R}}\ker_H A=2$，且 $f/4$ 不会产生振荡。因此

$$\overline{\omega}(H) \;:=\; \big\{f\in H : f/4 \text{ does not generate oscillation}\big\},$$

H的一个向下封闭子集，包含 $\omega(H)$。若 E 是 H的 Hardy 域扩张，则 $\omega(E)\cap H=\omega(H)$。命题 4.12 得出：

推论4.16. 若 H 是d-完美的(特别是，若 H 是极大的)，则

$$\omega(H) \;=\; \overline{\omega}(H) \;=\; \big\{f\in H:\; 4y''+fy=0 \textit{ for some } y\in H^\times\big\},$$

因此，$\omega(H)$在 H 中向下封闭。

在 [5, 第 6] 节中，我们确定了 $\omega(H)$的各种可能性；由此，我们只需根据 [5, 引理 6.17], 之后的注释，以及同一文献中引理 6.18、6.19 和推论 6.20 的以下推论，得到 $\omega(H)<\sigma\big(\Gamma(H)^\uparrow\big)$：

引理 4.17。 设 $\gamma \in H^{>}$ 满足 $v\gamma =$ 最大值 Ψ_H。那么，根据 *[ADH，第 9.2 节*：

$$\overline{\omega}(H) \;=\; \omega(-\gamma^{\dagger}) + \gamma^2 \circ_H^{\downarrow}.$$

引理 4.18. 若 H 是 λ-自由的，则利用 *[ADH, 9.2.17, 11.6.8]:*

$$\overline{\omega}(H) \;=\; \omega\big(\Lambda(H)\big)^{\downarrow} \;=\; \omega(H)^{\downarrow} \quad or \quad \overline{\omega}(H) \;=\; H \setminus \sigma\big(\Gamma(H)\big)^{\uparrow}.$$

引理 4.19. 若 H 是 ω-自由的，则

$$\overline{\omega}(H) \;=\; \omega\big(\Lambda(H)\big)^{\downarrow} \;=\; \omega(H)^{\downarrow} \;=\; H \setminus \sigma\big(\Gamma(H)\big)^{\uparrow}.$$

结合 (2.5) 中对 H-域的 ω-自由性的刻画，可得 [5,推论 7.3]的一个版本：

推论 4.20. 若 $H \supseteq \mathbb{R}$ 是 ω-自由的，则

$$\overline{\omega}(H) \;=\; \omega\big(\Lambda(H)\big)^{\downarrow} \;\; and \;\; H \setminus \overline{\omega}(H) \;=\; \sigma\big(\Gamma(H)\big)^{\uparrow}.$$

并非每个刘维尔闭 Hardy 域 $H \supseteq \mathbb{R}$ 都是 ω-自由的：参见 [6, 例 1.3.16]。设 $L \supseteq \mathbb{R}$ 是 H的一个刘维尔闭微分代数 Hardy 域扩张。若 H 是ω-自由的，则根据定理 2.13， L也如此。不过， L也可能出于其他原因而是 ω-自由的：

引理 4.21 ([5, 引理 7.11]). 假设 H 不是 λ-自由的，或者 $\omega(H) \neq H \setminus \sigma\big(\Gamma(H)\big)^{\uparrow}$。若 $\omega(L) = \omega(L)$，则 L 是 ω-自由的。(特别是，$\mathrm{D}(H)$ 是 ω-自由的。)

接下来假设 H 是 $\mathbb{R}(x)$的一个对数封闭的 d-代数 Hardy 域扩张，即 $\log(H^{>}) \subseteq H$。（例： H_{LE}。）那么 H 是无基础的。递归定义芽 $\ell_n \in H^{>\mathbb{R}}$ 如下： $\ell_0 := x$ 以及 $\ell_{n+1} := \log \ell_n$。那么$(\ell_n)$是 H 的一个对数序列，定义见 ADH，第 499], 页； H 是包含 $\mathbb{R}(x)$的有基 H子域之并，依据命题 14.11]；另见推论5.28]。因此，由命题 2.14， H 是 ω-自由的（特别是具有渐近积分）。我们引入以下芽（均在 H中）：

$$\gamma_n \;:=\; \ell_n^{\dagger} \;=\; \frac{1}{\ell_0 \cdots \ell_n}, \qquad \lambda_n \;:=\; -\gamma_n^{\dagger} \;=\; \frac{1}{\ell_0} + \frac{1}{\ell_0\ell_1} + \cdots + \frac{1}{\ell_0\ell_1\cdots\ell_n},$$
$$\omega_n \;:= \omega(\lambda_n) \;=\; \gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \cdots + \gamma_n^2 \;=\; \frac{1}{\ell_0^2} + \frac{1}{(\ell_0\ell_1)^2} + \cdots + \frac{1}{(\ell_0\cdots\ell_n)^2},$$

因此 $\sigma(\gamma_n) \;=\; \omega_n + \gamma_n^2$。这些芽对于振动准则很重要：令 $f \in H$，并注意到 $f \notin \omega(H)$当且仅当$\int_4^f$ 产生振荡。我们有：

$$(4.3) \qquad f \notin \overline{\omega}(H) \quad\Longleftrightarrow\quad f > \omega_n \text{ for all } n \quad\Longleftrightarrow\quad f > \omega_n + \gamma_n^2 \text{ for some } n.$$

第一个等价关系归功于 Hartman [30] 对 $H = H_{\mathrm{LE}}$ 的证明，以及 Boshernitzan [14,定理 17] 对所有上述 H 的证明；另见 [5, 推论 79]。第二个等价关系由 [5, 推论 710] 推出，同时还用到了 $\omega(H) < \sigma\big(\Gamma(H)\big)^{\uparrow}$。

复指数。 这里指芽 $\mathrm{e}^f \in \mathcal{C}[\mathrm{i}]^{\times}$，其中 $f \in \mathcal{C}[\mathrm{i}]$。在接下来的小节中，这些对象在对 K 上的微分算子进行分解时会自然出现。这里回顾一下， $K = H[\mathrm{i}]$ 是 $\mathcal{C}^{<\infty}[\mathrm{i}]$ 的微分子环，它是 H- 渐近域扩张，其赋值环为 $\mathcal{O} = \{f \in K : \; f \preccurlyeq 1\}$。按照 [ADH，14.2]，我们定义 $\mathcal{O}$-子模

$$\mathrm{I}(K) \;:=\; \{y \in K : \, y \preccurlyeq f' \text{ for some } f \in \mathcal{O}\}$$

K。条件 $\mathrm{I}(K) \subseteq K^{\dagger}$ 与 H 的三角闭性 有关；当 H为刘维尔闭时，它与之等价，见 [6, 第 1 节2]。更确切地说：

命题 4.22 ([5, 命题 6。11])。 如果 $H \supseteq \mathbb{R}$ 对积分封闭，则以下条件等价：

(i) $\mathrm{I}(K) \subseteq K^\dagger$；(ii) $\mathrm{e}^f \in K$ 对所有满足 $f \prec 1$ 的 $f \in K$；(iii) e^ϕ、$\cos\phi$、$\sin\phi \in H$ 对所有满足 $\phi \prec 1$ 的 $\phi \in H$。

结合命题 4.2 及其前面的备注，可得：

推论 4.23 ([5, 推论 6。12])。 若 H 是d-完美的，则$\mathrm{I}(K) \subseteq K^\dagger$。

以下事实 [4, 引理 1.10] 为 $K^\times$ 中的元素提供了"极坐标"：

引理 4.24. 设 $H \supseteq \mathbb{R}$ 是刘维尔闭的，且 $f \in \mathcal{C}^1[\mathrm{i}]^\times$。则 $f^\dagger \in K$ 当且仅当 $|f| \in H^>$ 且存在某个 $\phi \in H$ 使得 $f = |f|\mathrm{e}^{\phi\mathrm{i}}$。此外，若 $f \in K^\times$，则存在某个 $\phi \preccurlyeq 1$ 属于 H，使得 $f = |f|\mathrm{e}^{\phi\mathrm{i}}$。

我们记录这些结果的一些推论：

推论 4.25. 设 $\phi \in H$，并假设 $\mathrm{e}^{\phi\mathrm{i}} \sim f$ 满足 $f \in E[\mathrm{i}]^\times$，其中 E 是 H的某个 *Hardy* 域扩张。于是 $\phi \preccurlyeq 1$。

证明。 我们可以假设 $E = H$ 是刘维尔闭的，且包含 $\mathbb{R}$。反设 $\phi \succ 1$。引理 4.24 给出 H中的 $\theta \preccurlyeq 1$，使得 $f = |f|\,\mathrm{e}^{\theta\mathrm{i}}$。于是$\mathrm{e}^{(\phi-\theta)\mathrm{i}} \sim |f|$且 $\phi - \theta \sim \phi$。因此，分别用 $|f|$、$\phi - \theta$替换 f、ϕ，便可令 $f \in H^\times$成立。则 $\mathrm{e}^{\phi\mathrm{i}} = \cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi \sim f$in $\mathcal{C}^{<\infty}[\mathrm{i}]$给出$\cos\phi \sim f$，这与$\cos\phi$有任意大的零点矛盾。□

推论 4.26. 设 $f \in K^\times$, $\phi \in H$，因此 $y := f\mathrm{e}^{\phi\mathrm{i}} \in \mathcal{C}^{<\infty}[\mathrm{i}]^\times$。那么以下命题等价：

(i) $\phi \preccurlyeq 1$；(ii) $y \in \mathrm{D}(H)[\mathrm{i}]$；(iii) $y \in E[\mathrm{i}]$，其中某个 *Hardy* 域扩张 E 是 H的扩张；(iv) $y \sim g$，其中某个 *Hardy* 域扩张 E 是 H 的扩张，且 $g \in E[\mathrm{i}]^\times$。

证明。 利用命题 4.22 以及推论 4.23 和 4.25，得到以下蕴含链：(i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) ⇒ (iv) ⇒ (i)。□

阶为 2 的实算子的分裂。 本小节中，我们假设 $H \supseteq \mathbb{R}$是刘维尔闭的。那么 $K = H[\mathrm{i}]$ 是代数闭的，其常数域为 $\mathbb{C}$。我们还令 $A \in H[\partial]^{\neq}$ 为一个二阶线性微分算子。以下是下一节定理 5.1 证明中的一个关键要素：

命题 4.27。 假设 A 在 K 上分裂，但在 H上不分裂。那么存在 g、$\phi > 0$ 属于 H，使得

$$\ker_{\mathcal{C}^{<\infty}[\mathrm{i}]} A = \mathbb{C}g\,\mathrm{e}^{\phi\mathrm{i}} + \mathbb{C}g\,\mathrm{e}^{-\phi\mathrm{i}}, \qquad \ker_{\mathcal{C}^{<\infty}} A = \mathbb{R}g\cos\phi + \mathbb{R}g\sin\phi. \tag{4.4}$$

如果 $\mathrm{I}(K) \subseteq K^\dagger$，那么对于所有这样的 g, ϕ，我们都有 $\phi \succ 1$。

证明。 第 1 节"线性微分算子"小节中的备注使我们可以将问题归结为 $A = 4\partial^2 + f$ 其中 $f \in H$的情形，以下假设这一点成立。现在由 (1.5) 和 (1.6) 得到 $u \in H^>$，其中 $\sigma(u) = f$。令 $g := 1/\sqrt{u} \in H^>$，取满足 $\theta' = \frac{1}{2}u$的 $\theta \in H$。命题 6.8] 之前的论证表明 $A(g\,\mathrm{e}^{\theta\mathrm{i}}) = 0$，因而 $A(g\mathrm{e}^{-\theta\mathrm{i}}) = 0$ 也成立。若 $\theta > 0$，令 $\phi := \theta$；否则，令 $\phi := -\theta$；于是 $\phi > 0$。注意，由 (1.4) 和 (1.5) 可知 $\dim_{\mathbb{R}}\ker_H A = 0$，因此 $\dim_{\mathbb{C}}\ker_K A = 0$也成立。

因此 $\phi \notin \mathbb{R}$，且 $y := g\,\mathrm{e}^{\phi \mathrm{i}}$，$\overline{y} = g\,\mathrm{e}^{-\phi \mathrm{i}} \in \ker_{\mathcal{C}^{<\infty}[\mathrm{i}]} A$ 线性无关。现在 $\operatorname{Re} y = \frac{1}{2}(y + y) = g \cos \phi$ 和 $\operatorname{Im} y = \frac{1}{2\mathrm{i}}(y - y) = g \sin \phi$ 属于 $\ker_{\mathcal{C}^{<\infty}} A$，因此得到 (4.4)。其余部分，使用命题 4.22 和 $\dim_{\mathbb{R}} \ker_H A = 0$。□

注。设 A、g、ϕ 如命题 4.27 中所述。若 $\phi \succ 1$，则所有 $y \in \ker^{\neq}_{\mathcal{C}^{<\infty}} A$ 都振荡，因此 A 不能在 H 的任何 Hardy 域扩张上分裂。若 $\phi \preccurlyeq 1$，则没有 $y \in \ker_{\mathcal{C}^{<\infty}} A$ 振荡，且 A 在 $\mathrm{D}(H)$ 上分裂。（见推论 4.14。）

微分算子的刘维尔零点。 回想 $K = H[\mathrm{i}]$。在下一个引理中，我们假设 $A \in K[\partial]^{\neq}$，但 A 可以是任意阶。此引理的证明依赖于 Kolchin 定理（推论 2.4）。

引理 4.28。 设 $H \supseteq \mathbb{R}$。那么以下条件等价：

(i) $A(y) = 0$ 在微分域 K 的某个刘维尔扩张中存在某个 $y \neq 0$；(ii) $A(\mathrm{e}^f) = 0$ 对某个 $f \in \mathrm{Li}(H)[\mathrm{i}]$ 成立，其中 f' 在 K 上代数；(iii) $A(\mathrm{e}^f) = 0$ 对某个 $f \in \mathrm{Li}(H)[\mathrm{i}]$ 成立。

