arXiv:2603.02021v1 [math.CA] 2 Mar 2026

ℓ^1 对于$SU(2)$值非线性傅里叶变换的映射性质、光滑性与衰减

GEVORG MNATSAKANYAN

Abstract. 我们证明了 Baxter 定理关于 $SU(2)$值非线性傅里叶变换（NLFT）的一个类比结果。也就是说，我们证明，在非线性傅里叶变换数据满足某些自然条件的情况下，势属于 ℓ^1 当且仅当非线性傅里叶变换数据的线性傅里叶系数属于 ℓ^1。此外，受线性傅里叶变换的类似估计启发，我们还证明了非线性傅里叶变换的一些光滑性与衰减估计。

1. Introduction引言

对于一个有限支撑的复数序列 $F=(F_n)_{n\in\mathbb{Z}}$，定义乘积

$$G(z)=\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+|F_k|^2}}\begin{pmatrix}1 & F_kz^k\\ -\overline{F}_kz^{-k} & 1\end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

其中，z 位于单位圆 $\mathbb{T}$ 上，并且无穷乘积按如下方式排列：较低下标的项位于左侧。

对于定义在黎曼球面某个子集 X 上的函数 f，我们用 f^*表示它关于圆 $\mathbb{T}$的全纯反射。也就是说，f^* 定义在 $\overline{X^*=\{z^{-1}:z\in X\}}$上，且由 $f^*(z)=\overline{f(z^{-1})}$给出。对于 $z\in\mathbb{T}$,$^-$ $f^*(z)$就是 $f(z)$。

(1.1) 右侧的每个矩阵都属于群 $SU(2)$，因此 $G(z)$也属于该群，我们可以将其写成

$$G(z)=\begin{pmatrix}a(z) & b(z)\\ -b^*(z) & a(z)\end{pmatrix},$$

with

$$|a(z)|^2+|b(z)|^2=1\,. \tag{1.2}$$

我们用矩阵的第一行简写 $SU(2)$ 矩阵，因此，例如，我们将 G写作 $(a,\ b)$。我们称 $(a,\ b)$ 为 F的 $SU(2)$ 值非线性傅里叶变换（NLFT）。我们强调，这里讨论的是 $SU(2)$ 值 NLFT，以区别于更广为人知的 $SU(1,\ 1)$ 值同类变换 [TT12]。对于 $SU(1,\ 1)$ 情形，只需在 (1.1) 中将矩阵左下角元素的减号改为加号，并将标量因子中的加号改为减号。

通过对截断序列的非线性傅里叶变换取适当的极限，可以将非线性傅里叶变换的定义扩展到 ℓ^2 序列。

$SU(2)$ 值 NLFT 最早由 [Tsa05] 系统研究，该研究发展了 NLFT 的 ℓ^1 与 ℓ^2 理论，并处理了有理数据或孤子数据的情形。近来，$SU(2)$-NLFT 因其与量子

Date: 2026年3月。2020 *Mathematics Subject Classification.* 81P68,34L25,42C99, 47B35。

计算的联系而引起了我们的兴趣。结果发现，量子计算中的一种算法——量子信号处理（QSP） [LC17] ——经过变量替换后，与纯虚序列 F [AMT24] 对应的 $SU(2)$-NLFT 相一致。QSP 的主要问题之一，是给定函数 b 后确定系数 F。最近， [ALM+26] 针对满足 Szegő 条件的函数 b 解决了这一问题；这是已知 $SU(2)$-NLFT 定义良好的最大函数类。 [ALM+26] 的方法依赖于黎曼-希尔伯特分解技术和谱理论。我们进一步推进这一研究，得到了适用于单位圆正交多项式（OPUC）的 $SU(2)$ 版本的 Baxter 定理 [Bax61] ，以及 NLFT 的光滑性与衰减估计。这些结果表明， ℓ^2 理论、ℓ^1 理论和索об列夫估计可以在统一的黎曼–希尔伯特框架下加以理解。

为陈述我们的第一个主要定理，我们需要引入一些记号。对于 $f \in L^2(\mathbb{T})$，令$\widehat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z})$表示其线性傅里叶系数序列。若函数$w : \mathbb{Z} \to [1, \infty)$满足以下条件，则称其为强 Beurling 权：

i. $w(-n) = w(n)$ 对所有 n 均成立；
ii. $w(n+m) \le w(n)w(m)$ 对所有 $n,\ m$ 均成立。iii. $\lim_{n\to\infty} \log w(n)\, n = 0$ 。

强 Beurling 权的标准例子是 $w(n) = (1+|n|)^\alpha$，其中 $\alpha \ge 0$。对于强 Beurling 权 w，我们定义加权 ℓ^1 空间

$$\ell^1_w := \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \|a\|_w := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| w(n) < \infty\}.$$

采用标准的卷积运算， ℓ^1_w 是一个巴拿赫代数，通过盖尔范德变换可将其同构且等距地映射到

$$A_w := \{f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} : \widehat{f} \in \ell^1_w\},$$

其中，乘法运算现在是逐点乘法。至于代数范数，我们在此说明：

$$\|f\|_{A_w} := \|\widehat{f}\|_{\ell^1_w}.$$

当 $w \equiv 1$, A_1 时，就是通常的维纳代数。

Baxter 定理 [Bax61, Gol93] 通常以单位圆上的正交多项式或施尔函数的语言来表述。然而，用等价的 $SU(1,1)$-非线性傅里叶变换语言表述时，它指出 $F \in \ell^1_w$ 当且仅当 $b/a^* \in A_w$ 且 $\|b/a^*\|_{L^\infty(\mathbb{T})} < 1$。我们的 $SU(2)$ 变体如下。

定理 1. 设 (a, b) 是序列 $F = (F_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ 的非线性傅里叶变换像，且 w 是强 *Beurling* 权。若 $F \in \ell^1_w$，则 $a^*, b \in A_w$。反之，若 a^* 在 $\mathbb{D}$ 上是外函数且 $b/a^* \in A_w$，则 $F \in \ell^1_w$。

正向结论，即 $F \in \ell^1_w$ 蕴含 $b,\ a^* \in A_w$ 很容易证明，可由下文第 2 节讨论的非线性傅里叶变换的多重线性展开推出。反向结论则更难。对于单位圆上的正交多项式，类似方向的证明依赖正交结构，通过截断托普利茨算子将截断序列 $(F_j)_{j=0}^N$ 的非线性傅里叶变换与完整序列 F 的非线性傅里叶变换联系起来。随后，利用 A_w 的函数演算，得到托普利茨算子的一个 LU 分解，从而能够求出截断算子的逆。在 $SU(2)$ 中，如 [AMT25]所示，正交结构仅在有限范围 $\|b\|_{L^\infty(\mathbb{T})} < 1/\sqrt{2}$ 内成立。因此，我们采用黎曼-希尔伯特分解技术。我们

