arXiv:2603.02014v1 [math.NT] 2 Mar 2026

伽罗瓦表示关联的模 p 希尔伯特模形式的部分权重一模性

HANNEKE WIERSEMA

ABSTRACT. 设 p是一个奇素数。设 $\rho: G_F \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ 是全实域 F上的一个伽罗瓦表示。对于一个较小的部分权重一权（k, 0），我们证明，正如 Diamond 和 Sasaki 所猜想的那样，模性可利用 p-进霍奇理论来刻画。我们证明，若 ρ关于一个部分权一模 p 希尔伯特模形式是模的，那么它的每个局部表示都有一个具有指定霍奇–泰特权重的晶体提升。反过来，若对每个 $v|p$，限制 $\rho|_{G_{F_v}}$ 都有一个具有某些非正则权的晶体提升，我们证明 ρ 来自一个部分权重一希尔伯特模形式。我们的方法是将正则权的结果转化为非正则权的结果。我们在整体层面上进行这一转化，建立正则权的模性与非正则权的模性之间的联系，并反之亦然；同时也采用这一方法的局部 p-进霍奇理论对应版本，这部分内容源于作者近期的工作。

1. INTRODUCTION

设 $\rho: \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ 是一个模 p 伽罗瓦表示，其中 $F \neq \mathbb{Q}$ 是一个全实域。若 ρ 不可约、连续且全奇，则人们相信 ρ 是模的，即它等价于某个特征零希尔伯特模形式的伽罗瓦表示的约化。我们将在特征 p下考察模性；这里，若 ρ 等价于附属于某个模 p 希尔伯特模形式的模 p 伽罗瓦表示，就称 ρ 是模的。这两种观点有所不同，因为并非每个模 p 希尔伯特模形式都能提升为特征零形式。

当 $F = \mathbb{Q}$时，可以考虑这种情形。在这种情况下，Serre 通过考察与特征零模形式相关的模 p 伽罗瓦表示，预言了如上所述的伽罗瓦表示 ρ 的模性 [Ser87]。如今，Khare 和 Wintenberger 已证明了这一预言 [KW09a], [KW09b], ，其工作建立在包括 Edixhoven 在内的许多人的研究成果之上。与 Serre 不同，Edixhoven 通过几何模 p 模形式 [Edi92]研究模性。

在经典情形中，这两种观点对所有权为 $k \geq 2$的模形式都是等价的，因为这类形式可以从特征 p 提升到特征零。唯一的差别涉及对应于权重一模形式的伽罗瓦表示。来自（几何的）模p 权重一模形式的模 p 伽罗瓦表示，恰好是在p 处非分歧的那些表示（见 [Edi92]）。在希尔伯特模形式情形中，这一点变得更为复杂，而我们正是受Diamond与Sasaki近期工作 [DS22]的启发，聚焦于这一复杂性。全文中我们将假定 p 是一个奇素数，并且

Date: 2026年3月3日。

p 在 F 中非分歧（注意Diamond与Sasaki在分歧情形下的近期工作 [DS25] ）。

本文研究了预期对应于部分权一 mod p 希尔伯特模形式的伽罗瓦表示；这类形式不一定能提升到特征零。请注意，这类伽罗瓦表示在 p 上方的素点处也不一定是非分歧的。因此，如何刻画源自部分权一形式的伽罗瓦表示的模性，就不那么明确了。Diamond 和 Sasaki 对这个问题给出了一个猜想性的答案，指出只要权落在某个特定的最小权锥内，就可以运用 p-进霍奇理论来解决。更具体地说，伽罗瓦表示应当源自该锥内权为（k， l）的 mod p 希尔伯特模形式，当且仅当对每个 $v|p$，限制 $\rho|_{G_{F_v}}$ 都有一个霍奇–泰特权重为（k_τ， l_τ）的晶体提升$_{\tau\in\Sigma_v}$ [DS22，猜想 7.3.2]。此陈述涵盖了最小权锥内的部分权重一权重，它们是非正则权重的例子。

我们称权 (k,l) 是正则的，当且仅当对所有嵌入 τ 都有 $k_\tau \geq 2$：$\overline{F}\to\mathbb{Q}$；否则该权是非正则的。对于正则权，模性与$p$进 Hodge 理论之间的联系在 Buzzard、Diamond 和 Jarvis[BDJ10]的工作中显而易见。他们针对 $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F/p)$ 的模 p 表示定义了一种模性概念，其依据是 ρ 出现在某些定义在 F 上的志村曲线的上同调中。这种对模性的重新诠释通常称为代数模性。

对于固定的 ρ，Buzzard、Diamond 和 Jarvis 在这一背景下利用 p进 Hodge 理论提出了一个猜想性的权配方，其动机来自对晶体表示约化的研究。该猜想现已在一些技术性假设下得到证明，见 [GK14], [GLS14], 和 [New14]。Diamond 和 Sasaki 猜想，对于正则权，几何模性（即相对于一个（几何）模 p 希尔伯特模形式而言的模性）与代数模性等价[DS22, 猜想 7.5.2]。Diamond 和 Sasaki 已取得相关进展，他们证明了从代数模性到几何模性的方向 [DS25], ；Yang [Yan25],也有相关结果，我们将在第 4 节中作更详细的介绍。我们强调，非正则权下甚至没有定义代数模性这一概念。

下面简要介绍一下关于非正则权重的已知结果。若 ρ 对应于一个平行权一的模 p 希尔伯特模形式，那么根据 [DW20]（以及 [ERX17]）的工作，在一些温和的假设下，我们知道其伽罗瓦表示在所有 $v|p$处均为非分歧。此外，根据 De Maria [DM20], 近期的工作，如果我们有一个偶性权的模 p 希尔伯特模形式，且其权在某个素点 $v|p$上为平行权一，那么我们知道其伽罗瓦表示在该素点处确实是非分歧的。反过来，假设 $\rho:G_F\to\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$在 p上方的所有素点处均为非分歧，这意味着每个限制$\overline{\rho}|_{G_{F_v}}$ 都有一个平行权一的晶体提升；那么根据 Gee 和 Kassaei [GK13], 的工作，在一些假设下，我们知道存在一个平行权一的模 p希尔伯特模形式，其伽罗瓦表示与 ρ等价。

我们不考虑这些平行权一的情形，而是聚焦于部分权一。上述结果仅适用于平行权一，因此不易推广到部分权一。我们的主要结果表明，对于部分权重一权，确实可以通过是否存在晶体提升来刻画 ρ 的模性：

定理 1.1 (定理 4.2)。 设 F 是一个全实域，其中 p 非分歧，并假设 p 为奇数。假设 $\rho\colon G_F \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ 不可约且是模的。假设对于 ρ，*Buzzard–Diamond–Jarvis* 猜想成立，并且对于正则权重，代数模性与几何模性等价。设 $(k,0)$ 为满足定理 *4.2* 中条件的一个非正则权重。

那么，对于所有 $v \mid p$，ρ 是权为 $(k,0)$ 的几何模，当且仅当 $\rho|_{G_{F_v}}$ 有一个权为 $(k_\tau, 0)_{\tau\in\Sigma_v}$ 的晶体提升。

从几何模性到晶体可提升性的方向，可以视为一种局部—整体相容性陈述；这也是 Kansal、Levin 和 Savitt 即将开展的工作 [KLS]的主题。我们指出，他们的方法比本文所采用的方法更具几何性，并且适用于更大的权范围。至于相反方向，该结果使我们能够证明存在一个部分权重一希尔伯特模形式，其伽罗瓦表示等价于 ρ。在所列假设下，该定理由此证明了上文提到的 Diamond–Sasaki 猜想的一部分。这推广了 Diamond 和 Sasaki 在 F 为二次扩张且 p 为惰性时的工作（ [DS22，定理 11.4.1 和定理 11.4.3]）。关于我们结果中的假设，请回顾上文：Buzzard–Diamond–Jarvis 猜想在某些假设下已得到证明，而且代数模性与几何模性之间关系的研究近期取得了显著进展；我们将在第 4 节讨论这一点。

接下来讨论我们的证明方法。这一方法是将正则权重的结果转化为非正则权的结果。本文在整体层面上完成这一转化，将正则权重的模性与非正则权重的几何模性联系起来，反之亦然，从而推广了 Diamond 和 Sasaki 在惰性二次情形下的结果 [DS22, 引理 11.3.1]。这是本文的第一个定理（定理 3.6）。推广他们的结果，主要工作在于找出权重的显式公式。对于任意给定的非正则权，我们需要找到一组对应的正则权重，使得在满足某些技术条件时，这些正则权重的模性能够推出该非正则权的模性；我们在第 3 节中完成了这项工作。