证明。假设 (i) 成立。那么由推论 2.4 可知，存在一个微分域扩张 L，其包含于 K，使得 $A(y) = 0$，并且 $g := y^\dagger$ 在 K 上是代数的。我们安排使 L 包含 $K^{\mathrm{a}} = H^{\mathrm{rc}}[\mathrm{i}]$，即 K 的代数闭包，其中 $H^{\mathrm{rc}} \subseteq \mathcal{C}^{<\infty}$ 是 Hardy 域 H 的实闭包。因此 $g \in K^{\mathrm{a}}$，从而 $A = B(\partial - g)$，其中 $B \in K^{\mathrm{a}}[\partial]$ 由 (1.3) 得出。取 $f \in \mathrm{Li}(H)[\mathrm{i}]$，使得 $f' = g$，并令 $z := \mathrm{e}^f \in \mathcal{C}^{<\infty}[\mathrm{i}]^\times$。于是 $z^\dagger = g$，从而 $A(z) = 0$。这表明 (i) ⇒ (ii)，而 (ii) ⇒ (iii) 显然成立。

为证明 (iii) ⇒ (i)，设 f 如 (iii) 中所述，且 $y := \mathrm{e}^f \in \mathcal{C}^{<\infty}[\mathrm{i}]^\times$。由引理 2.1，微分域 $L := \mathrm{Li}(H)[\mathrm{i}] \subseteq \mathcal{C}^{<\infty}[\mathrm{i}]$ 是 $K = H[\mathrm{i}]$ 的刘维尔扩张。现在 $L[y] \subseteq \mathcal{C}^{<\infty}[\mathrm{i}]$ 且 $y^\dagger = f' \in L$。若 $z \in L^{\neq}$ 且 $z^\dagger = f'$，则 $y \in \mathbb{C}z$，故 $L[y] = L$；若 $f' \notin L^\dagger$，则对所有 $m \geqslant 1$ 也有 $mf' \notin L^\dagger$，因此由 ADH, 4.6.11 可知 $L[y]$ 是一个整环。无论哪种情况，$L[y]$ 都有一个微分分式域 $L(y)$，它是 L 的刘维尔扩张，因而也是 K 的刘维尔扩张。□

微分代数哈代域扩张。 以下定理 [7]是关于哈代域扩张的一项基本结果：

定理 4.29。 每个哈代域都有一个d-代数哈代域扩张，其中包含 $\mathbb{R}$，并且是刘维尔闭、ω-自由且牛顿的。

以下是这一结果中对我们后续最为相关的推论：

推论 4.30。 设 H 是极大的。那么 $H \supseteq \mathbb{R}$ 是刘维尔闭、ω-自由且牛顿的（因而是施瓦茨闭的）。

这里，“施瓦茨闭”这一结论由命题 2.23 及其前面的备注推出。下面的推论5.8将在更弱的假设下推出“施瓦茨闭”。

推论 4.31。 设 H 是极大的。那么 K 是线性满射且线性闭的。此外，H 是线性满射的，并且每个首一 $A \in H[\partial]^{\neq}$ 都是 $H[\partial]$中首一的一阶1 算子与二阶2 算子的乘积。

证明。由定理 4.29 和命题 2.17 后的注可知，H 的代数闭包 K 是 ω-自由且牛顿的，因此根据推论 2.16，K 是线性满射且线性闭的。由于 K 是线性满射的，H 也如此。其余结论由 K 的线性闭性以及 [ADH, 5.1.35] 得出。□

特别是，每个非齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y \;=\; b \qquad (a_1, \ldots, a_n, b \in K)$$

有一个解 $y = f + g\mathrm{i}$，其中 f, g 属于 H的某个 Hardy 域扩张。在接下来的几节中，我们将把上述结果应用于 H上的二阶齐次线性微分方程。

5. Second-Order Linear Differential Equations over Hardy Fields

本节将更详细地分析 Hardy 域上的二阶线性微分方程的振荡解。具体而言，我们将证明引言中的定理 A 和定理 B，以及推论 1、2 和 3：参见引理 5.6 后的注，以及推论 5.10、5.14 和 5.23。在本节中，H 是一个 *Hardy* 域，并且 $K := H[\mathrm{i}] \subseteq \mathcal{C}^{<\infty}[\mathrm{i}]$。

解空间的参数化。 令 $a, b \in H$。我们现在继续研究线性微分方程

$$(\widetilde{\mathrm{L}}) \qquad Y'' + aY' + bY \;=\; 0$$

在 H 上（沿用第 4 节的记号，但略作调整），并着眼于振荡情形，从上节末尾陈述为定理 4.29 的主要结果 [7] 来看待这一情形。（推论 4.13 和推论 4.14 讨论了非振荡情形，而这并不需要 [7]。）

定理 5.1。 假设 (L) 有一个振荡解（在 $\mathcal{C}^{<\infty}$中）。那么存在H个 *Hardy* 型芽 $g > 0$, $\phi > \mathbb{R}$，使得对所有 $y \in \mathcal{C}^{<\infty}$,

$$y \text{ is a solution of } (\widetilde{\mathrm{L}}) \quad\Longleftrightarrow\quad y = cg\cos(\phi + d) \text{ for some } c, d \in \mathbb{R}.$$

任何这样的 H个 *Hardy* 型芽 g, ϕ 都是 H 上的 d-代数元，并且属于 H的某个共同 *Hardy* 域扩张。若 $\mathrm{D}(H)$ 是 ω-自由的，那么这些性质就能推出 $g, \phi \in \mathrm{D}(H)$，并且将 g 唯一确定到相差一个正实常数的倍数，将 ϕ唯一确定到相差一个实常数的加数。

备注。 在第 7 节中，我们从 H的角度刻画 D(H) 是 ω-自由的情形，并证明在定理 5.1 最后一句中，不能去掉 D(H) 是 ω-自由这一条件：见定理 7.1 和注 7.7。我们先在此指出，若 H 不是 λ-自由的，或者 $\omega(H) = H \setminus \sigma\big(\Gamma(H)\big)^{\uparrow}$，那么根据引理 4.21，D($H$) 是 ω-自由的。请记住， λ-自由性包含具有渐近积分这一性质。若 H 是 ω-自由的,–则根据引理 4.19， $\omega(H) = H \setminus \sigma\big(\Gamma(H)\big)^{\uparrow}$，因此 D($H$) 是 ω-自由的；同理，若 H 是λ-自由的且 $\omega(H) \not\subseteq \omega\big(\Lambda(H)\big)^{\downarrow}$，则根据引理 4.18，D($H$) 是 ω-自由的。

令 V 为 $\mathbb{R}$的一个线性子空间。若一对 (g, ϕ) 满足以下条件，则称其为 V 的一个参数化：

$$g \in \mathcal{C}^{\times},\ g >_{\mathrm{e}} 0, \quad \phi \in \mathcal{C},\ \phi >_{\mathrm{e}} \mathbb{R}, \qquad V \;=\; \big\{cg\cos(\phi + d) : c, d \in \mathbb{R}\big\};$$

等价地，根据推论 4.9：

$$g \in \mathcal{C}^{\times},\ g >_{\mathrm{e}} 0, \quad \phi \in \mathcal{C},\ \phi >_{\mathrm{e}} \mathbb{R}, \qquad V \;=\; \mathbb{R}g\cos\phi + \mathbb{R}g\sin\phi.$$

若 (g, ϕ) 是 V的一个参数化，则对任意 $c \in \mathbb{R}^{>}$、 $d \in \mathbb{R}$，(cg, $\phi + d$) 也同样是其参数化。

例。 对于 $f \in \mathbb{R}^{>}$，对(1, $\sqrt[f]{2}\,x$)参数化$\ker_{\mathcal{C}^{<\infty}}(4\partial^2 + f)$，这从例 3.1可以清楚地看出。

为供第 6 节使用，我们记录下一个引理，其中 V 是 $\mathcal{C}^1$ 的一个 $\mathbb{R}$-线性子空间，且 $V' := \{y' : y \in V\}$（$\mathcal{C}$的一个 $\mathbb{R}$-线性子空间）。

引理 5.2. 假设 $H \supseteq \mathbb{R}$ 是实闭且对积分封闭的，并且对 $(g, \phi) \in H \times H$ 参数化了 V。令

$$q := \sqrt{(g')^2 + (g\phi')^2}, \qquad u := \arccos(g'/q).$$

那么 q、$u \in H$ 和 $(q, \phi + u) \in H \times H$ 参数化了 V'。

证明。注意，u 与推论 4.10 中的情形相同，只需用 g'、$-g\phi'$ 替换 g、h。令 $y \in V$，则 $y = cg\cos(\phi + d)$，其中 $c, d \in \mathbb{R}$。于是

$$y' = cg'\cos(\phi + d) - cg\phi'\sin(\phi + d) = cq\cos(\phi + u + d).$$

反过来，对于 $c, d \in \mathbb{R}$，我们有 $cq\cos(\phi+u+d) = y'$，对于 $y = cg\cos(\phi+d) \in V$。□

在下一个引理中，$V := \ker_{\mathcal{C}^{<\infty}}(\partial^2 + a\partial + b)$，且 $g \in \mathcal{C}^\times$、$g >_{\mathrm{e}} 0$，以及 $\phi \in \mathcal{C}$、$\phi >_{\mathrm{e}} \mathbb{R}$。那么 (g, ϕ) 参数化了 V，当且仅当 $g\,\mathrm{e}^{\phi\mathrm{i}} \in \ker_{\mathcal{C}^{<\infty}[\mathrm{i}]}(\partial^2 + a\partial + b)$。此外：

引理5.3. 设 $f := -2a' - a^2 + 4b$。令 h 为一个 *H-Hardy* 型芽，满足 $h > 0$和 $h^\dagger = -\frac{1}{2}a$。则：

(i) (g, ϕ) *parametrizes* $\ker_{\mathcal{C}^{<\infty}}(4\partial^2 + f)$ *iff* (gh, ϕ) *parametrizes* V.

还假设 ϕ 是 *Hardy* 型的(因此 ϕ' 是 *Hardy* 型的，且 $\phi' > 0$)。则：

(ii) $(1/\sqrt{\phi'}, \phi)$ </style>参数化了$\ker_{\mathcal{C}^{<\infty}}\left(4\partial^2 + \sigma(2\phi')\right)$。

证明。推论 4.13 前的论证可得 (i)。至于 (ii)，根据 σ 的定义（见第 1 节）：

$$\sigma(2\phi') = \omega\left(-(2\phi')^\dagger + 2\phi'\mathrm{i}\right) = \omega\left(-\phi'^\dagger + 2\phi'\mathrm{i}\right) = \omega(2y^\dagger) \quad \text{where } y := (1/\sqrt{\phi'})\,\mathrm{e}^{\phi\mathrm{i}}.$$

因此，对于 $A = 4\partial^2 + \sigma(2\phi')$，$A(y) = 0$；故 $(1/\sqrt{\phi'},\ \phi)$ 参数化了 $\ker_{\mathcal{C}^{<\infty}} A$。□

引理5.3中的 (i) 将定理 5.1 的证明归结为情形 $a = 0$，而 (ii) 讨论的正是该情形。

令 $A = 4\partial^2 + f \in H[\partial]$，其中 $f \notin \wp(H)$，并设 $V := \ker_{\mathcal{C}^{<\infty}} A$。若 H 是 ω-自由的，则由引理 4.19，$f \in \sigma\left(\Gamma(H)\right)^\uparrow$。定理 5.1 现在可由下文的引理 5.4、5.5 和 5.6 推出，它们给出了更多信息。

引理 5.4. 存在一对 *H-Hardy* 型芽，它们参数化 V。对于任意这样的一对 (g, ϕ)，有 $\sigma(2\phi') = f$ 且 $g^2\phi' \in \mathbb{R}^>$，因此 g、ϕ 在 $\mathbb{Q}\langle f\rangle$ 上是 d- 代数的，并且属于 H 的同一个 *Hardy* 域扩张。若 $f \in \mathcal{C}^\infty$，则参数化 V 的每一对 *H-Hardy* 型芽都属于 $(\mathcal{C}^\infty)^2$；以 $\mathcal{C}^\infty$ 替换 $\mathcal{C}^\omega$ 时亦然。

证明。对于第一个断言，我们安排使 H 为极大。于是，根据推论 4.31，A 在 K 上分裂。由于 $f/4$ 产生振荡，A 不在 H上分裂。此外，根据推论 4.23，$\mathrm{I}(K) \subseteq K^\dagger$。由命题 4.27可得第一个断言。接下来，令 (g, ϕ) 为一对 H-Hardy 型芽，用以参数化 V。设 $y := g\,\mathrm{e}^{\phi\mathrm{i}} \in \mathcal{C}^{<\infty}[\mathrm{i}]^\times$；则 $A(y) = 0$，因而 $\omega(2y^\dagger) = f$，其中 $y^\dagger = g^\dagger + \phi'\mathrm{i} \in \mathcal{C}^{<\infty}[\mathrm{i}]$。对于 $p, q \in \mathcal{C}^1$，有 $\omega(p + q\mathrm{i}) = \omega(p) + q^2 - 2(pq + q')\mathrm{i}$，因此

$$\omega(p + q\mathrm{i}) \in \mathcal{C} \;\Leftrightarrow\; pq + q' = 0.$$

因此 $2g^\dagger = -(2\phi')^\dagger = -(\phi')^\dagger$，于是 $g^2\phi' \in \mathbb{R}^>$，且 $\sigma(2\phi') = f$。若 $f \in \mathcal{C}^\infty$，则 $y \in \mathcal{C}^\infty[\mathrm{i}]$，，所以 $g^2 = |y|^2 \in \mathcal{C}^\infty$，从而也有 $\phi \in \mathcal{C}^\infty$，因为 $g^2\phi' \in \mathbb{R}^>$；以 $\mathcal{C}^\infty$代替 $\mathcal{C}^\omega$ 时，同理可得。□

引理 5.5. 假设 $H \supseteq \mathbb{R}$ 是具有渐近积分的实闭域，且 $f \in \sigma\big(\Gamma(H)\big)^{\uparrow}$。那么存在一个活跃的 $e > 0$ 属于 H，使得对于所有参数化 V 的 H-*Hardy* 型芽对 (g, ϕ)，都有 $\phi' \sim e$。