基本上沿用 [Sim05 第 5]章中 Baxter 定理的证明。不过，我们的方法无需使用函数演算，就能得到更简单、更直接的 LU 分解。另一个小小的优点是，我们允许序列 F的支撑集遍布整个 $\mathbb{Z}$，而不是局限于半直线 $\mathbb{Z}_+$；后者是研究单位圆上的正交多项式时自然会有的限制。还要指出，对于 $SU(1,1)$-非线性傅里叶变换，函数 a 总是外函数；而在 $SU(2)$ 中，a 可能含有内因子。正是这一点导致了孤子的存在，也使得 $SU(2)$ 理论在许多方面更为复杂。对 $SU(2)$ 的外函数 a 的研究源于量子信号处理理论。尽管如此，我们认为定理 1 至少在 a包含有限 Blaschke 因子的情况下应该成立。我们希望在今后的工作中研究这一情形。

至少在无权情形 $w \equiv 1$ 下，定理 1 可以进行何种量化，这将是一个有趣的问题。已知 [AMT24, DLNW24]，正向结论很容易量化。事实上，我们将在定理 1 的证明中看到：

$$\|b\|_{A_1} \leq \sinh(\|F\|_{\ell^1}). \tag{1.3}$$

反向结论方面，据我们所知，最好的结果是在量子信号处理（QSP）的背景下由 [DLNW24] 得到的。该结果指出，存在一个普适常数$r \approx 0.902$，使得若 $\|b\|_{A_1} < r$，则存在一个序列 F，满足 b 是其非线性傅里叶变换的第二个分量，并且

$$\|F\|_{\ell^1} \lesssim \|b\|_{A_1}. \tag{1.4}$$

事实上，这一结果是在量子信号处理（QSP）的情形下得到的，即当 F_n 都是纯虚数时。不过，我们认为该证明可以推广到一般情形。

为了量化定理 1，我们给出以下估计：

命题 2. 设(a,b) 是序列 $F \in \ell^2(\mathbb{Z})$ 的 $SU(2)$-非线性傅里叶变换，且满足a^* 在 $\mathbb{D}$ 中是外函数。设 w 为强 *Beurling* 权，并假设 $\|b\|_{A_w} < 1/\sqrt{2}-\varepsilon$，则

$$\|F\|_{\ell^1_w} \lesssim \frac{1}{\varepsilon}\|b/a\|_{A_w}. \tag{1.5}$$

我们注意到，$\|b\|_{A_1} < 1/\sqrt{2}$ 的范围比 [DLNW24]中得到的范围更严格。不过，我们的方法完全独立于多重线性展开。此外，在黎曼–希尔伯特问题和正交多项式的背景下研究 $SU(2)$-非线性傅里叶变换时，阈值$1/\sqrt{2}$ 自然出现，详见 [AMT24、AMT25]。

接下来，我们考察受线性理论启发的光滑性与衰减型结果。对于一个 m 次连续可微函数 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$，众所周知，通过分部积分很容易得到

$$|\widehat{f}(n)| \leq |n|^{-m}\|f^{(m)}\|_{L^1(\mathbb{T})}. \tag{1.6}$$

对于 $s>0$，我们将分数阶 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{T})$定义为满足下式的 $f\in L^2(\mathbb{T})$全体

$$\|f\|_{H^s} := \sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|^2)^s|\widehat{f}(n)|^2 < \infty.$$

接下来，我们的第二个定理如下。

定理 3. 设(a,b) 是序列 $F \in \ell^2(\mathbb{Z})$ 经非线性傅里叶变换得到的像，并设 a^*是 $\mathbb{D}$中的外函数。此外，设 $\frac{b}{a^*} \in H^s(\mathbb{T})$，其中 $s \geq 1$，且$(\frac{b}{a^*})' \in L^\infty(\mathbb{T})$。那么，

$$|F_n| \lesssim_s \frac{a^*(0)}{|n|^s}(1+\|b/a^*\|_{H^s(\mathbb{T})}) \max\left(1, \left\|\left(\frac{b}{a^*}\right)'\right\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^{\lceil s\rceil}\right), \tag{1.7}$$

其中，$\lceil s\rceil$ 是大于或等于 s的最小整数。

如果 $s=1$，我们可以得到更好的估计

$$|F_n| \leq \frac{2a^*(0)}{|n|}\|(b/a^*)'\|_{L^2(\mathbb{T})}. \tag{1.8}$$

关于单位圆上的正交多项式的类似结果由 [Gol93] 通过经典但繁复的技术，并依赖于多项式的正交性而得到。另一种方法是应用带权 $w(n) = (1+|n|)^\alpha$的 Baxter 定理。也就是说，如果 b/a^* 是m 次连续可微的，并满足定理 1 的假设（或者在 $SU(1,1)$情形下满足 Baxter 定理的假设），那么应用线性估计（1.6）和定理 1 将得到

$$\sum_n |F_n||n|^\beta < \infty$$

对任意 $\beta < m-1$均成立。对于单位圆上的正交多项式，这一点在 [Sim05，推论 5.2.3]中有所讨论。类似的衰减和尾部估计也在 [DLNW24] 中针对与（1.4）相同的受限范围得到了。

我们的方法同样依赖于黎曼-希尔伯特分解方法。仿照线性理论，我们用 Kato-Ponce 分数阶莱布尼茨法则 [KP88]替代分部积分。与 [Gol93, Theorm 3], 相比，我们的方法给出了更简洁、更短的证明，明确体现了对非线性傅里叶变换数据的依赖，并对阶数为 ≥ 1的 Sobolev 正则性给出了更好的估计。另一方面，当 $(b/a^*)^{(m)}$ 的连续模具有比 H¨older 型衰减更慢的衰减时， [Gol93, Theorem3] 的处理更为精细。

在第 2 节中，我们简要概述非线性傅里叶变换理论。在第 3 节中，我们证明定理 1 和命题 2；在第 4 节中，我们证明定理 3。

致谢。感谢 Michel Alexis 和 Kristina Oganesyan 与我进行了许多有益的讨论。特别是，定理 3 的初始版本是在与 Michel Alexis 的交谈中构思出来的。

本研究由亚美尼亚共和国高等教育与科学委员会资助（研究项目编号 24RL-1A028）。

2. Preliminaries on $SU(2)$-nonlinear Fourier transform

本节简要概述 $SU(2)$-非线性傅里叶变换理论中的相关事实。有关更深入的讨论，请参阅 [AMT24, Tsa05]。

非线性傅里叶变换的定义 (1.1) 可以递归地给出。我们可以定义一列取值于 $SU(2)$ 的函数 $G_k = (a_k,\ b_k) : \mathbb{T} \to SU(2)$，如下：

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{1+|F_k|^2}}\left(a_{k-1}(z) - \overline{F}_k z^{-k} b_{k-1}\right), \tag{2.1}$$

and

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{1+|F_k|^2}} \left(b_{k-1} + F_k z^k a_{k-1} \right) , \tag{2.2}$$

初始条件为

$$\lim_{k\to-\infty} a_k = 1 \text{ and } \lim_{k\to-\infty} b_k = 0 .$$

那么，对于有限支撑的 F, G_k 是一个平稳序列，因此我们令 $G = \lim_{k\to+\infty} G_k$。对于 ℓ^1 或 ℓ^2 中的序列，可以证明该极限在相应的空间中存在。