证明使用了 [DS22] 中引入的方法，其中涉及部分哈斯不变量和部分 Theta 算子。这些权重组合启发了局部 p-进霍奇理论中的对应类比，该类比已在 [Wie25, 定理 1.2]中得到证明。局部版本意味着，可以用多个正则权重的晶体可提升性来描述某些非正则权的晶体可提升性。

定理 1.1 的证明本质上是一系列等价关系：对于每个素点 $v|p$，非正则权的晶体可提升性等价于正则权的晶体可提升性。对于我们的权，在每个素点之上存在这样的晶体提升，等价于 Gee、Liu 和 Savitt 的工作 [GLS15] 所证明的相同正则权的代数模性。根据我们的假设，这又等价于相同正则权的几何模性。最后，根据定理 3.6，这等价于非正则权的几何模性。正如我们将看到的，为了证明这些结果，我们需要对 ρ 以及我们的权施加一些假设；这些假设来自本文的定理 3.6，以及 [Wie25] 中这一结果的局部版本所出现的条件。

本文提纲。 我们首先介绍一些记号与术语。在下一节中，我们简要讨论mod p 希尔伯特模形式、权移位算子和几何模性。在第三节中，我们构造正则

将出现在我们的权转移结果中的权，并通过证明一个把非正则权的几何模性与正则权重的几何模性联系起来的定理来结束本节。在第四节亦即最后一节中，我们陈述并证明本文的主要定理。

记号。令 p 为一个奇有理素数。固定 $\mathbb{Q}_p$ 和 $\mathbb{Q}$ 分别为$\mathbb{Q}_p$ 和 $\mathbb{Q}$ 的代数闭包，$\overline{}$并固定从 $\mathbb{Q}$到 $\mathbb{Q}_p$ 和 $\mathbb{C}$的嵌入。令 F 为一个使得 $\overline{p}$非分歧的全实域。令 $\mathcal{O}_F$ 为 F 的整数环，并令 $\hat{}\mathcal{O}_{F,\ p} = \mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p$。令 $\mathcal{O}_F$ 表示 $\mathcal{O}_F$的逆有限完备化。令 Σ 为嵌入集合 $F \to \overline{\mathbb{Q}}$。

令 $L/\mathbb{Q}_p$ 为 $\mathbb{Q}_p$ 的一个足够大的有限扩张，且包含 Σ中每个嵌入的像。令 E 为剩余域。我们将 Σ 与从 F 到 L 的嵌入集合以及从 $\mathcal{O}_F/p$ 到 $\mathbb{F}_p$的嵌入集合等同。令 Fr 为 $\mathbb{F}_p$的绝对 Frobenius。对于 $v \mid p$，我们用 Σ_v 表示从 $\mathcal{O}_F/v$ 到 $\mathbb{F}_p$的嵌入集合。注意，Frobenius 在 Σ_v上有循环作用。对于任意 $\tau_0 \in \Sigma_v$，令$\tau_i = \tau_{i+1}^p$，使得 $\tau_i = \mathrm{Fr} \circ \tau_{i+1}$。我们常将 Σ 与$\prod_{v|p} \Sigma_v$等同。对于任意$\tau \in \Sigma$，令 e_τ 表示与 τ对应的 $\mathbb{Z}^\Sigma$ 的典范基元素。

令 K 为 $\mathbb{Q}_p$ 的任意非分歧扩张，其次数为 f，剩余域为 $\mathbb{F}$。记 Σ_K 为 K 到 $\mathbb{Q}_p$ 的嵌入。我们将 Σ_K 与 $\mathbb{F} \to \mathbb{F}_p$ 的嵌入集合等同。对于任意 $\tau_0 \in \Sigma_K$，令 $\tau_i = \tau_{i+1}^p$，使得 $\Sigma_K = \{\tau_i \mid i \in \{0, \dots, f-1\}\}$。我们将与 $\tau \in \Sigma_K$ 对应的基本特征记为 ω_τ。

p-进霍奇理论。 若 W 是 G_K 上取值于 $\mathbb{Q}_p$ 的德拉姆表示，且 κ 是一个嵌入 $K \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$，则 W 关于 κ 的霍奇–泰特权重多重集 $\mathrm{HT}_\kappa(W)$ 定义为包含整数 i，其重数为

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_p} (W \otimes_{\kappa,K} \hat{\overline{K}}(i))^{G_K},$$

其中 K 是 K 的完备化。我们希望强调，按照这一约定，p-进分圆特征 χ_{cyc} 的霍奇–泰特权为 -1（如 [DS22] 中所示）。

以下内容摘自 [DS22]。

定义 1.2. 我们称表示 $\rho : G_K \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ 具有权为 (k, l) 的晶体提升$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}^{\Sigma_K} \times \mathbb{Z}^{\Sigma_K}$，若存在连续表示$\tilde{\rho} : G_K \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$，使得 $\tilde{\rho} \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathbb{F}_L \cong \rho$，且 $\tilde{\rho} \otimes_{\mathcal{O}_L} L$ 是晶体的，其霍奇–泰特权重为 $\{k_\kappa + l_\kappa - 1, l_\kappa\}_\kappa$，其中 $\kappa \in \mathrm{Hom}(K, \mathbb{Q}_p)$。

2. Mod p Hilbert modular forms, weight shifting operators and geometric modularity

以下所有内容中的一个关键要素，是能够为模 p 希尔伯特模形式附加伽罗瓦表示。本节遵循 Diamond 和 Sasaki [DS22]，介绍模 p 希尔伯特模形式及其伽罗瓦表示的几何理论。我们先研究模 p 希尔伯特模形式并定义几何模性，再花些篇幅讨论特征形式，之后转而讨论权移位算子。最后，我们总结有关这两方面的一些重要结果，以供后文参考。为简洁起见，我们将提供相关参考文献。

2.1. 模 p 希尔伯特模形式及其伽罗瓦表示。在 Andreatta 和 Goren [AG05], 的工作基础上，Diamond 和 Sasaki 将模 p几何希尔伯特模形式定义为希尔伯特模簇上某些自守线丛的节。这类形式的权是元组 $(k,l) \in \mathbb{Z}^{\Sigma} \times \mathbb{Z}^{\Sigma}$。若这些权为奇偶权重，那么在特征零下，这些节就是经典希尔伯特模形式。Diamond 和 Sasaki 证明，在特征 p下，几何希尔伯特模形式也可以定义在非奇偶权重的情形。

对于任意权 $(k, l) \in \mathbb{Z}^{\Sigma}\times\mathbb{Z}^{\Sigma}$，我们将用 $M_{k,l}(U; E)$ 表示由所有权为 (k, l)、系数取自 E、层为 U 的模 p 希尔伯特模形式 f 所组成的空间（定义见 [DS22，第 3.2 节2]）。层 U 是 $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathcal{O}}_F)$ 的开紧子群，包含 $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,p})$；我们要求 U 足够小（见[DS22，注意 2.42]），且为 p-整洁的（见 [DS22，定义 3.23]）。这些条件确保能够为所有 (k, l) 定义相应的线丛。

我们引入满足这些条件的特定子群的记号。若 $\mathfrak{n}$ 是 $\mathcal{O}_F$ 的一个理想，我们将 $U_1(\mathfrak{n})$ 定义为 $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ 的如下开紧子群

$$U_1(\mathfrak{n}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathcal{O}}_F) \,|\, c, d-1 \in \mathfrak{n}\hat{\mathcal{O}}_F \right\}.$$

设 v 是 F 的一个素数，使得 $v \nmid p$。记 S_v 和 T_v 为作用于 $M_{k,l}(U; E)$ 上的海克算子，它们定义为双陪集算子（ [DS22，第 4 节3]）。我们还需要用于 $v \mid p$ 的海克算子 T_v（当 $l_\tau = 0$ 时），以及用于所有 $\tau \in \Sigma$ 的海克算子 $k_\tau \geq 2$；其构造见 [DS22，第 9 节7]。在空间 $M_{k,0}(U_1(\mathfrak{n}) E)$ 上，这些算子与 $v \nmid p$ 对应的 T_v 以及彼此之间均可交换；此外，它们也与 $v \nmid p\mathfrak{n}$ 对应的 S_v 可交换（假设所有 $k_\tau \geq 2$）。

现在我们可以讨论伽罗瓦表示了。Diamond 和 Sasaki 将伽罗瓦表示附加到任意权的模 pHilbert 特征形式上，从而推广了 Goldring 和 Koskivirta [GK19] 以及 Emerton、Reduzzi 和 Xiao [ERX17] 关于奇偶权重的结果。