证明。取一个关于 H 的对数序列 (ℓ_ρ)，并令 $\gamma_\rho := \ell_\rho^\dagger$；关于此事，参见 [ADH, 11.5]。于是 (γ_ρ) 严格递增，且在 $\Gamma(H)$ 中共始 [ADH, p. 528]。取 ρ，使得 $f > \sigma(\gamma_\rho)$。如 [ADH, 14.2.18] 的证明中那样，增大 ρ，使得 $f - \sigma(\gamma_\rho) \succ \gamma_\rho^2$，并取 $e \in H^>$，使得 $e^2 = f - \sigma(\gamma_\rho)$。于是 $e \succ \gamma_\rho$，因此 $e \in \Gamma(H)^{\uparrow}$。设 (g, ϕ) 为 Hardy 域 $E \supseteq H$ 中的一对元素，它们参数化了 V。我们断言 $\phi' \sim e/2$（因此，用 $e/2$ 替代 e，便具有引理所要求的性质）。设 E 为极大。于是 E 是刘维尔闭的，且 $\phi > \mathbb{R}$，因此由（2.4）得 $e, 2\phi' \in \Gamma(E)$。此外，由推论 4.30，E 是牛顿的，因此引理 2.10 给出 E 中的 $u \sim 1$，使得 $\sigma(eu) = f$。由引理 2.21，映射 $y \mapsto \sigma(y) : \Gamma(E) \to E$ 严格递增，因此由引理 5.4，$2\phi' = eu$，从而 $\phi' \sim e/2$。□

引理 5.6. 假设 $\mathrm{D}(H)$ 是 ω-自由的，或是 $f \in \sigma\big(\Gamma(H)\big)^{\uparrow}$。设 H_i 是 H 的一个 *Hardy* 域扩张，且 $g_i, \phi_i\,() \in H_i \times H_i$ 参数化 V，其中 $i = 1,2$。那么

$$g_1/g_2 \in \mathbb{R}^>, \qquad \phi_1 - \phi_2 \in \mathbb{R}.$$

因此，对于任意一对 (g, ϕ) 的参数化 V 的 H-*Hardy* 型芽，都有 $g, \phi \in \mathrm{D}(H)$。

证明。我们安排使 H_1, H_2 为极大，因此包含 $\mathrm{D}(H)$。将 H 替换为 $\mathrm{D}(H)$，进一步安排使 H 为 d-完美，且 $f \in \sigma\big(\Gamma(H)\big)^{\uparrow}$。于是由引理 5.5 得到 $\phi_1' \sim \phi_2'$；并且对于 $i = 1,2$，由引理 5.4 可得 $c_i \in \mathbb{R}^>$，其中 $\phi_i' = c_i/g_i^2$。将 g_i 替换为 $g_i/\sqrt{c_i}$，我们安排使 $c_i = 1$ $(i = 1, 2)$，于是 $g_1 \sim g_2$。现在考虑 V 中的元素 $g_1 \cos\phi_1, g_1 \sin\phi_1$；取 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$，使得

$$g_1 \cos\phi_1 = a g_2 \cos(\phi_2 + b), \qquad g_1 \sin\phi_1 = c g_2 \cos(\phi_2 + d).$$

Then

$$g_1^2 = g_1^2(\cos^2\phi_1 + \sin^2\phi_1) = g_2^2\big(a^2\cos^2(\phi_2 + b) + c^2\cos^2(\phi_2 + d)\big), \tag{5.1}$$

因此

$$a^2\cos^2(\phi_2 + b) + c^2\cos^2(\phi_2 + d) \sim 1.$$

因此，2π-周期函数

$$t \mapsto F(t) := a^2\cos^2(t + b) + c^2\cos^2(t + d) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

满足 $F(t) \to 1$ 如 $t \to +\infty$，因此对所有 t，$F(t) = 1$，故由 (5.1) 得 $g_1 = g_2$。由此可得 $\phi_1' = \phi_2'$，所以 $\phi_1 - \phi_2 \in \mathbb{R}$。

对于最后一个断言，设 (g, ϕ) 是一对参数化 V 的 H-Hardy 型芽。令 M 为 H 的任意极大扩张。引理 5.4 给出一对 $(g_M, \phi_M) \in M^2$，它同样参数化 V。由上文可知，$g/g_M \in \mathbb{R}^>$ 且 $\phi - \phi_M \in \mathbb{R}$，因此 $g, \phi \in M$。由于 M 任意，且 g、ϕ 在 H 上是微分代数的，这就得到 $g, \phi \in \mathrm{D}(H)$。□

这就完成了定理 5.1 的证明。结合引理 5.4，可得引言中的定理 A。定理 B 则由定理 5.1 后的备注推出：定理 B 中的条件(i)等价于 $\omega(H) = H \setminus \sigma\big(\Gamma(H)\big)^{\uparrow}$，而 (ii) 等价于 H 不是 λ-自由的（由引理 2.11 及前面的注可知）。

我们注意到引理5.4和5.6的一个推论：

推论5.7。假设 H 是d-完美的。那么 $\omega(H) = \omega(H)$ 是向下封闭的，而 $\sigma\big(\Gamma(H)\big)$ 是上闭的。

证明。由推论4.16，$\omega(H)=\omega(H)$是向下封闭的。设 $f\in\sigma\big(\Gamma(H)\big)^{\uparrow}$。引理 5.6 的最后一部分给出 $g,\phi\in H$，使得 (g,ϕ)参数化了 V。于是由引理 5.4，$\sigma(2\phi')=f$。现在由 (2.4)，$2\phi'\in\Gamma(H)$，因此 f 属于 $\sigma\big(\Gamma(H)\big)$。故 $\sigma\big(\Gamma(H)\big)$ 是上闭的。□

这给出了施瓦茨闭的 d-完美 Hardy 域的一个刻画（定义见推论2.22之后）：

推论5.8。设 H 是d-完美的。则以下条件等价：

(i) H 是施瓦茨闭的；(ii) H 是 ω-自由的；(iii) 对于所有 $f\in H$，算子 $4\partial^2+f\in H[\partial]$ 在 K上可分裂；(iii) 对于所有 a、$b\in H$，算子 $\partial^2+a\partial+b\in H[\partial]$ 在 K上可分裂。

证明。由推论 4.15，(iii) ⇔ (iv)等价。由推论2.22和推论5.7，(i) ⇔ (ii) ⇔ (iii)这两个等价关系成立。□

相位函数的渐近性。在本节余下部分

$$A=\partial^2+a\partial+b\ (a,b\in H),\quad V:=\ker_{\mathcal{C}^{<\infty}}A,\quad f:=-2a'-a^2+4b,$$

并且我们取 H-*Hardy* 型 $h>0$使得 $h^\dagger=-\frac{1}{2}a$。注意引理 5.3(i)在这种情形下的作用。我们进一步研究参数化 V 的 H-Hardy 型芽对的性质。下面给出一个使 $f/4$ 产生振荡的充分条件：

引理 5.9. 设 $f>0$，$f\succ x^{-2}$。则 $f\notin\omega(H)$，存在一对参数化 V 的 H-*Hardy* 型芽，并且对每一对这样的 (g,ϕ)，对某个 $c\in\mathbb{R}^{>}$ 和 $\phi'\sim\frac{1}{2}\sqrt{f}$，我们有 $g=ch/\sqrt{\phi'}$。

证明。将 H 替换为 $\mathrm{Li}\big(H(\mathbb{R})\big)$，并利用引理 5.3(i) 与引理 5.4，我们使 $H\supseteq\mathbb{R}$ 成为刘维尔闭的，且 $A=\partial^2+f/4$，从而 $a=0$，$b=f/4$。令 $\ell_1:=\log x\in H$，$\gamma_1:=\ell_1^\dagger\in\Gamma(H)$，$\omega_1:=\omega(-\gamma_1^\dagger)$。则 $\sigma(\gamma_1)=\omega_1+\gamma_1^2\sim x^{-2}$，故 $f>\sigma(\gamma_1)$。因此 $f\in\sigma\big(\Gamma(H)\big)^{\uparrow}$，从而由引理 4.17 之前的备注可得 $f\notin\omega(H)$。引理 5.4 给出一对参数化 V 的 H-Hardy 型芽。该引理表明，对任意这样的对 (g,ϕ)，我们有 $g^2\phi'\in\mathbb{R}^{>}$；现在 γ_1 在 H 中是活跃的，且 $f>\sigma(\gamma_1)$ 与 $f-\sigma(\gamma_1)\sim f\succ\gamma_1^2$，故如引理 5.5 的证明中那样，$\phi'\sim\frac{1}{2}\sqrt{f}$。□

下面给出一个特殊情形：

推论 5.10。如果 $f\sim cx^{-2+r}\ (c,r\in\mathbb{R}^{>})$，那么 $f\notin\omega(H)$，存在一对 H-*Hardy* 型芽，它们对 V 进行参数化；对于每一对这样的芽(g,ϕ)，都有 $\phi\sim\frac{\sqrt{c}}{r}x^{r/2}$。

注。设 f,g,ϕ 如引理 5.9 中所述。该引理的证明给出：对于 $L=\mathrm{Li}\big(H(\mathbb{R})\big)\subseteq\mathrm{D}(H)$，有 $f\in\sigma\big(\Gamma(L)\big)$；因此，对 L 应用引理 5.6 可得 $g,\phi\in\mathrm{D}(H)$，g 在相差一个正实常数倍的意义下唯一，而 ϕ 在相差一个实常数的意义下唯一。推论 5.10 中的 f, g, ϕ 也同样如此。引理 5.9、推论 5.10 以及本注推出了引言中的推论 2。

引理 5.11。设 $f\notin\omega(H)$，并令 (g,ϕ) 为一对以 V 为参数的 H-*Hardy* 型芽。当且仅当 $f\prec1$ 时，$\phi\prec x$；将 $\prec$ 替换为 $\preccurlyeq$，结论也成立。此外，若 $f\sim c\in\mathbb{R}^{>}$，则 $\phi\sim\frac{\sqrt{c}}{2}x$ 和 $(f<c\Rightarrow\phi''\succ0)$、$(f>c\Rightarrow\phi''<0)$。

证明。令 $H\supseteq\mathbb{R}$ 为刘维尔闭的，并令 $g,\phi\in H$。由 (2.4)，有 $y:=2\phi'\in\Gamma(H)$。引理 5.4 给出 $\sigma(y)=f$；此外，对所有 $c\in\mathbb{R}^{>}$，均有 $\sigma(c)=c^2$。由引理 2.21，σ 在 $\Gamma(H)$ 上的限制严格递增，因此得到第一部分。现在

假设 $f \sim c \in \mathbb{R}^{>}$。取满足 $\phi \sim \lambda x$ 的 $\lambda \in \mathbb{R}^{>}$。于是 $y \sim 2\lambda$，并且由 $z := -y^{\dagger} \prec 1$ 可得 $f = \sigma(y) = \omega(z) + y^2 \sim 4\lambda^2$。因此 $\lambda = \sqrt{c}/2$。假设 $f < c$；则由 $f = \sigma(y) < c = \sigma(\sqrt{c})$ 可得 $y < \sqrt{c}$，所以 $\phi' < \lambda$。令 $g := \phi - \lambda x$，则有 $g \prec x$、$g' \prec 1$ 和 $g' = \phi' - \lambda < 0$，因此 $g'' = \phi'' > 0$。$f > c$ 的情形类似。□

结合引理 5.4 和 5.11 可得：

推论 5.12. 设 $f \notin \omega(H)$。那么对每个 $y \in V^{\neq}$，都有：

(i) 若 $f \prec 1$，则 $y \not\preccurlyeq h$（因此，若进一步有 $a \leqslant 0$，则 y 无界）；(ii) 若 $f \succ 1$，则 $y \prec h$；以及(iii) 若 $f \asymp 1$，则 $y \preccurlyeq h$。

备注。关于更一般情形下的相关结果，参见 [10, 第 6] 章。例如，若 $g \in \mathcal{C}$ 最终递增，且满足 $g \succ 1$ 或 $g \in \mathcal{C}^1$、$g \sim 1$，并且 $\int^{+\infty} |g'(t)|dt \preccurlyeq 1$，则对所有满足 $y'' + gy = 0$ 的 $y \in \mathcal{C}^2$，都有 $y \preccurlyeq 1$；参见该文第 6、18 节。Fatou [26]声称，若 $g \in \mathcal{C}$、$g \sim 1$，则对所有满足 $y'' + gy = 0$ 的 $y \in \mathcal{C}^2$，都有 $y \preccurlyeq 1$。根据推论 5.12(iii)，这对 Hardy 型 g 成立，但一般情况下并不成立：反例见 [23, 39, 51]；参见 [10, 第 6 章第 5] 节及 [24, 3.3]。

推论 5.13。 假设 $f \notin \omega(H)$，且 $H \supseteq \mathbb{R}$ 是刘维尔闭的。以下命题等价：

(i) $g, \phi \in H$ 对于每一对(g, ϕ) 对 H-*Hardy* 型芽，都参数化了 V；(ii) 在 H 中存在一对芽参数化了 V；(iii) $f \in \sigma(H^{\times})$。

证明。(i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) 的蕴含关系可由引理 5.4 以及引理5.3之前的备注推出。假设 $f \in \sigma(H^{\times})$。由于 $f \notin \omega(H)$ 且 $\omega(H)^{\downarrow} \subseteq \omega(H)$，我们有 $f \notin \omega(H)^{\downarrow}$，因此根据引理 2.21，$f \in \sigma\big(\Gamma(H)\big)$。此外，根据 (1.5) 和 (1.6)，$4\partial^2 + f$ 在 K 上可约，但在 H上不可约，且 $f/4$ 产生振荡。因此，命题 4.27及其后的注可推出在 H 中存在一对芽参数化了 V。现在由引理 5.6 得出 (i)。□

定理 5.1 中 a, b 为微分代数（在 $\mathbb{Q}$ 上）的情形对应用很重要。在这种情况下，Hardy 子域 $H_0 := \mathbb{Q}\langle a,\ b\rangle$ of H 的 Ψ-集是有限的（见第 4 节开头的备注），因此 H_0 没有渐近积分。由此，下面的结果便具有重要意义：

推论 5.14。 假设 H 没有渐近积分，且 $f \notin \omega(H)$。那么存在一对 $(g, \phi) \in \mathrm{D}(H)^2$，用于参数化 V，使得任何一对参数化 V 的 H-*Hardy* 型芽都等于某个 $c \in \mathbb{R}^{>}$ 和 $d \in \mathbb{R}$ 对应的 $(cg, \phi + d)$。此外，对每一对这样的 (g, ϕ)，都有 $(g/h)^2\phi' \in \mathbb{R}^{>}$。