利用分配律，我们可以展开 (1.1) 中的乘积，

$$(a, b) = \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+|F_k|^2}} \left((1, 0) + (0, F_k z^k) \right)$$

并将函数 a 和 b 展开为关于 F 的多重线性算子之和，

$$= \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+|F_k|^2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} T_{2n}(F, F, \dots F)(z), \quad \sum_{n=0}^{\infty} T_{2n+1}(F, F, \dots F)(z) \right) , \tag{2.3}$$

其中，n-线性算子定义在序列 F^1，.....，F^n 上，定义如下：

$$T_n(F^1, \dots, F^n)(z) := \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_n} \left(\prod_{\substack{1\le k\le n \\ k \text{ is odd}}} F^k_{j_k} z^{j_k} \right) \left(\prod_{\substack{1\le k\le n \\ k \text{ is even}}} -\overline{F^k_{j_k}} z^{-j_k} \right) . \tag{2.4}$$

上述 n-线性算子在 A_1 范数下可估计为：

$$\|T_n(F^1, \dots, F^n)\|_{A_1} \le \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} \|F^k\|_{\ell^1} . \tag{2.5}$$

对偶数和奇数 n 的这些估计求和，当 $F^k \equiv F$ 对所有 k 都成立时，我们得到 a 和 b 关于 $w \equiv 1$ 的维纳代数界，如 (1.3) 所示。

显然，对于有限支撑的序列 F，a 和 b 都是 z 中的 Laurentz 多项式，因此可以在整个 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上定义。仔细观察可知，对于区间 $(n,\ m] \subset \mathbb{Z}$,

$$\operatorname{supp} \widehat{a^*} \subset [0, m-n) \text{ and } \operatorname{supp} \widehat{b} \subset (n, m] . \tag{2.6}$$

因此，a^* 总可以延拓为 $\mathbb{D}$ 中的有界全纯函数。与 $SU(1,\ 1)$-非线性傅里叶变换不同，在后者中 a^* 总是 $\mathbb{D}$ 中的外函数；对于 $SU(2)$-非线性傅里叶变换，a^* 可能有零点或奇异内因子。当 a^* 是内函数且 b 为 0 时，这类非线性傅里叶变换数据称为孤子。

对于 $F \in \ell^2(\mathbb{Z})$，可以看出

$$\prod_{k\in\mathbb{Z}} (1+|F_k|^2)^{-\frac{1}{2}} = a^*(0) . \tag{2.7}$$

当 a 是外函数时，我们可以通过 $\log\ |a|$ 在 $\mathbb{T}$ 上的平均值写出 $\log a^*(0) = \log\ |a^*(0)|$。回想 (1.2)，

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \log(1+|F_k|^2) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log(1-|b(e^{i\theta})|^2) d\theta . \tag{2.8}$$

我们称 (2.8) 为 Szegő-Plancherel 恒等式。

接下来，我们讨论黎曼-希尔伯特分解问题。

2.1. 黎曼-希尔伯特分解。 此后，设 (a, b) 是某个序列 $F \in \ell^2(\mathbb{Z})$ 的 $SU(2)$-非线性傅里叶变换，设 a^* 在 $\mathbb{D}^*$ 中是外函数，且 $\|b\|_{L^\infty(\mathbb{T})} < 1$。注意，定理 1 和定理 3 的假设，特别是 $\|b/a^*\|_{A_1} < \infty$ 以及满足 $s \geq 1$的 $b/a^* \in H^s$，意味着 b/a^* 是连续的，因此有上界。因此，由 (1.2)，$\|b\|_{L^\infty(\mathbb{T})} < 1$，且 $|a|$ 有严格正的下界。

对于 $I \subset \mathbb{Z}$，令 $P_I : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ 为投影算子，使得对任意$f \in L^2(\mathbb{T})$，都有 $\widehat{P_I f} = \widehat{f} \cdot \mathbf{1}_I$。令 $P_+ := P_{[0,\infty)}$，且 $P_- := \mathrm{Id} - P_+ = P_{(-\infty,0)}$。

回忆一下，(a_n, b_n) 是截断序列 $(F_j)_{j=-\infty}^{n}$ 的非线性傅里叶变换，而 $(a_{n,+}, b_{n,+})$ 是序列 $(F_j)_{j=n+1}^{\infty}$的非线性傅里叶变换。由 (1.1)，我们有

$$(a,\, b) = (a_n,\, b_n) \cdot (a_{n,+},\, b_{n,+})\,,$$

其中每一对都表示一个 $SU(2)$矩阵。由此，我们改写为

$$(a_{n,+},\, b_{n,+}) = (a_n,\, b_n)^{-1} \cdot (a,\, b) = (a_n^*,\, -b_n) \cdot (a,\, b)\,.$$

逐项写出即为

$$a_{n,+} = a_n^* a + b_n b^* \quad \text{and} \quad b_{n,+} = a_n^* b - b_n a^*\,.$$

我们将第一个方程除以 a，第二个方程除以 a^*。然后，将第一个方程投影到 $P_+ L^2(\mathbb{T})$ 上，并将第二个方程投影到 $P_{\leq n} L^2(\mathbb{T})$上，可写为

$$P_+\left(\frac{a_{n,+}}{a}\right) = P_+(a_n^*) + P_+\left(\frac{b^*}{a} b_n\right)\,, \tag{2.9}$$

and

$$P_{\leq n}\left(\frac{b_{n,+}}{a^*}\right) = -P_{\leq n}(b_n) + P_{\leq n}\left(\frac{b}{a^*} a_n^*\right)\,. \tag{2.10}$$

由于 $|a|$ 远离 0 有界，$1/a$ 也属于 $H^\infty(\mathbb{D}^*)$，因此$a_{n,+}/a \in H^\infty(\mathbb{D}^*)$。因此，

$$P_+\left(\frac{a_{n,+}}{a}\right) = \frac{a_{n,+}(\infty)}{a(\infty)} = \frac{1}{a_n(\infty)}\,,$$

其中，最后一个等式由 (2.7) 得出。由 (2.6)，$\mathrm{supp}\, b_{n,+} \subset [n+1, \infty)$ 且 $\mathrm{supp}\, b_n \subset (-\infty, n]$。因此，$\mathrm{supp}\, b_{n,+}/a^* \subset [n+1, \infty)$ 且 $P_{\leq n}(b_{n,+}/a^*) = 0$。于是，方程 (2.9) 和 (2.10) 变为

$$a_n^* = 1/a_n^*(0) - P_+(\frac{b^*}{a} b_n)\,, \tag{2.11}$$

$$b_n = P_{\leq n}(\frac{b}{a^*} a_n^*)\,. \tag{2.12}$$

令 Id_2 为 2×2 单位矩阵，并令

$$M = \begin{pmatrix} 0 & P_+ \frac{b^*}{a} P_{\leq n} \\ -P_{\leq n} \frac{b}{a^*} P_+ & 0 \end{pmatrix}\,,$$