接下来，令 Q 为一个有限素数集，包含所有 $v \mid p$ 以及所有使得 $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,v})$ $\not\subset U$ 的 v。假设 $f \in M_{k,l}(U; E)$ 是 T_v 的特征形式，且对所有 $v \notin Q$ 都有 S_v，那么我们将 ρ_f 记为按照 [DS22, 定理 6.1.1]附加到 f 上的伽罗瓦表示。

定义 2.1. 若一个不可约、连续且全奇的伽罗瓦表示$\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ 对某个如上所述的特征形式 $f \in M_{k,l}(\overline{U}; E)$，其对应的表示 ρ 等价于 ρ_f 的标量扩张，则称该表示是几何模，权为 (k,l)。

这意味着，如果存在某个非零元素 $f \in M_{k,l}(U; E)$，其中 $U \supset \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,p})$，且满足 $E \subset \mathbb{F}_p$，那么 ρ 就是权为 (k,l) 的几何模对象

$$T_v f = \mathrm{tr}(\rho(\mathrm{Fr}_v))f \quad \text{ and } \mathrm{Nm}_{F/\mathbb{Q}}(v)S_v f = \det(\rho(\mathrm{Fr}_v))f,$$

对除有限多个素数 v 以外的所有素数都成立。

2.1.1. 希尔伯特模特征形式的性质。 接下来，我们需要进一步了解 ρ 所导出的特征形式的性质。我们的目的是定义强稳定化特征形式，它们将在下一节主要结果的证明中发挥关键作用。为此，我们将定义希尔伯特模形式在某些特征下的扭曲。利用这些特征，可以在权为（k, l）的形式与权为（k, $l+l'$）的形式之间转换，其中任意 l'（特别是

也包括 $-l$）。下文内容的细节可参见 [DS22，第 10]节。本小节中，我们假设（k，l）是正则的。

扭曲特征形式。 设 $l' \in \mathbb{Z}^{\Sigma}$ 并假设 $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ 是 $\mathcal{O}_F$ 中的理想，使得 $\mathfrak{m} \mid \mathfrak{n}$且 $\mathfrak{n}$与 p互素。我们用 $V_{\mathfrak{m}} \subset \hat{\mathcal{O}}_F^{\times}$ 表示到 $(\mathcal{O}_F/\mathfrak{m})^{\times}$的自然投影的核。我们称一个特征

$$\xi : \{a \in (\mathbb{A}_F^{\infty})^{\times} \mid a_p \in \mathcal{O}_{F,p}^{\times}/V_{\mathfrak{m}}\} \to E^{\times},$$

是权为 $l' \in \mathbb{Z}^{\Sigma}$ 的特征，如果对所有 $\alpha \in F_{+}^{\times} \cap \mathcal{O}_{F,p}^{\times}$都有 $\xi(\alpha) = \alpha^{l'}$。

对任意 $f \in M_{k,l}(U_1(\mathfrak{n}); E)$ 以及任意权为 l'、导子为 $\mathfrak{m}$的特征 ξ，我们用 $f_{\xi} \in M_{k,l+l'}(U_1(\mathfrak{n}\mathfrak{m}^2); E)$ 表示在 [DS22 第 10.3] 节中定义的形式。当它非零且 f 是特征形式时，f_{ξ}亦然。在此情形下，我们得到 $\rho_{f_{\xi}} \cong \rho_{\xi'} \otimes \rho_f$，其中 ξ'：$\mathbb{A}_F^{\times}/F^{\times}F_{\infty,+}^{\times}V_{\mathfrak{m}p} \to E^{\times}$ 由下式定义：

$$\xi'(\alpha z a) = \xi(a)\overline{a}_p^{-l'},$$

其中 $\alpha \in F^{\times}, z \in F_{\infty,+}^{\times}, a \in (\mathbb{A}_F^{\infty})^{\times}$ 以及 $a_p \in \mathcal{O}_{F,p}^{\times}$（ [DS22，引理 10.3]）。这里$\rho_{\xi'}$：$G_F \to E^{\times}$ 是类域论中与 ξ' 对应的特征。

归一化特征形式。 若特征形式 $f \in M_{k,l}(U_1(\mathfrak{n}); E)$ 对所有 $v \nmid p$ 的海克算子 T_v 都是特征形式，且对所有 $v \nmid \mathfrak{n}p$ 都有 S_v，则称其为归一化的：对于权为 $-l$、导子与 p 互素，且取值于 E 的扩张 E' 中的所有特征 ξ，其扭曲 f_{ξ} 对所有 $v \mid p$ 都是 T_v 的特征形式。最后，q 在 q-展开中的系数应为 1（参见 DS22，定义 10.5.1]）。

若 f 是 $M_{k,l}(U_1(\mathfrak{n})\ E)$ 中的归一化特征形式，且 ξ 如上所述，则 f_{ξ} 是 $M_{k,l+l'}(U_1(\mathfrak{n}\mathfrak{m}^2); E)$ 中的归一化特征形式。

稳定化特征形式。 归一化特征形式 $f \in M_{k,\ l}(U_1(\mathfrak{n}); E)$ 若对所有 $v \mid \mathfrak{n}$均满足$T_v f = 0$，则称为稳定化的。稳定化特征形式是强稳定化的，当且仅当对于所有 $v \mid p$ 以及权为 $-l$ 的特征 ξ，均有$T_v f_{\xi} = 0$。

我们关于这些形式的第一个结果的证明中，关键引理是以下唯一性陈述：

引理 2.2（ [DS22，引理 10.6。5])。 至多存在一个强稳定化特征形式 $f \in M_{k,\ l}(U_1(\mathfrak{n}); E)$ 可产生 ρ。

2.2. 部分哈斯不变量与部分 Θ 算子。 接下来，我们在模 p 希尔伯特模形式空间上引入一些权移位算子。这些算子提供了提高希尔伯特模形式权的方法，使我们能够从非正则权转向正则权。

部分哈斯不变量。 对于任意 $\tau \in \Sigma$，我们用 Ha_{τ} 表示 [DS22，第 5 节1] 中的部分哈斯不变量。这些是权为 $k_{\mathrm{Ha}_{\tau}} := pe_{\mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau} - e_{\tau}$ 的模 p 希尔伯特模形式，因此这类形式的权并非严格正。乘以 Ha_{τ} 可得到一个新的模 p 希尔伯特模形式 $\mathrm{Ha}_{\tau}\ f$；事实上，我们得到一个单射

$$M_{k-k_{\mathrm{Ha}_{\tau}},l}(U; E) \to M_{k,l}(U; E),$$

对于所有满足 $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,\ v}) \subset U$ 的 $v \nmid p$，与 T_v 和 S_v 交换（对 U 采用通常的假设，但参见 [DS22] 的命题 5.1.1）。此外，我们有以下结论：

定理 2.3 ([DK17，定理 1。1].)**.** 乘以 Ha_τ 在 $pk_\tau < k_{Fr^{-1}\circ\tau}$ 时诱导出一个同构。

此外，Diamond 和 Kassaei 据此推导出，每个模 p 希尔伯特模形式都可由某个权属于下列锥中的形式乘以部分哈斯不变量得到:

$$\Xi_{\min} = \{k \in \mathbb{Z}^\Sigma \mid pk_\tau \geq k_{\mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau} \text{ for all } \tau \in \Sigma\},$$

称为最小权锥，或简称最小锥（ [DK17，推论 1.2]）。

部分 *Theta* 算子。对于任意 $\tau \in \Sigma$，我们用 Θ_τ 表示部分 Θ 算子。这些算子由哈斯不变量和 Kodaira-Spencer 同构定义（ [DS22，定义 8.2.1]）。设 $(k,\ l) \in \mathbb{Z}^\Sigma \times \mathbb{Z}^\Sigma$ 为任意权。则我们定义 $(\tilde{k},\ \tilde{l})$ 如下:

- 若 $\mathrm{Fr} \circ \tau = \tau$，则 $k_\tau = k_\tau + p + 1$；若 $\tau' \neq \tau$，则 $k_{\tau'} = k_{\tau'}$
- 若 $\mathrm{Fr} \circ \tau \neq \tau$，则 $k_\tau = k_\tau + 1$，$k_{\mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau} = k_{\mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau} + p$；若$\tau \notin \{\mathrm{Fr}^{-1} \circ \tau,\ \tau\}$，则 $k_{\tau'} = k_{\tau'}$
- $l_\tau = l_\tau - 1$，以及 $l_{\tau'} = l_{\tau'}$，如果 $\tau' \neq \tau$。

上述内容表示 Θ-算子作用所导致的权移，如下所示:

定理 2.4. *[DS22，定理 8.2。2]*若 $f \in M_{k,\ l}(U;\ E)$ 且 $\tau \in \Sigma$，则 $\Theta_\tau(f) \in M_{\tilde{k},\ \tilde{l}}(U;\ E)$。此外，$\Theta_\tau(f)$ 能被 Ha_τ 整除，当且仅当 f 能被 Ha_τ 整除，或 k_τ 能被 p 整除。

我们还将利用上述定理的第二部分证明哈斯不变量的整除性。

注 2.5. 若 f 是一个标准化（分别为稳定化、强稳定化）的特征形式，则对于任意 τ，$\mathrm{Ha}_\tau f$ 和 $\Theta_\tau(f)$ 也都成立（若 $\tau \neq \mathrm{Fr} \circ \tau$，则在 $\mathrm{Ha}_\tau f$ 的情形下假设 $k_\tau \geq 3$）。这是 [DS22，注 10.6。6]。

2.3. **几何模性**。最后，我们汇集一些关于几何模性的结果，这些结果将在下一节中用到；它们均出自 [DS22]。

定理 2.6。假设 $\rho:\ G_F \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ 不可约且几何模，权为 (k, l)。

(1) 那么 ρ 来自一个权为 (k, l)、层为 $U_1(\mathfrak{n})$ 的特征形式 f，其中 $\mathfrak{n}$ 与 p 互素。*(2)* 此外，可以取 f 使得对所有 $\tau \in \Sigma$，$\Theta_\tau(f) \neq 0$。*(3)* 若对所有 τ，$k_\tau \geq 2$，则还可以取 f 为层 $U_1(\mathfrak{n})$ 的标准化特征形式，其中 $\mathfrak{n}$ 与 p 互素。*(4)* 此外，对于任意 $\tau \in \Sigma$，ρ 的权为 $(k + k_{\mathrm{Ha}_\tau}, l)$，且也是几何模的。*(5)* 此外，对于任意 $\tau \in \Sigma$，ρ 也如第 *2.2* 节所述，权为 (k, l)，且是几何模的。

证明。第一点是 [DS22，第 10.2 引理。1], 第二点是 [DS22，第 10.4 引理。1]第三点是 [DS22，第 10.5 命题。2]第四点由 Ha_τ 与海克算子的交换性得出。这就是 [DS22，第 10.4 定理。2]，该定理由 (2) 以及 Θ_τ 与海克算子的交换性得出。□

3. Partial weight one modularity

在本节中，我们首先准备陈述一个将正则权的模性与非正则权的模性相联系，反之亦然的定理。利用前几节中引入的权移算子，我们将非正则权的希尔伯特模形式与具有正则权的希尔伯特模形式联系起来。随后，我们将利用上一节的结果来证明该定理。

3.1. 正则权重。 设 f 为一个部分权重一希尔伯特模形式。我们为它关联多个希尔伯特模形式，且它们的权均为正则权。通过乘以哈斯不变量，我们从 f 得到一个形式；通过乘以哈斯不变量并作用部分 Theta 算子，我们得到其他形式。其背后的思路源自定理 2.6：如果伽罗瓦表示ρ相对于部分权重一权形式是模的，那么相对于下文定义的形式，它也将是模的。

设 f 是任意一个非零的模 p 希尔伯特模形式，其不规则权重固定为（k, 0），且对于所有 $\tau \in \Sigma$都有 $k_\tau \geq 1$。我们首先定义 Σ的一些辅助子集。注意，这些子集取决于 k的选择，而不取决于 l 或所选的 f。

定义 3.1。 设 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^{\Sigma}$。令 M 为 Σ 的子集，由满足以下条件的 $\tau \in \Sigma$组成

$$k_{\mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau} = \cdots = k_{\mathrm{Fr}^{-(s-1)}\circ\tau} = 2 \text{ and } k_{\mathrm{Fr}^{-s}\circ\tau} = 1,$$

对于某个 $s \geq 1$ （若 $s = 1$，则第一个条件为空）。

我们还需要 Σ 的另一个子集，而它又是 M 的子集。

定义 3.2. 设 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^{\Sigma}$。令 $\tilde{M}$ 为满足以下条件之一的 $\tau \in \Sigma$ 的集合：

- $k_\tau \geq 3$ and $\tau \in M$,
- $k_\tau = 2, k_{\mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau} = 1, k_{\mathrm{Fr}^{-2}\circ\tau} = 1$ or 2 and if $k_{\mathrm{Fr}^{-2}\circ\tau} = 2$ then $\mathrm{Fr}^{-2} \circ \tau \in M$.

注 3.3. 注意，若不存在 $k_\tau = 2$ 和 $k_{\mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau} = 1$ 的情形，则 M 就是满足 $k_\tau \neq 1$, $k_{\mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau} = 1$ 的 $\tau \in \Sigma$ 的集合。否则，也可能存在满足以下条件的 $\tau \in M$：

$$(k_\tau, k_{\mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau}, k_{\mathrm{Fr}^{-2}\circ\tau}) = (2, 1, 1)$$

or

$$(k_\tau, k_{\mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau}, k_{\mathrm{Fr}^{-2}\circ\tau}) = (2, 1, 2) \text{ and } \mathrm{Fr}^{-2} \circ \tau \in M.$$

(k', l') 的定义. 我们将 k' 设为通过将 f 乘以某些部分哈斯不变量而得到的希尔伯特模形式的权。更准确地说，我们将 f' 定义为如下模形式：

$$f \cdot \prod_{\tau \in M} \mathrm{Ha}_\tau \,. \tag{3.1}$$

我们用 (k', l') 表示 f' 的权。我们有 $l' = l = (0, \ldots\ldots, 0)$。再次注意，数值 (k', l') 与 f 的选择无关。

˜(， l^μ) 的定义。接下来，我们希望为每个 $\mu \in M$ 获得如上所述的权。同样，我们通过作用于 f 来定义模形式。这次我们同时使用部分哈斯不变量和部分 Theta 算子。

设 $\mu \in \tilde{M}$，则我们将 f^μ 定义为由下式给出的形式

$$\Theta_\mu \left(f \cdot \prod_{\tau \in M \setminus \{\mu\}} \mathrm{Ha}_\tau \right). \tag{3.2}$$

我们用 (k^μ, l^μ) 表示 f^μ 的权。我们有 $l^\mu = -e_\mu$。在这种情况下，值 (k^μ, l^μ) 仅依赖于 k 以及 μ 的选取。

例 3.4. 设 F 为三次扩张，其中素数 p 是惰性的。固定 $\tau_0 \in \Sigma$并考虑权 $(k, 0) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^{\Sigma} \times \mathbb{Z}^{\Sigma}$，其中 $k = (k_{\tau_0}, k_{\tau_1}, k_{\tau_2}) = (1, 1, k_2)$ 且$k_2 \geq 2$。我们发现，若 $k_2 \geq 3$，则 $M = \{\tau_0, \tau_2\}$，否则 $M = \Sigma$。在两种情形下，我们都得到$_M = \{\tau_2\}$。

通过上述过程，我们得到权元组

$$(k', l') = \begin{cases} ((p, p+1, k_2 - 1), (0, 0, 0)), & \text{if } k_2 \geq 3, \\ ((p, p, p+1), (0, 0, 0)), & \text{if } k_2 = 2, \end{cases}$$

and

$$(k^\mu, l^\mu) = \begin{cases} ((p, p+1, k_2 + 1), (0, 0, -1)), & \text{if } k_2 \geq 3, \\ ((p, p, p+3), (0, 0, -1)), & \text{if } k_2 = 2. \end{cases}$$

让我们证明，以这种方式我们确实总是得到具有正则权重的形式。

引理 3.5。设 f 是一个具有非正则权重（k、0）的非零模 p 希尔伯特模形式，使得 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^{\Sigma}$。则上文定义的形式 f' 和 f^μ 对每个 $\mu \in M$ 都具有正则˜权。

˜证明。固定一个元素 $\mu \in M$。则有

$$k_\mu^\mu = \begin{cases} k_\mu + 1, & \text{if } k_\mu \neq 2, \\ k_\mu + 1 + p, & \text{if } k_\mu = 2, \end{cases} \text{ and } k'_\mu = \begin{cases} k_\mu - 1, & \text{if } k_\mu \neq 2, \\ k_\mu - 1 + p, & \text{if } k_\mu = 2, \end{cases}$$