证明。关于 H 的假设表明 D(H) 是 ω-自由的。现在使用定理 5.1；至于“此外”部分，则使用引理 5.3(i) 和引理 5.4。□

假设 a, b 是微分代数的，并令 ω_n 如推论 1 之前所定义。将 (4.3)（引理 4.21 之后）应用于 Li($\mathbb{R}\langle f\rangle$)，以其替代 H，可得：存在某个 n 使得 $f \leqslant \omega_n$，当且仅当 $f/4$ 不产生振荡；在此情形下，由推论 4.13，$V \subseteq \mathrm{D}(H)$。另请注意，只要 $a = 0$，就有 $f = 4b$。结合推论 5.14 及其前面的备注，这便得到了引言中的推论 1。

在本小节余下部分，我们假设 $f \notin \omega(H)$，并且 (g, ϕ) 是一对对 V 进行参数化的 H-Hardy 型芽。于是 $\sigma(2\phi') = f$（由引理 5.4）因此

$$P(2\phi') = 0 \quad \text{where } P(Y) := 2YY'' - 3(Y')^2 + Y^4 - fY^2 \in H\{Y\}.$$

因此，将 [5, 定理 5.25]（或 Rosenlicht [43]的定理 3）应用于 Hardy 域 $E := H\langle\phi\rangle = H(\phi, \phi', \phi'')$，可得：对于有基的 H，存在元素 $h_0, h_1 \in H^>$和 m, n，满足 $h_0, h_1 \succ 1$ 和 $m + n \leqslant 3$，使得

$$\log_{m+1} h_0 \prec \phi \preccurlyeq \exp_n h_1.$$

接下来的两个引理改进了这些界：

引理 5.15。设 $\ell \in H^>$, $\ell \succ 1$，且对 $\gamma := \ell^\dagger$有 $\max \Psi_H = v\gamma$，并令 $\omega := \omega(-\gamma^\dagger)$。那么，要么 $f - \omega \succ \gamma^2$ 且 $\phi \succ \log \ell$；要么存在某个 $c \in \mathbb{R}^>$，使得 $f - \omega \sim c\gamma^2$ 且 $\phi \sim \frac{\sqrt{c}}{2} \log \ell$。

证明。由引理 4.17 可得 $\omega(H) = \omega + \gamma^2 o_H^\downarrow$，因此 $f = \omega + \gamma^2 u$，其中 $u \asymp 1, u > 0$，于是 $f - \sigma(\gamma) = \gamma^2(u - 1)$。若 $u \succ 1$，则 $f - \sigma(\gamma) \sim u\gamma^2 \succ \gamma^2$，而引理 5.5 的证明表明，此时 $\phi' \sim e/2$，其中 $e^2 = f - \sigma(\gamma)$，故 $e \succ \gamma$，从而 $\phi \succ \log \ell$。现在假设 $u \asymp 1$。取满足 $u \sim c$的 $c \in \mathbb{R}^>$，并令 $\ell_* := \log \ell, \gamma_* := \ell_*^\dagger$。于是由 (2.2) 得，

$$f - \sigma(\gamma_*) = \omega\big(-\gamma^\dagger\big) - \omega\big(-\gamma_*^\dagger\big) + u\gamma^2 - \gamma_*^2 \sim u\gamma^2 \sim c\gamma^2 \succ \gamma_*^2,$$

并像之前证明引理 5.5 时那样推理，可得 $\phi \sim \frac{\sqrt{c}}{2} \log \ell$。 □

例。设 $H = \mathbb{R}\langle\ell\rangle$，其中 $\ell := \ell_n$，并设 $f = \sigma(\gamma_n) (= \omega_n + \gamma_n^2)$。又由于 $f = \sigma(2\phi')$，因此可得 $\phi = \frac{1}{2}\ell_{n+1} + d$，其中某个 $d \in \mathbb{R}$ 满足条件，故 $\phi \sim \frac{1}{2} \log \ell$。

引理 5.16。假设 $f \in \sigma\big(\Gamma(H)\big)^\uparrow$ 或 H 不是 λ-自由的，并且 $u \in H^>$ 满足 $u \succ 1$，且 $v(u^\dagger) =$最小 Ψ_H。那么对于某个 $n \geqslant 1$，有 $\phi \leqslant u^n$。

证明。我们有 H-Hardy 型 $\phi \succ 1$，但这不足以得到满足 $\phi \asymp \theta$ 的 $\theta \in H^\times$。因此我们首先考虑 $H \supseteq \mathbb{R}$ 是具有渐近积分的实闭域，且 $f \in \sigma\big(\Gamma(H)\big)^\uparrow$ 的情形。于是由引理 5.5 可得 $e \in H^>$，使得 $\phi' \sim e$；又由于 H 具有渐近积分，我们得到 $\theta \in H^\times$，满足 $\phi \asymp \theta$。因此 $\phi^\dagger \asymp \theta^\dagger \preccurlyeq u^\dagger$，进而由 (4.1) 可知，对于某个 $n \geqslant 1$，有 $\phi \leqslant u^n$。

现在我们将一般情形归约为这个特殊情形。取 E 的一个极大 Hardy 域扩张 H，使得 $g, \phi \in E$。假设 H 不含 λ；于是 $f \in \sigma\big(\Gamma(H)\big)^\uparrow$。根据引理 4.1，$H(\mathbb{R})$ 不含 λ，且与 H 具有相同的值群；同样根据该引理，$L := H(\mathbb{R})^{\mathrm{rc}} \subseteq E$ 有渐近积分，且 $\Psi_L = \Psi_H$，因此 $v(u^\dagger) =$min Ψ_L，于是将特殊情形应用于充当 H 的 L，可得某个 $n \geqslant 1$ 使得 $\phi \leqslant u^n$。

在证明余下部分中，我们假设 H 不含 λ。根据引理 4.1，$H(\mathbb{R})^{\mathrm{rc}} \subseteq E$ 不含 λ，且 $v(u^\dagger) =$ min $\Psi_{H(\mathbb{R})^{\mathrm{rc}}}$。因此，用 $H(\mathbb{R})^{\mathrm{rc}}$ 替换 H，从而在下文中我们可以设 $H \supseteq \mathbb{R}$，且 H 是实闭的。

假设 H 没有渐近积分。由引理 2.20 可得一个 ω-自由的 Hardy 子域 $L \supseteq H$，它是 E 的子域，且 Γ_H 在 Γ_L中共尾，因此 $v(u^\dagger) =$ min Ψ_L。此外，由引理 4.19，$f \in L \setminus \omega(L) = \sigma\big(\overline{\Gamma}(L)\big)^\uparrow$。因此，将 H 替换为 L^{rc} 后，我们便将问题归结为这一特殊情形。

假设 H 具有渐近积分。由于 H 不是 λ-自由的，因此存在 $\lambda \in H$，使得对于所有 $g \succ 1 \in H$，都有 $\lambda + g^{\dagger\dagger} \prec g^\dagger$。取满足 $y^\dagger = -\lambda$ 的 $y \in E^\times$。根据引理 2.18，vy 是 $H(y)$ 中的一个间隙，因此也是 $L := H(y)^{\mathrm{rc}}$ 中的一个间隙，并且 Γ_H 是共尾的

于 Γ_L 中，因此 $v(u^\dagger) = \min \Psi_L$。所以 L 没有渐近积分，因此我们可以将 H 替换为 L，从而归约到“没有渐近积分”的情形。□

由最后两个引理，结合推论 5.14 及其前面的备注：

推论 5.17. 设 a, b 是d-代数的，且 $H = \mathbb{Q}\langle a, b\rangle$。则 Ψ_H 有限，且 $g, \phi \in \mathrm{D}(H) \subseteq \mathcal{C}^\omega$。此外，若 $h_0, h_1 \in H^>$ 满足 $h_0, h_1 \succ 1$，且 $v(h_0^\dagger) =$最大 Ψ_H, $v(h_1^\dagger) =$ 最小 Ψ_H，则对某个 $n \geqslant 1$，$\frac{1}{n}$对数 $h_0 \leqslant \phi \leqslant h_1^n$。

下一个推论的假设由 $H = \mathbb{R}(x^{\mathbb{R}}) \subseteq \mathrm{Li}(\mathbb{R})$ 满足。回想一下，$f > x^{-2} = \omega_0$，因为 $f \notin \omega(H)$ 且 $\omega_0 \in \omega(H)$。

推论 5.18. 假设 $x \in H$，且 $v(1/x) =$最大 Ψ_H。则 $g, \phi \in \mathrm{D}(H)$。此外，设 $c \in \mathbb{R}^>$, $r \in \mathbb{R}^{\geqslant}$ 满足 $f \sim cx^{-2+r}$。若 $r > 0$，则 $\phi \sim \frac{\sqrt{c}}{r} x^{r/2}$；若 $r = 0$，则 $c > 1$ 且 $\phi \sim \frac{\sqrt{c-1}}{2}$对数 x。

证明。若 $r > 0$，则由引理 5.9 得到 $\phi \sim \frac{\sqrt{c}}{r} x^{r/2}$。若 $r = 0$，则由引理 5.15 及 $\ell_0 := x$ 可得 $c > 1$、$f - x^{-2} \sim (c-1)x^{-2}$，以及 $\phi \sim \frac{\sqrt{c-1}}{2}\log x$。□

注。假设 $a = 0$。则 $b = f/4$，并且由引理 5.4 得到 $g^2\phi' \in \mathbb{R}^>$；因此，对 ϕ 的界给出了对 g 的界。于是根据推论 5.18，若 $b \in \mathbb{R}(x^{\mathbb{R}})$，则 $g \asymp f^{-1/4}$。

在 [8] 中，我们将针对 a，$b \in H = \mathbb{R}(x)$ 的情形强化推论 5.18，方法是求得 ϕ的渐近展开。

例子 5.19。假设 $a = 0$；因此 $f = 4b$。

(1) 设 $c \in \mathbb{R}$、$c > 1$和 $b = (c/4)x^{-2} \in H$。于是常设假设 $f \notin \omega(H)$ 成立，因为 $f = cx^{-2}$。芽 $y = g\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$，其中 $g := x^{1/2}$ 且 $\phi := (1/2)\sqrt{c-1}\log x$，满足 $4y'' + fy = 0$，因此

$$\big(x^{1/2},\ (1/2)\sqrt{c-1}\log x\big) \quad \text{parametrizes } V.$$

(2) 设 $r \in \mathbb{R}$、$r > -1$，且 $x^r \in H$。于是 $b := \frac{1}{4}\big(x^{2r} - r(r+2)x^{-2}\big) \in H$，并且常设假设 $f \notin \omega(H)$ 成立，这是因为 $f \sim x^{2r} \succ x^{-2}$。这里，$y = g\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$，其中 $g := x^{-r/2}$、$\phi := x^{r+1}/(2r+2)$ 满足 $4y'' + fy = 0$，因此

$$\big(x^{-r/2},\ x^{r+1}/(2r+2)\big) \quad \text{parametrizes } V.$$

刘维尔相位函数。 假设 $f \notin \omega(H)$。定理 5.1 得到一对 (g, ϕ) H-Hardy 型芽，它们参数化 V，而任何此类 H-Hardy 型芽都是 H 上的微分代数元。本小节探讨 g, ϕ 何时可以取自 H 的刘维尔 Hardy 域扩张。

命题 5.20。 假设 $H \supseteq \mathbb{R}$，且 H 不具有渐近积分，或者 H 是 ω-自由的。则以下条件等价：

(i) $A(y) = 0$，其中某个 $y \neq 0$ 属于 K 的刘维尔扩张；(ii) 存在一对 $(g, \phi) \in \mathrm{Li}(H)^2$，其中 $g^\dagger, \phi'$ 在 H 上代数，且这对参数化 V；(iii) 在 $\mathrm{Li}(H)^2$ 中存在一对参数化 V；(iv) 每一对参数化 V 的 H-*Hardy* 型芽都属于$\mathrm{Li}(H)^2$。

证明。假设 (i) 成立。由引理 4.28 可得 g，$\phi \in L := \mathrm{Li}(H)$、$g \neq 0$，使得 $g^\dagger$、ϕ' 在 H 上代数，且 $A(g\mathrm{e}^{\phi \mathrm{i}}) = 0$。如有必要，将 g 替换为 $-g$，使得 $g > 0$。我们有 $\phi \succ 1$：否则，根据推论 4.26，对于某个 L的 Hardy 域扩张 E，$g\mathrm{e}^{\phi \mathrm{i}} \in E[\mathrm{i}]^\times$，因而 $\mathrm{Re}(g\mathrm{e}^{\phi \mathrm{i}}) \in V^{\neq}$ 不会

振荡，或者 $\mathrm{Im}(g\mathrm{e}^{\phi \mathrm{i}}) \in V^{\neq}$ 不会振荡，这就矛盾了。如有必要，将 ϕ 替换为 $-\phi$，使得 $\phi > \mathbb{R}$。于是 (g, ϕ) 参数化 V。这就得到 (ii)。蕴含 (ii) $\Rightarrow$(iii) 是显然的。由关于 H 的假设以及定理 5.1 后的备注，$\mathrm{D}(H)$ 是 ω-自由的，因此由定理 5.1 可得 (iii) $\Rightarrow$ (iv)。最后，由引理 4.28 中的 (iii) $\Rightarrow$ (i) 可得 (iv) $\Rightarrow$ (i)。□

在本小节的其余部分，我们令 (g, ϕ) 为一对参数化 $V = \ker_{\mathcal{C}^{<\infty}} A$ 的 H-Hardy 型芽。现在引入算子 $B := \partial^3 + f\partial + (f'/2) \in H[\partial]$，其阶为 3，已在第 1 节中研究过，并注意到：

引理 5.21。 $B\left(\frac{1}{\phi'}\right) = 0$。

证明。我们令 $H \supseteq \mathbb{R}$ 包含 ϕ 且为刘维尔闭。根据引理 1.3 之前的备注，$\mathcal{C}^{<\infty}[\mathrm{i}]$ 的微分子环 $K[\mathrm{e}^{\phi \mathrm{i}}, \mathrm{e}^{-\phi \mathrm{i}}]$ 是一个整环。令 L 为其微分分式域。于是

$$(\phi')^{-1/2}\,\mathrm{e}^{\phi \mathrm{i}}, (\phi')^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-\phi \mathrm{i}} \in \ker_L 4\partial^2 + f.$$