用矩阵形式，我们可以将 (2.11) 和 (2.12) 写为

$$(\mathrm{Id}_2 + M) \begin{pmatrix} a_n^* \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a_n^*(0) \\ 0 \end{pmatrix}\,. \tag{2.13}$$

在 [ALM+26] 中，上述方程是在希尔伯特空间$L^2(\mathbb{T}) \times L^2(\mathbb{T})$中的 $\begin{pmatrix} a_n^* \\ b_n \end{pmatrix}$ 情形下考虑的。于是， M 是希尔伯特空间上的有界反对称算子，因此具有纯虚谱。因此，$\mathrm{Id}_2 + M$ 可逆，且

$$\|(\mathrm{Id}_2 + M)^{-1}\|_{2\to 2} \le 1\,. \tag{2.14}$$

因此，给定 (a, b)，我们可以找到 (a_n, b_n)，并证明存在一个序列 F，它是 (a, b) 的 NLFT 逆像。我们指出， [ALM+26] 讨论了不加限制 $\|b\|_{L^\infty(\mathbb{T})} < 1$ 的一般情形。在那里，必须利用无界算子的谱理论。

对于定理 1，我们需要考虑巴拿赫空间 $A_w \times A_w$ 中的方程 (2.13)。而对于定理 3，我们仍将采用希尔伯特空间估计 (2.14)。

3. 证明定理 1

3.1. 简单部分。回顾多重线性展开 (2.3)。我们可以将$2n+1$-线性项 (2.4) 改写为

$$T_{2n+1}(F, \dots, F) = (-1)^n \sum_{k\in\mathbb{Z}} z^k \sum_{\substack{j_1<\dots<j_{2n+1} \\ j_{2n+1}-j_{2n}+\dots+j_1=k}} F_{2n+1} \prod_{l=1}^{n} \overline{F}_{2l-1}\overline{F}_{2l}\,.$$

根据强 Beurling 权的条件 i 和 ii

$$\prod_{l=1}^{2n+1} w(j_l) = \prod_{l=1}^{2n+1} w((-1)^{l-1}j_l) \ge w\Big(\sum_{l=1}^{2n+1} (-1)^l j_{l-1}\Big) = w(k)\,.$$

因此，我们可以估计

$$\begin{aligned}\|T_{2n+1}(F, \dots, F)\|_{A_w} &\le \sum_{k\in\mathbb{Z}} w(k) \left| \sum_{\substack{j_1<\dots<j_{2n+1} \\ j_{2n+1}-j_{2n}+\dots+j_1=k}} F_{2n+1} \prod_{l=1}^{n} \overline{F}_{2l-1}\overline{F}_{2l} \right| \\ &\le \sum_{j_1<\dots<j_{2n+1}} \prod_{l=1}^{2n+1} |F_l| w(l) \le \frac{\|F\|_{\ell^1_w}^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.\end{aligned}$$

将上述估计与三角不等式结合起来，我们得到

$$\|b\|_{A_w} = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} T_{2n+1}(F, \dots, F) \right\|_{A_w} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|F\|_{\ell^1_w}^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh(\|F\|_{\ell^1_w})\,.$$

类似的多重线性估计给出 $a \in A_w$。这就证明了定理 1 中较容易的部分。

3.2. 一些记号与预备知识。 定义列向量的巴拿赫空间

$$Y_w := \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} : y_1, y_2 \in A_w \right\}$$

其范数为

$$\|y\|_{Y_w} = \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|_{Y_w} = \|y_1\|_{A_w} + \|y_2\|_{A_w}\,.$$

我们将研究巴拿赫空间 Y_w 上的算子。回顾第 2.1 小节中的投影算子 P_I，并在 Y_w 上定义投影：

$$\mathcal{P}_+ = \begin{pmatrix} P_+ & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_- = \begin{pmatrix} P_- & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} P_+ & 0 \\ 0 & P_{\le n} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_n = \mathcal{P}_+ - \mathcal{P}_n .$$

另外，令

$$C := \begin{pmatrix} 1 & \frac{b^*}{a} \\ -\frac{b}{a^*} & 1 \end{pmatrix} .$$

C 是 Y_w上的有界算子。采用这一记号，方程 (2.13) 可写为

$$\mathcal{P}_n C \mathcal{P}_n \begin{pmatrix} a_n^* \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a_n^*(0) \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{3.1}$$

我们定义 a_n 和 b_n的重整化，

$$\widetilde{A}_n = a_n^*(0) a_n , \quad \widetilde{B}_n = a_n^*(0) b_n , \quad A_n = a_n / a_n^*(0) , \quad B_n = b_n / a_n^*(0) .$$

于是 (3.1) 变为

$$\mathcal{P}_n C \mathcal{P}_n \begin{pmatrix} \widetilde{A}_n^* \\ \widetilde{B}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{3.2}$$

以下是交换巴拿赫代数 A_w 的维纳引理，这是一个标准结果。为完整起见，我们给出证明。

引理 1（关于 A_w 的维纳引理）。若 $f \in A_w$ 且 $0 \notin f(\mathbb{T})$，则 $1/f \in A_w$。

证明。我们来证明，对于 $f \in A_w$，f 在 A_w 中的谱由 $\sigma_{A_w}(f) = f(\mathbb{T})$ 给出。于是，该引理由 [Rud73 的定理 11.5] 得出。由于 A_w 是交换巴拿赫代数，

$$\sigma(f) = \{ h(f) : h \text{ bounded complex homomorphism of } A_w \} .$$

$\mathbb{T}$ 上的点求值是有界复同态，这一点是显然的，因此 $\sigma(f) \supset f(\mathbb{T})$。为看出反向包含，设 h 为任意有界复同态 h。对于 $g(\theta) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j e^{ij\theta} \in A_w$，我们有

$$h(g) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j h(e^{i\theta})^j .$$

因此，我们需要了解 $h(e^{i\theta})$ 的可能取值。对于 $n \ge 0$

$$|h(e^{i\theta})|^n = |h(e^{in\theta})| \le \|e^{in\theta}\|_w = w(n) .$$

因此，对所有 n，有 $|h(e^{i\theta})| \le e^{\frac{1}{n}\log w(n)}$。令 $n \to \infty$ 取极限，由强 Beurling 权的性质 iii，我们得出 $|h(e^{i\theta})| \le 1$。类似地估计 $|h(e^{-in\theta})|$，我们得到 $|h(e^{i\theta})| \ge 1$，证明完毕。□