现在注意到我们有

$$(k'_\tau, l'_\tau) = (k_\tau^\mu, l_\tau^\mu)$$

对于所有其余的嵌入，即对于所有满足 $\tau \neq \mu$ 的 $\tau \in \Sigma$。

因此接下来考虑满足 $\tau \neq \mu$ 的 $\tau \in \Sigma$。则有如下

$$k'_\tau = k_\tau^\mu = \begin{cases} k_\tau, & k_\tau \geq 2, \tau \notin M, \\ k_\tau - 1, & k_\tau \geq 3, \tau \in M, \\ k_\tau + p - 1, & k_\tau = 2, \tau \in M, \\ p, & k_\tau = 1, \tau \in M, \\ p + 1, & k_\tau = 1, \tau \notin M, \end{cases}$$

因此结论得证。 □

3.2. **定理的陈述与证明**。 现在我们可以陈述该定理，并利用上一节中的所有结果来证明主定理。

定理 3.6. 设 $\rho:\ G_F \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ 是一个不可约表示。设 $(k,0)\ \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^{\Sigma} \times \mathbb{Z}^{\Sigma}$ 是一个非正则权，且满足 $k \in \Xi_{\min}$。假设 ρ 在权为$(k,0)$时是几何模的，那么

(1) ρ 在权为$(k',0)$时是几何模的，~*(2)* 对每个 $\mu \in M,\ \rho$ 在权为 (k^{μ}, l^{μ})时是几何模的。

另一方面，若(1) 和(2) 成立，那么，若我们进一步假设，

(3) 对任意 $\mu \in \tilde{M}$ 和任意素点 $v \mid p,\ \rho|_{G_{F_v}}$ 都不具有如下形式：$\left(\begin{smallmatrix} \chi_1 & * \\ 0 & \chi_2 \end{smallmatrix}\right)$，其中 $\chi_1|_{I_{F_v}} = \prod_{\tau\in\Sigma_v} \omega_{\tau}^{-l_{\tau}^{\mu}}$ 且 $\chi_2|_{I_{F_v}} = \prod_{\tau\in\Sigma_v} \omega_{\tau}^{1-k_{\tau}^{\mu}-l_{\tau}^{\mu}}$；*(4)* 不存在素点 $v \mid p$，使得对所有 $\tau \in \Sigma_v$，都有 $k_{\tau} = 1$，~*(5)* 对所有 $\mu \in M,\ k_{\mu} \not\equiv 1$ 模 p，

逆命题成立，即 ρ 是权为 $(k,0)$ 的几何模的。

我们首先指出，该定理对 (k,l) 同样成立，其中正则权重仍由公式 (3.1) 与 (3.2) 得到。我们选取 $l=0$ 以便于叙述。

注 3.7. 我们证明中的条件 (3) 将确保证明中的某些希尔伯特模形式被强稳定化，从而可以应用引理 2.2。随后我们将据此得到所需哈斯不变量的整除性。

我们排除 (4) 中的权，因为它们需要类似于前述 [DW20] 与 [GK13], 以及 [DM20] 的方法。条件 (5) 对我们的证明至关重要——若无此条件，我们便无法作为定理 2.4 的推论得到哈斯不变量的整除性。

证明. 首先假设 ρ 是 $f \in M_{(k,0)}(U;\ E)$ 的几何模的。由定理 2.6(4)，通过如 (3.1) 中那样将 f 乘以部分哈斯不变量的一个乘积~，它也是权 $(k',0)$ 的几何模的。对每个嵌入 $\mu \in M$，我们通过乘以部分哈斯不变量的一个乘积，并如 (3.2) 中那样用部分 Theta 算子作用于所得结果，得到权为 (k^{μ}, l^{μ}) 的形式f^{μ}，此时由定理 2.6(4-5) 可知 ρ 关于这些权是几何模的。

对于逆命题，假设 (1)–(5) 均成立。由 (1) 和定理 2.6(3)，ρ来自某个归一化特征形式，该形式属于 $M_{k',\ 0}(U_1(\mathfrak{m});\ E)$，其对应的理想 $\mathfrak{m}$ 与 p 互素（且~足够大 E）。由 (2) 可知，对任意 $\mu \in M$，定理 2.6(3)再次推出，ρ 来自某个归一化特征形式，该形式属于 $M_{k^{\mu},\ l^{\mu}}(U_1(\mathfrak{m}_{\mu});\ E)$，其中某个理想 $\mathfrak{m}_{\mu}$与 p互素。

令 $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}^2 \prod_{\mu\in\tilde{M}} \mathfrak{m}_{\mu}^2$。则 $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{m}$ 满足 DS22 引理 10.6 中的条件。2], 因此，这意味着 ρ来自某个稳定化特征形式 $f' \in M_{k',\ 0}(U_1(\mathfrak{n});\ E)$。~类似地，对每个 $\mu \in M$，理想 $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{m}_{\mu}$ 满足 DS22 引理 10.6 中的条件。2]其中 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{\mu}$，因此这意味着 ρ 来自某个稳定化特征形式$f^{\mu} \in M_{k^{\mu},\ l^{\mu}}(U_1(\mathfrak{n});\ E)$。

固定 $\mu \in \tilde{M}$。根据 [DS22，第 9.4 号命题，1] 我们可以对 f'施以 Θ_{μ}，从而得到一个权为（$k' + pe_{\mu} + e_{\mathrm{Fr}^{-1}\circ\mu}$，$-e_{\mu}$）、层为 $\mathfrak{n}$ 的强稳定化特征形式 $\Theta_{\mu}(f')$。根据假设 (3) 和 [DS22，第 10.7 号推论，2], 我们发现 Ha $_{\mu} f^{\mu}$ 是一个权为（$k^{\mu} + pe_{\mu} - e_{\mathrm{Fr}^{-1}\circ\mu}$，$-e_{\mu}$）、层为 $\mathfrak{n}$ 的强稳定化特征形式。

现在根据引理 2.2，由 ρ 产生且具有这些具体参数的模形式是唯一的，因此

$$\Theta_\mu(f') = \mathrm{Ha}_\mu\, f^\mu.$$

根据定理 2.4 和假设（5），我们知道 f' 可被 Ha^μ 整除。

我们对每次所得到的进行这样的，其形式为 g，使得

$$f' = g \prod_{\mu\in\tilde{M}} \mathrm{Ha}_\mu\,. \tag{3.3}$$

形式 g 的层为 $\mathfrak{n}$，权为 $(k' - \sum_{\mu\in\tilde{M}} k_{\mathrm{Ha}_\mu}, 0)$。如果这等于 $(k,0)$，证明便完成。

如果不是，这意味着集合 $M' := M \setminus \tilde{M}$ 非空。我们通过证明 g 可被 $\prod_{\tau\in M'} \mathrm{Ha}_\tau$ 整除来完成证明。令 $k'' := k' - \sum_{\mu\in\tilde{M}} k_{\mathrm{Ha}_\mu}$，则 g 的权为 $(k'', 0)$。假设 $\tau \in M'$，那么 τ 属于以下三种情况之一：

(i) $k_\tau = 1, \tau \in M$,
(ii) $k_\tau = 2, k_{\mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau} = 1, k_{\mathrm{Fr}^{-2}\circ\tau} \neq 1$, and if $k_{\mathrm{Fr}^{-2}\circ\tau} = 2$ then $\mathrm{Fr}^{-2}\circ\tau \notin M$,
(iii) $k_\tau = 2, k_{\mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau} = 2$ with $\tau \in M$.

所有这些情况都可由反复应用定理 2.3 得出，这正是引理 3.8 的内容。在第一种情况下，对某个 $s \geq 1$，必定存在一个嵌入 $\tilde{\mathrm{Fr}}^s \circ \tau \in M$，使得 $k_{\mathrm{Fr}^{s-1}\circ\tau} = \cdots = k_\tau = 1$。我们得到

$$(k''_{\mathrm{Fr}^{s-1}\circ\tau}, \ldots, k''_\tau, k''_{\mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau}) = \begin{cases} (0,p,\ldots,p,p), & \text{if } k_{\mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau} = 1, \mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau \in M, \\ (0,p,\ldots,p,p+1), & \text{if } k_{\mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau} = 1, \mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau \notin M \\ (0,p,\ldots,p,p+1), & \text{if } k_{\mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau} = 2, \mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau \notin \tilde{M} \\ (0,p,\ldots,p,p+2), & \text{if } k_{\mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau} = 2, \mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau \in \tilde{M} \end{cases} \tag{3.4}$$

在最后三种情形中，p 可能不出现；这由引理 3.8 得出。

我们同时处理 (ii) 和 (iii)。在这两种情形下，都存在 $s \geq 1$ 和 $t \geq 0$，使得 $\mathrm{Fr}^{s+t}\circ\tau \in \tilde{M}$，并且

$$k_{\mathrm{Fr}^{s+t-1}\circ\tau} = \cdots = k_{\mathrm{Fr}^s\circ\tau} = 1, k_{\mathrm{Fr}^{s-1}\circ\tau} = \cdots = k_\tau = 2,$$