因此，根据将 L 置于 K 的位置应用引理 1.2，可得 $B(1/\phi') = 0$。 □

引理 5.22。 设 E 是扩张 $H\langle \phi' \rangle$ 的 *Hardy* 域。则 $\ker_E B = C_E \frac{1}{\phi'}$。

证明。根据推论 4.30，我们可以令 $E \supseteq \mathbb{R}$为施瓦茨闭的。于是 $f \notin \omega(H) = \omega(E) \cap H$，因此 $f \in \sigma(E^{\times})$，从而由引理 1.3 得 $\dim_{C_E} \ker_E B = 1$。□

现在我们可以补充命题 5.20：

推论 5.23。 设 ϕ' 在 H上代数。则 $(\phi')^2 \in H$ 且 $g^{\dagger} \in H$。

证明。令 $E := H^{\mathrm{rc}} \subseteq \mathcal{C}^{<\infty}$，于是 $E \supseteq H\langle \phi' \rangle$。设 $L := E[\mathrm{i}] \subseteq \mathcal{C}^{<\infty}[\mathrm{i}]$，，使得 L 是微分域 H的代数闭包。令 $u := 2\phi' \in E$，并设 $\tau \in \mathrm{Aut}(L|H)$。由引理 5.21，$B(\tau(1/u)) = 0$。因此，$E$ 中的 $\mathrm{Re}\ \tau(1/u)$ 和 $\mathrm{Im}\ \tau(1/u)$ 也是 B的零点，于是由引理 5.22 可得 $c \in \mathbb{C}^{\times}$，满足 $\tau(1/u) = c/u$，从而 $\tau(u) = c^{-1}u$。现在

$$P(Y) := 2YY'' - 3(Y')^2 + Y^4 - fY^2 \in H\{Y\}$$

我们有 $P(u) = 0$，因此 $P(\tau(u)) = 0$，从而

$$0 = P(u) - c^2 P(\tau(u)) = P(u) - c^2 P(c^{-1}u) = (1 - c^{-2})u^4$$

因此 $c \in \{-1, 1\}$，所以 $\tau(u^2) = u^2$。这就证明了第一个结论。第二个结论由第一个结论和 $g^2\phi' \in \mathbb{R}^{>}$ 根据引理 5.4 得出。□

命题 5.20 和推论 5.23 推出了引言中的推论 3，该推论应用于 [8]中的贝塞尔方程。我们注意到，有一个算法可以在输入有理函数 $f \in \mathbb{Q}(x)$ 后，判定 $\mathrm{Li}\big(\mathbb{R}(x)\big)$ 中是否存在某对芽能够参数化 $V = \ker_{\mathcal{C}^{<\infty}}(4\partial^2 + f)$：根据命题 5.20，这等同于判定该命题中的条件(i)是否对 $H = \mathbb{R}(x)$ 和 $A = \partial^2 + (f/4)$ 成立，而众所周知，这可以通过算法完成 [35]。

6. Distribution of Zeros and Critical Points

本节中 H 是一个 *Hardy* 域。再次考虑一个微分方程

$$(\widetilde{\mathrm{L}}) \qquad Y'' + aY' + bY = 0 \qquad (a, b \in H).$$

下面我们利用定理 5.1 证明，对于 (L) 的任意振荡解 $y \in \mathcal{C}^{<\infty}$，其相继零点数列（以及相继临界点数列）$y$的增长都十分规律，与某个 Hardy 型函数的增长相当。（对于方程 $Y''+fY=0$，其中 $f \in \mathrm{E}(\mathbb{Q})$ 产生振荡，这一点在 [14,§20 的猜想 4]之后已有所暗示。）为精确表述这一点，我们首先在实数数列集合 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 上定义一种预序 $\leqslant$:

$$(s_n) \leqslant (t_n) \quad :\Longleftrightarrow \quad s_n \leqslant t_n \text{ eventually} \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists m\, \forall n \geqslant m\ s_n \leqslant t_n.$$

（集合上的预序是该集合上的自反且传递的二元关系。）若 (s_n)，$(t_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 满足 $(s_n) \leqslant (t_n)$ 或 $(t_n) \leqslant (s_n)$，则称二者**可比较**。在 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 上由此诱导出的等价关系 $=_{\mathrm{e}}$ 表示具有相同的尾:

$$(s_n) =_{\mathrm{e}} (t_n) \quad :\Longleftrightarrow \quad (s_n) \leqslant (t_n) \text{ and } (t_n) \leqslant (s_n) \iff s_n = t_n \text{ eventually}.$$

对任意芽 $f \in \mathcal{C}$，我们在 $\mathcal{C}_0$中取一个代表元，为方便起见此处亦记为 f，并将该芽与数列 $\big(f(n)\big)$的尾相关联；注意该尾与代表元的选取无关。因此，若 $f, g \in \mathcal{C}_0$ 的芽包含于同一个 Hardy 域中，则数列 $\big(f(n)\big)$、$\big(g(n)\big)$ 是可比较的。

定义 6.1. 给定一个在 $\mathbb{R}$ 中有下界且无聚点的无限集 $S \subseteq \mathbb{R}$，S 的**枚举** 是满足 $S = \{s_0, s_1, \dots\}$ 的严格递增序列(s_n)（从而当 $n \to +\infty$时 $s_n \to +\infty$）。

我们在 $\mathcal{C}^1_e$ 中取 a、b 的满足 $e \in \mathbb{R}$的代表元，同样将它们记为 a 与 b，并令 f:
$= -2a' - a^2 + 4b \in \mathcal{C}_e$。设 $y \in \mathcal{C}^2_e$ 振荡，且
$y'' + ay' + by = 0$ (so the germ of f does not lie in $\varpi(H)$ and is thus $> x^{-2}$).
$y^{-1}(0)$中 y 的零点集合是无限的且没有聚点（见第 3 节）。设 (s_n) 是 $y^{-1}(0)$的枚举。定理 5.1 给出 $e_0 \geqslant e$、$g \in \big(\mathcal{C}^2_{e_0}\big)^{\times}$和 $\phi \in \mathcal{C}^2_{e_0}$，使得对于所有 $t \in [e_0, +\infty)$，$\phi'(t) > 0$；$y|_{[e_0,+\infty)} = g\cos\phi$，且 g、ϕ 属于 H 的同一个 Hardy 域扩张，其中对 (g, ϕ) 参数化了 $\ker_{\mathcal{C}^{<\infty}}(\partial^2 + a\partial + b)$（其中 g、ϕ 也表示它们自身的芽）。序列 (s_n) 可由一个具有 Hardy 胚的严格递增函数插值:

引理 6.2。存在一个严格递增的 $\zeta \in \mathcal{C}_{n_0}$ $(n_0 \in \mathbb{N})$，使得对于所有 $n \geqslant n_0$，$s_n = \zeta(n)$，且 ζ 的芽是 *Hardy* 型的，其复合逆为 H-*Hardy* 型。

证明。取 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得对于所有 $n \geqslant n_0$，都有 $s_n \geqslant e_0$，然后取 $k_0 \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ 使得对于所有 $n \geqslant n_0$，都有 $\phi(s_n) = (k_0 + n)\pi$。因此 $n_0 = \big(\phi(s_{n_0})/\pi\big) - k_0$。令 $\zeta \in \mathcal{C}_{n_0}$为 $(\phi/\pi) - k_0$ 在 $[s_{n_0}, +\infty)$ 上的复合逆。那么 ζ 具有所需的性质：根据引理 4.4，ζ 的芽是 Hardy 型的。□

若 a，$b \in \mathcal{C}^{\infty}$，则我们可以在引理 6.2 中选取 ζ，使其芽属于 $\mathcal{C}^{\infty}$；以 $\mathcal{C}^{\omega}$ 代替 $\mathcal{C}^{\infty}$ 时亦然。我们不知道引理 6.2 中的 ζ 是否总能被选取为具有 H-Hardy 胚。在下一个推论中，我们令 $H_0 := \mathbb{R}(x)$。由于 $H_0 \cup \{a, b\} \subseteq \mathrm{D}(H)$，我们有 $\mathrm{D}(H)$ 的 Hardy 子域 $H_0\langle a,\ b\rangle$。注意，$\mathcal{C}$ 的任一 Hardy 型元素实际上都是 H_0-Hardy 型的。

推论 6.3. 设 a、 b 为 d-代数的，并令 $d:=$ 超越次数$\big(H_0\langle a,\ b\rangle|H_0\big)\ \in\mathbb{N}$。我们可以选取引理 *6.2* 中 ζ 的芽为 d-代数的，使得

$$\operatorname{trdeg}\big(H_0\langle\zeta\rangle|H_0\big)\ \leqslant\ d+2,$$

然后存在 $c\in\mathbb{R}^{>}$ 以及 e、 r、 $s\in\mathbb{N}$，使得 $r+s\leqslant d+2$ 且

$$(\log_r x)^c\ <\ \zeta\ <\ \exp_s(x^e),$$

因此$(\log_r n)^c\leqslant s_n<\exp_s(n^e)$ 最终成立。（这里$\log_r$ 表示迭代 r 次的实对数函数，$\exp_s$ 亦然）

证明。令 f 同时表示其芽，则有 $f\in\mathbb{R}\langle a,b\rangle$，从而对 $H_1:=H_0\langle f\rangle$有$\operatorname{trdeg}\big(H_1|H_0\big)\leqslant d$。我们还有 $P(2\phi')=0$，其中

$$P(Y)\ :=\ 2YY''-3(Y')^2+Y^4-fY^2\in H_1\{Y\},$$

因此 $H_1\subseteq H_0\langle\phi'\rangle$，其中 $H_0\langle\phi'\rangle=H_1\langle\phi'\rangle=H_1(\phi',\phi'')$，故 $H_0\langle\phi\rangle=H_1(\phi,\phi',\phi'')$，从而$\operatorname{trdeg}\big(H_0\langle\phi\rangle|H_0\big)\ \leqslant\ d+3$。设 ζ 如引理 6.2的证明中所述。则由引理 4.5， ζ 是微分代数的，且 $\operatorname{trdeg}\big(H_0\langle\zeta\rangle|\mathbb{R}\big)\ =\operatorname{trdeg}\big(H_0\langle\phi\rangle|\mathbb{R}\big)\ \leqslant d+3$，因而$\operatorname{trdeg}\big(H_0\langle\zeta\rangle|H_0\big)\ =\operatorname{trdeg}\big(H_0\langle\phi\rangle|H_0\big)\leqslant d+2$。其余部分由 [5,定理 5.25、引理 5.26] 应用于 H_0、 $H_0\langle\zeta\rangle$ 以代替 H,E得出。□

对于某个 ϕ，我们可以用 ϕ 来描述 ζ 的渐近行为:

推论 6.4. 如果对于某个 $n\geqslant 1$， $\phi\succcurlyeq x^{1/n}$，那么在引理 *6.2* 中还可以选择 $\zeta\sim\phi^{\mathrm{inv}}\circ\pi x$。

证明. 令 n_0、 k_0、 ζ 如引理 6.2 的证明中所述。则

$$\zeta^{\mathrm{inv}}\ \sim\ (\phi/\pi)-k_0\ \sim\ \phi/\pi.$$

现在假设 $\phi\succcurlyeq x^{1/n}$、 $n\geqslant 1$。则 $(\phi/\pi)^{\mathrm{inv}}\preccurlyeq x^n$。在引理 3.6 中取 ζ^{inv}、$(\phi/\pi)^{\mathrm{inv}}$ 分别代替 g、 h，可得 $\zeta\sim(\phi/\pi)^{\mathrm{inv}}=\phi^{\mathrm{inv}}\circ\pi x$。□

结合引理 3.6 以及推论 5.10 和 6.4，可得:

Corollary 6.5. *If* $f\sim cx^{-2+r}$ $(c,r\in\mathbb{R}^{>})$, *then* $s_n\sim\left(\dfrac{r\pi n)}{\sqrt{c}}\right)^{2/r}$ *as* $n\to\infty$.