下述简单引理依赖于引理 1。

引理 2. 设 w 为强 *Beurling* 权，a 在 $\mathbb{D}^*$ 与 $|a|^2 + |b|^2 = 1$上为外函数。则下列命题等价

(a) a，$b \in A_w$ 且 $\|b\|_{L^\infty(\mathbb{T})} < 1$，

(b) $b/a^* \in A_w$。

证明。 我们将对 A_w 使用维纳引理 1。假设 (a)，则有 $1/a^* \in A_w$，进而也有 $b \cdot \frac{1}{a^*} \in A_{w\circ}$ 接下来，假设 (b)，则有 $\frac{b^*}{a} \in A_w$，因此也有 $\frac{|b|^2}{|a|^2} \in A_w$，将函数加上 1 后得到 $\frac{1}{|a|^2} \in A_{w\circ}$ 由于 $1/|a|^2 \geq 1$，根据维纳引理 $|a|^2 \in A_{w\circ}$ 此外，$1/|a|^2$ 是连续的，因此有界。由此可得，$|a|^2$ 也是连续的，且不为 0。因此，我们可以通过函数演算定义 $\log |a|^2 \in A_w$ ，它将与逐点定义的对数一致，见 Rud73，定理 10。30]。$\log\ |a|^2 = 2\log\ |a|$ 也属于 $A_{w\circ}$ 接着，由于希尔伯特变换将 A_w 映射到其自身，因此 $H(\log\ |a|)\ = \arg\ a \in A_{w\circ}$ 于是，$\log\ a\ = \log\ |a| + i\arg\ a \in A_w$ 和 $a = e^{\log a} \in A_{w\circ}$ 那么， $b = \frac{b}{a^*} \cdot a^* \in A_{w\circ}$ □

3.3. 难点所在。我们的主要任务是证明，当 n 足够大时，a_n, b_n 属于 A_w ，并且当 $n \to +\infty$ 时，$a_n \to a$ 和 $b_n \to b$ 属于 A_w 。这正是下面引理 5 的内容。为此，我们需要求算子 $\mathcal{P}_n C \mathcal{P}_n$ 的逆，这正是引理 4 的内容；而求逆可通过对 C 的 LU 分解进行操作来实现。因此，我们先从 LU 分解开始。

设 K 是一个巴拿赫空间，令 Id 为 K 上的恒等算子，且 $Q : K \to K$ 是一个投影。若有界线性算子 $T\colon\ K \to K$ 满足 $QT(\mathrm{Id}\ -Q)\ = 0$，则称其关于 Q 为上三角；若满足 $(\mathrm{Id}\ -Q)\ TQ = 0$，则称其为下三角。

定义

$$L := \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{b^*}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U := \begin{pmatrix} \frac{1}{a^*} & 0 \\ -\frac{b}{a^*} & 1 \end{pmatrix},$$

and

$$\widetilde{L} := \begin{pmatrix} 1 & \frac{b^*}{a} \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \qquad \widetilde{U} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{b}{a^*} & \frac{1}{a^*} \end{pmatrix},$$

引理 3. 我们有

$$C = LU = \widetilde{U}\widetilde{L}, \tag{3.3}$$

并且 $L, L^{-1}, \widetilde{L}, \widetilde{L}^{-1}$ 是下三角的， $U, U^{-1}, \widetilde{U}, \widetilde{U}^{-1}$ 关于 Y_w 上的投影 $\mathcal{P}_+$ 是上三角的。此外，我们有

$$\mathcal{R}_n \widetilde{L} \mathcal{P}_n = \mathcal{R}_n \widetilde{L}^{-1} \mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n \widetilde{U} \mathcal{R}_n = \mathcal{P}_n \widetilde{U}^{-1} \mathcal{R}_n = 0\,. \tag{3.4}$$

证明。 方程 (3.3) 直接可得，只需用到 $|a|^2 + |b|^2 = 1$。下面证明第二部分。考虑

$$\mathcal{P}_+ L \mathcal{P}_- = \mathcal{P}_+ \begin{pmatrix} \frac{1}{a} P_- & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_+ \frac{1}{a} P_- & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于 $\frac{1}{a}$ 在傅里叶侧的支集为 $(-\infty, 0]$，因此我们有 $P_+ \frac{1}{a} P_- = 0$。其余七个算子的计算类似。等式 (3.4) 也可直接得到。我们来验证其中一个。

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n \widetilde{L} \mathcal{P}_n &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_{>n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b^*}{a} \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_+ & 0 \\ 0 & P_{\leq n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_{>n} \frac{1}{a} P_{\leq n} \end{pmatrix} = 0\,. \end{aligned}$$

□

引理 4. 设 n 满足 $\| \frac{P_{>n}(b)}{a^*} \|_{A_w} < \frac{1}{2}$，则算子 $\mathcal{P}_n C \mathcal{P}_n$ 在 $\mathcal{P}_n Y_w$ 上可逆，且

$$\|(\mathcal{P}_n C \mathcal{P}_n)^{-1}\|_{\mathcal{P}_n Y_w \to \mathcal{P}_n Y_w} \leq (\|a\|_{A_w} + 2\|1/a\|_{A_w})(\|a\|_{A_w} + \|b\|_{A_w})^2\,.$$

注意，$\| \frac{P_{>n}(b)}{a^*} \|_{A_w} \to 0$ 当 $n \to +\infty$ 时成立，因此当 n足够大时，引理的假设成立。

证明。任取

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_w \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_n Y_w \,,$$

满足 $y_1 \in P_+ A_w$ 和 $y_2 \in P_{\leq n} A_w$。我们需要证明

(a) there exists $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_n Y_w$ such that $\mathcal{P}_n C \mathcal{P}_n x = y$,

(b) $\|x\|_{Y_w} \lesssim \|y\|_{Y_w}$。

假设这样的 x 存在，并推导出一个更易求解的方程组。令 $w = \begin{pmatrix} 0 \\ w_2 \end{pmatrix} = (\mathcal{P}_+ - \mathcal{P}_n)Cx$ 和 $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{P}_- Cx$。我们有 $w_2 \in P_{>n} A_w$ 和 $u_1 \in P_- A_w$，并且

$$Cx = y + w + u \,. \tag{3.5}$$

于是，

$$Ux = L^{-1} y + L^{-1} w + L^{-1} u \,. \tag{3.6}$$

由引理 3，$\mathcal{P}_- Ux = \mathcal{P}_- U \mathcal{P}_+ x = 0$ 和 $\mathcal{P}_+ L^{-1} u = \mathcal{P}_+ L^{-1} \mathcal{P}_- u = 0$，因此将上式投影到 $\mathcal{P}_-$，得到

$$\mathcal{P}_- L^{-1} w + L^{-1} u = -\mathcal{P}_- L^{-1} y \,.$$

将上式按坐标展开，得到

$$-P_-(b^* w_2) + a u_1 = -P_-(a y_1 - b^* y_2) \,.$$

由于 $w_2 \in P_{>n} A_w$，$P_-(b^* w_2) = P_-\big(P_{<-n}(b^*)\, w_2\big)$，我们改写为

$$-P_-(P_{<-n}(b^*) w_2) + a u_1 = -P_-(a y_1 - b^* y_2) \,. \tag{3.7}$$

另一方面，由（3.5）可写为

$$\widetilde{L} x = \widetilde{U}^{-1} y + \widetilde{U}^{-1} w + \widetilde{U}^{-1} u \,.$$

现在投影到 $\mathcal{R}_n$，得到

$$\widetilde{U}^{-1} w + \mathcal{R}_n \widetilde{U}^{-1} u = -\mathcal{R}_n \widetilde{U}^{-1} y \,,$$