其中 $k_{\mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau} = 2$ 满足 $\mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau \in M$，或者 $k_{\mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau} = 1$ 满足 $\mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau \notin M$。先假设 $t = 0$，则可得

$$(k''_{\mathrm{Fr}^{s-1}\circ\tau}, \ldots, k''_\tau, k''_{\mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau}) = \begin{cases} (1,p+1,\ldots,p+1,p+2), & k_{\mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau} = 2, \mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau \in \tilde{M}, \\ (1,p+1,\ldots,p+1,p+1), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.5}$$

若在第一种情形中 $s = 1$，则 $p+1$ 不出现。若 $t \geq 1$，则可得

$$(k''_{\mathrm{Fr}^{s+t-1}\circ\tau}, \ldots, k''_{\mathrm{Fr}^s\circ\tau}, k''_{\mathrm{Fr}^{s-1}\circ\tau} \ldots, k''_\tau, k''_{\mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau}) = \begin{cases} (0,p,\ldots,p,p+1,\ldots,p+1,p+2), & k_{\mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau} = 2, \mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau \in \tilde{M}, \\ (0,p,\ldots,p,p+1,\ldots,p+1,p+1), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.6}$$

不存在 p，如果 $t = 1$。根据引理 3.8，对于任意 $s \geq 1$ 和 $t \geq 0$，我们得到 $\mathrm{Ha}_{\mathrm{Fr}^{s+t-1}\circ\tau} \cdots \mathrm{Ha}_\tau$ 的整除性。□

引理 3.8。 假设 f 的权为 (k,l)，且满足 $k\in\mathbb{Z}^{\Sigma}_{\geq 0}$。假设 k 满足：对于整数 $s\geq 1$、$t\geq 0$ 以及一个嵌入 $\tau\in\Sigma$，元组 $(k_{Fr^{s+t-1}\circ\tau},\dots,k_{\tau},k_{Fr^{-1}\circ\tau})$ 如 (3.4)、(3.5) 或 (3.6) 中所述。那么 f 可被 $\mathrm{Ha}_{Fr^{s+t-1}\circ\tau}\cdots\mathrm{Ha}_{\tau}$ 整除。

证明。 反复应用定理 2.3 即可得出这一结论：在每种情况下，显然 f 可被 $\mathrm{Ha}_{\mathrm{Fr}^{s+t-1}\circ\tau}$整除。注意到除以该项后，我们可以应用定理 2.3 得到可被 $\mathrm{Ha}_{\mathrm{Fr}^{s+t-2}\circ\tau}$ 整除；并且可以继续这样做，直至得到所需的 Ha_{τ}，结论便随之成立。□

我们通过一个例子来说明定理 3.6 证明的最后一部分。

例 3.9。 设 F 是一个八次扩张，其中 p 是惰性的。固定 $\tau_0\in\Sigma$，并假设 $(k,0)\in\mathbb{Z}^{\Sigma}_{\geq 1}\times\mathbb{Z}^{\Sigma}$ 满足

$$k=(k_{\tau_0},k_{\tau_1},k_{\tau_2},k_{\tau_3},k_{\tau_4},k_{\tau_5},k_{\tau_6},k_{\tau_7})=(1,1,k_2,2,2,1,2,2),$$

且 $k_2\geq 3$。我们求得 $M=\{\tau_2,\tau_4,\tau_7\}$ 和 $M\setminus M=\{\tau_0,\tau_3,\tau_5,\tau_6\}$。我们有

$$\begin{aligned}
k' &=(p,p+1,k_2-1,p+1,p+1,p,p+1,p+1),\\
k^{\mu_1} &=(p,p+1,k_2+1,p+1,p+1,p,p+1,p+1),\\
k^{\mu_2} &=(p,p+1,k_2-1,p+1,p+3,p,p+1,p+1),\\
k^{\mu_3} &=(p,p+1,k_2-1,p+1,p+1,p,p+1,p+3).
\end{aligned}$$

通过上述匹配过程，我们得到 $k''=(0,p+1,k_2,1,p+2,0,p+1,p+2)$。由定理 2.3 可得其可被 Ha_{τ_0},Ha_{τ_3} 和 Ha_{τ_5}整除。除以这些不变量后，我们得到一个权为 $(1,1,k_2,2,2,1,1,p+2)$ 的形式。我们再次应用定理 2.3，得到其可被 Ha_{τ_6} 整除，并得到一个权为 $(1,1,k_2,2,2,1,2,2)$ 的形式。

注 3.10. 注意，人们也可以希望简化定理 3.6，使得只需两个正则权重，尤其是因为这对局部伽罗瓦理论类比是可能的（如 [Wie25，定理 1.1] 另见 [KLS]）。我们现在解释为何这在此处行不通，或至少不能用同样的证明方法。在双权版本中，我们将保留正则权重（k',l'），但把所有形如（k^{μ},l^{μ}）的权替换为权（k^{θ},l^{θ}），即希尔伯特模形式的权

$$\Theta_{\tilde{M}}\left(f\cdot\prod_{\tau\in M\setminus\tilde{M}}\mathrm{Ha}_{\tau}\right),$$

其中 $\Theta_{\tilde{M}}$ 是对所有 $\mu\in M$ 的 Θ_{μ} 的复合（注意由于交换性，次序无关紧要，见 [DS22，推论 9.4.2]）。这是 [Wie25，定理 1.1]中权（k^{θ},l^{θ}）的整体版本。我们现在通过例子说明，为何不能用当前的证明策略将定理 3.6 简化为双权版本。

设 F是一个四次扩张，其中 p惰性。固定 $\tau_0\in\Sigma$。设 $(k,0)\in\mathbb{Z}^{\Sigma}_{\geq 1}\times\mathbb{Z}^{\Sigma}$ 满足 $k=(k_{\tau_0},k_{\tau_1},k_{\tau_2},k_{\tau_3})=(k_0,1,k_2,1)$，其中 $k_0,k_2\geq 3$。那么

$$\begin{aligned}
(k',l') &=((k_0-1,p+1,k_2-1,p+1),(0,0,0,0)),\ \text{and}\\
(k^{\theta},l^{\theta}) &=((k_0+1,p+1,k_2+1,p+1),(-1,0,-1,0)).
\end{aligned}$$

按照上述证明中的相同策略，我们将得到两个权为 f'和 f^{θ}的模形式，并得到一个等式

$$\Theta_{\tau_0}(\Theta_{\tau_2}(f'))=\mathrm{Ha}_{\tau_0}\mathrm{Ha}_{\tau_2}f^{\theta},$$

由定理 2.4 可知， $\Theta_{\tau_2}(f')$ 可被 Ha_{τ_0}整除。然而，我们还需要它可被 Ha_{τ_2}整除，而同一结果并未给出这一点。我们需要如下形式的结果：

$$\mathrm{Ha}_\tau \mid \Theta_{\tau'}(\Theta_\tau(f)) \iff \mathrm{Ha}_\tau \mid \Theta_\tau(f) \text{ or } p \mid k_\tau.$$

这使我们能够再次应用定理 2.4，随后便可如上所述完成证明。

4. 主要结果

本节陈述并证明我们的主要结果。我们证明，对于部分权重一权，权重为（k，l）的几何模性等价于 $\rho|_{G_{F_v}}$具有权重（k_τ，l_τ）$_{\tau\in\Sigma_v}$的晶体可提升性，其中对所有 $v|p$，这一结论在某些假设下成立。

如引言中所述，我们的证明将利用晶体可提升性与代数模性之间，以及代数模性与几何模性之间已知的和猜想的关系。具体而言，我们利用 [GLS15] 的结果，将某些小权重晶体提升的存在性与代数模性联系起来，反之亦然。回顾一下，对于正则权重，代数模性与几何模性被猜想是等价的；下面我们总结 Diamond–Sasaki 和 Yang 已知的结果。

定理 4.1。设 ρ： $G_F \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$ 是一个不可约、连续且全奇的伽罗瓦表示。设 （k、l） $\in \mathbb{Z}_{\geq 2}^{\Sigma} \times \mathbb{Z}^{\Sigma}$ 是一个满足 $k \in \Xi_{\min}$的权。若 ρ是权为 （k、l） 的代数模形式的，则 ρ 是权为（k、l）的几何模。若 ρ是权为 （k、l）的几何模，则在以下情形中， ρ是权为 （k、l） 的代数模形式的：