当 $H=\mathbb{R}(x^{\mathbb{R}})$ 且 $f\asymp 1/x^2$ 时，我们还有关于 (s_n) 增长的一个粗略界。更一般地:

推论 6.6. 假设 $x\in H$, $v(1/x)\ =$最大值 Ψ_H，且 $f\sim cx^{-2}\,(c\in\mathbb{R}^{>})$。则 $c>1$ 且 $\log s_n\sim\dfrac{2\pi n}{\sqrt{c-1}}$ 当 $n\to\infty$时。

证明. 由推论 5.18 可得 $c>1$ 且 $\phi\sim d\log x$，其中 $d:=\frac{1}{2}\sqrt{c-1}$，因此 $\overline{\phi\circ\mathrm{e}^x}\sim dx$。取 ζ，如引理 6.2 的证明中所示。则 $\zeta^{\mathrm{inv}}\sim\phi/\pi$，从而

$$(\log\zeta)^{\mathrm{inv}}=\zeta^{\mathrm{inv}}\circ\mathrm{e}^x\sim(\phi\circ\mathrm{e}^x)/\pi\sim(d/\pi)x,$$

因此，以 $(\log\zeta)^{\mathrm{inv}}$、$(\pi/d)x$ 分别代替 g,h 应用引理 3.6，可得 $\log\zeta\sim(\pi/d)x$。 □

推论 6.5 和 6.6 证明了引言中的推论 4。下一个结果是 Sturm 凸性定理（[11, p. 318], [46, p. 173]）的一个版本，讨论了 y相邻零点之间的差:

推论 6.7。若 $f \prec 1$，则序列 $(s_{n+1}-s_n)$ 最终严格递增，且当 $n\to\infty$时 $s_{n+1}-s_n\to+\infty$。若 $f\succ 1$，则 $(s_{n+1}-s_n)$ 最终严格递减，且当 $n\to\infty$时 $s_{n+1}-s_n\to 0$。现在假设 $f\sim c\,(c\in\mathbb{R}^{>})$。则当 $n\to\infty$时 $s_{n+1}-s_n\to 2\pi/\sqrt{c}$；若 $f<c$，则 $(s_{n+1}-s_n)$ 最终严格递减；若 $f=c$，则 $(s_{n+1}-s_n)$ 最终保持不变；若 $f>c$，则 $(s_{n+1}-s_n)$ 最终严格递增。

证明。回忆一下，对所有 $t\geqslant e_0$，$\phi\in\mathcal{C}^2_{e_0}$ 和 $\phi'(t)>0$。取引理 6.2 的证明中所取的 ζ。于是 $\zeta\in\mathcal{C}^2_{n_0}$，且

$$\zeta' = \pi\frac{1}{\phi'\circ\zeta},\qquad \zeta'' = -\pi^2\frac{\phi''\circ\zeta}{(\phi'\circ\zeta)^3}.$$

由中值定理，对每个 $n\geqslant n_0$，存在一个 $t_n\in(n,\ n+1)$，使得

$$s_{n+1}-s_n = \zeta(n+1)-\zeta(n) = \zeta'(t_n).$$

若 $f\prec 1$，则由引理 5.11 得 $\phi\prec x$，所以 $\zeta\succ x$，进而 $\zeta'\succ 1$；这就证明了引理的第一个结论。其余结论同理可由引理 5.11 以及上述关于 ζ' 和 ζ''的备注推出。□

接下来的两个推论是推论 6.7 的乘法版本。回忆一下，由于 (s_n) 严格递增且无界，我们最终有 $s_n>0$。

推论 6.8。假设 $f\succ x^{-2}$。那么当 $n\to\infty$ 时，$s_{n+1}/s_n\to 1$。

证明。令 $\zeta\in\mathcal{C}^2_{n_0}$ 和 t_n 满足推论 6.7 的证明中的条件。此处，我们在引理 6.2 的证明中取足够大的 n_0，以确保 $\zeta(t)>0$，且对于 $t\geqslant n_0$，$\operatorname{sign}\big(\zeta''(t)\big)=\operatorname{sign}\big(\zeta''(n_0)\big)$。若 $\zeta''(n_0)<0$，则对于 $n\geqslant n_0$:

$$0<\frac{s_{n+1}}{s_n}-1=\frac{\zeta'(t_n)}{\zeta(n)}<\frac{\zeta'(n)}{\zeta(n)},$$

若 $\zeta''(n_0)\geqslant 0$，则对于 $n\geqslant n_0$:

$$0<1-\frac{s_n}{s_{n+1}}=\frac{\zeta'(t_n)}{\zeta(n+1)}\leqslant\frac{\zeta'(n+1)}{\zeta(n+1)}.$$

由引理 5.9 可知 $\phi'\succ 1/x$，因此 $\zeta^\dagger=\big(\pi/(x\phi')\big)\circ\zeta\prec 1$。

□

在下一个推论中，我们回到推论 5.18 和 6.6 的情形:

推论 6.9. 假设 $x\in H$, $v(x^{-1})=$最大值 Ψ_H, 且 $f\sim cx^{-2}$ 其中 $c\in\mathbb{R}^{>}$. 则 $c>1$, 并且对于 $d:=\frac{1}{2}\sqrt{c-1}$，我们有 $s_{n+1}/s_n\to\mathrm{e}^{\pi/d}$，当 $n\to\infty$ 时。

证明. 由推论 5.18 得到 $c>1$ 和 $\phi\sim d\log x$，因此由引理 2.5 可得 $\phi'\sim d/x$。取引理 6.2 的证明中所述的 $\zeta\in\mathcal{C}^1_{n_0}$，并令 n_0 足够大，使得 $\zeta\in\mathcal{C}^\times_{n_0}$。那么 $\zeta^\dagger=(\pi/(x\phi'))\circ\zeta\sim\pi/d$。取 $\varepsilon\in\mathcal{C}_{n_0}$ 使得 $\zeta^\dagger=(\pi/d)(1+\varepsilon)$，于是 $\varepsilon\prec 1$。由中值定理，对每个 $t\geqslant n_0$，存在一个 $\xi(t)\in(t,t+1)$，使得

$$\log\big(\zeta(t+1)/\zeta(t)\big)=\log\zeta(t+1)-\log\zeta(t)=\zeta'(\xi(t))/\zeta(\xi(t))=(\pi/d)\big(1+\varepsilon(\xi(t))\big),$$

其中，当 $\varepsilon(\xi(t))\to 0$ 时，$t\to\infty$，因此

$$\zeta(t+1)/\zeta(t)=\mathrm{e}^{(\pi/d)(1+\varepsilon(\xi(t)))}\to\mathrm{e}^{\pi/d}\qquad\text{as } t\to\infty,$$

由此得到该结论，因为对于 $n\geqslant n_0$，$\zeta(n)=s_n$。 □

例 (柯西-欧拉方程)。 假设 $a = \alpha x^{-1}, b = \beta x^{-2}$ ($\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$)，那么

$$y'' + \alpha x^{-1} y' + \beta x^{-2} y \ = \ 0.$$

于是 $f = -2a' - a^2 + 4b = cx^{-2}$ 其中 $c := 2\alpha - \alpha^2 + 4\beta > 1$。对于 $d := \frac{1}{2}\sqrt{c-1}$, 由推论 5.14 和例 5.19(1)，我们有 $\phi - d\log x \in \mathbb{R}$，因此存在 $C \in \mathbb{R}^{>}$和 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得对于 $n \geqslant n_0$，有 $s_n = Ce^{\pi n/d}$，从而 $s_{n+1}/s_n = e^{\pi/d}$。

定义计数函数 $N\colon \mathbb{R}^{\geqslant e} \to \mathbb{N}$，如下：

$$N(t) \ := \ \big|[e,t] \cap y^{-1}(0)\big| \ = \ \min\{n : s_n > t\},$$

因此，对于 $n \geqslant 1$: $N(t) = n \Leftrightarrow s_{n-1} \leqslant t < s_n$。于是，当 $t \to +\infty$时， $N(t) \to +\infty$；事实上：

引理 6.10。 $N \sim \phi/\pi$。

证明。取引理 6.2 的证明中的 n_0, k，则对于 $n \geqslant n_0$，有 $\phi(s_n) = (k+n)\pi$。令 $t \geqslant e$ 满足 $N(t) \geqslant n_0 + 1$；于是 $s_{N(t)-1} \leqslant t < s_{N(t)}$，从而

$$N(t) + k - 1 \ = \ \phi(s_{N(t)-1})/\pi \ \leqslant \ \phi(t)/\pi \ < \ \phi(s_{N(t)})/\pi \ = \ N(t) + k.$$

由此得到 $N \sim \phi/\pi$。 □

量 $N(t)$ 在二阶线性微分方程中得到了广泛研究；参见 [31, 第九章，第5节，以及第 401] 页所引的文献。例如，下一个推论是 Wiman 的一个更一般结果的推论 [50] （参见 [31, 第九章，推论5。3]），但也可由我们的 Hardy 域微积分直接得到：

推论 6.11。 假设 $f(t) > 0$ 对所有 $t \geqslant e$成立，且 $f \succ 1/x^2$。那么

$$N(t) \ \sim \ \frac{1}{2\pi} \int_e^t \sqrt{f(s)}\, ds \quad as\ t \to +\infty.$$

证明。令 H为满足 $(g, \phi) \in H^2$的极大者。由引理 5.9 可得 $\phi' \sim \frac{1}{2}\sqrt{f}$。设 $\phi_1 \in \mathcal{C}^1_e$, $\phi_1(t) := \frac{1}{2}\int_e^t \sqrt{f(s)}\, ds$。那么 $\phi_1' = \frac{1}{2}\sqrt{f}$，因此（芽） ϕ_1属于 H 和 $\sqrt{f} \succ 1/x$，于是 $\phi_1 > \mathbb{R}$，故由引理 2.5 得 $\phi \sim \phi_1$。现在应用引理 6.10。□

现在我们来证明 (s_n) 与其他相关数列的可比性：

推论 6.12. 设 $h \in \mathcal{C}_0$，并假设 h 的芽属于 $\mathrm{E}(\mathbb{Q})$。那么数列 (s_n) 和 $\big(h(n)\big)$ 可比。

证明. 设 ζ 如引理 6.2 所述，并注意到 ζ 和 h 的芽属于同一个 Hardy 域。□

注. 在 [8] 中我们证明：若 f 的芽属于 $\mathbb{R}(x)$ 和 $f = c + O(x^{-2})$, $c \in \mathbb{R}^{>}$，则对于每个具有 Hardy 型芽的 $h \in \mathcal{C}_0$，数列 (s_n) 和 $\big(h(n)\big)$ 可比。

再设 $a, b \underline{\in} H$，并取 a、 b 在 $\mathcal{C}^1_e$ ($e \in \mathbb{R}$) 中的代表元，分别仍记为 a 和 b。设 $y \in \mathcal{C}^2_e$ 是微分方程的一个振荡解

$$Y'' + \underline{a} Y' + \underline{b} Y \ = \ 0,$$

并令 (s_n) 为 $y^{-1}(0)$ 的枚举。

引理 6.13. 数列 (s_n) 和 (s_n) 是可比较的。

证明. 我们令 H 为极大，并取引理 6.2 中的 ζ。该引理还给出一个严格递增的 $\zeta\in\mathcal{C}_{n_0}$ $(n_0\in\mathbb{N})$，使得对所有 $n\geqslant n_0$，均有 $s_n=\zeta(n)$，且 ζ 的芽是 Hardy 型的，其复合逆为 H-Hardy 型。令 ζ 和 ζ 也表示它们的芽，则有 $\zeta^{\mathrm{inv}}\leqslant\zeta^{\mathrm{inv}}$ 或 $\zeta^{\mathrm{inv}}\geqslant\zeta^{\mathrm{inv}}$，因此 $\zeta\geqslant\zeta$ 或 $\zeta\leqslant\zeta$。于是 (s_n) 和 (s_n) 是可比较的。□

振荡解的临界点。我们的振荡解 $y\in\mathcal{C}_e^2$ 也有振荡导数 y'，因此由推论 4.11 可知，对所有充分大的 n，恰有一个 $t\in(s_n,\ s_{n+1})$ 满足 $y'(t)=0$。此外，$b\neq0$ 属于 H，因为若 $b=0$，就意味着 $z:=y'$ 满足 $z'+az=0$，因此 z 将是 H-Hardy 型。递增 e 并相应地限制 a、b、y，便有 $y\in\mathcal{C}_e^3$。在本小节中，ζ 按引理 6.2 的证明中的构造定义。于是：

引理 6.14。存在某个 $n_1\geqslant n_0$ 属于 $\mathbb{N}$，以及严格递增函数 $\zeta_1\in\mathcal{C}_{n_1}$：

(i) $\zeta_1(n_1)\geqslant e$ 且 $\zeta_1(t)\to+\infty$，当 $t\to+\infty$ 时；*(ii)* ζ_1 的芽是 *Hardy* 型的，且其复合逆是 H-*Hardy* 型；*(iii)* $\{\zeta_1(n):\ n\geqslant n_1\}=\{t\geqslant\zeta_1(n_1):\ y'(t)=0\}$；*(iv)* $\zeta_1^{\mathrm{inv}}-\zeta^{\mathrm{inv}}\preccurlyeq1$；*(v)* 对所有 $n\geqslant n_1$，$\zeta(n)<\zeta_1(n)<\zeta(n+1)$。

证明。我们令 H 为极大。设 $A:=\partial^2+a\partial+b\in H[\partial]$。由于 $b\neq0$，我们有前面引理 1.4 中定义的二阶首一算子 $A^\partial\in H[\partial]$，且 $A^\partial(y')=0$。取 H 中一对元素 $(g_1,\ \phi_1)$，用于参数化 $\ker_{\mathcal{C}^{<\infty}}A^\partial$。于是，用 A^∂、g_1、ϕ_1 替代 A、g、ϕ，并取相关芽的适当代表元，引理 6.2 的证明同样给出 $\mathbb{N}$ 中的一个 $n_1\geqslant n_0$、一个 $k_1\in\frac12+\mathbb{Z}$，以及一个满足条件 (i)、(ii)、(iii) 的严格递增函数 $\zeta_1\in\mathcal{C}_{n_1}$，其复合逆为 $(\phi_1/\pi)-k_1$。

引理 1.3 前的备注推出存在微分子环 R，它是 $\mathcal{C}^{<\infty}[\mathrm{i}]$ 的子环，使得 $R\supseteq K=H[\mathrm{i}]$，且 R 是一个整环，其微分分式域的常数域为 $\mathbb{C}$，并且 $\dim_{\mathbb{C}}\ker_R A=2$。由引理 1.4，$\ker_R A^\partial=\{z':\ z\in\ker_R A\}$，且 $\dim_{\mathbb{C}}\ker_R A^\partial=2$，因此

$$\ker_{\mathcal{C}^{<\infty}[\mathrm{i}]}A^\partial\ =\ \{y':\ y\in\ker_{\mathcal{C}^{<\infty}[\mathrm{i}]}A\}.$$

鉴于 $A\in H[\partial]$，将 $\mathcal{C}^{<\infty}[\mathrm{i}]$ 替换为 $\mathcal{C}^{<\infty}$ 后，这个等式也成立。现在由引理 5.2 和 5.6 可得 (iv)。

关于 (v)，引理前的注给出 $\ell\in\mathbb{N}$ 和 $p\in\mathbb{Z}$，使得对所有 $n\geqslant n_1+\ell$，都有：$n+p\geqslant n_0$，且 $\zeta_1(n)$ 是 y' 在区间 $\big(\zeta(n+p)\ \zeta(n+p+1)\big)$ 内的唯一零点。设 $n_1^*:=n_1+\ell+|p|$，并将 ζ_1 修改为 $\zeta_1^*\colon[n_1^*,+\infty)\to\mathbb{R}$，方法是令 $\zeta_1^*(t)=\zeta_1(t-p)$。那么对所有 $n\geqslant n_1^*$，$\zeta(n)<\zeta_1^*(n)<\zeta(n+1)$。$\zeta_1^*$ 的复合逆为 $(\phi_1/\pi)-(k_1-p)$。因此，将 ζ_1、n_1、k_1 分别替换为 ζ_1^*、n_1^*、k_1-p 后，所有条件均得到满足。□