因为 $\mathcal{R}_n \widetilde{L} x = \mathcal{R}_n \widetilde{L} \mathcal{P}_n x = 0$和 $\mathcal{R}_n \widetilde{U}^{-1} w = \widetilde{U}^{-1} w$。同样，按坐标展开可得

$$a^* w_2 + P_{>n}(b u_1) = -P_{>n}(b y_1 + a^* y_2) \,.$$

由于 $u_1 \in P_- A_w$, $P_{>n}(b u_1) = P_{>n}\big(P_{>n}(b) u_1\big)$，因此

$$a^* w_2 + P_{>n}(P_{>n}(b) u_1) = -P_{>n}(b y_1 + a^* y_2) \,. \tag{3.8}$$

我们希望将方程 (3.7) 和 (3.8) 写成矩阵形式。令

$$T_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^* \end{pmatrix} \text{ and } T_2 = \begin{pmatrix} 0 & -P_- P_{<-n}(b^*) \\ P_{>n} P_{>n}(b) & \end{pmatrix} ,$$

那么 T_1 和 T_2 都是作用在 $P_- A_w \oplus P_{>n} A_w$ 上的算子，并且

$$(T_1 + T_2) \begin{pmatrix} u_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_-(a y_1 - b^* y_2) \\ -P_{>n}(b y_1 + a^* y_2) \end{pmatrix} . \tag{3.9}$$

此外，根据引理的假设，我们有，

$$\|T_1^{-1} T_2\|_{P_- A_w \oplus P_{>n} A_w \to P_- A_w \oplus P_{>n} A_w} < \frac{1}{2} \,.$$

因此， T_1+T_2 在 $P_-A_w\oplus P_{>n}A_w$ 上可逆，且

$$\|(T_1+T_2)^{-1}\|_{P_-A_w\oplus P_{>n}A_w\to P_-A_w\oplus P_{>n}A_w}\le\frac{\|T_1^{-1}\|}{1-\|T_1^{-1}T_2\|}\le 2\|1/a\|_{A_w}\,.$$

因此我们可以估计

$$\begin{aligned}\|u_1\|_{A_w}+\|w_2\|_{A_w}&\le 2\|1/a\|_{A_w}\left\|\begin{pmatrix}-P_-(ay_1-b^*y_2)\\-P_{>n}(by_1+a^*y_2)\end{pmatrix}\right\|_{Y_w}\\&\le 2\|1/a\|_{A_w}\big(\|a\|_{A_w}+\|b\|_{A_w}\big)\|y\|_{Y_w}\,.\end{aligned}$$

最后一个不等式立即推出结论 (b)。由 (3.5)，我们估计

$$\begin{aligned}\|x\|_{Y_w}&=\|C^{-1}y\|_{Y_w}+\|C^{-1}w\|_{Y_w}+\|C^{-1}u\|_{Y_w}\\&\le(\||a|^2\|_{A_w}+\|ab\|_{A_w})\big(1+2\|1/a\|_{A_w}(\|a\|_{A_w}+\|b\|_{A_w})\big)\|y\|_{Y_w}\,.\end{aligned}\tag{3.10}$$

要证明结论 (a)，只需说明：若我们从 y 出发，并按 (3.9) 定义 u_1 andw_2 ，则

$$x:=C^{-1}(y+w+u)$$

属于 $\mathcal{P}_nY_w$。我们将上面关于第一组坐标的方程写为

$$\begin{aligned}x_1&=|a|^2y_1-a^*b^*y_2-a^*b^*w_2+|a|^2u_1\\&=a^*\Big(ay_1-b^*y_2-b^*w_2+au_1\Big)\,.\end{aligned}$$

由 (3.7)，上面括号中的表达式属于 P_+A_w，因此 $x_1\in P_+A_w$。对于第二组坐标，我们有

$$\begin{aligned}x_2&=aby_1+|a|^2y_2+|a|^2w_2+abu_1\\&=a\Big(by_1+a^*y_2+a^*w_2+bu_1\Big)\,.\end{aligned}$$

根据（3.8），上一个括号中的表达式属于 $P_{\le n}A_w$，因此 x_2也是如此。由于 $x_1\in P_+A_w$、 $x_2\in P_{\le n}A_w$，我们得到 $x\in\mathcal{P}_nY_w$ ，正如所需。□

由引理 4 很容易推出我们的主要引理。

引理 5。 存在 $n_0=n_0$（a、b），使得对于 $n>n_0$ a_n、$b_n\in A_w$和 $a_n\to a$，以及 $b_n\to b$ 属于 A_w 时，有 $n\to+\infty$。

证明。 我们选择 n_0，使得 $\|\overset{P_{>n}}{\underline{\quad}}\overset{(b)}{\underline{\quad}}\overset{a^*}{\underline{\quad}}\|_{A_w}<\frac{1}{2}$。于是，根据引理 4，对于 $n>n_0$，我们有满足（3.2）的解 $\begin{pmatrix}\widetilde{A}_n^*\\\widetilde{B}_n\end{pmatrix}\in Y_w$ 。为证明收敛性，记

$$\begin{aligned}\left\|\begin{pmatrix}\widetilde{A}_n^*\\\widetilde{B}_n\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\widetilde{A}^*\\\widetilde{B}\end{pmatrix}\right\|_{Y_w}&=\left\|\big((\mathcal{P}_nC\mathcal{P}_n)^{-1}-(\mathcal{P}_+C\mathcal{P}_+)^{-1}\big)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\|_{Y_w}\\&=\left\|(\mathcal{P}_nC\mathcal{P}_n)^{-1}(\mathcal{P}_+C\mathcal{P}_+-\mathcal{P}_nC\mathcal{P}_n)(\mathcal{P}_+C\mathcal{P}_+)^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\|_{Y_w}\\&\le\|(\mathcal{P}_nC\mathcal{P}_n)^{-1}\|_{Y_w\to Y_w}\left\|(\mathcal{P}_+C\mathcal{P}_+-\mathcal{P}_nC\mathcal{P}_n)(\mathcal{P}_+C\mathcal{P}_+)^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\|_{Y_w}\,.\end{aligned}$$

后者在 $n\to\infty$ 时趋于 0；对于任意 $v\in Y_w$，$\lim_{n\to\infty}(\mathcal{P}_+-\mathcal{P}_n)v=0$ inY_w and $\|\mathcal{P}_n\|_{Y_w\to Y_w}\le 1$ 也成立。

最后，请注意

$$a_n^*(0) = \sqrt{\widetilde{A}_n^*(0)} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{A}_n^*(e^{i\theta})d\theta\right)^{\frac{1}{2}} \to \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{A}^*(e^{i\theta})d\theta\right)^{\frac{1}{2}} = a^*(0)\,,$$