(1) F 是实二次的， $p \geq 5$ 在 F 中为惰性，并且若 $p = 5$ ，则 $\rho|_{G_{F(\zeta_p)}}$的射影像不同构于 $A_5 \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$ ；*(2)* $p \geq$ 最小$\{5, [F:\ \mathbb{Q}]\}$ 在 F 中完全分裂，并且若 $p = 5$ ，则 $\rho|_{G_{F(\zeta_p)}}$的射影像不同构于 $A_5 \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$ ；*(3)* 对所有 $\tau \in \Sigma$， $p(k_\tau - 2) > k_{Fr^{-1}\circ\tau} - 2$ 。

证明。从代数模形式的到几何模的方向见 [DS25，定理 6.5。5]。另一个方向归功于 Yang，参见 [Yan25]中的定理 4.14、定理 4.28 和定理 4.10。□

我们应当指出， [DS22] 已经证明，如果 ρ 在某个权下是几何模的，那么 ρ 就在某个权下是代数模形式的 [DS22，命题 7.5。4]。

如前所述，我们在证明中使用定理 3.6 的一个局部类比。该类比证明，对于任意局部表示，或者实际上对于整体表示$\rho|_{G_{F_v}}$ 在 $v|p$上的限制，小的不规则权重的晶体可提升性可以根据正则权重来预测，反之亦然 [Wie25，定理 1。2]。我们结合这一结果与定理 3.6 来证明主要结果。

定理 4.2. 设 F 是一个全实域，其中 p 非分歧。假设 ρ： $G_F \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$ 不可约且为模的。假设 $\rho|_{G_{F(\zeta_p)}}$ 不可约，并且若 $p = 5$，则 $\rho|_{G_{F(\zeta_p)}}$ 的射影像不同构于 $A_5 \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$。假设对于任意权 (k, l)，若 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}^{\Sigma} \cap \Xi_{\min}$，且 ρ 在此权下几何模，则它在此权下也代数模形式的。令 $(k,0) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^{\Sigma} \times \mathbb{Z}^{\Sigma}$ 为一个非正则权重，使得

(1) 对所有 $\tau \in \Sigma,\ 1 \le k_\tau \le p$；*(2)* 不存在满足 $k_\tau = 2$ 和 $k_{Fr^{-1}\circ\tau} = 1$ 的 $\tau \in \Sigma$；*(3)* 不存在这样的 $v \mid p$，使得对所有 $\tau \in \Sigma_v,\ k_\tau = 1$；*(4)* 若存在这样的 $v \mid p$，使得对所有 $\tau \in \Sigma_v,\ k_\tau \ge 2$，则 $\rho|_{G_{F_v}}$ 不具有如下形式：$\left(\begin{smallmatrix}\chi_1 & *\\ 0 & \chi_2\end{smallmatrix}\right)$，其中 χ_1 非分歧且 $\chi_2|_{I_{F_v}} = \prod_{\tau\in\Sigma_v}\omega_\tau^{1-k_\tau}$。

那么，对于所有 $v \mid p,\ \rho$ 是权 $(k,0)$ 的几何模，当且仅当 $\rho|_{G_{F_v}}$ 有一个权为 $(k_\tau, 0)_{\tau\in\Sigma_v}$ 的晶体提升。

在给出证明之前，我们说明条件 (1)–(4) 背后的原因。前两个条件源自 [Wie25]，中的 p-进霍奇理论结果；其中的方法来自 [GLS14]，而该方法要求权较小。条件 (2) 或许可以去掉，参见 [Wie25，注 4.13]。第三个条件既是其中的一个条件，也是本文定理 3.6 中的一个条件。最后一个条件确保我们可以应用定理 3.6，即确保在辅助引理 4.3 未涵盖的情形下，该定理中的条件 (3) 得以满足。注意，若存在如上文 (4) 所述的 $v|p$，则局部而言，权 $(k,0)$ 在 v 处是正则的，并且我们有 $(k_\tau,l_\tau)_{\tau\in\Sigma_v} = (k'_\tau,l'_\tau)_{\tau\in\Sigma_v} = (k^\mu_\tau,l^\mu_\tau)_{\tau\in\Sigma_v}$。最后我们指出，对于任何不满足条件 (4) 的素点 v，可以通过选择相关形式使其在 v 处为普通且具有指定特征值，从而探讨去掉该条件的可能性；但本文不再对此作进一步讨论。

证明。首先，假设对每个 $v \mid p,\ \rho|_{G_{F_v}}$ 都有一个权为 $(k_\tau,\ 0)_{\tau\in\Sigma_v}$的晶体提升。那么根据 [Wie25], 的定理 1.2，我们可为每个 $v \mid p$ 找到 $\rho|_{G_{F_v}}$~ 的晶体提升，其权为 $(k'_\tau,\ l'_\tau)_{\tau\in\Sigma_v}$，且对所有 $\mu \in M$，其权还为 $(k^\mu_\tau,\ l^\mu_\tau)_{\tau\in\Sigma_v}$。根据 [GLS15], 的定理 A，我们发现，对每个 $\mu \in M,\ \rho$ 都是权为 $(k',\ l')$~ 和 $(k^\mu,\ l^\mu)$ 的代数模形式，因为对所有 $\tau \in \Sigma$ 以及所有 $\mu \in M,\ k'_\tau \le p+1$ 且 $k^\mu_\tau \le p+1$。根据定理 4.1，ρ 也具有这些权的几何模性。利用引理 4.3 和 (4) 应用定理 3.6，继而可知 ρ 具有权为 $(k,\ 0)$ 的几何模性。

现在假设 ρ 是权为 $(k,\ 0)$ 的几何模表示，那么根据定理 3.6~，对每个 $\mu \in M$，它也是权为 $(k',\ l')$ 和 $(k^\mu,\ l^\mu)$ 的几何模表示。根据我们的假设，它也因此是这些权的代数模形式。再次根据 [GLS15], 的定理 A，我们发现对每个 $v \mid p,\ \rho|_{G_{F_v}}$ 都有权为 $(k'_\tau,\ l'_\tau)_{\tau\in\Sigma_v}$ 和对所有 $\mu \in M$ 权为 $(k^\mu_\tau,\ l^\mu_\tau)_{\tau\in\Sigma_v}$ 的晶体提升。实际上，根据 [Wie25], 的定理 1.2，我们发现对所有 $v \mid p,\ \rho|_{G_{F_v}}$ 都有权为 $(k_\tau,\ 0)_{\tau\in\Sigma_v}$ 的晶体提升。□

上述结果中从晶体可提升性到几何模性的方向，由于定理 4.1 中列出的进展，证明容易得多。这一点在 [DS22], 中通过定理 11.4.3 也显而易见。不过，根据定理 4.1，我们知道，对于所有满足 $p(k_\tau - 2) > k_{\mathrm{Fr}^{-1}\circ\tau} - 2$ 的权，从几何模性可以推出代数模性。在我们的证明中，只需要对每个 $\mu \in M$ 使用权为~ $(k',\ l')$ 和 $(k^\mu,\ l^\mu)$ 时的这一结果，并且会有许多 $(k,\ 0)$ 满足这一条件。

最后，我们给出辅助引理的证明，从而能够在定理 4.2 的证明中应用定理 3.6。

引理 4.3。设 $(k,0)$ 是定理 *4.2* 中所述的小的不规则权重。设 $v|p$。假设 $\rho|_{G_{F_v}}: G_{F_v} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ 有一个权为 $(\overline{k'_\tau}, l'_\tau)_{\tau\in\Sigma_v}$ 的晶体提升，并且

˜对第 3 节中所述的所有 $\mu \in M$，其权为$(k_\tau^\mu, l_\tau^\mu)_{\tau\in\Sigma_v}$。令 $\mu \in \Sigma$ 满足˜$\mu \in \Sigma_v \cap M$。那么 $\rho|_{G_{F_v}}$ 不是如下形式

$$\begin{pmatrix} \chi_1 & * \\ 0 & \chi_2 \end{pmatrix},$$

其中

$$\chi_1|_{I_{F_v}} = \prod_{\tau\in\Sigma_v} \omega_\tau^{-l_\tau^\mu} \text{ and } \chi_2|_{I_{F_v}} = \prod_{\tau\in\Sigma_v} \omega_\tau^{1-k_\tau^\mu-l_\tau^\mu}.$$

˜证明。固定一个元素 $\mu \in M$ 使得 $\mu \in \Sigma_v$，并假设 $\rho|_{G_{F_v}}$ 具有上述形式。由于我们的霍奇–泰特权重较小且互不相同，我们可以使用 [GLS14] 来描述局部表示在惯性群上的限制（注意相反的p-进霍奇理论约定）。我们将利用这一点导出矛盾。

对于每个 $\tau \in \Sigma_v$，我们记:

$$s_\tau^\mu = -l_\tau^\mu \text{ and } t_\tau^\mu = 1 - k_\tau^\mu - l_\tau^\mu,$$