为简便起见，下面假设 $a=0$ 在 $[e,+\infty)$ 上，因此 $4y''+fy=0$ 在 $[e,+\infty)$ 上且 $f=4b\in\mathcal{C}_e^1$。为了使用引理 6.14，我们增大 e，并相应地限制 f、y，使得对于所有 $t\in[e,+\infty)$，$y\in\mathcal{C}_e^3$ 且 $f(t)\neq0$。于是，每个区间 $(s_n,\ s_{n+1})$ 都恰好包含 y' 的一个零点 t_n，而 $t_0<t_1<t_2<\cdots$ 列出了 y 的临界点，这些临界点是 $\geqslant s_0$。

取 $e_0\geqslant e$ 和 g,ϕ，如引理 6.2 之前所述，并且还要求 $w:=g^2\phi'$ 在 $[e_0,+\infty)$ 上取一个正常数值（由引理 5.4 可知这是可能的），且 $z''+fz=0$ 在 $[e_0,+\infty)$ 上满足 $z:=g\sin\phi$。若 f 严格递增（严格递减），则

由引理 3.3，数列 $\big(|y(t_n)|\big)$ 严格递减（分别为严格递增）；不加“严格”时也同样成立。（因为 f 的芽是 Hardy 型的，所以它最终递增或最终递减。）值得注意的是，$\big(|y(t_n)|\big)$ 也可以用一个 Hardy 型函数插值：

命题 6.15。存在 $n_1 \geqslant n_0$ 属于 $\mathbb{N}$，以及一个具有 *Hardy* 型芽的函数 $u \in \mathcal{C}_{n_1}$，使得 $u(n) = |y(t_n)|$ 对所有 $n \geqslant n_1$ 都成立。

证明。我们令 H 为极大 g, ϕ 属于 H。那么，$\psi := 1/\phi' \in \mathcal{C}_{e_0}$ 和 $v := \sqrt{1 + (\psi'/2)^2} \in \mathcal{C}_{e_0}$ 的芽也属于 ~~H。引理 6~~.14 的证明给出了一个严格递增的 $\zeta_1 \in \mathcal{C}_{n_1}$，满足 $n_1 \in \mathbb{N}$，$n_1 \geqslant n_0$，其芽为 Hardy 型，且对 $n \geqslant n_1$ 有 $\zeta_1(n) = t_n \geqslant e_0$，并且 ζ_1 的复合逆的芽 ℓ 属于 H。于是 $H \circ \ell^{\mathrm{inv}}$ 是一个包含 $u := v \circ \zeta_1 \in \mathcal{C}_{n_1}$ 的芽的 Hardy 域。（参见第 4 节中的小节“Hardy 域与复合”。）考虑这些元素

$$y_1 := y|_{[e_0,+\infty)} = g\cos\phi, \qquad y_2 := g\sin\phi$$

$\mathcal{C}^2_{e_0}$。于是，在 $[e_0, +\infty)$ 上有

$$y_1' = g'\cos\phi - g\phi'\sin\phi, \qquad y_2' = g'\sin\phi + g\phi'\cos\phi,$$

因此

$$y_1y_2' - y_1'y_2 = w, \qquad (y_1')^2 + (y_2')^2 = (g')^2 + (g\phi')^2.$$

由 $g^2\phi' = w \in \mathbb{R}$ 得到 $2g'\phi' + g\phi'' = 0$，所以

$$(2\phi'/g)^2\big((y_1')^2 + (y_2')^2\big) = (\phi'')^2 + 4(\phi')^4$$

从而在 $[e_0, +\infty)$ 上：

$$\frac{w^2}{(y_1')^2 + (y_2')^2} = \frac{4w(\phi')^3}{(\phi'')^2 + 4(\phi')^4} = \frac{4w/\psi^3}{(\psi')^2/\psi^4 + 4/\psi^4} = \frac{w\psi}{1 + (\psi'/2)^2} = v^2,$$

所以 $v = \dfrac{w}{\sqrt{y_1'^2 + y_2'^2}}$。因此，根据命题 3.4，$u$ 具有所需性质。 □

备注。令 u, v 与命题 6.15 的证明中相同。

(1) 假设 f 的芽是微分代数的。那么 ϕ 的芽以及因此 v 的芽也是微分代数的。根据推论 6.3 和引理 6.2 的证明，ζ 的芽及其复合逆的芽也都是微分代数的。此外，利用引理 6.14 的证明，我们还可以选择 ζ_1，使得 ζ_1 的芽以及其复合逆 ℓ 的芽也都是微分代数的。根据引理 4.6，u 的芽是微分代数的。结合引理 6.14 和命题 6.15，这就证明了引言中的推论 4。

(2) 假设 $\phi \succ \log x$。（关于这种情况何时成立，见推论 5.18。）那么 $\phi'' \prec (\phi')^2$,，因此 $v \sim g$。（这说明了推论 4 后的一条注。）(3) 命题 6.15 对序列 $\big(|y'(s_n)|\big)$ 也有类似结论：对 $g\cos\phi$ 求导，在 s_n 处取值，并利用 $g = \sqrt{w/\phi'}$，得到

$$|y'(s_n)| = \sqrt{w\phi'(s_n)} \quad \text{for all } n \geqslant n_0.$$

$w\phi'$ 的芽是 H-Hardy 型。设 $\zeta \in \mathcal{C}_{n_0}$ 如引理 6.2 中所述。则 $u_0 := (w\phi') \circ \zeta \in \mathcal{C}_{n_0}$ 对所有 $n \geqslant n_0$ 满足 $u_0(n) = |y'(s_n)|$，并且具有 Hardy 胚。

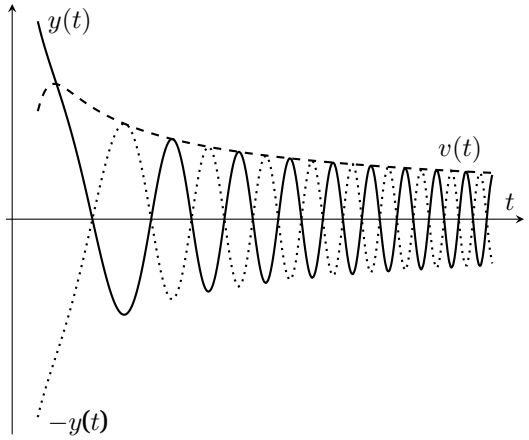

FIGURE 1. y、 $-y$、 v的图像

例。 设 $r \in \mathbb{R}$、 $r > -1$ 满足 $x^r \in H$，且如例5.19(2)中所述:

$$f \;=\; x^{2r} - r(r+2)x^{-2}, \qquad g \;=\; x^{-r/2}, \quad \phi \;=\; \frac{x^{r+1}}{2r+2}.$$

于是 $\psi = 2x^{-r}$，因此 $\psi'/2 = -rx^{-r-1}$，从而 $v^2 = \dfrac{g^2}{1+(\psi'/2)^2} = x^{2r+2} + r^2$。图1显示了 $r = 1$时 y、 $-y$、 v 的图像。

7. When is the Perfect Hull of a Hardy Field ω-free?

在本节中 H 是一个 *Hardy* 域。下面我们利用证明定理 5.1 的引理，借助 H来刻画 D(H) 的 ω-自由性。回顾该条件与定理 5.1 中唯一性的关联；本节末尾将对此作进一步说明。

定理 7.1. 下列命题等价:

(i) H 不是 λ-自由的; 或者 $\omega(H) = H \setminus \sigma\big(\Gamma(H)\big)^{\uparrow}$;(ii) D($H$) 是 ω-自由的；(iii) E($H$)是 ω-自由的。

（i）中的析取项恰好是引言中定理 B 的条件 (a) 和 (b)。根据推论5.8，d-完美Hardy域是施瓦茨闭的，当且仅当它是ω-自由的，因此在（ii）、（iii）中，我们可以将“ω-自由”替换为“施瓦茨闭”。根据引理 4.21，蕴含关系 (i) ⇒ (ii) 成立。对于 (iii) ⇒ (i) 的逆否命题，假设 H是 λ-自由的，且 $\omega(H) \neq H \setminus \sigma\big(\Gamma(H)\big)^{\uparrow}$。由于根据推论4.16后面的注， $\omega(H) \subseteq H \setminus \sigma\big(\Gamma(H)\big)^{\uparrow}$，这便得到 $\omega \in H$，使得

$$\overline{\omega}(H) \;<\; \omega \;<\; \sigma\big(\Gamma(H)\big), \tag{7.1}$$

因此，根据下文的引理 7.3，E(H) 不是 ω-自由的。引理 7.3 的证明依赖于推论 5.7，但还用到了第 2 节和第 4 节中的事实，以及 [5, 推论 7.15、7.17] 的以下推论:

引理 7.2。 假设 $H \supseteq \mathbb{R}$ 是刘维尔闭的，且 $\omega \in H$ 满足 (7.1)。那么存在连续统多个 $\gamma \in (\mathcal{C}^{<\infty})^{\times}$，满足 $\gamma > 0$ 和 $\sigma(\gamma) = \omega$。每个这样的芽 γ都是 H-*Hardy* 型的，并且 H 的任何 *Hardy* 域扩张都至多包含一个这样的 γ。

引理 7.3。 假设 H 是 λ-自由的，且 $\omega \in H$ 满足 (7.1)。那么

$$\omega(E) \;=\; \overline{\omega}(E) \;<\; \omega \;<\; \sigma\big(\Gamma(E)\big) \qquad \textit{for } E := \mathrm{E}(H),$$

因此 E 不是 ω-自由的。(本节末尾给出了满足假设的 H、 ω 。)

证明。根据引理 2.21， σ 在 Γ(*H*)上的限制严格递增。因此，我们可以用任意包含 H 且使 $\Gamma_H^{\leqslant}$在 $\Gamma_L^{\leqslant}$中共尾的 λ-自由 Hardy 子域 L 替换 H ，因为此时根据 [ADH, 11.8., Γ(*H*)在 Γ(*L*)中共始，14] 从而 $\sigma\big(\Gamma(H)\big)$ 在 $\sigma\big(\Gamma(L)\big)$中共始。利用这一观察和引理 4.1，将 H 替换为 $H(\mathbb{R})$，以安排 $H \supseteq \mathbb{R}$。接下来，根据命题 2.19，将 H 替换为 Li(*H*) $\subseteq E$ ，以使 H 刘维尔闭。现在， $\omega(E) = \omega(E)$向下封闭，且 $\omega(E) \cap H = \overline{\omega}(H)$，因此 $\overline{\omega}(E) < \omega$。为导出矛盾，假设 $\omega \in \sigma\big(\Gamma(E)\big)^{\uparrow}$。根据推论5.7， $\sigma\big(\Gamma(E)\big)$ 上闭，因此我们有 $\gamma \in \Gamma(E)$，其中 $\sigma(\gamma) = \omega$。引理 7.2给出$(\mathcal{C}^{<\infty})^{\times}$ 中的 $\widetilde{\gamma} \neq \gamma$ ，满足 $\widetilde{\gamma} > 0$且 $\sigma(\widetilde{\gamma}) = \omega$。取 H 的一个满足 $\widetilde{\gamma} \in M$ 的极大 Hardy 域扩张 M ，结合 $\gamma \in M$，便与引理 7.2的最后一部分矛盾。□

要完成定理 7.1 的证明，还需证明蕴含关系 (ii) $\Rightarrow$ (iii)，我们将在下文的引理 7.6 中证明这一点。（根据 [14, 定理 14.4], ，若 H 有界，也就是说，若存在某个 $\phi \in \mathcal{C}$ ，使得对每个 $h \in H$都有 $h \leqslant \phi$ ，则此蕴含关系显然成立；另见 [5, 定理 5.20]。）在引理 7.6 之前，我们假设 $H \supseteq \mathbb{R}(x)$ 是具有渐近积分的实闭域。设 (f_ρ) 是 H中的一个伪柯西序列。这里，与 [ADH], 中一样，伪柯西序列是伪柯西序列的缩写，而 $f_\rho \rightsquigarrow f$ 表示 f 是 (f_ρ) 的一个伪极限。关于伪柯西序列的基本事实，参见 [ADH, 2.2, 3.2] 。关于 (f_ρ) 在 H 上为 d-超越型，另参见 [ADH, 4.4] 。

假设（f_ρ）在 H 上是 d-超越型。那么（f_ρ）在 H 中没有伪$\widehat{\ }$极限；若 f 是（f_ρ）在 H 的某个 Hardy 域扩张中的伪极限，则根据 ADH 11.4.7、11.4.13],$\widehat{\ }$， $H\langle f\rangle$ 是 H 经 [得到的直接赋值域扩张，且 $v(f - H) \subseteq \Gamma_H$ 在 Γ_H 中向下封闭。下面给出命题3.4]:

$\widehat{\ }$**命题7.4**。 假设（f_ρ）在 H 上是d-超越型。设 f 属于 H 的某个 *Hardy* 域扩张，并满足 $f_\rho \rightsquigarrow f$ 和 $0 \notin v(f - H)$ ；再设 $f \in \mathcal{C}^{<\infty}$ 满足 $(f - \widehat{f}\,)^{(m)} \prec x^{-n}$ ，对任意 m、 n 均成立。那么 f 是 H-*Hardy* 型，并且存在一个 H 上的 *Hardy* 域同构 $H\langle f\rangle \to H\langle f\rangle$，将 f 映射到 f。

由命题7.4可得:

$\widehat{\ }$**推论 7.5.** 假设 (f_ρ) 在 H 上属于 d-超越类型，且 $f \in \mathrm{E}(H)$ 是$\widehat{\ }(f_\rho)$的一个伪极限。那么 $v(f - H) = \Gamma_H$。

$\widehat{\ }$证明. 反设不然。取 $g \in H^{\times}$ ，使得 $v(f - H) < vg$ ，并分别用 (f_ρ/g)、 f/g 替换 (f_ρ)、 $\widehat{f}$，从而得到 $v(f - H) < 0$。现在令 $z := \mathrm{e}^{-x}\sin x \in \mathcal{C}^{\omega}$。于是对所有 m，都有 $|z^{(m)}| \leqslant 2^m\mathrm{e}^{-x}$ ，故由命题7.4，芽 $f := \widehat{f} + z$在 H 上生成一个 Hardy 域 $H\langle f\rangle$ ；然而，没有任何 H 的极大 Hardy 域扩张$\widehat{\ }$同时包含 f 和 f，这与 $f \in \mathrm{E}(H)$ 矛盾。□