如 $n \to \infty$，因此得出引理的结论。 □

为了从引理 5 得出定理 1 的结论，我们使用所谓的 Baxter 技巧。将递推关系 (2.2) 应用于重整化 A_n，B_n 后，得到

$$B_{n+1} = B_n + F_{n+1}z^{n+1}A_n\,. \tag{3.11}$$

我们将上面的最后一个公式改写为

$$B_n = -B_{n+1} + F_{n+1}z^{n+1}A_n\,.$$

令 $A = a/a^*(0)$ 和 $B = b/a^*(0)$，并将上面公式的两边乘以A^{-1}。于是

$$A^{-1}B_n = -A^{-1}B_{n+1} + F_{n+1}z^{n+1}A_nA^{-1}\,.$$

由于 A^{-1} 属于 $H^\infty(\mathbb{D}^*)$ 和 $\widehat{B}_n \subset (-\infty,\ n]$，上式左边具有$\sum_{j=-\infty}^{n} c_j z^j$ 的形式，右边具有 $\sum_{j=-\infty}^{n+1} d_j z^j$的形式。因此，$d_{n+1} = 0$。我们可以看出，$F_{n+1}z^{n+1}A_nA^{-1}$ 中 z^{n+1} 的系数等于 $F_{n+1}A_n(\infty)A^{-1}(\infty) = F_{n+1}$。因此，

$$\|A^{-1}B_n\|_{A_w} \le \|A^{-1}B_{n+1}\|_{A_w} + |F_{n+1}|\|A^{-1}A_n\|_{A_w} - 2w(n+1)|F_{n+1}|\,.$$

将这些不等式对 $n = 0,\ \ldots\ldots,\ N$ 相加，我们得到一个望远镜求和，

$$\|A^{-1}B_0\|_{A_w} \le \|A^{-1}B_{N+1}\|_{A_w} + \sum_{n=1}^{N+1} |F_n|(\|A^{-1}A_{n-1}\|_{A_w} - 2w(n))\,.$$

由引理 5，$A_N \to A$ 与 $B_N \to B$ 随 $N \to \infty$，因此，$A^{-1}A_N \to 1$ 与 $A^{-1}B_{N+1} \to A^{-1}B$ 在 A_w 中亦然。从而，$\sum_{n\ge 1}|F_n|w(n) < \infty$。

由 [AMT24，定理 2]，$(a^*(z^{-1})\ b(z^{-1}))$ 是 $(F_{-n})_{n\in\mathbb{Z}}$ 的非线性傅里叶变换像。因此，为了证明 $\sum_{n\le 0}|F_n|$ 亦成立，我们对 $(a(z)\ b(z^{-1}))$ 应用同样的论证。

3.4. 命题 2 的证明。 整理引理 4 的证明中的方程，我们得到

引理 6. 若 $\|b\|_{A_w} < 1$，则

$$\left\|\frac{A_n^*}{A^*}\right\|_{A_w} \le \frac{1}{1 - \|b\|_{A_w}^2}\,. \tag{3.12}$$

证明。对 $y = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 写出的方程 (3.6) 变为

$$U\begin{pmatrix}\widetilde{A}_n^*\\ \widetilde{B}_n\end{pmatrix} = L^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + L^{-1}u + L^{-1}w\,.$$

我们知道，由于 U 是上三角矩阵，因此 $\mathcal{P}_-U\mathcal{P}_+ = 0$。类似地，$L^{-1}$ 是下三角矩阵，且 $u \in \mathcal{P}_-Y_w$，因此 $\mathcal{P}_+L^{-1}u = 0$。将上述等式投影到 $\mathcal{P}_+$，得到

$$U\begin{pmatrix}\widetilde{A}_n^*\\ \widetilde{B}_n\end{pmatrix} = \mathcal{P}_+L^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \mathcal{P}_+L^{-1}\begin{pmatrix}0\\w_2\end{pmatrix}\,.$$

逐项来看，我们有

$$\frac{\widetilde{A}_n^*}{a^*} = a^*(0) - P_+(b^* v_2)\,,$$

and

$$w_2 = -P_{>n}(\frac{b}{a^*}\widetilde{A}_n^*)\,.$$

将 w_2 代入第一个方程,

$$\frac{\widetilde{A}_n^*}{\widetilde{A}^*} = 1 + P_+(b^* P_{>n}(b\frac{\widetilde{A}_n^*}{\widetilde{A}^*}))\,.$$

因此,

$$\left\| \frac{\widetilde{A}_n}{\widetilde{A}} \right\|_{A_w} \leq \frac{1}{1-\|b\|_{A_w}^2}\,. \tag{3.13}$$

回想一下， $0 < a^*(0) \leq a_n^*(0)$，我们便得到引理的结论。 □

若 $\|b\|_{A_w} < 1/\sqrt{2} - \varepsilon$，则对所有 n都有$\|A_n/A\|_{A_w} < 2 - 4\varepsilon$。因此，对所有 n都可以应用 Baxter 技巧，从而得到

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |F_n| w(n) \lesssim \frac{1}{\varepsilon}\|b/a\|_{A_w}\,.$$

4. Proof of Theorem 3

对于 $s \in \mathbb{R}$，令 J^s 为如下定义的分数阶导数算子

$$J^s f(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+|n|^2)^{s/2} \widehat{f}(n) e^{in\theta}\,,$$

对于 $f \in L^2(\mathbb{T})$。注意,

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{T})} = \|J^s f\|_{L^2(\mathbb{T})}\,.$$

我们需要用到 Kato-Ponce 的分数阶莱布尼茨法则 [KP88]。对于 $s > 0$ 和两个函数 $u, v \in H^s(\mathbb{T})$，该法则指出

$$\|J^s(uv) - uJ^s v\|_{L^2(\mathbb{T})} \lesssim \|J^s u\|_2 \|v\|_\infty + \|u'\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \|J^{s-1} v\|_{L^2(\mathbb{T})}\,. \tag{4.1}$$

由递推关系 (2.1) 和 (2.2) 可知,

$$F_n = \frac{(z^{-n} b_n)(\infty)}{a_n(\infty)}\,.$$

这有时被称为逐层剥离公式 [AMT24，第 17] 页。我们可以 n 估计

$$|F_n| \leq \frac{|z^{-n} b_n(\infty)|}{a_n(\infty)} = \frac{1}{a_n(\infty)} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} b_n(e^{i\theta}) d\theta \right|$$

$$\leq \frac{1}{a(\infty)} |\widehat{b_n}(n)| \leq \frac{1}{a(\infty)} |n|^{-s} \|b_n\|_{H^s(\mathbb{T})}\,. \tag{4.2}$$

我们需要估计 b_n 的索伯列夫范数。显然， J^s 与投影算子 P_I 可交换。因此，由 (2.11) 和 (2.12) 可得

$$J^s a_n^* = a_n^*(0) - P_+\left(J^s(\frac{b^*}{a} b_n)\right)$$

$$= a_n^*(0) - P_+\left(J^s(\frac{b^*}{a}b_n) - \frac{b^*}{a}J^s b_n\right) - P_+\left(\frac{b^*}{a}J^s b_n\right),$$

and

$$J^s b_n = P_{\leq n}\left(J^s(\frac{b}{a^*}a_n^*)\right) = P_{\leq n}\left(J^s(\frac{b}{a^*}a_n^*) - \frac{b}{a^*}J^s a_n^*\right) + P_{\leq n}\left(\frac{b}{a^*}J^s a_n^*\right).$$