从而

$$s_\tau^\mu = \begin{cases} 1, & \tau = \mu, \\ 0, & \tau \neq \mu, \end{cases} \text{ and } t_\tau^\mu = \begin{cases} 2 - k_\tau^\mu, & \tau = \mu, \\ 1 - k_\tau^\mu, & \tau \neq \mu. \end{cases}$$

对于一个子集 $J \subset \Sigma_v$，我们令

$$s'_\tau = \begin{cases} 1 - k'_\tau, & \tau \in J, \\ 0, & \tau \notin J, \end{cases} \text{ and } t'_\tau = \begin{cases} 0, & \tau \in J, \\ 1 - k'_\tau, & \tau \notin J, \end{cases}$$

（注意，对于所有 τ，都有 $l'_\tau = 0$）。

我们给这些嵌入标记，但现在选择 $\tau_0 = \mu$。记 s'_i 为 s'_{τ_i}，记 s_i^μ 为 $s_{\tau_i}^\mu$。根据 GLS14，推论 7.11], ，鉴于 $\rho|_{G_{F_v}}$ 同时具有权 $(k'_\tau, l'_\tau)_{\tau\in\Sigma_v}$ 和权 $(k_\tau^\mu, l_\tau^\mu)_{\tau\in\Sigma_v}$ 的提升，我们得到以下同余

$$\sum_{i=0}^{f-1} s'_i p^{f-i-1} \equiv \sum_{i=0}^{f-1} s_i^\mu p^{f-i-1} \mod p^f - 1.$$

对某个子集 $J \subseteq \Sigma_v$成立。由于 $s_i^\mu - s'_i \in [-p, p]$，我们可以使用 GLS14，引理 7.1]来检验该同余是否成立。由于 p 为奇数，且对某个 i必须有 $s_i^\mu - s'_i \neq p-1$，该引理表明，序列 $(s_i^\mu - s'_i)_i$必由形如 $(0, \ldots, 0)$ 的字符串以及 $\pm(-1, p-1, \ldots, p-1, p)$ 组成（其中 $p-1$ 可以没有任何项）。

我们发现

$$s_0^\mu - s'_0 = \begin{cases} 1 - (1 - k'_0) = 1 - (2 - k_0) = k_0 - 1, & 0 \in J, \\ 1 - 0 = 1, & 0 \notin J, \end{cases}$$

但我们有

$$s_1^\mu - s'_1 = \begin{cases} -(1 - k'_1) = 1 - (1 - p) = p, & 1 \in J \text{ and } 1 \notin M, \\ -(1 - k'_1) = 1 - (1 - (p-1)) = p - 1, & 1 \in J \text{ and } 1 \in M, \\ 0, & 1 \notin J. \end{cases}$$

我们不可能有 $0 \notin J$，否则就会得到 $(s_0^\mu - s'_0,\ s_1^\mu - s'_1) \in (1,\ p-1),\ (1,\ p)$ 或 $(1,\ 0)$，这就产生了矛盾。因此假设 $0 \in J$，从而 $s_0^\mu - s'_0 = k_0 - 1$。注意，根据我们的假设，$k_0 \neq 2$，所以这意味着 $k_0 = p$。这给出 $s_0^\mu - s'_0 = p - 1$，也就是说我们需要对某个 i 有 $s_i^\mu - s'_i = -1$。但只要.....，我们就有 $s_i^\mu = 0$。

$i \neq 0$。因此，对于某个 i，我们需要 $s_i' = 1$。然而，令 $J_0 = \{\tau \in \Sigma \,|\, k_\tau = 1\}$，我们有

$$s_i' = \begin{cases} 0, & i \notin J, \\ 1-p, & i \in J, i \in J_0, i \in M, \\ -p, & i \in J, i \in J_0, i \notin M, \\ 1-k_i, & i \in J, i \notin J_0, i \notin M, \\ 2-k_i, & i \in J, i \notin J_0, i \in M, \end{cases}$$

并且由于 $k_i \geq 2$ 对所有 $i \notin J_0$ 成立，我们得到 $s_i' \neq 1$ 对所有 i成立，因此我们再次得到矛盾。□

致谢。我要感谢Fred Diamond提出这一问题，以及他的支持和建议。我还要感谢Fred Diamond和James Newton对本文早期版本提出的意见。正如读者已经注意到的，本文建立在Diamond–Sasaki的工作之上，我很高兴感谢他们二人就他们的工作进行的讨论。

本研究的早期部分得到了Herchel Smith博士后奖学金基金以及工程与物理科学研究理事会的资助，资助经由伦敦大学学院的EPSRC几何与数论博士培训中心 [EP/L015234/1]（伦敦几何与数论学院），以及项目“模表示论、希尔伯特模形式与几何Breuil-M´ezard猜想” [EP/W001683/1]

.

References

[AG05] F. Andreatta 和 E. Z. Goren。希尔伯特模形式：模 p p *Mem.* 与 -进方面。 , ( ): *Amer. Math. Soc.* 173 819 +100 2005 vi , . [BDJ10] Kevin Buzzard、Fred Diamond 和 Frazer Jarvis。关于全实域上模 ℓ 伽罗瓦表示的 Serre 猜想。 *Duke Math. J.*, 155(1):105–161, 10 2010. [DK17] Fred Diamond 和 Payman L. Kassaei。特征 p 下希尔伯特模形式的最小权。 *Compos. Math.*, 153(9):1769–1778, 2017. [DM20] Mariagiulia De Maria。部分权一的模 p 希尔伯特模形式与伽罗瓦表示的非分歧性。 *Thesis de l'Universite de Lille and l'Universite du Luxembourg* 2020 , . [DS22] Fred Diamond 和 Shu Sasaki。特征 p下几何希尔伯特模形式的 Serre 权重猜想。 *J. Eur. Math. Soc*, 2022.[DS25] Fred Diamond 和 Shu Sasaki。关于与模 p 希尔伯特模形式相关的伽罗瓦表示。第 arXiv:2512.02570 页，2025.[DW20] Mladen Dimitrov 和 Gabor Wiese。权为 的模 p 1 19 2 281 306, 希尔伯特模形式 2020 所附伽罗瓦表示的非分歧性。 *J. Inst. Math. Jussieu*, ( ): – .[Edi92] Bas Edixhoven。Serre 模形式猜想中的权。*ematicae* 109 3 563 594, 1992 *Inventiones Math* , ( ): – . [ERX17] Matthew Emerton、Davide A. Reduzzi 和 Liang Xiao。希尔伯特模簇相干上同调中的伽罗瓦表示与挠。 *J. Reine Angew. Math.*, 726:93–127, 2017. [GK13] Toby Gee 和 Payman Kassaei。平行权一的伴随形式。 *Compos. Math.* , ( ): – 913, 2013. [GK14] Toby Gee 和 Mark Kisin。潜在巴尔索蒂-泰特表示的 Breuil-M´ezard 猜想。 *Forum Math. Pi*, 2:e1, 56, 2014.[GK19] Wushi Goldring 和 Jean-Stefan Koskivirta。层哈斯不变量、黑克代数与伽罗瓦表示。 *Invent. Math.*, 217(3):887–984, 2019. [GLS14] Toby Gee、Tong Liu 和 David Savitt。酉群的 Buzzard-Diamond-Jarvis猜想。 *J. Amer. Math. Soc.*, 27(2):389–435, 2014.

[GLS15] Toby Gee、Tong Liu 和 David Savitt。 GL_2的 Serre 猜想权重部分。*Forum Math. Pi*, 3:e2, 52, 2015.[KLS] Kalyani Kansal、Brandon Levin 和 David Savitt。迈向部分权重一希尔伯特模形式的模 p 局部-整体相容性。 *In preparation*.[KW09a] Chandrashekhar Khare 和 Jean-Pierre Wintenberger。Serre 模性猜想 I。 *Invent. Math.*, 178(3):485–504, 2009. [KW09b] Chandrashekhar Khare 和 Jean-Pierre Wintenberger。Serre 模性猜想 (ii)。 *Inventiones mathematicae*, 178(3):505, 2009. [New14] James Newton。Serre 权重与志村曲线。 *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 108 6 1471 1500, 2014 ( ): – . [Ser87] Jean-Pierre Serre。论 Gal(**QQ**) 的次数为 的模表示。 , ( ): – . [Wie25] Hanneke Wiersema。非正则权重的晶体可提升性。第 arXiv:250621637 页，2025 . .[Yan25] Siqi Yang。关于希尔伯特模形式的几何 Serre 权重猜想。第 arXiv:2501.13585 页，2025.*Email address*: hanneke.wiersema@maths.ox.ac.uk