下一个引理中，将 D(*H*) 用于 H，即可得到定理 7.1 中的 (ii) $\Rightarrow$ (iii):

引理 7.6. 假设 H 不含 ω。那么$\mathrm{E}(H)$也不含 ω。

证明。 由于 $E := \mathrm{E}(H)$ 是刘维尔闭的且包含 $\mathbb{R}$，我们可以用 E 的 Hardy 子域 $\mathrm{Li}\big(H(\mathbb{R})\big)$ 替换 H，根据定理 2.13，该子域仍然是 ω- 自由的，从而

使得 $H \supseteq \mathbb{R}$ 和 H 是刘维尔闭的（因此推论 7.5 适用）。为导出矛盾，假设 $\omega \in E$ 满足 $\omega(E) < \omega < \sigma\big(\Gamma(E)\big)$; 那么 $\omega(H) < \omega < \sigma\big(\Gamma(H)\big)$。按照 ADH, 11.5] 中的方式，取 H 的一个对数序列 (ℓ_ρ)，并定义 $\omega_\rho := \omega(-\ell_\rho^{\dagger\dagger})$。那么，根据 ADH, 11.8.30], , (ω_ρ) 是 H 中的一个伪柯西序列，且 $\omega_\rho \rightsquigarrow \omega$; 根据 ADH, 13.6.3], (ω_ρ) 在 H 上是 d-超越型。由 ADH, 11.7.2] , 我们有 $\Gamma_H \setminus v(\omega - H) = \big\{\gamma \in \Gamma_H : \gamma > 2\Psi_H\big\}$, 它包含 $v(1/x^4) = 2v\big((1/x)'\big)$, 这与推论 7.5 矛盾。□

接下来，我们针对 $j = 1,2$ 描述一个 λ-自由的 Hardy 域 $H_{(j)} \supseteq \mathbb{R}$ 以及 $\omega_{(j)} \in H_{(j)}$, 使得 $\omega\big(\Lambda(H_{(j)})\big) < \omega_{(j)} < \sigma\big(\Gamma(H_{(j)})\big)$ （因此由 (2.5) 可知 $H_{(j)}$ 不是 ω-自由的） , 并且

(1) $\omega_{(1)} \in \overline{\omega}(H_{(1)})$;
(2) $\omega_{(2)} \notin \overline{\omega}(H_{(2)})$.

由此可知 $\omega(H_{(1)}) = H_{(1)} \setminus \sigma\big(\Gamma(H_{(1)})\big)^{\uparrow}$, 据引理 4.18，因此定理 7.1 中的条件(i)对 $H = H_{(1)}$ 成立，但对 $H = H_{(2)}$ 不成立; 从而 D($H_{(1)}$)与 E($H_{(1)}$)是 ω-自由的，而 D($H_{(2)}$)与 E($H_{(2)}$)则不是。

为构造这样的 $H_{(j)}$ 与 $\omega_{(j)} \in H_{(j)}$, 我们从 Hardy 域开始

$$H := \mathbb{R}(\ell_0, \ell_1, \ell_2, \dots) \quad \text{where } \ell_0 = x \text{ and } \ell_{n+1} = \log \ell_n \text{ for all } n.$$

因此，根据命题 2.14, H 是 ω-自由的。现在取一个 Hardy 型胚 ℓ_ω , 使得对每个 n都有 $\mathbb{R} < \ell_\omega < \ell_n$ 。（参见推论5之后的注 [5, 28] , 了解如何获得这样的 ℓ_ω。） 令

$$\gamma := \ell_\omega^{\dagger}, \quad \lambda := -\gamma^{\dagger}, \quad \omega_{(1)} := \omega(\lambda), \quad \omega_{(2)} := \sigma(\gamma) = \omega_{(1)} + \gamma^2,$$

它们属于 Hardy 域 $M := H\langle \ell_\omega \rangle$。根据 [ADH, 11.5, 11.7], $\omega_{(1)}$, $\omega_{(2)}$ 是 H中伪柯西序列（ω_n）的伪极限。对于 $j = 1$, 2, M 的 Hardy 子域 $H_{(j)} := H\langle \omega_{(j)} \rangle$ 是 H 的一个即时 λ-自由扩张，根据 [ADH, 13.6.3, 13.6.4], , 因此 $\omega\big(\Lambda(H_{(j)}\big) < \omega_{(j)} < \sigma\big(\Gamma(H_{(j)})\big)$, 根据 [ADH, 11.8.30]。此外

$$\overline{\omega}\big(H_{(j)}\big) = \overline{\omega}(M) \cap H_{(j)} \text{ for } j = 1, 2,$$

因此 (1) 成立，因为 $\omega_1 \in \omega(M) \subseteq \omega(M)$, 而 $\omega_2 \in \sigma\big(\Gamma(M)\big) \subseteq M \setminus \omega(M)$, 故 (2) 成立。

注 7.7. 上述结果给出无 λ的 H 与 $\omega \in H$, 满足 $\omega(H) < \omega < \sigma\big(\Gamma(H)\big)$, 即 $H_{(2)}$。我们用此说明，定理 5.1 最后一部分中“D(H) 是无 ω的”这一条件不能去掉。因此假设 D(H) 不是无 ω的，等价地，H 既不满足引言中定理 B 的 (a)，也不满足 (b)。

如同引理 7.3 的证明，安排使得 $H \supseteq \mathbb{R}$ 是刘维尔闭的。引理 7.2 给出无穷多个满足 $\sigma(\gamma) = \omega$ 的 H-Hardy 型 $\gamma > 0$ 。设 M 是包含此类 γ 的 H 的一个极大 Hardy 域扩张。则由 [5, 推论 7.16], 得 $\gamma \in \Gamma(M)$, 故 (2.4) 给出 M 中满足 $(2\phi)' = \overline{\gamma}$的 $\phi > \mathbb{R}$ 。因此由引理 5.3(ii)，对 $(1/\sqrt{\phi'}, \phi)$ 参数化 $\ker_{\mathcal{C}^{<\infty}}(4\partial^2 + \omega)$。但另一个 γ不能位于同一个 M 中，相应的芽 ϕ 亦然。

References

引文 [ADH] 指的是这本书

M. Aschenbrenner、L. van den Dries、J. van der Hoeven, *Asymptotic Differential Algebra and Model Theory of Transseries* 195, , 数学年刊研究丛书，卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2017年。

1. P. Appell, *Sur les transformations des équations différentielles linéaires*, 《巴黎科学院院报》91（1880），211–214。2. M. Aschenbrenner、L. van den Dries, *H-fields and their Liouville extensions*, 《数学杂志》242（2002），543–588。3. M. Aschenbrenner、L. van den Dries, *Analytic Hardy fields*, 《数学构图》，待发表。4. M. Aschenbrenner、L. van den Dries、J. van der Hoeven, *Relative differential closure in Hardyfields*, 《数学月刊》208（2025），541–568。5. M. Aschenbrenner、L. van den Dries、J. van der Hoeven, *Constructing ω-free Hardy fields*, 《数学分析杂志》，待发表。6. M. Aschenbrenner、L. van den Dries、J. van der Hoeven, *Normalizing Asymptotic Differential Equations* arXiv:2403.19732 2024 ，预印本，，。

7. M. Aschenbrenner、L. van den Dries、J. van der Hoeven, *The theory of maximal Hardy fields*, 预印本, arXiv:2408.05232, 2024。8. M. Aschenbrenner、L. van den Dries、J. van der Hoeven, *Hardian phase functions for the Bessel equation* ，准备中。

9. R. Beals、R. Wong, *Special Functions*, 剑桥高等数学研究丛书，第126卷，剑桥大学出版社，剑桥，2010。10. R. Bellman, *Stability Theory of Differential Equations*, McGraw-Hill Book Company, Inc.，纽约-多伦多-伦敦，1953。11. G. Birkhoff、G.-C. Rota, *Ordinary Differential Equations*, 第4版, John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1989。12. O. Bor ̊uvka, *Linear Differential Transformations of the Second Order*, English Universities Press Ltd.，伦敦，1971。13. M. Boshernitzan, *An extension of Hardy's class L of "orders of infinity"*, 《数学分析杂志》39（1981），235–255。14. M. Boshernitzan, *New "orders of infinity"*, 《数学分析杂志》41（1982），130–167。15. M. Boshernitzan, *Hardy fields and existence of transexponential functions*, 《方程数学》30（1986），258–280。16. M. Boshernitzan, *Second order differential equations over Hardy fields*, 《伦敦数学会杂志》35（1987），109–120。17. N. Bourbaki, *Fonctions d'une Variable Réelle*, 第五章, *Étude Locale des Fonctions*, Hermann, 巴黎，1951。18. J. Bremer, *On the numerical calculation of the roots of special functions satisfying second order ordinary differential equations*, 《SIAM科学计算杂志》39（2017），第1期，A55–A82。19. J. Bremer, *On the numerical solution of second order ordinary differential equations in the high-frequency regime*, 《应用与计算调和分析》44（2018），第2期，312–349。20. J. Bremer, *Phase function methods for second order linear ordinary differential equations with turning points* **65** 2023 137 169 ，《应用与计算调和分析》（），–。21. J. Bremer、V. Rokhlin, *Improved estimates for nonoscillatory phase functions*, 《离散与连续动力系统》36（2016），第8期，4101–4131。22. J. Bremer、V. Rokhlin, *On the nonoscillatory phase function for Legendre's differentialequation*, 《计算物理学杂志》350（2017），326–342。23. R. Caccioppoli, *Sopra un criterio di stabilità*, 《林琴科学院报告》（6）11（1930），251–254。24. L. Cesari, *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*, 第3版, 《数学及其边缘领域成果》，第16卷，Springer出版社，纽约-海德堡，1971。25. J. Dieudonn ́e, *Foundations of Modern Analysis*, 纯粹与应用数学，第10卷，Academic Press，纽约-伦敦，1960。26. P. Fatou, *Sur un critère de stabilité*, 《巴黎科学院院报》189（1929），967–969。27. A. Gehret, *A tale of two Liouville closures*, 《太平洋数学杂志》290（2017），第1期，41–76。28. A. Gil、J. Segura、N. Temme, *McMahon-type asymptotic expansions of the zeros of the Coulomb wave functions* **20** 2024 ，SIGMA《对称、可积性与几何：方法与应用》（），论文编号075。29. G. H. Hardy, *Properties of logarithmico-exponential functions*, 《伦敦数学会会刊》10（1912），54–90。30. P. Hartman, *On the linear logarithmico-exponential differential equation of the second order*, 《美国数学杂志》70（1948），764–779。

31. P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc., 纽约—伦敦—悉尼, 1964。32. Z. Heitman, J. Bremer, V. Rokhlin, *On the existence of nonoscillatory phase functions for second order ordinary differential equations in the high-frequency regime*, 《计算物理学杂志》290（2015），1–27。33. Z. Heitman, J. Bremer, V. Rokhlin, B. Vioreanu, *On the asymptotics of Bessel functions inthe Fresnel regime*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 39（2015），第2期，347–356。34. E. Kamke, *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen*, 第 I*rentialgleichungen* 9 1977 *Gewöhnliche Diffe* 版, B. G. Teubner，斯图加特，。35. J. Kovacic, *An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations*, 《符号计算杂志》2（1986），第1期，3–43。36. E. Kummer, *De generali quadam aequatione differentiali tertii ordinis*, 载于：利格尼茨福音派皇家市立中学进展报告，1834年；转载于《纯粹与应用数学杂志》100（1887），1–9。37. J. Liouville, *Mémoire sur l'integration d'une classe d'équations différentielles du second ordre en quantités finies explicites* **4** 1839 423 56 , 《纯粹与应用数学杂志》（），–。38. C. Miller, *Basics of o-minimality and Hardy fields* *Lecture Notes*，载于：*on O-minimal Structures and Real Analytic Geometry* 43 69, C. Miller 等（编），，第 – 页，《菲尔兹研究所通讯》第62卷，Springer，纽约，2012。39. O. Perron, *Über ein vermeintliches Stabilitätskriterium*, 《哥廷根数学学会通讯》（1930），28–29。40. M. van der Put，M. Singer， *Galois Theory of Linear Differential Equations*, 《数学科学基础》第328卷，Springer出版社，柏林，2003。41. M. Rosenlicht， *An analogue of l'Hospital's rule*, 《美国数学会会刊》37（1973），369–373。42. M. Rosenlicht， *Hardy fields*, 《数学分析与应用杂志》93（1983），297–311。43. M. Rosenlicht， *The rank of a Hardy field*, 《美国数学会汇刊》280（1983），659–671。44. R. Spigler，M. Vianello， *A numerical method for evaluating zeros of solutions of second-order linear differential equations*, 《数学计算》55（1990），第192期，591–612。45. R. Spigler，M. Vianello, *The "phase function" method to solve second-order asymptotically polynomial differential equations* **121** 2012 3, 565 586 , 《数值数学》（），第 – 期。46. C. Sturm， *Sur les équations différentielles linéaires du second ordre*, 《纯粹与应用数学杂志》1（1836），106–186。47. N. Temme， *Asymptotic Methods for Integrals*, 《分析丛书》第6卷，世界科学出版公司，哈肯萨克，新泽西州，2015。48. W. F. Trench, *Interpolating functions associated with second-order differential equations*, 《美国数学会会刊》78（1980），第2期，253–258。49. W. Walter， *Ordinary Differential Equations*, 《数学研究生教材》第281卷，Springer出版社，纽约，1998。50. A. Wiman, *Über die reellen Lösungen der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, 《数学、天文学与物理学文献》12（1917），第14期。51. A. Wintner， *On a statement of Fatou*, 《伦敦数学会杂志》11（1936），第4期，245–246。
Kurt Gödel Research Center for Mathematical Logic Universität Wien 1090 WienAustria*Email address*: matthias.aschenbrenner@univie.ac.at

Department of Mathematics, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana,IL 61801, U.S.A.*Email address*: vddries@illinois.edu

CNRS, LIX (UMR 7161), Campus de l' École Polytechnique, 91120 Palaiseau, France *Email address*: vdhoeven@lix.polytechnique.fr