用矩阵形式表示，这两个方程变为

$$(\mathrm{Id}_2 + M)\begin{pmatrix} J^s a_n^* \\ J^s b_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n^*(0) - P_+\left(J^s(\frac{b^*}{a}b_n) - \frac{b^*}{a}J^s b_n\right) \\ P_{\leq n}\left(J^s(\frac{b}{a^*}a_n^*) - \frac{b}{a^*}J^s a_n^*\right)\end{pmatrix}.$$

利用 (2.14)，我们估计

$$\left\|\begin{pmatrix} J^s a_n^* \\ J^s b_n\end{pmatrix}\right\|_{L^2(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})} \leq \left\|\begin{pmatrix} a_n^*(0) - P_+\left(J^s(\frac{b^*}{a}b_n) - \frac{b^*}{a}J^s b_n\right) \\ P_{\leq n}\left(J^s(\frac{b}{a^*}a_n^*) - \frac{b}{a^*}J^s a_n^*\right).\end{pmatrix}\right\|_{L^2(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})}$$

$$\lesssim |a_n^*(0)| + \left\|J^s(\frac{b^*}{a}b_n) - \frac{b^*}{a}J^s b_n\right\|_{L^2(\mathbb{T})} + \left\|J^s(\frac{b}{a^*}a_n^*) - \frac{b}{a^*}J^s a_n^*\right\|_{L^2(\mathbb{T})},$$

应用 (4.1)，并回想起 $|a_n|,\ |b_n| \leq 1$ 在 $\mathbb{T}$ 上，我们可以继续，

(4.3)

$$\leq |a_n^*(0)| + 2\left\|J^s(\frac{b^*}{a})\right\|_{L^2(\mathbb{T})} + \left\|\left(\frac{b^*}{a}\right)'\right\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\left(\|J^{s-1}a_n^*\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|J^{s-1}b_n\|_{L^2(\mathbb{T})}\right).$$

将上述估计迭代 $\lceil s\rceil$ 次。我们得到

$$\|J^s a_n^*\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|J^s b_n\|_{L^2(\mathbb{T})} \lesssim_s \left(|a_n^*(0) + 2\|J^s(b^*/a)\|_{L^2(\mathbb{T})}\right)\sum_{j=0}^{\lceil s\rceil - 1}\|(b^*/a)'\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^j$$

$$+\|(b^*/a)'\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^{\lceil s\rceil}\left(\|J^{s-\lceil s\rceil}a_n^*\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|J^{s-\lceil s\rceil}b_n\|_{L^2(\mathbb{T})}\right).$$

注意，

$$\|J^{s-\lceil s\rceil}a_n^*\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \|a_n^*\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \|a_n^*\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq 1,$$

类似地 $\|J^{s-\lceil s\rceil}b_n\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq 1$。因此，我们得出

$$\|J^s a_n^*\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|J^s b_n\|_{L^2(\mathbb{T})} \lesssim_s (1 + \|J^s(b^*/a)\|_{L^2(\mathbb{T})})\max(1, \|b^*/a\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^{\lceil s\rceil}).$$

这就完成了对 $s > 1$ 的估计。对于 $s = 1$，在 (4.2) 中，我们可以用 b_n 的齐次版本替换其索伯列夫范数。也就是说，我们可以写成

$$|F_n| \leq \frac{1}{|n|a(\infty)}\|b_n'\|_{L^2(\mathbb{T})}.$$

于是，

$$(a_n^*)' = -P_+\left((\frac{b^*}{a}b_n)'\right) = -P_+\left((\frac{b^*}{a})'b_n\right) - P_+\left(\frac{b^*}{a^*}b_n'\right),$$

$$b_n' = P_{\leq n}\left((\frac{b}{a^*}a_n^*)'\right) = P_{\leq n}\left((\frac{b}{a^*})'a_n^*\right) + P_{\leq n}\left(\frac{b}{a^*}(a_n^*)'\right).$$

因此，

$$(\mathrm{Id}_2 + M)\begin{pmatrix}(a_n^*)' \\ b_n'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-P_+((\frac{b^*}{a})'b_n) \\ P_{\leq n}((\frac{b}{a^*})'a_n^*)\end{pmatrix}.$$

再次利用 (2.14) 以及 a_n 和 b_n 均有界于 1，估计

$$\left\| \begin{pmatrix} (a_n^*)' \\ b_n' \end{pmatrix} \right\|^2 \leq 2 \left\| \left(\frac{b}{a^*} \right)' \right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 . \tag{4.4}$$

这就证明了 (1.8)。

References

[ALM+26] Michel Alexis、Lin Lin、Gevorg Mnatsakanyan、Christoph Thiele 和 Jiasu Wang, *Infinite quantum signal processing for arbitrary Szegő functions*, 《纯粹与应用数学通讯》**79** (2026)，第 1 期，123–174。[AMT24] M. Alexis、G. Mnatsakanyan 和 C. Thiele, *Quantum signal processing and nonlinear Fourier analysis* **37** 2024 655 694 , 《马德里康普顿斯数学杂志》（），–。[AMT25] Michel Alexis、Gevorg Mnatsakanyan 和 Christoph Thiele, *One sided orthogonal polynomials and a pointwise convergence result for SU 2 -valued nonlinear Fourier* ( ) , , arXiv: 。[Bax61] Glen Baxter, *circle* **99** 1961 3, 471 487 , 《美国数学会会刊》（），第 – 期。[DLNW24] Yulong Dong、Lin Lin、Hongkang Ni 和 Jiasu Wang, *Infinite quantum signal processing* **8** 2024 1558 , 《量子》（）。[Gol93] Leonid B. Golinskii, *Schur functions Schur parameters and orthogonal polynomials* , , *on the unit circle* **12** 1993 3, 457 469 《应用分析杂志》（），第 – 期。[KP88] Tosio Kato 和 Gustavo Ponce, *Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations* **41** 1988 891 , 《纯粹与应用数学通讯》（），– 907。[LC17] Guang Hao Low 和 Isaac L Chuang, *Optimal Hamiltonian simulation by quantum signal processing* **118** 2017 1, 010501 , 《物理评论快报》（），第 期。[Rud73] W. Rudin, *Functional analysis*，高等数学丛书，麦格劳-希尔，1973。[Sim05] Barry Simon, *Orthogonal polynomials on the unit circle*，OKS 印刷社，2005。[Tsa05] Ya-Ju Tsai, *SU*(2) *non-linear Fourier transform*，博士论文，加利福尼亚大学洛杉矶分校，2005。[TT12] Terence Tao 和 Christoph Thiele, *Nonlinear Fourier analysis*，arXiv 电子预印本（2012），arXiv:1201.5129。

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Armenia, Marshal Baghramyan Ave. 24/5, Yerevan 0019, Armenia*Email address*: mnatsakanyan g@yahoo.com